

بسمه تعالی

تمرین سری پنجم ساختمان داده ها و مبانی الگوریتم ها

نکات :

- پاسخ تمرین ها را تایپ شده یا اسکن شده در قالب pdf با نام HW5_StudentNumber.pdf ارسال نمایید.
- مهلت ارسال این سری تمرین تا شنبه ۱۴ مهر ساعت ۲۳:۵۵ است.

۱. ابتدا پیچیدگی زمانی هر یک از الگوریتم‌های مرتب‌سازی زیر را در بدترین حالت، حالت میانگین و بهترین حالت بنویسید. سپس با ذکر دلیل مشخص کنید کدامیک از الگوریتم‌ها آرایه زیر را سریعتر مرتب میکند.

(الف) Insertion Sort

(ب) Bubble Sort

(ج) Merge Sort

(د) Quick Sort

(ه) Heap Sort

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

۲. اگر آرایه مرتب A دارای r عنصر و آرایه مرتب B دارای p عنصر باشد، حداکثر تعداد مقایسه برای ادغام (merge) دو آرایه چقدر است ؟

۳. درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) الگوریتم Quick Sort از الگوریتم Merge Sort همواره سریعتر است.

ب) حداکثر درجه پیچیدگی الگوریتم Binary Insertion Sort از Quick Sort بهتر است.

ج) حداکثر درجه پیچیدگی الگوریتم Quick Sort از Heap Sort بهتر است.

د) الگوریتم Quick Sort در شرایطی که $n > ۲۳$ باشد، به طور میانگین بهتر از Insertion Sort عمل میکند.

ه) الگوریتم‌های مرتب‌سازی که پیچیدگی زمانی آنها خطی است، حتماً از حافظه کمکی استفاده میکنند و به صورت درجا قابل پیاده‌سازی نیستند.

۴. اگر کلیدهای زیر در یک جدول درهم‌سازی (Hash Table) با طول $m = ۱۳$ با تابع معین درهم‌سازی (Auxiliary Hash Function) به صورت $k \bmod m$ وارد شده باشند، جدول درهم‌سازی را در هر یک از شرایط زیر به دست آورید.

الف) آزمایش خطی

ب) آزمایش درجه دو

135	0	131	144	53	134	22	39	44	152
-----	---	-----	-----	----	-----	----	----	----	-----

۵. فرض کنید برای درهم‌سازی، یک تابع درهم‌ساز ثابت و مشخص داریم. چگونه میتوان زمانهای دسترسی، اضافه کردن و حذف کردن را بدون ایجاد تغییر در تابع درهم‌ساز بهبود داد؟ (راهنمایی: جاوا برای کلاس `HashMap` [این پیشنهاد](#) را مطرح کرده است)

۶. یک آرایه دلخواه با طول n را به یک `min-heap` تبدیل کنید. (از روش تقسیم و غلبه استفاده کنید)

۷. یک آرایه را در نظر بگیرید. میخواهیم زیردنباله‌ای را بیابیم که مجموع اعداد آن بیشترین شود. الگوریتم شما باید مقدار بزرگترین مجموع را بازگرداند. (از روش تقسیم و غلبه استفاده کنید)

2	4	-7	8	3	-1
---	---	----	---	---	----

به عنوان مثال آرایه زیر را در نظر بگیرید:

زیردنباله با بیشترین مجموع، زیردنباله‌ای از خانه‌ی ۴ام تا ۵ام است که مجموع ۱۱ را میدهد و هر زیردنباله‌ی دیگری مجموع آن از ۱۱ کمتر خواهد بود.

۸. یک رشته خودوارون است اگر از هر دو طرف به یک صورت خوانده شود. مانند `kayak`

زیردنباله یک رشته به رشته حاصل از حذف تعدادی حرف از آن رشته می‌گویند. مثلاً زیردنباله‌های `aid` شامل رشته‌های زیر است:

`a,i,d,ai,ad,id,aid`

الگوریتم برای محاسبه طولانی‌ترین زیردنباله خودوارون یک رشته ارایه دهید و پیچیدگی زمانی آن را تحلیل کنید.

۹. آرایه‌ای از n عدد صحیح در بازه ۰ تا $n * n - ۱$ داریم. الگوریتم از مرتبه $O(n)$ خطی برای مرتب‌سازی این آرایه ارائه دهید.

۱۰. n نقطه روی محور اعداد حقیقی به ما داده شده است. می‌خواهیم این نقاط را با پاره‌هایی به طول ۱ بپوشانیم به طوری که کمترین تعداد ممکن پاره خط استفاده شود. برای این سوال، دو الگوریتم حریصانه زیر پیشنهاد شده است. درستی هر کدام از این الگوریتم‌ها را اثبات یا رد کنید:

الف. در هر مرحله بازه‌ای به طول ۱ به طوری که بیشترین تعداد نقطه را بپوشاند انتخاب کن و نقاط پوشانده شده توسط این بازه را حذف کن. این عمل را تا زمان که نقطه‌ای پوشانده نشده وجود دارد انجام بده.

ب. در هر مرحله سمتچپ ترین نقطه ممکن را در نظر بگیر و آنرا X بنام. حال تمام نقاط که در بازه $[X, X+1]$ قرار دارند را حذف کن و این بازه را به جواب اضافه کن. این عمل را تا زمان که نقطه ای پوشانده نشده وجود دارد انجام بده.

۱۱. یک جدول $n \times n$ داریم که در هر سطر و هر ستون آن، دقیقاً یک بار عدد ۱ و یک بار عدد -۱ آمده است، با این شرط که روی قطر اصلی عددی نیست و اگر عدد موجود در خانه ی سطر i و ستون j جدول را با $t_{i,j}$ نشان دهیم، داریم: $t_{i,j} = -t_{j,i}$.

الگوریتمی ارائه دهید که با جابه جا کردن تعدادی سطر با هم و تعدادی ستون با هم، تمام ۱ ها تبدیل به -۱ شوند و برعکس.

۱۱. رئیس یک شرکت قصد دارد مهمانی ای میان کارمندانش ترتیب دهد. هر کارمند یک میزان قدرت p_i و یک میزان جذابیت c_i دارد (که هر دو عدد صحیح می باشند). اما او بخاطر حسادت شدید میان کارمندانش می خواهد هر دو نفری که به مهمانی می آیند یک مغلوب دیگری باشد. کارمند A مغلوب کارمند B است اگر و تنها اگر هم جذابیت و هم قدرت او کم تر از B باشد. الگوریتمی برای پیدا کردن بیشترین تعداد کارمندی که می توانند به مهمانی بیایند ارائه کنید.