علی نظری
۹۶۳۱۰۷۵

پاسخ سوالات فصل هشتم
کتاب گسسته گریمالدی

۲)

الف) $\binom{19+4-1}{19}$

ب) $\binom{19+4-1}{19}-\binom{4}{1}\binom{19-8+4-1}{19-8}+\binom{4}{2}\binom{19-16+4-1}{19-16}$

پ) $\binom{13+4-1}{13}-\left[2*\binom{10}{7}+\binom{9}{6}+\binom{11}{8}\right]+\left[2*1+2*\binom{4}{1}+2*\binom{5}{2}\right]$

۳) حالت های ممکن جفت ها عبارتند از: NO,OI,ON,NI,IO,IN پس داریم:

$$N = \frac{11!}{2!2!2!}-\binom{6}{1}\frac{9!}{2!2!}+\binom{6}{1}*\frac{7!}{2!}$$

۵) جواب مسئله برابر است با تعداد جواب های نا منفی معادله زیر:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=31, x_i \le 10$$

پس جواب مسئله:

$$\binom{31+7-1}{31}-\binom{7}{1}\binom{22+7-1}{22}+\binom{7}{2}\binom{13+7-1}{13}-\binom{7}{3}\binom{4+7-1}{4}$$

٦)

الف)

$$x_1+x_2+...+x_{12}=200, 10 \le x_i \le 25 \Rightarrow y_1+y_2+...+y_{12}=80, 0 \le y_i \le 15$$

$$\binom{80+12-1}{80}-\binom{12}{1}\binom{65+12-1}{65}+\binom{12}{2}\binom{50+12-1}{50}+\binom{12}{3}\binom{35+12-1}{35}+\binom{12}{4}\binom{20+12-1}{20}+\binom{12}{5}\binom{5+12-1}{5}$$

ب)طرفین معادله اول قسمت الف را به ۵ تقسیم میکنیم:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{12}=40, 2\le x_i \le 5 \Rightarrow y_1+y_2+\ldots+y_{12}=16, 0\le x_i \le 3$$

$$\binom{16+12-1}{16}-\binom{12}{1}\binom{13+12-1}{13}+\binom{12}{2}\binom{10+12-1}{10}+\binom{12}{3}\binom{7+12-1}{7}+\binom{12}{4}\binom{4+12-1}{4}+\binom{12}{5}\binom{1+12-1}{1}$$

---

۱۱)

$$6^8-\binom{6}{1}*5^8+\binom{6}{2}*4^8-\binom{6}{3}*3^8+\binom{6}{4}*2^8-\binom{6}{5}*1^8/6^8$$

---

۱۶) تعداد حالاتی که با هیچ شخصی همراه نبوده است را محاسبه میکنیم:

$$84-\binom{7}{1}35+\binom{7}{2}16-\binom{7}{3}8+\binom{7}{4}4-\binom{7}{5}2+\binom{7}{6}1=0$$

که حاصل فوق برابر ۰ است به این معنا که همیشه شخصی همراه ریحانه بوده است.

---

۳)

به مانند تمرین دوم قسمت قبل شرط گذاری می کنیم هر چند این دفعه حروف یکسان نباید پشت سر هم بیایند پس داریم :

$C_1 : 2\ R\ is\ in\ statement(RR)$

$C_2 : 2\ O\ is\ in\ statement(OO)$

$C_3 : 2\ E\ is\ in\ statement(EE)$

$C_4 : 2\ S\ is\ in\ statement(SS)$

$C_5 : 2\ N\ is\ in\ statement(NN)$

در این حالت جایگشت داخلی نداریم چون به وسیله جایگشت کلی تمام حروف شمرده خواهند شد و در ضمن برقراری توامان شروط منجر به ساخت ترکیبات چند حرفی نخواهد شد(توجه به تعریف شروط) پس در ادامه داریم :

Answer = N($\overline{C_1}\ \overline{C_2}\ \overline{C_3}\ \overline{C_4}\ \overline{C_5}$) = $S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 = \frac{14!}{(2!)^5} - \binom{5}{1} * \frac{13!}{(2!)^4} + \binom{5}{2} * \frac{121}{(2!)^3}$

$- \binom{5}{3} * \frac{11!}{(2!)^2} + \binom{5}{4} * \frac{10!}{2!} - \binom{5}{5} * 9!$

ب)

باید E_2 را محاسبه کنیم که بر حسب شروط داریم :

$E_2 = S_2 - \binom{3}{1}S_3 + \binom{4}{2}S_4 - \binom{5}{3}S_5 = \binom{5}{2} * \frac{12!}{(2!)^3} - \binom{3}{1} * \binom{5}{3} * \frac{11!}{(2!)^2} + \binom{4}{2} * \binom{5}{4} * \frac{10!}{2!} -$

$\binom{5}{3} * \binom{5}{5} * 9!$

پ)

باید 3 را محاسبه کنیم که بر حسب شروط داریم :

$$L_3 = S_3 - \binom{3}{2}S_4 + \binom{4}{2}S_5 = \binom{5}{3} * \frac{11!}{(2!)^2} - \binom{3}{2} * \binom{5}{4} * \frac{10!}{2!} + \binom{4}{2} * \binom{5}{5} * 9!$$

---

۴)

سوال اول)

ابتدا ۴ عدد از برد انتخاب می کنیم سپس هم پوشانی را برای آن ۴ عدد از برد اعمال می کنیم :

$C_i :$ *The i is not in the Board*

Answer = $\binom{7}{4}N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4})$ = $\binom{7}{4}(4^{10} - \binom{4}{1} * 3^{10} + \binom{4}{2} * 2^{10} - \binom{4}{3} * 1^{10} + \binom{4}{4} * 0)$

یا به صورت دیگر برای همان E_3 داریم :

Answer = $E_3 = S_3 - \binom{4}{1}S_4 + \binom{5}{2}S_5 - \binom{6}{3}S_5 + \binom{7}{4}S_7 = \binom{7}{3} * 4^{10} - \binom{4}{1} * \binom{7}{4} * 3^{10} +$

$\binom{5}{2} * \binom{7}{5} * 2^{10} - \binom{6}{3} * \binom{7}{6} * 1^{10} + 0$

سوال دوم)

باید L_3 را بدست آوریم :

$$L_3 = S_3 - \binom{3}{2}S_4 + \binom{4}{2}S_5 - \binom{5}{2}S_6 + \binom{6}{2}S_7 = \binom{7}{3} * 4^{10} - \binom{3}{2} * \binom{7}{4} * 3^{10} + \binom{4}{2} * \binom{7}{5} * 2^{10} - \binom{5}{2} * \binom{7}{6} * 1^{10} + 0$$

---

۷)

الف)

ابتدا شروط را تعیین می کنیم :

C_1 : $Doesn't\ bring\ color\ white\ out$

C_1 : $Doesn't\ bring\ color\ blue\ out$

C_1 : $Doesn't\ bring\ color\ red\ out$

C_1 : $Doesn't\ bring\ color\ black\ out$

حال برای الف داریم :

N($\overline{C_1}\ \overline{C_2}\ \overline{C_3}\ \overline{C_4}$) = $\binom{52}{13} - \binom{4}{1} * \binom{39}{13} + \binom{4}{2} * \binom{26}{13} - \binom{4}{3} * \binom{13}{13} + 0$

ب)

باید E_1 را بدست آوریم :

$$E_1 = S_1 - \binom{2}{1}S_2 + \binom{3}{2}S_3 - \binom{4}{3}S_4 = \binom{4}{1} * \binom{39}{13} - \binom{2}{1} * \binom{4}{2} * \binom{26}{13} + \binom{3}{2} * \binom{4}{3} * \binom{13}{13} - 0$$

پ)

باید E_2 را بدست آوریم :

$$E_2 = S_2 - \binom{3}{1}S_3 + \binom{4}{2}S_4 = \binom{4}{2} * \binom{26}{13} - \binom{3}{1} * \binom{4}{3} * \binom{13}{13} + 0$$

---

۸)

الف)

چون حداقل و دقیقا و عباراتی که t شرط را برآورده می کنند برابرند نتیجه می گریم t تعداد تمام شروط می باشد.

ب)

E_{t-1} عباراتی هستند که دقیقا t-1 شرط را برآورده می کنند :

$$E_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t}{1} S_t$$

عباراتی که حداقل t-1 شرط را برآورده می کنند حاصل جمع عباراتی هستند که دقیقا t-1 شرط را برآورده می کنند و عباراتی که حداقل t شرط را برآورده می کنند.

$$L_{t-1} = E_{t-1} + L_t$$

پ)

از فرض اولیه داریم $L_t = S_t$ پس داریم :

$$L_{t-1} = E_{t-1} + L_t = S_{t-1} - \binom{t}{1} S_t + S_t = S_{t-1} - (t-1) S_t = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2} S_t$$

ت)

$$L_m = E_m + L_{m+1}$$

ث)

فرض کنیم عبارت فرع ۲/۸ برقرار باشد حال داریم :

$$L_m = E_m + L_{m+1} = \left[S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \cdots + (-1)^{t-m} \binom{t}{t-m} S_t\right] + [S_{m+1} - \binom{m+1}{m} S_{m+2} + \cdots + (-1)^{t-m-1} \binom{t-1}{m} S_t]$$

حال در نظر بگیرید $1 \le r \le t-m$ باشد برای ضریب S_{m+r} خواهیم داشت :

$$(-1)^{r-1} \binom{m+r-1}{m} + (-1)^r \binom{m+r}{r} = (-1)^{r-1} \left[\frac{(m+r-1)!}{m! * (r-1)!} - \frac{(m+r)!}{r! * m!}\right] = (-1)^{r-1} \frac{(m+r)!}{m! * (r-1)!} [\frac{1}{m+r} - \frac{1}{r}]$$

$$= (-1)^r \frac{(m+r-!!)!}{(m-1)! * r!} = (-1)^r \binom{m+r-1}{m-1}$$

حال اگر این ضریب را برای تک تک عبارات بدست آمده بر حسب قسمت اول اعمال کنیم فرع بدست می آید :

$$L_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \cdots + (-1)^{t-m} \binom{t-1}{m-1} S_t$$

۸/۳

---

۵)

الف)

با توجه به یک به یک بودن تابع داریم:

کل حالت-$d_7 = 7! - 7!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{7!}) \square 7!\left(1 - e^{-1}\right)$

ب)جواب این سوال برابر پریش حروف a,b,...,z است که تعداد این حرف ۲۶ عدد است پس جواب مسئله از این قرار است:

$$d_{26} = 26!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{1}{26!}) \square 26!\left(e^{-1}\right)$$

---

۹)

$$10!*d_{10} = 10!*10!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{1}{10!}) \square (10!)^2\left(e^{-1}\right)$$

---

۱۰)

الف و ب) یک) $\frac{d_n}{n!} = \frac{n!*e^{-1}}{n!} = e^{-1}$

دو) $\frac{\binom{n}{1} d_{n-1}}{n!} = \frac{n*(n-1)!*e^{-1}}{n!} = e^{-1}$

سه) $\frac{n! - d_n}{n!} = \frac{n! - n!*e^{-1}}{n!} = 1 - *e^{-1}$

چهار) $\frac{\binom{n}{r} d_{n-r}}{n!} = \frac{n!*(n-r)!*e^{-1}}{r!(n-r)!n!} = \frac{e^{-1}}{r!}$

---

۱۱)

الف) $d_{10} * d_{10} \approx 10!10! * e^{-2}$

ب)شرط C_i را در نظر می‌گیریم به صورت که به معنای این باشد که نفر i ام کیف و پالتوی خود را دریافت کرده است پس داریم:

$$10!^2 - \binom{10}{1} 9!^2 + \binom{10}{2} 8!^2 - \ldots + \binom{10}{0} 0!^2$$

---

۱۳)

تعداد جایگشت خطی n شی غیر یکسان برابر !n است. حال می توان تعداد جایگشت های خطی را به گونه ای دیگر بیان کرد به این صورت که این جایگشت برابر این است مجموع حالاتی که در حالت اول تمام اشیا در جای معین اولیه اند و حالت دوم یک جسم در حالت اولیه نیست و بقیه اشیا جایگشت می‌شوند همینطور الی آخر یعنی:

$$n! = \binom{n}{0} d_0 + \binom{n}{1} d_1 - \ldots + \binom{n}{n} d_n$$

---

۱۴)

الف)

$$N = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} 1!$$

---

۱۵)

$$N = \binom{n}{0}(n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} 0! + (-1)^n \binom{n}{n}$$
