علی نظری

۹۶۳۱۰۷۵

پاسخ تمرینات فصل ۵ و ۷

گسسته گریمالدی

تمرینات ۵/۱

-۷

الف)

فرض کنید a عضو A و b عضو B باشد بر طبق رفت حکم و فرض داریم (a,b) عضو C*D است پس a عضو C وb عضو B است

چون a در ابتدا عضو A و b در ابتدا عضو B بوده و سپس a عضو C و b عضو D تیجه شده پس حکم برقرار است.

برای برعکس نیز (x,y) عضو A*B را درنظر گرفته نتیجتا از $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$ نتیجه میگیریم (x,y) عضو C*D هم هست درنتیجه A*B زیرمجموعه C*D است.

ب)

اگر C یا D تهی باشند با توجه به اگر و فقط اگر حکم برقرار است ولی اگر یکی از A یا B تهی باشد مجموعه دیگر الزاما زیرمجموعه مجموعه مولفه ها نمی باشد مثلا اگ A تهی باشد الزاما B زیر مجموعه D نیست.

-۱۵

الف)

$(0,2) \in R$

$if\ (a,b) \in R\ then\ (a+1, b+5) \in R$

ب)

$if\ (0,2) \in R\ then\ (1,7) \in R$

$if\ (1,7) \in R\ then\ (2,12) \in R$

$if\ (2,12) \in R\ then\ (3,17) \in R$

$if\ (3,17) \in R\ then\ (4,22) \in R$

تمرینات ۵/۲

۲-خیر چون $x=\sqrt{2}$ تعریف نشده است ولی برای حالت دوم صحیح است.

۳-

الف)

$\{(1,x),(2,y),(3,z),(4,x)\}$

$\{(1,y),(2,y),(3,z),(4,z)\}$

$\{(1,z),(2x,),(3,y),(4,y)\}$

$\{(1,y),(2,z),(3,x),(4,z)\}$

$\{(1,z),(2,x),(3,x),(4,x)\}$

ب)3^4

پ)۰ چون بی شک مولفه دوم تکراری داریم

ت)4^3

ث)4*3*2=24

ج)3^3

چ)3^2

ح)3^2

-۱۴

الف)

$a_2 = 2\ , a_3 = 2\ , a_4 = 4\ , a_5 = 4\ , a_6 = 4\ , a_7 = 4\ , a_8 = 8$

ب)

به فرم استقرا اثبات می کنیم :

$S_1 : 1 \leq 1$

$S_k : a_k \leq k\ ;\ k \in Z$

$S_{k+1} : a_{k+1} = 2a_{[k+1/2]} \leq 2[\frac{k+1}{2}]$

اگر فرد باشد به $a_{k+1} \leq 2 * \frac{k}{2} = k \leq k+1$ میرسیم و اگر *k+1* زوج باشد به خود حکم می رسیم پس صحیح است.

-۱۷

4^2 چون باید ۱ و ۴ وارد دامنه شوند.

-۲۲ $g(a_{ij}) = m(j-1) + i$

-۲۵

الف)

$$A(1,3) = A\big(0, A(1,2)\big) = A(1,2) + 1 = A\big(0, A(1,1)\big) + 1 = A(1,1) + 2$$
$$= A\big(0, A(1,0)\big) + 2 = A(1,0) + 3 = A(0,1) + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$$

به همین ترتیب برای A(2,3) بدست می آید : ۹

ب)

برای این کار از اثبات استقرایی کمک می گیریم :

$S_1 : A(1,0) = A(0,1) = 0 + 2$

$S_k : A(1,k) = k + 2 \,; k \in N$

$S_{k+1} : A(1,k+1) = A\big(0, A(1,k)\big) = A(1,k) + 1 = (k+2) + 1 = (k+1) + 2 \;\; true$

پ)

$S_1 : A(2,0) = A(1,1) = A\big(0, A(1,0)\big) = A(1,0) + 1 = 2 + 1 = 3 = 3 + 2 * 0$

$S_k : A(2,k) = 3 + 2k \,; k \in N$

$S_{k+1} : A(2,k+1) = A\big(1, A(2,k)\big) = A(2,k) + 2 = 3 + 2k + 2 = 3 + 2(k+1) \;\; true$

از ب در حل استفاده کردیم.

ت)

$S_1 : A(3,0) = A(2,1) = 3 + 2 * 1 = 5 = 2^{0+3} - 3$

$S_k : A(3,k) = 2^{k+3} - 3 \,; k \in N$

$S_{k+1} : A(3,k+1) = A\big(2, A(3,k)\big) = 3 + 2A(3,k) = 3 + 2^{k+4} - 6 = 2^{(k+1)+3} - 3 \;\; true$

تمرینات ۵/۳

-۶

الف)

با توجه به محاسبات برقرار است.

-۷

الف)

-۱$2!\,S(7,2)$

-۲$\binom{5}{2} * 2! * S(7,2)$

-۳$3!\,S(7,3)$

-۴$\binom{5}{3} * 3! * S(7,3)$

-۵$4!\,S(7,4)$

-۶$\binom{5}{4} * 4! * S(7,4)$

ب)

$\binom{n}{k} * k! * S(m,k)$

---

۱۰)

الف-$4! * S(7,4)$

ب-$4!\,S(6,4) + 3!\,S(6,3)$

با توجه به تعداد گوی ها در ظرف دوم حالت بندی کردیم

پ-$S(7,4) + S(7,3) + S(7,2) + S(7,1)$

تمرینات ۵/۴

-۲

الف)تعویض پذیر نیست چون فقط برای a=b چنین است و شرکت پذیر نیست چون :

$$h(h(a,b),c) = \frac{a}{bc} \neq h\big(a, h(b,c)\big) = \frac{ac}{b}$$

ب)خیر چنین عضوی ندارد.

-۳

الف)تعویض پذیر است و برای شرکت پذیری :

$$f(f(x,y),z) = f(x,y) + z - f(x,y)z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$$

$$f\big(x, f(y,z)\big) = x + f(y,z) - f(y,z)x = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$$

True

ب)تعویض پذیر است و همینطور شرکت پذیر چون در هر حالت ماکسیمم را بدست می دهد.

پ)تعویض پذیر نیست و برای شرک پذیری داریم :

$$f(f(x,y),z) = (xy)^z \neq f\big(x, f(y,z)\big) = x^{y^z}$$

false

ت)تعویض پذیر است و برای شرکت پذیری داریم :

$$f(f(x,y),z) = f\big(x, f(y,z)\big) = x + y + z - 6$$

True

۹-

الف)۳۸*۳۲

ب)بله $p^{31}q^{37}$

۱۲-

الف)

در مورد ۱و۲ به عضو Z بودن اعضا دقت داریم:

۱-بله

۲-بله

۳-بله عدد ۰

ب)

با توجه به عضو R بودن اعضا داریم :

۱-بله

۲-خیر چون به عبارت $[[s]+[t]]$ و $[[r]+[s]]$ می رسیم که با توجه به اینکه می توانند عضو Z نباشند همواره برقرار نیست پس شرکت پذیر نیست.

۳-بله عدد ۰

۱۳-بله چون هر دو یک عبارت بدست می دهند.

تمرینات ۵/۶

-۲

الف)

$fog = 3x - 1$

$goh = \begin{cases} 0 & x \text{ is even} \\ 3 & x \text{ is odd} \end{cases}$

$hog = \begin{cases} 0 & x \text{ is even} \\ 1 & x \text{ is odd} \end{cases}$

$fo(goh) = \begin{cases} -1 & x \text{ is even} \\ 2 & x \text{ is odd} \end{cases}$

$(fog)oh = \begin{cases} -1 & x \text{ is even} \\ 2 & x \text{ is odd} \end{cases}$

ب)

$f^2 = 2x - 1$

$f^3 = 3x - 1$

$g^2 = 9x$

$g^3 = 27x$

$h^2 = h^3 = h^{500} = h = \begin{cases} 0 & x \text{ is even} \\ 1 & x \text{ is odd} \end{cases}$

-۳

$g^2(A) = g(T \cap (S \cup A)) = T \cap (S \cup [T \cap (S \cup A)]) = T \cap [(S \cup T) \cap (S \cup (S \cup A))]$

$= T \cap [(S \cup T) \cap (S \cup A)] = [T \cap (S \cup T)] \cap (S \cup A) = T \cap (S \cup A) = g(A)$

-۱۱

الف)

$$2x + 5 = lny \ \ \rightarrow x = \frac{lny-5}{2} \ \ \rightarrow f^{-1} = \frac{lnx-5}{2}$$

ب)

$$f\left(\frac{1}{2}(lnx-5)\right) = e^{lnx} = x$$

$$f^{-1}(e^{2x+5}) = \frac{2x+5-x}{2} = x$$

-۱۹

الف)$Z^{+} - \{1\}$

ب)به علت نداشتن ۱ خیر

پ)بله

ت)Z^{+}

ث)بله

ج)$g(1) = 1 = g(2)$ پس خیر

چ)

$$gof = \max\{1, x\} = x \ \ ; because\ x \geq 1$$

ح)

به ترتیب از چپ به راست :

$$fog = 2,3,4,7,12,25$$

خ)

خیر چون این دو وارون یکدیگر نمی باشند.

۲۰-

الف)خیر

ب)بله تمام توابع پوشا می باشند.

پ)چون یک به یک نمی باشند پس وارون پذیر نیز نمی باشند.

ت)

برای f ها پاسخ تمامی جفت هایی می باشند که جمع آن ها برابر x در داخل f^{-1} می باشند.

برای g ها نیز تمام جفت هایی که ضرب آن ها چنین x ای تولید کند جواب می باشند.

تمرینات ۵/۷

۱-

الف) $O(n)$

ب) $O(1)$

پ) $O(n^3)$

ت) $O(n^2)$

ث) $O(n^3)$

ج) $O(n^2)$

چ) $O(n^2)$

تمرینات ۵/۸

-۱

الف)$O(n^2)$

ب)$O(n^3)$

پ)$O(n^2)$

ت)$O(\log_2 n)$

ث)$O(n \log_2 n)$

-۲

الف)$O(n)$

ب)یکی می باشند.

-۵

الف)۵ عمل جمع و ۲۰ عمل ضرب

ب)در حالت کل n جمع و 2+3+...+(n+1)=$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ عمل ضرب

تمرینات تکمیلی

-۲

الف)درست

ب)غلط

پ)غلط

ت)درست

ث)غلط

ج)غلط

چ)درست

$A=\{1,2\} \qquad B=\{1,2,3\} \quad C=\{1,2,3,4\} \quad f=\{(1,1),(2,2)\}$

$g=\{(1,1),(2,2),(3,3)\} \qquad h=\{(1,1),(2,2),(3,4) \qquad\qquad g\neq f$

-۴

$2^{|A|*|B|}=262144. \qquad |A*B|=18. \qquad |A|=3,|B|=6\ or\ |A|=9,|B|=2$

-۱۱

الف)$\frac{7*6*5*4*3}{7^5}$

-۱۷

طبق رابطه $S(m,n)$ داریم:

$$S(n,2)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2}((-1)^k\binom{2}{2-k})(2-k)^n=\frac{1}{2}(2^n-2)=2^{n-1}-1$$

-۲۵

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow g\big(f(x_1)\big)<g\big(f(x_2)\big)\Rightarrow gof(x_1)<gof(x_2)$$

-۲۶ با توجه به قوانین مجموعه ها و موارد عنوان شده در منطق تمام موارد گفته شده صحیح و برقرارند.

-۳۶

$$f(n)=n$$

تمرینات ۷/۱

-۳

الف)

$$f_1 = n + 1\,, f_2 = 5n\,, f_3 = 4n + \frac{1}{n}$$

ب)

$$g_1 = 3\,, g_2 = \frac{1}{n}\,, g_3 = \sin(n)$$

-۵

الف)بازتابی-پاد متقارن-تعدی

ب)تعدی

پ)بازتابی-متقارن-تعدی

ت)متقارن

ث)(زوج): بازتابی-متقارن- تعدی و (فرد): تعدی

ج)(زوج): بازتابی- متقارن- تعدی و (فرد): تعدی

چ) متقارن

ح) بازتابی- متقارن

خ) بازتابی- تعدی

د) بازتابی- متقارن- تعدی

-۹

الف) درست

ب) نادرست. $A = \{1,2\}, \quad R = \{(1,2),(2,1)\}$

پ) فقط بازتابی است و متقارن نیست. $A = \{1,2\}, \;\; R_1 = \{(1,1)\}, \quad R_2 = \{(1,2),(2,1)\}$

ت)پاد متقارن و تعدی نیست. $A = \{1,2\}, \quad R_1 = \{(1,2)\}, \quad R_2 = \{(1,2),(2,1)\}$

ث) درست

-۱۴

$\mathrm{n} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{(n^2+2n)}{2}$

Relation numbers = $2^{\frac{(n^2+2n)}{2}}$

---

r-n-۱۵ تعداد اعضایی را میشمارد که اگر(a,b) باشند آنگاه $a \neq b$. چون R متقارن است پس این عدد زوج است.

-۱۶

الف) $aRb \Leftrightarrow a < b$

ب) فرض کنیم رابطه متقارن و تعدی باشد.$(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ چون تعدی است پس$(a,a) \in R$ و $(b,b) \in R$. یعنی با این دو شرط رابطه بازتابی شد نه غیر بازتابی

پ) برای غیر بازتابی باید اعضایی مثل (a,a) را کنار بگذاریم. پس تعداد کل برابر 2^{n^2-2}:

رابطه های نه بازتابی و نه غیر بازتابی :از اصل شمول و عدم شمول داریم : $2^{n^2} - 2^{n^2-n}$

تمرینات ۷/۲

-۱

$SoR = \{(1,3)\}, \qquad RoS = \{(1,2),(1,4),(2,4)\}$

$R^2 = \{(1,4),(2,4),(4,4)\}$

$S^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\} \qquad S^3 = \{(1,1),(1,3),(1,2),(1,4)\}$

-۲

$(a,a) \in R, \quad (a,a) \in R, \quad \Leftrightarrow (a,a) \in RoR$

-۶

$T = \{(1,1),(1,4)\} \qquad S = \{(1,1),(1,4),(3,3)\}$

-۸ 2^6 چون ۱ ها می توانند باشند یا نباشند.

-۹

اگر درایه a_{ij} ماتریس $M(R_1oR_2)$ یک باشد آنگاه وجود دارد b_k به طوری که $(b_k,c_j) \in R_2 \quad , \quad (a_i,b_k) \in R_1$ پس درایه a_{ij} در $M(R_1)$ و $M(R_2)$ هم برابر یک است.

اگر درایه a_{ij} ماتریس $M(R_1oR_2)$ صفر باشد آنگاه وجود دارد b_k به طوری که $(b_k,c_j) \notin R_2$ یا $(a_i,b_k) \notin R_1$. پس حداقل یکی از درایه های $M(R_1)$ یا $M(R_2)$ صفر اند. پس ضرب اینجا هم برقرار است.

۱۴-

الف) درست

ب)درست

پ)درست

ت)نادرست(یک دور سو دار)

۱۷-بایستی در آن ستون از ماتریس فقط ۰ باشد یعنی چیزی به آن وصل نشده باشد.

تمرینات ۷/۳

-۶

1	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

-۷

الف)؟

ب) $4 > 2 > 1 > 3$ یا $4 > 1 > 2 > 3$

پ)۲ یال دیگر نیاز است.

-۸

هر دو مجموعه R و R^c عناصر مانند (a, a) را دارند

۱۰-اگر x,y هر دو کوچکترین باشند با پادمتقارن داریم :

$$xRy \ , yRx \ \rightarrow x = y$$

پس این عدد انحصاری می باشد.

۱۳-بله صحیح است.

تمرینات ۷/۴

۴-

الف) $\{3\} = [3]$ و $\{1,2\} = [2]$ و $\{1,2\} = [1]$

ب) $\{6\}$ و $\{4,5\}$ و $\{3\}$ و $\{1,2\}$

۷-

الف) $x_1 + y_1 = x_1 + y_1 \Leftrightarrow (x_1, y_1)R(x_1, y_1)$ بازتابی هست.

$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Leftrightarrow x_2 + y_2 = x_1 + y_1 \Leftrightarrow$
$(x_2, y_2)R(x_1, y_1)$ تقارنی است.

$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

$(x_2, y_2)R(x_3, y_3) \Leftrightarrow x_2 + y_2 = x_3 + y_3$

$x_1 + y_1 = x_3 + y_3 \Leftrightarrow (x_1, y_1)R(x_3, y_3)$

ب) $[(1,1)] = \{(1,1)\}$

$[(2,4)] = \{(2,4), (4,2), (3,3), (1,5), (5,1)\}$

$[(1,3)] = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$

پ) $\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ و $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ و $\{(2,1), (1,2)\}$ و $\{(1,1)\}$

.... $\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

-۱۱

الف) به وضوح رابطه بازتابی و متقارن است.

$$B \cap X = B \cap Y = B \cap Z \Leftrightarrow XRZ$$

ب) $\{\emptyset,\{3\}\} \cup \{\{1\},\{1,3\}\} \cup \{\{2\},\{2,3\}\} \cup \{1,2\},\{1,2,3\}\}$

پ) $[X] = \{\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,4,5\}\}$

ت)2^3 برای هر زیرمجموعه B یک هم ارزی وجود دارد.

-۱۲

الف)بازتابی و متقارن است.

$$aRb \Leftrightarrow lcm(a,16) = lcm(b,16)$$

$$bRc \Leftrightarrow lcm(b,16) = lcm(c,16)$$

$$\Leftrightarrow lcm(a,16) = lcm(c,16) \Leftrightarrow aRc$$

ب)$[2] = \{2,4,8,16\}$ $\quad [1] = \{1\}$

-۱۴

الف) $2^{10} = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$ هر کدام از اعضای غیر از قطر اصلی ماتریس میتوانند به صورت جفت بیایند.

ب) $S(5,1) + S(5,2) + \cdots + S(5,5)$

پ) کل منهایی آنهایی که هم ارزی اند $2^{10} - [S(5,1) + \cdots + S(5,5)]$

ت) $S(5,2) = 15$

ث) $S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4)$

ج)$S(3,1) + S(3,2) + S(3,3)$

چ)$S(3,1) + S(3,2) + S(3,3)$

ح)$[(S(3,1) + \cdots + S(3,3)] - [S(2,1) + S(2,2)]$

تمرینات تکمیلی

۳-فرض کنیم $(a,c) \in R_2oR_1$. پس وجود دارد عنصر b که $(a,b) \in R_2$ و $(b,c) \in R_1$.
رابطه ها متقارن اند پس: $(b,a) \in R_2$ و $(c,b) \in R_1$. پس $(c,a) \in R_1oR_2 \subset R_2oR_1$.
مانند بالا از $(c,a) \in R_2oR_1$ داریم: وجود دارد عنصر d که $(c,d) \in R_2$ و $(d,a) \in R_1$
چون رابطه ها متقارن اند پس $(d,c) \in R_2$ و $(a,d) \in R_1$پس $(a,c) \in R_1oR_2$. پس
$R_2oR_1 \subset R_1oR_2$ پس ثابت میشود.