پاسخ تمرینات فصل نهم
کتاب گسسته گریمالدی

علی نظری
۹۶۳۱۰۷۵

۱- الف) ضریب X^{20} در تابع: $f(x)=\left(1+X+X^{2}+X^{3}+X^{4}+X^{5}+X^{6}+X^{7}\right)^{4}$

ب) ضریب X^{20} در تابع: $f(x)=\left(1+X+X^{2}+...+X^{20}\right)^{2}\left(1+X^{2}+X^{4}+...+X^{20}\right)^{2}$

پ) ضریب X^{30} در تابع: $f(x)=\left(X^{2}+X^{3}+X^{4}\right)\left(X^{3}+X^{4}+X^{5}+X^{6}+X^{7}\right)^{4}$

ت) ضریب X^{30} در تابع زیر:

$$f(x)=\left(1+X+X^{2}+...+X^{30}\right)^{3}\left(1+X^{2}+X^{4}+...+X^{30}\right)\left(X^{1}+X^{3}+X^{5}+...+X^{29}\right)$$

-۲

الف) $f(x)=(1+x+x^{2}+...+x^{35}+...)^{5}$

ب) $f(x)=(x+x^{2}+...+x^{35}+...)^{5}$

پ) $f(x)=(x^{2}+x^{3}+...+x^{35}+...)^{5}$

ت) $f(x)=(x^{10}+x^{11}+...+x^{35}+...)(1+x+x^{2}+...+x^{35}+...)^{4}$

ث) $f(x)=(x^{10}+x^{11}+...+x^{35}+...)^{2}(1+x+x^{2}+...+x^{35}+...)^{3}$

-٤

الف) با توجه به این که x را داشتن ۱ تومان در نظر می‌گیریم، واحد های ۱ تومانی و پنج تومانی داریم پس برای داشتن n تومان باید از بین واحد های ۵ تومانی و یک تومانی انتخاب کنیم که تابع گفته شده حاصل می‌شود که عامل اول برای انتخاب سکه های ۱ تومانی و عامل دوم برای سکه خای ۵ تومانی است.

ب) $f(x)=\left(1+x+x^{2}+x^{3}+...\right)\left(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}+...\right)\left(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+...\right)$

۵-تابع مولد برای معادله گفته شده عبارت است از:

$$f(x)=\left(x^{-3}+x^{-2}+\ldots+1+x+x^{2}+\ldots\right)^{2}\left(x^{-5}+x^{-4}+\ldots+1+x+x^{2}+\ldots+x^{5}\right)\left(1+x+x^{2}+\ldots\right)$$

ضریب عبارت x^{20} در تابع فوق جواب معادله است. البته می‌توان با تغییر متغیر تابعی را طوری ساخت که توان های منفی در تابع دیده نشود.

٦-

الف) $f(x)=(1+ax)(1+bx)(1+cx)\ldots(1+tx)$

ب) پاسخ این قسمت برابر است با:

$$f(x)=\left(1+ax+a^{2}x^{2}+a^{3}x^{3}\right)\left(1+bx+b^{2}x^{2}+b^{3}x^{3}\right)\left(1+cx+c^{2}x^{2}+c^{3}x^{3}\right)\ldots\left(1+tx+t^{2}x^{2}+t^{3}x^{3}\right)$$

۱-

الف)

$$(1+x)^8 = \binom{8}{0} + \binom{8}{1}x + \cdots + \binom{8}{8}x^8$$

ب)

با مشتق گیری از عبارت بالا داریم :

$$8(1+x)^7 = \binom{8}{1} + 2\binom{8}{2}x + \cdots + 8\binom{8}{8}x^7$$

پس تابع مولد برابر است با :

$$8(1+x)^7$$

پ)

عبارت را ساده می کنیم تا به تابع مولد برسیم :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = (1 + x^2 + x^4 + \cdots) - (x + x^3 + x^5 + \cdots) = (1 - x)(1 + x^2 + \cdots)$$

$$= (1-x)\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

ت)

به مانند قبل :

$$x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = x^3(1 + x + x^2 + \cdots) = x^3\frac{1}{1-x} = x^3(1-x)^{-1}$$

ث)

به مانند قبل و عبارت محاسبه شده در پ داریم :

$$6x^3 - 6x^4 + 6x^5 + \cdots = 6x^3(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) = 6x^3(1+x)^{-1}$$

ج)

به مانند قبل :

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} = (1 - x^2)^{-1}$$

چ)

به مانند قبل :

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots = \frac{1}{1-2x} = (1 - 2x)^{-1}$$

ح)

به مانند قبل :

$$x^2 + ax^3 + a^2x^4 + \cdots = \frac{x^2}{1-ax} = x^2(1 - ax)^{-1}$$

-۲

الف)

$$f(x) = (2x - 3)^3 = -27 + 54x - 36x^2 + 8x^3$$

$$\{a_n\} = -27,54,-36,8,0,0,0,\ldots$$

ب)

$$f(x) = \frac{x^4}{1-x} = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots$$

$$\{a_n\} = 0,0,0,0,1,1,1,1,1,\ldots$$

پ)

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x^3(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \cdots$$

$$\{a_n\} = 0,0,0,1,0,1,0,1,0,\ldots$$

ت)

$f(x) = \frac{1}{1+3x} = \frac{1-3x}{1-9x^2} = (1-3x)(1+9x^2+81x^4+\cdots) =$

$1-3x+9x^2-27x^3+81x^4-\cdots$

$\{a_n\} = 1, -3, 9, -27, 81, \ldots$

ث)

$f(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x/3}\right) = \frac{1}{3}\left(1+x/3+x^2/9+x^3/27+\cdots\right) =$

$1/3 + 1/9\,x + 1/27\,x^2 + 1/81\,x^3 + \cdots$

$\{a_n\} = 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, \cdots$

ج)

$f(x) = \frac{1}{1-x} + 3x^7 - 11 = (1+x+x^2+\cdots) + 3x^7 - 11 =$

$-10 + x + x^2 + x^3 + \cdots + 4x^7 + \cdots$

$\{a_n\} = -10,1,1,1,1,1,1,4,1,1,1,1, \ldots$

۳-

الف)

$g(x) - 3x^3 = f(x) - a_3x^3$

$g(x) = f(x) + (3-a_3)x^3$

ب)

$g(x) - 3x^3 - 7x^7 = f(x) - a_3x^3 - a_7x^7$

$g(x) = f(x) + (3-a_3)x^3 + (7-a_7)x^7$

پ)

$g(x) - x - 3x^3 = 2f(x) - 2a_1x - 2a_3x^3$

$g(x) = 2f(x) + (1 - 2a_1)x + (3 - 2a_3)x^3$

ت)

$g(x) - x - 3x^3 - 7x^7 =$

$2f(x) + 5(1 + x + x^2 + \cdots) - (2a_1 + 5)x - (2a_3 + 5)x^3 - (2a_7 + 5)x^7$

$g(x) = 2f(x) + 5(1 - x)^{-1} + (1 - 2a_1 - 5)x + (3 - 2a_3 - 5)x^3 + (7 - 2a_7 - 5)x^7$

9-

الف)

۰ چون به توان ۱۵ نمی توان رسید.

ب)

$(x^3 - 5x)(1 - x)^{-3}$

با توجه به توان ها برای ضریب x^{15} داریم :

$\binom{-3}{12}(-1)^{12} - 5\binom{-3}{14} = \binom{14}{12} - 5\binom{16}{14}$

پ)

$(1 + x)^4(1 - x)^{-4}$

برای یافتن ضریب x^{15} کافیست با توجه به ضریب و توان x با انتخاب توان x در عبارت دوم توان ۱۵ ایجاد کنیم پس برای ضریب داریم :

$\binom{4}{0}\binom{-4}{15}(-1)^{15} + \binom{4}{1}\binom{-4}{14}(-1)^{14} + \binom{4}{2}\binom{-4}{13}(-1)^{13} + \binom{4}{3}\binom{-4}{12}(-1)^{12} + \binom{4}{4}\binom{-4}{11}(-1)^{11} =$

$\binom{4}{0}\binom{18}{15} + \binom{4}{1}\binom{17}{14} + \binom{4}{2}\binom{16}{13} + \binom{4}{3}\binom{15}{12} + \binom{4}{4}\binom{14}{11}$

برای مثبت شدن تمام ضرایب کافیست به فرمول تبدیل انتخاب از یک عدد منفی برای تبدیل به انتخاب از عدد مثبت دقت کنیم.

-۱۰

الف)

تابع مولد را برای بی شمار ربات تشکیل داده و با شرط حداقل سه ربات در هر خط ضریب x^{24} را پیدا می کنیم :

$$(x^3+x^4+\cdots)^4 = x^{12}(1+x+x^2+\cdots)^4 = x^{12}(1-x)^{-4}$$

$$\text{Factor} = \binom{-4}{12}(-1)^{12} = \binom{15}{12}$$

ب)

همین کار را برای شرایط جدید انجام می دهیم و چون تعداد ربات ها محدود است خواهیم داشت :

$$(x^3+x^4+\cdots+x^9)^4 = x^{12}(1+x+\cdots+x^6)^4 = x^{12}[\frac{1-x^7}{1-x}]^4$$

---

۱)

7 = 6+1 = 5+2 = 5+1+1 = 4+3 = 4+2+1 = 4+1+1+1 = 3+3+1 = 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1

---

٤)

الف) $f(x) = \frac{1}{1-x^2} * \frac{1}{1-x^3} * \frac{1}{1-x^5} * \frac{1}{1-x^7}$

ب) $f(x) = \frac{1}{1-x^2} * \frac{x^{12}}{1-x^3} * \frac{x^{20}}{1-x^5} * \frac{x^{35}}{1-x^7}$

پ) $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4)(x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21})(x^{35} + x^{40} + x^{45} + x^{50})(x^{70} + x^{80} + x^{90} + ...)$

---

۷)

اگر f(X) تابع مولد حالتی باشد که هیچ جمعوندی بیش از ۲ بار تکرار نشود و g(x) حالتی که هیچ جمعوندی برا ۳ بخش پذیر نیست، داریم:

$g(x) = \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-x^2} * \frac{1}{1-x^4} * \frac{1}{1-x^5} * \frac{1}{1-x^7} * ...$,

$f(x) = (1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)... = \frac{1-x^3}{1-x} * \frac{1-x^6}{1-x^2} * \frac{1-x^9}{1-x^3} * ... = g(x)$

---

۸) اگر f(x) تابع مولد حالتی باشد که هیچ جمعوندی بر ٤ بخش پذیر نیست و g(x) تابع مولد حالتی که هیچ جمعوند زوجی تکرار نمی‌شود، داریم:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}*\frac{1}{1-x^2}*\frac{1}{1-x^3}*\frac{1}{1-x^5}*\frac{1}{1-x^6}*\frac{1}{1-x^7}*\frac{1}{1-x^9}*\ldots$$

$$g(x)=\frac{1}{1-x}*(1+x^2)*\frac{1}{1-x^3}*(1+x^4)*\frac{1}{1-x^5}*(1+x^6)=\frac{1}{1-x}*\frac{1-x^4}{1-x^2}*\frac{1}{1-x^3}*\frac{1-x^8}{1-x^4}*\ldots$$

=f(x)
