علی نظری

۹۶۳۱۰۷۵

پاسخ تمرینات فصل ۴

استقرای ریاضی

بخش 4.1

۲)

الف)

$S(1): \sum_{i=1}^{1} i(2^i) = 1 * 2 = 2 = 2 + (1-1)2^2$
$S(k): \sum_{i=1}^{k} i(2^i) = 2 + (k-1)2^{k+1}$
$S(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i\left(2^i\right) = \sum_{i=1}^{k} i(2^i) + (k+1)2^{k+1} = 2 + (k-1)2^{k+1} + (k+1)2^{k+1} = 2 + k2^{k+2}$

ب)

$S(1): \sum_{i=1}^{1} 2(3^{i-1}) = 2 * 1 = 2 = 3^1 - 1$
$S(k): \sum_{i=1}^{k} 2(3^{i-1}) = 3^k - 1$
$S(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} 2(3^{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} 2(3^{i-1}) + (2 * 3^k) = 3^k + 2 * 3^k - 1 = 3^{k+1} - 1$

پ)

$S(1): \sum_{i=1}^{1}(i)(i!) = 1 * 1! = 1 = (1+1)! - 1$
$S(k): \sum_{i=1}^{k}(i)(i!) = (k+1)! - 1$
$S(k+1): \sum_{i=1}^{k+1}(i)(i!) = \sum_{i=1}^{k}(i)(i!) + (k+1) * (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) * (k+1)! = (k+2) * (k+1)! - 1 = (k+2)! - 1$

۱۰)

$n > 3 \rightarrow n \geq 4$
$S(4) : 4! = 24 > 2^4 = 16$
$S(k) : k! > 2^k \;\; ; \;\; k \geq 4$
$S(k+1) : (k+1)! > 2^{k+1}$
فرض : $(k+1)! > 2^k * (k+1)$
$(k+1) > 2 \;\; ; \;\; k \geq 4$

درنتیجه :

$S(k+1) : (k+1)! > 2^{k+1}$

---

۱۳)

الف)

$S(n) :\; H_{2^n} \geq 1 + \left(\frac{n}{2}\right) \;;\; n \geq 1$
$S(1) :\; H_2 = \left(\frac{3}{2}\right) \geq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) = (3/2)$
$S(k) :\; H_{2^k} \geq 1 + (k/2)$
$S(k+1) :\; H_{2^{k+1}} \geq 1 + ((k+1)/2)$
فرض : $H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq 1 + \left(\frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq$
$1 + \left(\frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2^k+2^k} + \frac{1}{2^k+2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq 1 + \left(\frac{k}{2}\right) + 2^k \frac{1}{2^{k+1}} \geq 1 + ((k+1)/2)$

در نتیجه :

$S(k+1) :\; H_{2^{k+1}} \geq 1 + ((k+1)/2)$

ب)

$S(n) :\; \sum_{j=1}^{n} jH_j = \left[\frac{(n+1)(n)}{2}\right] H_{n+1} - \left[\frac{(n+1)(n)}{4}\right] \;;\; n \geq 1$
$S(1) :\; \sum_{j=1}^{1} jH_j = H_1 = 1 = \left[\frac{(1+1)(1)}{2}\right] H_{1+1} - \left[\frac{(1+1)(1)}{4}\right] = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)$
$S(k) :\; \sum_{j=1}^{k} kH_k = \left[\frac{(k+1)(k)}{2}\right] H_{k+1} - \left[\frac{(k+1)(k)}{4}\right]$
$S(k+1) :\; \sum_{j=1}^{k+1} jH_j = \sum_{j=1}^{k} jH_j + (k+1)H_{k+1} = \left[\frac{(k+1)(k)}{2}\right] H_{k+1} -$
$\left[\frac{(k+1)(k)}{4}\right] + (k+1)H_{k+1} =$
$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right] H_{k+1} - \left[\frac{(k+1)(k)}{4}\right] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right] \left[H_{k+2} - \frac{1}{k+2}\right] - \left[\frac{(k+1)(k)}{4}\right] =$
$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right] H_{k+2} - \left[\frac{k+1}{2} + \frac{(k)(k+1)}{4}\right] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right] H_{k+2} - \frac{(k+1)(k+2)}{4}$

(۱۴

$S(n):\ \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}=H_{2n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)H_n\ ;\ n>0$
$S(1):\ \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{2i+1}=1+\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}=H_{2+1}-\left(\frac{1}{2}\right)H_1=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)=$
$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$
$S(k):\ \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2i+1}=H_{2k+1}-\left(\frac{1}{2}\right)H_k\ ;\ k>0$
$S(k+1):\ \sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{2i+1}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2i+1}+\ \frac{1}{2k+3}=H_{2k+1}-\left(\frac{1}{2}\right)H_k+\ \frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+2}-$
$\frac{1}{2k+2}=$
$H_{2k+3}-\left(\frac{1}{2}\right)H_k-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)=H_{2k+3}-\left(\frac{1}{2}\right)\left(H_k+\frac{1}{k+1}\right)=H_{2k+3}-\left(\frac{1}{2}\right)H_{k+1}$

(۱۶

$S(n):(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n+1)^2=n^3+(n+1)^3\ ;\ n\geq 0$
$S(0):0+1=0+1^3=1$
$S(k):\ (k^2+1)+(k^2+2)+\cdots+(k+1)^2=k^3+(k+1)^3\ ;\ k\geq 0$
$S(k+1):[(k+1)^2+1]+[(k+1)^2+2]+\cdots+(k+2)^2=$
$\big[[(k^2+1)+(2k+1)]+[(k^2+2)+(2k+1)]+\cdots[(k^2+2k+1)+$
$(2k+1)]\big]+(k^2+4k+3)+(k^2+4k+3)+(k^2+4k+4)=$
$k^3+(k+1)^3+(2k+1)*(2k+1)+(k^2+4k+3)+(k^2+4k+4)=$
$k^3+(k+1)^3+4k^2+4k+1+(k^2+4k+3)+(k^2+4k+4)=$
$(k+1)^3+(k^3+6k^2+12k+8)=(k+1)^3+(k+2)^3$

۱۸)

$|S| = 2^n \;\; ; \;\; n \geq 0$

P(n) : برای مرتب کردن مجموعه بالا تعداد مقایسه ها از $n.2^n$ بیشتر نمی شود.

P(0) : برای مرتب کردن مجموعه با ۱ عضو تعداد مقایسه ها از ۰ بیشتر نمی شود.(درست)

P(k) : برای مرتب کردن مجموعه $|S| = 2^n \;\; ; \;\; n \geq 0$ تعداد مقایسه ها از $k.2^k$ بیشتر نمی شود.

$P(k+1) : |S| = 2^{k+1}$

$S = S_1 \cup S_2 \;\; ; \;\; |S_1| = 2^k \qquad |S_2| = 2^k$

از آن جا که می دانیم *P(k)* برقرار است پس می دانیم برای هر یک از این دو زیر مجموعه برای ایجاد ترتیب افزایشی تعداد مقایسه ها از $k.2^k$ بیشتر نمی شود از آن جا که می دانیم *S* حاصل اجتماع این دو است و برای مرتب کردن دو مجموعه با ترتیب افزایشی به همین صورت برای اجتماع آن ها حداکثر جمع تعداد اعضای آنها منهای یک مقایسه لازم است پس برای مجموعه *S* داریم :

$|S| = |S_1| + |S_2|$

تعداد مقایسه های لازم را ابتدا برای دو زیرمجموعه سپس برای اجتماع آن ها انجام می دهیم :

$k.2^k + k.2^k + 2^k + 2^k - 1 = k.2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = (k+1)2^{k+1} - 1$

---

۲۳)

برای حل سوال از استقرای قوی استفاده می کنیم :

$S(n):\ p_n=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\ ;\ n\geq 3$

$S(3):\ p_3=p_1+\ p_2=1000+2000=3000=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4}\right]=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)*\ 3*1*\sqrt{5}=3000$

$S(k):for\ 3\leq n\leq k\ :\ \ p_k=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]\ ;\ k\geq 3$

با توجه به اصل استقرای قوی داریم :

$S(k+1):\ p_{k+1}=p_k+p_{k-1}=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]+\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]=$

$\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]=$

$\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}(1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right))-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}(1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=$

$\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]=\left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$

۲۴)

الف)

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 2 = 3$
$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$
$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$
$a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$
$a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$

ب)

برای حس سوال از استقرای قوی استفاده می کنیم :

$S(n):\ a_n < (7.4)^n\ ;\ n \geq 1$
$S(1): a_1 = 1 \leq 7.4$
$S(k): for\ 1 \leq n \leq k\ :\ a_k < (7.4)^k$
$S(k+1):\ a_{k+1} = a_k + a_{k-1} < (7.4)^k + (7.4)^{k-1} = (7.4)^{k-1}(1 + 7.4) =$
$(7.4)^{k-1}\left(\frac{11}{4}\right) =$
$(7.4)^{k-1}\left(\frac{44}{16}\right) < (7.4)^{k-1}\left(\frac{49}{16}\right) = (7.4)^{k-1}(7.4)^2 = (7.4)^{k+1}$
$a_{k+1} < (7.4)^{k+1}$

بخش 4.2

---

۱)

الف)

$$C_n = 7n \ : \ \begin{cases} C_1 = 7 \\ C_{n+1} = C_n + 7 \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

ب)

$$C_n = 7^n \ : \ \begin{cases} C_1 = 7 \\ C_{n+1} = 7 * C_n \ \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

پ)

$$C_n = 3n + 7 \ : \ \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_{n+1} = 3 + C_n \ \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

ت)

$$C_n = 11n - 8 \ : \ \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_{n+1} = 11 + C_n \ \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

ث)

$$C_n = 7 \ : \ \begin{cases} C_1 = 7 \\ C_{n+1} = C_n \ \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

ج)

$$C_n = n^2 \ : \ \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_{n+1} = (C_n + 1)^2 \ \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

چ)

$$C_n = (n+1)(n+2) \ : \ \begin{cases} C_1 = 6 \\ C_{n+1} = C_n + 2n + 4 \ \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

ح)

$$C_1 = 3 \, , C_2 = 1 \ : \ \ C_{n+2} = C_n \ \ \ \ n \geq 3$$

---

۳)

الف)

$S(n)\ :\ p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_n)\ ;\ n \geq 2$

با توجه به قانون توزیع پذیری برای $S(2)$ این عبارت صحیح است.

اثبات با اصل اسقرای ریاضی:

$S(k)\ :\ p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_k) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_k)\ ;\ k \geq 2$

$S(k+1)\ :\ p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_k \wedge q_{k+1}) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_k) \wedge (p \vee q_{k+1})\ ;\ k \geq 2$

$p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_k \wedge q_{k+1}) \Leftrightarrow [p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_k)] \wedge (p \vee q_{k+1}) \Leftrightarrow [(p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_k)\ ] \wedge (p \vee q_{k+1}) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_k) \wedge (p \vee q_{k+1})$

ب)

$S(n)\ :\ p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \dots \vee (p \wedge q_n)\ ;\ n \geq 2$

با توجه به قانون توزیع پذیری برای $S(2)$ این عبارت صحیح است.

اثبات با اصل اسقرای ریاضی:

$S(k+1):\ p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_k \vee q_{k+1}) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \dots \vee (p \wedge q_k) \vee (p \wedge q_{k+1})\ ;\ k \geq 2$

$p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_k \vee q_{k+1}) \Leftrightarrow [p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_k)] \vee (p \wedge q_{k+1}) \Leftrightarrow [(p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_k)\ ] \wedge (p \wedge q_{k+1}) \Leftrightarrow) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \dots \vee (p \wedge q_k) \vee (p \wedge q_{k+1})$

---

۸)

الف)

به ازای n=2 این حاصل برابر $x_1 + x_2$ است و برای x_1 و x_2 و ... و x_{n+1} داریم :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}$$

پس می توان به صورت بازگشتی بیان کرد که این عبارت برابر حاصل جمع آخرین عدد حقیقی و مجموع تمام اعداد حقیقی قبل از آن است تا جایی که مجموع دو رقم اول بدست آید.

ب)

$$S(n)\ :\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_n) = x_1 + x_2 + \cdots x_r + x_{r+1} + \cdots + x_n$$

به ازای هر ۳ عدد حقیقی این قانون برقرار است پس به ازای *k≥3* و اصل استقرای قوی با فرض صحیح بودن به ازای هر *1≤r<k*

برای *k+1* اثبات می کنیم :

$1) r = k :$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + x_{r+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1}$$

$2) 1 \leq r < k :$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_k + x_{k+1}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + [(x_{r+1} + \cdots + x_k) + x_{k+1}]$$

$$[(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_k)] + x_{k+1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1} + \cdots + x_k) + x_{k+1} =$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1} + \cdots + x_k + x_{k+1}$$

(۱۰

$S(n)\ :\ |x_1+x_2+\cdots+x_n| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\ ;\ n\ge 2$

به ازای *n=2* این عبارت صحیح است حال به کمک اصل استقرای ریاضی به اثبات می پردازیم :

$S(k)\ :\ |x_1+x_2+\cdots+x_k| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|\ ;\ k\ge 2$

$S(k+1)\ :\ |x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|\ ;\ k\ge 2$

$|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}| = |(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}| \le |x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|$

$\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|$

(۱۲

$S(n)\ :\ 0\ \le\ a_n\ \le\ 1\ ;\ a_n=\frac{a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}}{n}\ ;\ n\ge 2$

با توجه به دو جمله اول به عنوان پایه نتیجه می گیریم $0 \le a_n \le 1$ حال با اصل استقرای قوی داریم :

$S(k)\ :\ 0\ \le\ a_k\ \le\ 1\ ;\ k\ge 2$

$S(k+1)\ :\ 0\ \le\ a_{k+1}\ \le\ 1\ ;\ k\ge 1$

$a_{k+1}=\frac{a_k+(k)a_{k-1}}{k+1}\ ;\ k\ge 1$

$a_k\ge 0\ \&\ a_{k-1}\ge 0\ \&\ k\ge 1\ \&\ \frac{k}{k+1}\ge\frac{1}{k+1}\ :\ a_{k+1}\ge 0$

$a_{k+1}=\frac{a_k+(k)a_{k-1}}{k+1}=\frac{1}{k+1}[a_k+ka_{k-1}]\le\frac{1}{k+1}[1+k]=1$

---

۱۴)

$S(n)\ :\ \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1\ ;\ n \geq 0$
$F_0 = 1 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 2$

به ازای *n=0* عبارت برقرار است پس به کمک اصل استقرای ریاضی به اثبات می پردازیم :

$S(k)\ :\ \sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1\ ;\ k \geq 0$
$S(k+1)\ :\ \sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$
$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = \sum_{i=0}^{k} F_i + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1 = F_{k+3} - 1$

---

۱۵)

$S(n)\ :\ \sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = {F_{2n}}^2\ ;\ n \geq 1$

عبارت بالا به ازای *n=1* برقرار است($0 * 1 + 1 * 1 = 1 = 1^2$) پس به کمک اصل استقرای ریاضی به اثبات می پردازیم :

$S(k)\ :\ \sum_{i=1}^{2k} F_i F_{i-1} = {F_{2k}}^2\ ;\ k \geq 1$
$S(k+1)\ :\ \sum_{i=1}^{2k+2} F_i F_{i-1} = {F_{2k+2}}^2$
$\sum_{i=1}^{2k+2} F_i F_{i-1} = \sum_{i=1}^{2k} F_i F_{i-1} + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1} = {F_{2k}}^2 + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1} =$
$F_{2k}(F_{2k} + F_{2k+1}) + F_{2k+2}F_{2k+1} = F_{2k}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+1} = F_{2k+2}(F_{2k+1} + F_{2k}) = {F_{2k+2}}^2$

---

۱۶)

$S(n)\ :\ \sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}F_i=-F_{2n-1}+1\ ;\ n\geq 1$

به ازای *n=1* می بینیم که $(0-1+1=0=-1+1)$ پس پایه برقرار است حال برای اثبات استقرایی داریم :

$S(k)\ :\ \sum_{i=0}^{2k}(-1)^{i+1}F_i=-F_{2k-1}+1\ ;\ k\geq 1$

$S(k+1)\ :\ \sum_{i=0}^{2k+2}(-1)^{i+1}F_i=-F_{2k+1}+1$

$\sum_{i=0}^{2k+2}(-1)^{i+1}F_i=\sum_{i=0}^{2k}(-1)^{i+1}F_i+F_{2k+1}-F_{2k+2}=-F_{2k-1}+1+F_{2k+1}-F_{2k+2}=$

$-F_{2k-1}+1-F_{2k}=-F_{2k+1}+1$

---

۱۷)

$S(n)\ :\ \sum_{i=1}^{n}\frac{F_{i-1}}{2^i}=1-\frac{F_{n+2}}{2^n}\ ;\ n\geq 1$

برای n=1 داریم که $1-\frac{2}{2}=0$ که صحیح است پس با فرض پایه و اصل استقرای ریاضی داریم :

$S(k)\ :\ \sum_{i=1}^{k}\frac{F_{i-1}}{2^i}=1-\frac{F_{k+2}}{2^k}\ ;\ k\geq 1$

$S(k+1)\ :\ \sum_{i=1}^{k+1}\frac{F_{i-1}}{2^i}=1-\frac{F_{k+3}}{2^{k+1}}$

$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{F_{i-1}}{2^i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{F_{i-1}}{2^i}+\frac{F_k}{2^{k+1}}=1-\frac{F_{k+2}}{2^k}+\frac{F_k}{2^{k+1}}=1-\frac{F_{k+2}}{2^{k+1}}-\frac{F_{k+1}}{2^{k+1}}=1-\frac{F_{k+3}}{2^{k+1}}$

---

۱۸)

$S(n)\ :\ \sum_{i=1}^{n} {L_i}^2 = L_n L_{n+1} - 2\ ;\ n \geq 1$

به ازای n=1 داریم 1 − 1*2=1 که صحیح است پس با فرض پایه و اصل استقرای ریاضی داریم :

$S(k)\ :\ \sum_{i=1}^{k} {L_i}^2 = L_k L_{k+1} - 2\ ;\ k \geq 1$

$S(k+1)\ :\ \sum_{i=1}^{k+1} {L_i}^2 = L_{k+1} L_{k+2} - 2$

$\sum_{i=1}^{k+1} {L_i}^2 = \sum_{i=1}^{k} {L_i}^2 + {L_{k+1}}^2 = L_k L_{k+1} - 2 + {L_{k+1}}^2 = L_{k+1}(L_{k+1} + L_k) - 2 = L_{k+1} L_{k+2} - 2$

---

۱۹)

$S(n)\ :\ 5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n\ ;\ n \geq 1$

به ازای n=1 داریم :

$5F_3 = 5(2) = 10 = 11 - 1 = L_5 - L_1$

پس پایه استقرا صحیح می باشد حال به کمک اصل استقرای تعمیم یافته و اینکه عبارت بالا برای ln از ۰ تا k برقرار باشد داریم :

$S(k)\ :\ 5F_{k+2} = L_{k+4} - L_k\ ;\ k \geq 1$

$S(k+1)\ :\ 5F_{k+3} = L_{k+5} - L_{k+1}$

$5F_{k+3} = 5(F_{k+1} + F_{k+2}) = [(L_{k+4} - L_k) + (L_{k+3} - L_{k-1})] = [(L_{k+4} + L_{k+3}) - (L_k + L_{k-1})]$

$= L_{k+5} - L_{k+1}$

تمرینات تکمیلی

۶)

الف)

$$s_1 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$
$$s_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6}$$
$$s_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24}$$

ب)

$$s_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{5!-1}{5!} = \frac{119}{120}$$
$$s_5 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \frac{5}{6!} = \frac{6!-1}{6!} = \frac{719}{720}$$
$$s_6 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \frac{5}{6!} + \frac{6}{7!} = \frac{7!-1}{7!} = \frac{5039}{5040}$$

پ)

$$s_n = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} \;\; ; \;\; n \geq 1$$

ت)

با توجه به الف عبارت برای n=1 برقرار است پس با استقرای ریاضی داریم :

$$S(k) \;:\; s_k = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} \;\; ; \;\; k \geq 1$$
$$S(k+1) \;:\; s_{k+1} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$
$$s_{k+1} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = s_k + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} =$$
$$\frac{(k+2)!-k-2+k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$

۱۱)

$$S(n)\ :\ 2^n < \binom{2n}{n} < 4^n\ ;\ n \geq 2$$

به ازای n=2 داریم :

$$S(2)\ :\ 2^2 = 4 < \binom{4}{2} = 6 < 4^2 = 16$$

حال با فرض برقراری عبارت برای k≥2 به اثبات استقرایی می پردازیم :

$$S(k)\ :\ 2^k < \binom{2k}{k} < 4^k\ ;\ k \geq 2$$

$$S(k+1)\ :\ 2^{k+1} < \binom{2k+2}{k+1} < 4^{k+1}$$

$$\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{2k!}{k!k!} * \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)} = \frac{2k!}{k!k!} * 2 * \frac{2k+1}{k+1}$$

$$2 = \frac{2k+2}{k+1} > \frac{2k+1}{k+1} > 1 = \frac{k+1}{k+1}\ ;\ k \geq 2$$

$$4 = 2 * \frac{2k+2}{k+1} > 2 * \frac{2k+1}{k+1} > 2 = 2 * \frac{k+1}{k+1} \qquad 2^k < \binom{2k}{k} < 4^k$$

$$2 * 2^k = 2^{k+1} < \binom{2k+2}{k+1} < 4 * 4^k = 4^{k+1}$$

---

۱۳)

الف)

$$S(n):\ \ n = 5q_1 + 17q_2\ ;\ n \geq 64 \qquad q_1\ .\ q_2 \geq 0$$

$$S(64)\ :\ 64 = 5 * 6 + 17 * 2$$
$$S(65)\ :\ 65 = 5 * 13 + 17 * 0$$
$$S(66)\ :\ 66 = 5 * 3 + 17 * 3$$
$$S(67)\ :\ 67 = 5 * 10 + 17 * 1$$
$$S(68)\ :\ 68 = 5 * 0 + 17 * 24$$

پس فرض به ازای حالت پایه برقرار است حال برای اثبات به کمک استقرای قوی داریم :

$$S(k):\ \ k = 5q_1 + 17q_2\ ;\ k \geq 64 \qquad q_1 . q_2 \geq 0$$
$$S(k+1):\ \ k+1 = 5q_3 + 17q_4\ ; \qquad q_1 . q_2 \geq 0$$

عبارت k+1 را به 5+(k-4) تبدیل می کنیم چون از استقرای قوی استفاده کردیم و به ازای 64≤n≤k عبارت صحیح است پس به این نتیجه می رسیم :

$$k - 4 = 5a + 17b \quad \rightarrow \quad k + 1 = 5(a+1) + 17b$$

ب)

$S(n)\ :\ \ n = 10q_1 + 13q_2\ \ ;\ \ n \geq 108\,, q_1, q_2 \geq 0$

$S(108) : 108 = 10 * 3 + 13 * 6$
$S(109) : 109 = 10 * 7 + 13 * 3$
$S(110) : 110 = 10 * 11 + 13 * 0$
$S(111) : 111 = 10 * 2 + 13 * 7$
$S(112) : 112 = 10 * 6 + 13 * 4$
$S(113) : 113 = 10 * 10 + 13 * 1$
$S(114) : 114 = 10 * 1 + 13 * 8$
$S(115) : 115 = 10 * 5 + 13 * 5$
$S(116) : 116 = 10 * 9 + 13 * 2$
$S(117) : 117 = 10 * 0 + 13 * 9$

عبارت k+1 را به 10+(k-9) تبدیل می کنیم چون از استقرای قوی استفاده کردیم و به ازای 108≤n≤k عبارت صحیح است پس به این نتیجه می رسیم :

$k - 9 = 10a + 13b \quad \rightarrow \quad k + 1 = 10(a + 1) + 13b$

---

۱۴)

$S(n) :\ \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1} (\frac{1}{i})\ \ ;\ \ n \geq 1$

برای حالت پایه n=1 را بررسی می کنیم سپس به اثبات استقرایی می پردازیم :

$S(1) :\ \ \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i-1} (\frac{1}{i}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$S(k) :\ \ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i} = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} (\frac{1}{i})\ \ ;\ \ k \geq 1$

$S(k+1) :\ \ \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(k+1)+i} = \sum_{i=1}^{2k+2} (-1)^{i-1} (\frac{1}{i})$

$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(k+1)+i} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k+2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} =$
$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} \left(\frac{1}{i}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} \left(\frac{1}{i}\right) + \frac{1}{2k+1} +$
$\left[\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}\right] = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} \left(\frac{1}{i}\right) + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \sum_{i=1}^{2k+2} (-1)^{i-1} \left(\frac{1}{i}\right)$

پس با توجه به اصل استقرای ریاضی این عبارت برای $n \in z$ برقرار است.