

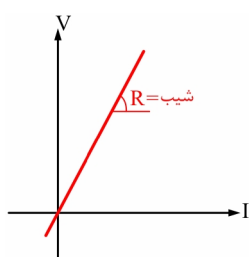


فصل ۱ مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل

مقدمه

قبل از شروع درس کمی مقدمه لازم است؛ اسم این درس «مدار» است؛ اگر جای حروف دوم و سوم آن را عوض کنیم به نقش بی‌بدیل این درس در رشته «مهندسی برق» پی می‌بریم؛ درس مدار نه تنها پایه‌ی اکثر دروس این رشته است؛ بلکه در سایر رشته‌ها نیز با عنوان مبانی برق مورد بررسی قرار می‌گیرد. از طرفی هم در بیشتر آزمون‌های تحصیلات تکمیلی (کارشناسی ارشد و دکتری) این درس مورد سؤال قرار می‌گیرد؛ پس با درس بسیار مهمی سر و کار خواهیم داشت. از طرفی تمام سعی ما بر این است که به دلچسب‌ترین و شیرین‌ترین شیوه ممکن بحث را هضم کنیم. در فصل اول عناصر مداری را می‌شناسیم و به روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی می‌پردازیم؛ این فصل مبنای تمام فصول بعدی است؛ برای همین با تمام هوش و حواس سرکلاس جلسه اول حاضر شوید.

۱-۱ مشخصه ولتاژ - جریان



یعنی رابطه‌ای را که بین ولتاژ و جریان یک مدار



وجود دارد، در یک شکل مشخص کنیم. مثلاً در یک مقاومت خطی این مشخصه به صورت زیر است:

شکل (۱-۱) مشخصه ولتاژ - جریان در یک مقاومت خطی

به نظر شما اشکال مشخصه بالا (یا بهتر بگوییم، نقص آن) چیست؟



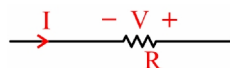
در نظر اول هیچ ایرادی ندارد ولی با کمی دقت می‌بینیم که جهت‌های ولتاژ و جریان مشخص نشده است!



www.PowerEn.ir

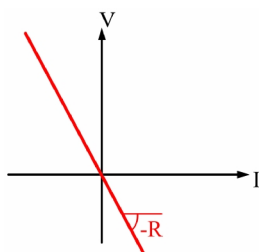


دقیقاً! یکی از مهم‌ترین چیزهایی که باید در درس مدار به آن توجه داشت، جهت‌های ولتاژ و جریان است. مثلاً اگر پلاریته ولتاژ و جهت جریان را به صورت زیر فرض کنیم:



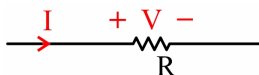
شکل (۲-۱) یک مقاومت خطی با پلاریته ولتاژ و جهت جریان مشخص شده

آنگاه مشخصه ولتاژ - جریان آن به صورت شکل (۳-۱) می‌شود:



شکل (۳-۱) مشخصه ولتاژ و جریان در مقاومت نشان داده شده در شکل (۲-۱)

پس برای شکل (۱-۱) داریم:



شکل (۴-۱) مقاومت خط با پلاریته ولتاژ و جهت جریان استاندارد

۱-۱-۱ عناصر مداری

حال مشخصه ولتاژ - جریان چند عنصر را بررسی می‌کنیم.

(الف) مقاومت خطی (که بررسی شد!)

(ب) دیود ایده‌آل: می‌دانیم در دیود ایده‌آل هر گاه ولتاژ آند از کاتد بیشتر باشد،

دیود در حکم اتصال کوتاه یا همان S.C. است، یعنی:



$$V = 0$$

(۱-۱)

و هرگاه ولتاژ کاتد از آند بیشتر شود، دیود نقش مدار باز یا همان O.C. را ایفا می‌کند، به عبارت دیگر:

$$I = 0$$

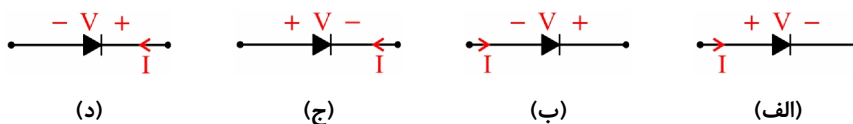
(۲-۱)

حال با توجه به این عبارات بسیار ساده و توجه به جهت‌های ولتاژ و جریان برای هر دیودی می‌توان مشخصه ولتاژ - جریان رسم کرد.

PowerEn.ir



۱- برای دیودهای نشان داده شده مشخصه جریان - ولتاژ رسم کنید.

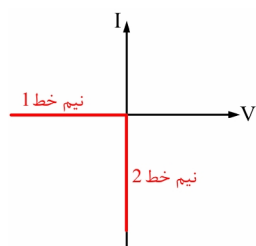


شکل (۵-۱) حالات مختلف برای یک دیود ایده آل



در شکل الف) هنگامی که $V < 0$ است، دیود قطع می شود،

یعنی $I = 0$ (نیم خط ۱) و هنگامی که دیود وصل شود، یعنی $V = 0$ ، نیم خط ۲ را داریم:



شکل (۶-۱) مشخصه جریان - ولتاژ دیود ایده آل

شکل (۵-۱) الف) (پاسخ غلط!)

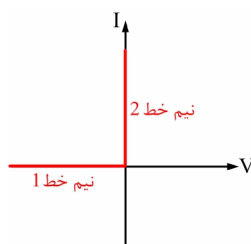


اشکال این پاسخ کجاست؟



نیم خط ۱ مشکلی ندارد، منتها در نیم خط ۲، مقادیر جریان منفی اند، درحالی که با توجه به جهت جریان در شکل

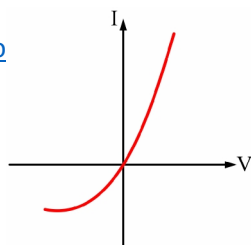
(۵-۱) الف) جریان مثبت است. (از آند به کاتد) پس جواب درست به این شکل می شود:



شکل (۷-۱) مشخصه صحیح! جریان - ولتاژ دیود ایده آل شکل (۵-۱) الف) (پاسخ درست)



www.Po



کاملاً درست است. از طرفی با کمی دقت نیز ملاحظه می کنید



که این شکل، یک تقریب ایده آل برای دیود واقعی است. (موافقت؟)

شکل (۸-۱) مشخصه جریان - ولتاژ دیود واقعی

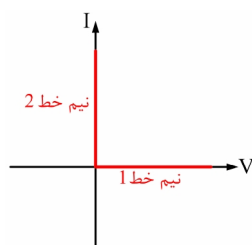
شکل (۸-۱-الف)

و اما ادامه پاسخ تمرین ۱:

در شکل (۸-۱-ب) وقتی دیود قطع است که $V > 0$ (به جهت پلاریته ولتاژ نگاه کنید)، یعنی نیم خط ۱ و



مشخصه دیود هنگام وصل بودن (یعنی $V = 0$)، بر نیم خط ۲ منطبق می شوند. (این بار اشتباه قبلی را مرتکب نشدم!)

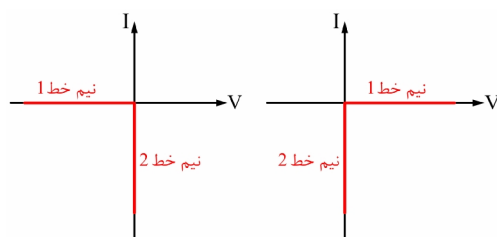


شکل (۹-۱) مشخصه جریان - ولتاژ دیود ایده آل شکل (۸-۱-ب)

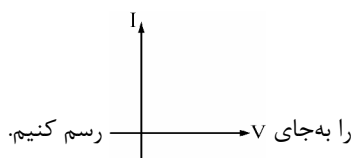
پس جمع بندی می کنیم: ابتدا حالت قطع را بررسی می کنیم، حالتی که $V_{\text{اند}} > V_{\text{کند}}$ در اینجا $I = 0$ است و



نیم خط مربوط، مشخص می شود و سپس حالت وصل که $V = 0$ است؛ برای این نیم خط، توجه به جهت جریان لازم است.



شکل (۱۰-۱) مشخصه جریان - ولتاژ دیود ایده آل شکل های (۸-۱-ج و د)



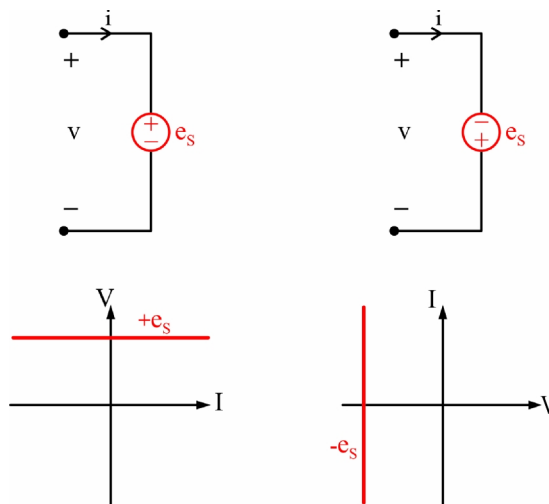
رسم کنیم.



PowerEn.ir

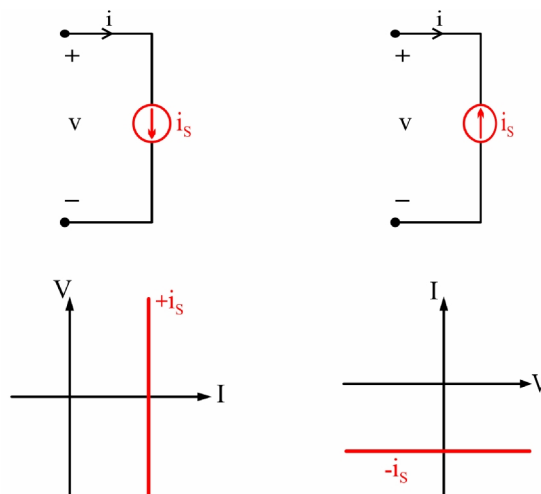


نمودار نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌شود و در نتیجه شیب‌ها، معکوس می‌شوند.
(ج) منبع ولتاژ ایده‌آل: توضیحی نیاز ندارد، فقط نگاه کنید.



شکل (۱۱-۱) مشخصه ولتاژ - جریان در منبع ولتاژ ایده‌آل

(د) منبع جریان ایده‌آل: باز تنها یک نگاه کافی است.



شکل (۱۲-۱) مشخصه ولتاژ - جریان در منبع جریان ایده‌آل

یک نفر موضوع را جمع‌بندی کند.



هر منبع ولتاژ یا منبع جریانی، بسته به جهتش، مقدار ولتاژ و یا جریان را در مشخصه $V-I$ به اندازه e_s و یا i_s

شیفت می‌دهد. (به راست و چپ و یا به بالا و پایین)



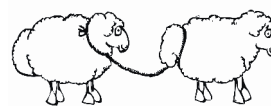
www.PowerEn.ir

۲-۱-۱ به هم بستن عناصر

حالا مسئله این است که هیچ‌گاه مشخصه ولتاژ - جریان را در یک عنصر تنها به ما نمی‌دهند. (مگر در آزمون ورودی



مدارس ابتدایی!) بلکه مداری می‌دهند متشکل از تعدادی عناصر به هم پیوسته به یکی از صورت‌های زیر:



الف) اول سری:



در این حالت می‌دانیم:

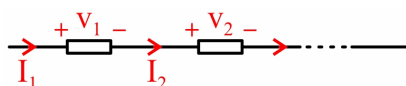
$$\begin{cases} I_{\text{کل}} = I_1 = I_2 = \dots \\ V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 + \dots \end{cases}$$

(۳-۱)

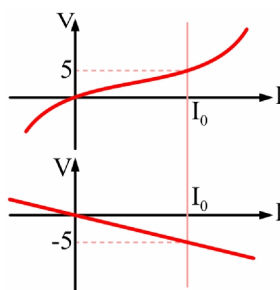
و البته

$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i$$

(۴-۱)



شکل (۱۳-۱) المان‌های سری (هم‌جریان)



پس برای رسم مشخصه $V-I$ نهایی، به ازای جریان‌های



یکسان، ولتاژهای متناظر را جمع می‌کنیم.

شکل (۱۴-۱) مشخصه $V-I$ دو عنصر سری

یعنی به ازای جریان $I = I_0$ ، ولتاژهای متناظر را جمع می‌کنیم:



$$I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 = 5 + (-5) = 0$$

PowerEn.ir



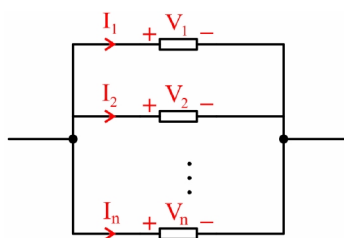
(ب) و حالا موازی:



در این حالت:

$$\begin{cases} V_{\text{کل}} = V_1 = V_2 = \dots \\ I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 + \dots \end{cases}$$

(۵-۱)



و البته:



شکل (۱۵-۱) المانهای موازی (همولتاژ)

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

(۶-۱)

پس برای رسم مشخصه $I-V$ نهایی، به ازای ولتاژهای یکسان، جریانهای متناظر را جمع می‌کنیم.

یادتان هست که هنگام جمع کردن دو خط، در حقیقت شیب‌ها و عرض از مبدأ آن‌ها را با هم جمع می‌کردیم؛ در ضمن



فراموش نکنید که:

$$/m + \overline{0} = /m$$

(۷-۱)

$$/m + |\infty| = |\infty|$$

(۸-۱)

مفهوم روابط (۷-۱) و (۸-۱) را فهمیدید؟

رابطه (۷-۱) یعنی هر خط با شیب m وقتی با یک خط افقی جمع شود، شیب آن تغییر نمی‌کند، بلکه به قولالکترونیکی‌ها! تنها مقدار dc آن تغییر می‌کند (شیفت dc) و رابطه (۸-۱) به این معنی است که خط با شیب m هنگام جمع شدن با خط قائم، همان خط قائم (با شیب بی‌نهایت) می‌شود؛ به قول الکترونیکی‌ها بریده می‌شود!



www.PowerEn.ir

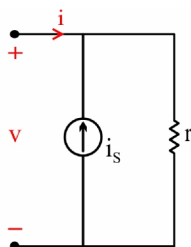
حالا نوبت حل تعدادی نمونه سؤال است؛ شما هم قدم به قدم با من حرکت کنید، قبل از مشاهده حل هر تمرین،



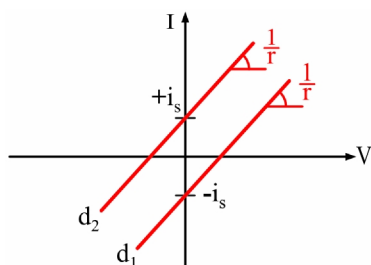
حتماً از قبل خودتان آن را حل کنید تا ... !



۲- در مدارهای زیر مشخصه $I-V$ رسم کنید.



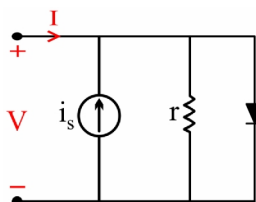
شکل (۱۶-۱) تمرین ۲-الف



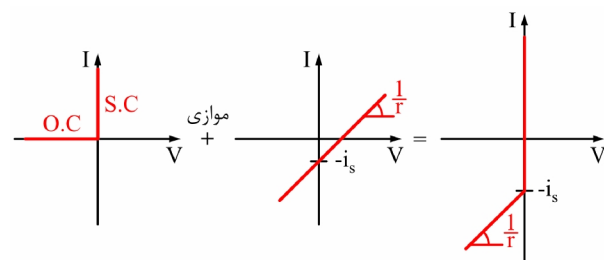
شکل (۱۷-۱) پاسخ تمرین ۲-الف

در اینجا پاسخ خط d_1 است ولی اگر جهت منبع جریان بالعکس بود؛ پاسخ خط d_2 می‌شد.

و حالا مداری با یک عنصر غیرخطی (دیود):

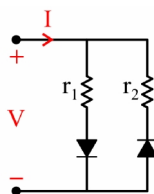


شکل (۱۸-۱) تمرین ۲-ب



شکل (۱۹-۱) پاسخ تمرین ۲-ب

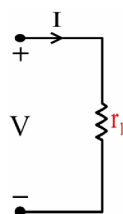
پاسخ قسمت الف) با دیود موازی است، پس مشخصه آن‌ها جمع می‌شود.



شکل (۲۰-۱) تمرین ۲-ج

PowerEn.ir

مطابق روال گذشته، در هر شاخه، حاصل سری شدن مقاومت با دیود را به دست می‌آوریم و نتایج را با هم موازی می‌کنیم. آیا راه حل سریع‌تری سراغ دارید؟

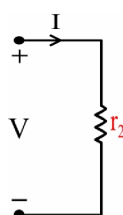


شکل (۲۱-۱) مدار معادل در حالت $V > 0$

بله! شاخهٔ چپی را شاخهٔ ۱ و شاخهٔ راستی را شاخهٔ ۲

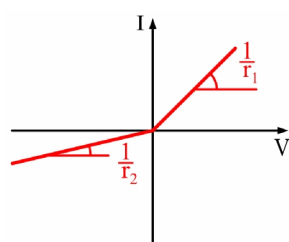


بنامید. حال معلوم است که وقتی $V > 0$ ، آن‌گاه شاخهٔ ۱ وصل و شاخهٔ ۲ قطع است و مدار به شکل زیر می‌شود:



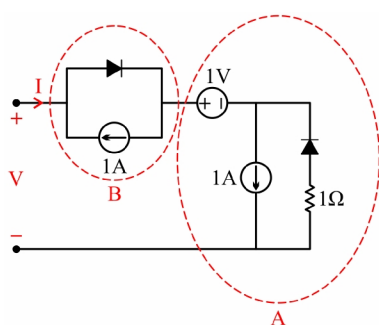
شکل (۲۲-۱) مدار معادل در حالت $V < 0$

و هنگامی که $V < 0$ ، بالعکس است، یعنی مدار به فرم زیر می‌شود:



پس با تقسیم به دو ناحیهٔ $V > 0$ و $V < 0$ ، مشخصهٔ ولتاژ - جریان به صورت زیر می‌شود:

شکل (۲۳-۱) پاسخ تمرین ۲-ج



شکل (۲۴-۱) تمرین ۲-د

بسیار خوب؛ در ضمن این مسئله، سؤال آزمون ورودی دورهٔ



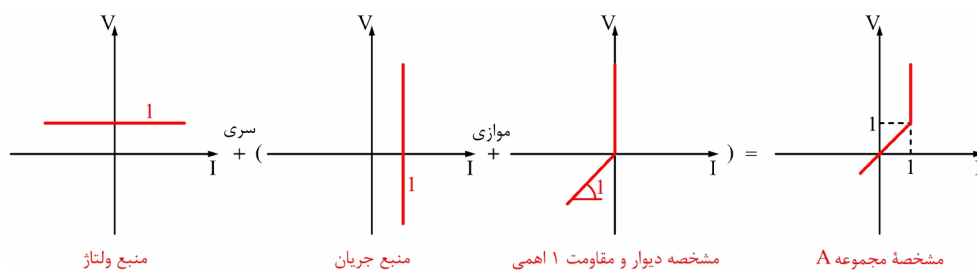
دکترای یکی از دانشگاه‌ها بوده است، البته با صورتی متفاوت، با این مضمون که مدار تمرین ۲-ج یک تقریب تکه‌ای خطی برای دیود واقعی است البته به شرطی که $r_1 \ll r_2$. (به شکل (۸-۱) مراجعه کنید.) و اما شکل بعدی:

تازه این شد یک تمرین کامل! واضح است که باید قسمت‌های مختلف مدار را - تکه‌تکه - بررسی کنید تا حاصل نهایی به دست آید. منتظر چه هستید؟ شروع کنید.



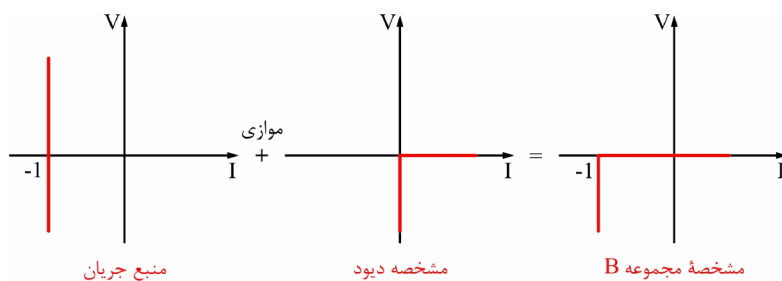
www.PowerEn.ir

ابتدا مجموعه A (بخش سمت راستی):



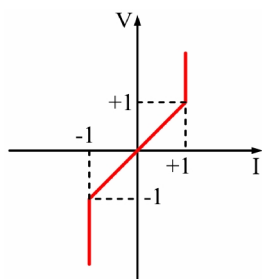
شکل (۲۵-۱) مراحل حل تمرین ۲-د

و سپس مجموعه B:



شکل (۲۶-۱) ادامه مراحل حل تمرین ۲-د

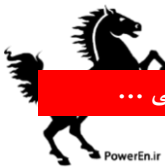
و در نهایت این دو بخش با هم سری می‌شوند و حاصل نهایی به صورت زیر است:



شکل (۲۷-۱) پاسخ تمرین ۲-د

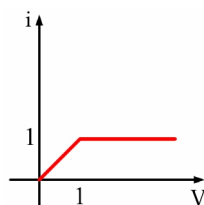
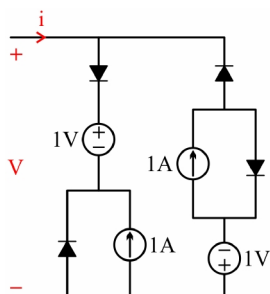
بنابراین بهتر است که در حل یک مسئله نسبتاً مفصل، تمام مشخصه‌ها را به صورت یکی از فرم‌های I یا V در نظر بگیریم تا تبدیل این فرم‌ها به یکدیگر وقت ما را تلف نکند.

PowerEn.ir

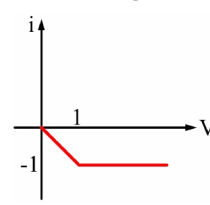


۳- حالا یک مسئله تستی!

کدام یک از منحنی‌های زیر، منحنی مشخصه مدار زیر است؟

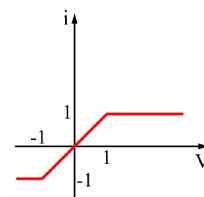


(۲)



(۱)

(۴) هیچ کدام



(۳)

شکل (۲۸-۱) تمرین ۳

برای حل این مسئله باید از یک گوشه مدار شروع کنیم و...

اگر به گزینه‌ها نگاه کنیم، نیازی به شروع از این گوشه به آن گوشه ندارد. قطعاً گزینه ۴ درست است، چراکه در هر



سه گزینه اول خط مایل وجود دارد، درحالی‌که خط مایل در اثر مقاومت خطی $\text{---}\frac{R}{\text{---}}$ حاصل می‌شود و حال آن‌که اثری از ایرالمان در مدار نیست.

بسیار عالی است. در حل تست باید چشمان شما چپ باشد! البته نه این شکلی، یعنی همواره باید نیم‌نگاهی



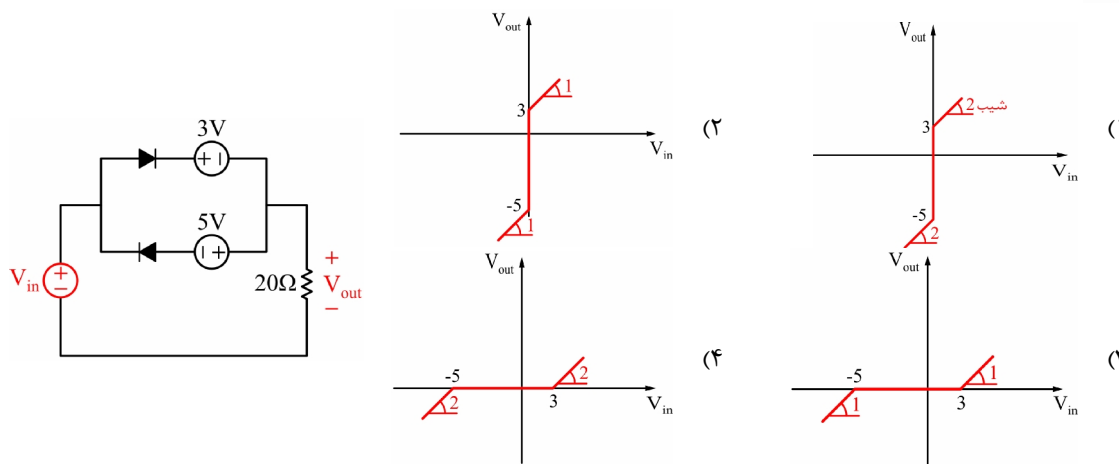
به گزینه‌ها نیز داشته باشید. به موقع در این مورد به تفصیل حرف می‌زنیم!

گاهی به جای مشخصه ولتاژ - جریان، ممکن است مشخصه‌های دیگری همچون $V_{\text{out}} - V_{\text{in}}$ را بخواهند. دقت کنید!



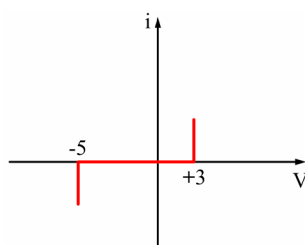
www.PowerEn.ir

۴- در مدار شکل زیر دیودها ایده آل فرض می‌شوند. مشخصه $V_{out} - V_{in}$ به چه صورت خواهد بود؟



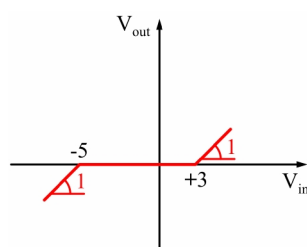
شکل (۱-۲۹) تمرین ۴

با سری کردن دیودها با منابع ولتاژ و سپس موازی شدن دو شاخه، مشخصه $I - V$ به صورت زیر می‌شود:



شکل (۱-۳۰) مراحل حل تمرین ۴

حال با سری شدن این مجموعه با مقاومت ۲ اهمی، مشخصه $V_{out} - V_{in}$ به صورت زیر در می‌آید:



شکل (۱-۳۱) پاسخ تمرین ۴

پس گزینه ۳ درست است. در ضمن فراموش نکنید که در این جا:

$$V_{out} = 2i$$

و به همین دلیل بود که شیب خطها، به جای $\frac{1}{2}$ برابر یک شد!





www.PowerEn.ir

قبل از اتمام این بحث و رفتن به سراغ بحث بعدی، متذکر می‌شوم که مشخصه ولتاژ - بار (در مورد خازن) و مشخصه



شار - جریان (در سلف) عیناً شبیه مشخصه ولتاژ - جریان (در مقاومت) است و از تکرار آن پرهیز می‌کنیم.



خلاصه اینکه در مدارهای شامل خازن، نقش i (جریان) را q (بار) بازی می‌کند (V سر جای خودش است) و در

مدارهای شامل سلف، نقش V (ولتاژ) را ϕ (شار) ایفا می‌کند. (i سر جای خودش هست).

۲-۱ عناصر مداری (معرفی و روابط)

۱-۲-۱ مقاومت



از دوره راهنمایی! به خاطر دارید که:



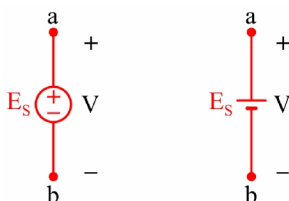
شکل (۱-۳۲) مقاومت R و جریان I !

$$I = \frac{V_a - V_b}{R} \quad \text{جریان رونده از } a \text{ به } b \quad (۹-۱)$$

۲-۲-۱ منابع مستقل (نابسته)

الف - منبع ولتاژ

که همان باتری است؛



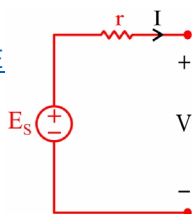
شکل (۱-۳۳) منبع ولتاژ مستقل (نابسته) ایده‌آل

در حالت ایده‌آل داریم:

$$V = E_s \quad (۱۰-۱)$$



www.PowerE



شکل (۱-۳۴) منبع ولتاژ مستقل (نابسته) واقعی

$$V = E_s - rI$$

(۱۱-۱)

مقدار rI را در رابطه بالا را افت ولتاژ مقاومت داخلی منبع نیز می‌گوییم.

ب - منبع جریان

در حالت ایده‌آل:

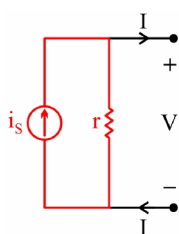


شکل (۱-۳۵) منبع جریان مستقل (نابسته) ایده‌آل

$$I = i_s$$

(۱۲-۱)

و در حالت واقعی یک مقاومت r اهمی با آن موازی می‌شود؛ باز هم به نام مقاومت داخلی!



شکل (۱-۳۶) منبع جریان مستقل (نابسته) واقعی

$$I = i_s - \frac{V}{r}$$

(۱۳-۱)

می‌توان مشابه قبل $\frac{V}{r}$ را افت جریان منبع نامید.

چرا در منبع جریان، مقاومت داخلی را سری با آن فرض نکردیم؟



این‌که ساده است، چراکه آن مقاومت داخلی، هیچ‌گونه افتی در جریان منبع ایجاد نمی‌کند، به‌طور کلی هر چیزی!

موازی منبع ولتاژ قابل حذف است (یعنی تأثیری در سایر قسمت‌های مدار ندارد) و هر المانی سری با منبع جریان نیز همین‌طور!



البته برای آن چیز! اللمان استثنائاتی هم هست! اگر آن چیز (که موازی با منبع ولتاژ شده) اتصال کوتاه (یا S.C.)

باشد، خود منبع ولتاژ حذف می‌شود و در صورتی که آلمان (سری با منبع جریان) مدار باز (یا O.C.) باشد، خود منبع جریان منهدم می‌شود.

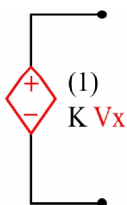
PowerEn.ir



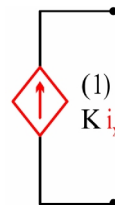
۳-۲-۱ منابع وابسته



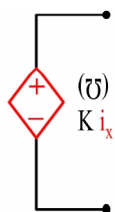
که به یکی از چهار شکل زیر است:



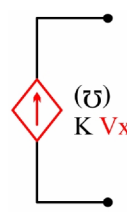
(ب) منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ



(الف) منبع جریان وابسته به جریان



(د) منبع ولتاژ وابسته به جریان



(ج) منبع جریان وابسته به ولتاژ

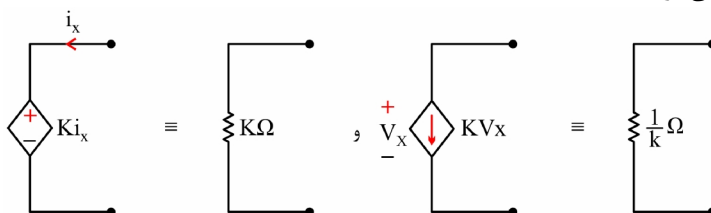
شکل (۳۷-۱) چهار نوع منبع وابسته

که در آن‌ها i_x و V_x به ترتیب جریان یا ولتاژ هر شاخه از مدار می‌توانند باشند.

حالت خاص! منابع وابسته به خود!

در شکل‌های (۱ - ۳۷ - ج) و (۱ - ۳۷ - د) فرض کنید i_x جریان خود منبع ولتاژ و یا V_x ولتاژ خود منبع جریان باشد؛ در این صورت منبع وابسته در حکم یک مقاومت می‌شود.

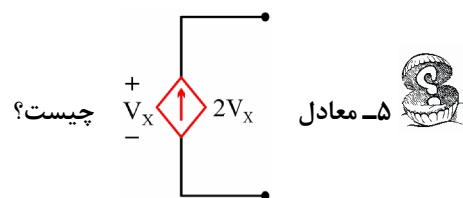
ملاحظه کنید:



شکل (۳۸-۱) منابع وابسته به خود و معادل مقاومتی آن‌ها

بدیهی است که توجه به این موضوع، گاهی حل تست را ساده می‌کند.

www.PowerEn.ir



یک مقاومت نیم اهمی!



به نظرم، دوستم اشتباه می‌کند. اگر به جهت جریان و پلاریته ولتاژ دقت کنیم (که البته این دقت ضروری است)، این منبع معادل با یک مقاومت $\frac{1}{2}$ اهمی است.



باز تکرار می‌کنم: توجه به پلاریته ولتاژ و جهت جریان در درس مدار ضروری است. گاهی با یک بی‌دقتی در جهت‌ها،

تستی را حل می‌کنید، در ضمن پاسخ به‌دست آمده خود را در گزینه‌ها ملاحظه می‌کنید. بنابراین مشغوف می‌شوید از اینکه $+1$ نمره گرفته‌اید، غافل از آن که $-\frac{1}{3}$ نمره نصیبتان شده است!



۳-۱ توان الکتریکی

برابر است با ولتاژ ضربدر جریان و واحد آن «وات» است؛

$$P = V \times I$$

(۱۴-۱)

که در مقاومت به صورت‌های دیگری هم قابل بیان است:

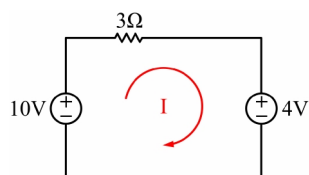
$$P = \frac{V^2}{R} = RI^2$$

(۱۵-۱)

تنها نکته مهم، در تولیدی یا مصرفی بودن آن است؛ اگر جریان از سر مثبت ولتاژ وارد شود، توان مصرفی و اگر جریان از سر منفی ولتاژ وارد شود (و یا از سر مثبت خارج شود)، توان تولیدی است. بنابراین همه مقاومت‌ها مصرف‌کننده هستند و



تمامی منابع مستقل (همچون باتری‌ها) مولد هستند.



باز به نظرم، دوستم مرتکب اشتباهی شده است؛ به مدار مقابل

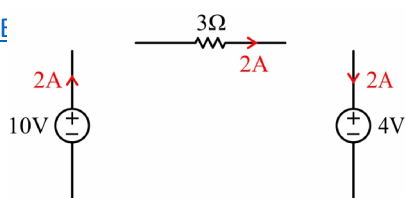


نگاه کنید:

شکل (۱-۳۹) مثال دانشجوی باهوش!

PowerEn.ir

www.PowerEn.ir



شکل (۴۰-۱) مدار قبلی با اجزای تفکیک شده

در اینجا واضح است که جریان I با جهت نشان داده شده برابر ۲ آمپر است.

در اینجا دیده می شود که مقاومت ۱۲ وات مصرف کرده و منبع ۱۰ ولتی به میزان ۲۰ وات تولید می کند. همان طور که شکل نیز تأیید می کند، ۸ وات دیگر را منبع ولتاژ ۴ ولتی مصرف کرده است.

دقیقاً همین طور است، پس همه مقاومت ها مصرف کننده اند و



منابع مستقل (اعم از ولتاژ یا جریان) بسته به شرایط می توانند مصرف کننده باشند یا مولد!

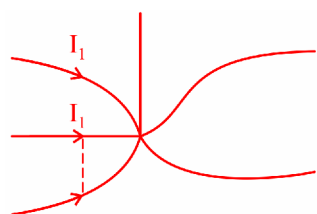


۴-۱

مبنای درس مدارهای الکتریکی، این دو قانون ارزشمند هستند.



(۱) قانون جریان یا KCL: جمع جبری جریان های خروجی از هر گره برابر صفر است.



شکل (۴۱-۱) قانون جریان KCL

$$\sum I_{\text{out}} = 0$$

در هر گره یا سوپر گره یا کات ست داریم:

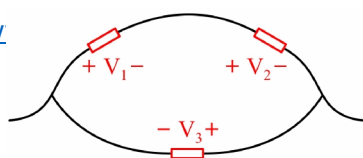
(۱۶-۱)

PowerEn.ir



۲) قانون ولتاژ یا KVL: جمع جبری ولتاژهای عناصر در هر مسیر بسته صفر است.

ww



شکل (۴۲-۱) قانون ولتاژ KVL

و در هر مش یا سوپر مش یا حلقه داریم:

(۱۷-۱)

$$\sum_i V_i = 0$$

مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل:

در کتاب‌های مدار، ۲ روش استاندارد برای تحلیل مدار معرفی می‌شود، روش گره و روش مش. ما ابتدا به دقت این دو روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس روش سوم را - که روش بهینه‌خصوصاً در حل مسایل تستی است - مورد کنکاش قرار می‌دهیم. از هم‌اکنون توصیه می‌کنم که خصوصاً روش سوم را به خوبی فرا بگیرید. پایهٔ درس ما تا انتها بر همین مبانی تحلیل مدارهای مقاومتی استوار است.

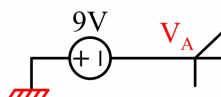


۱-۴-۱ روش تحلیل گره

هدف: پیدا کردن ولتاژ گره‌ها (به‌جز گرهٔ مبنا یا زمین که در آن $V=0$)
روش: KCL را در همهٔ گره‌ها (به‌جز گرهٔ زمین و گره‌های با ولتاژ معلوم) می‌نویسیم.



منظور شما از گره با ولتاژ معلوم چیست؟



سؤال خوبی است. مثلاً اگر ولتاژ یک سر منبع ولتاژی معلوم باشد،



شکل (۴۳-۱) یک منبع ولتاژ با یک سر زمین

ولتاژ سر دیگرش هم معلوم است دیگر!

مثلاً در شکل (۴۳-۱) $V_A = -9V$ است.

حالا من یک سؤال می‌پرسم. آیا KCL زدن در گره‌های با ولتاژ معلوم غلط یا غیرضروری است؟



بدیهی است که KCL یک قانون است و همواره درست است. اما مگر هدف از KCL زدن در گره‌ها، یافتن ولتاژ آن

گره‌ها نبود؟!

اگر چنین است، پس KCL زدن در آن گره‌ها کاری بیهوده است.



می‌خواستم چند نکته مهم به شما بگویم، به یاد آن پیر مداری افتادم که در کلامی حکیمانه می‌فرمود: «نکات به

حل مسئله سرعت می‌بخشند.» از این به بعد هر وقت به یاد او افتادم، بدانید نکات بسیار مهمی در پیش است.



KCL را حتی المقدور بر حسب ولتاژ گره‌ها می‌نویسیم. یادتان باشد که یک مهندس برق باید دکترا KVL و KCL داشته باشد!!

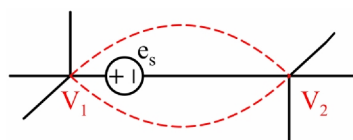
اگر گره زمین مشخص نبود، آن را یک سر منبع ولتاژ می‌گذاریم.



تا دیگر نوشتن KCL در آن سر دیگر غیرضروری باشد.

دقیقاً! و یک معادله از معادلات ما کاسته شود.

اگر بین دو گره با ولتاژ مجهول، منبع ولتاژ بود، برای راحتی، از نوشتن KCL در گره مرکب یا سوپرگره استفاده می‌کنیم. باز یک معادله از معادلات ما کاسته می‌شود.



شکل (۴۴-۱) یک منبع ولتاژ با دو گره مجهول

بچه‌ها اجازه بدین خیالتون رو راحت کنم؛ اصلاً اگر به یک

کودک ۵ ساله یک خودکار بدهید و بگویید که یک شکل بسته روی مدار بکش؛ آن شکل بسته یک گره است. مستقل از اینکه داخلش چیه! و گاهی ممکنه این کودک ۵ ساله حل مسئله رو خیلی ساده‌تر کنه!



در شکل (۴۴-۱) ملاحظه می‌شود که:

$$V_1 - V_2 = e_s$$

(۱۸-۱)

رابطه بالا را که در یک مستطیل قرار دارد، با عنوان رابطه مستطیلیه می‌شناسیم!

پس خلاصه KCL در گره مرکب چه شد؟



www.PowerEn.ir

ابتدا به کمک رابطه مستطیلیه ولتاژ یکی از گره‌ها را برحسب دیگری می‌نویسیم؛ سپس کل نقطه‌چین نشان داده

شده در شکل (۴۴-۱) را در حکم یک گره (گرهٔ ورم کرده!) در نظر می‌گیریم، و برایش KCL می‌زنیم.



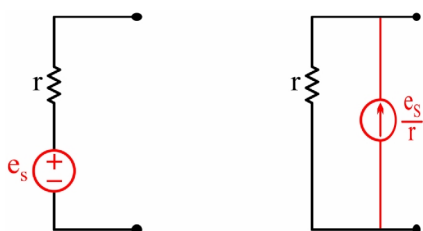
خُب اگر منبع جریان بود، چه می‌کنیم؟



سؤال خوبی است؛ البته اگر سؤال خیلی خوبی هم نباشد، پاسخ خیلی خوبی خواهد داشت! در روش گره که مبنای آن

KCL

است، به منبع جریان علاقه‌مندیم. چراکه کار کردن با منبع جریان در KCL راحت است، برای همین، ترکیب‌های به صورت شکل (۴۵-۱ الف) را به صورت (۴۵-۱ ب) تبدیل می‌کنیم.

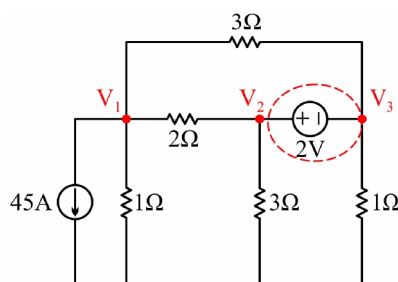


شکل (۴۵-۱) مدارهای معادل الف: تونن و ب: نورتن

عجله نکنید، به زودی در مورد مدارهای معادل تونن و نورتن به تفصیل صحبت می‌کنیم.



۶- در مدار زیر پس از تحلیل مقادیر V_1 و V_2 و V_3 را پیدا کنید.



شکل (۴۶-۱) مدار تمرین ۶

برای حل، در نگاه اول سه معادله سه مجهول داریم ولی بین گره‌های V_2 و V_3 ، منبع ولتاژ ملاحظه می‌شود. پس:



گرهٔ مرکب و رابطهٔ مستطیلیه ...

PowerEn.ir

پس دست به کار می‌شویم!



رابطه مستطیلیه $V_2 - V_3 = 2^V$

$$\begin{cases} \text{KCL در گره ۱} : & V_1 + \frac{V_1 - V_3 - 2}{2} + \frac{V_1 - V_3}{3} + 45 = 0 \\ \text{KCL در گره مرکب} : & \frac{V_3 + 2 - V_1}{2} + \frac{V_3 + 2}{3} + V_3 + \frac{V_3 - V_1}{3} = 0 \end{cases}$$

و از حل این، دو معادله دو مجهول، مقادیر حاصل می‌شوند!

جالب بود! شما هنگام نوشتن معادلات به زبان می‌گفتید: V_2 ولی با دست می‌نوشتید: $V_3 + 2$ (به کمک رابطه



مستطیلیه!) و این کار، سرعت را زیاد می‌کرد!



شکل (۴۷-۱) یک چشم خوب باز شده !!!

قبل از آن که سراغ مسئله بعدی برویم، یک حرف بسیار واضح ولی



در عین حال پر اهمیت باید بگوییم. ببینید فرق یک مسئله تستی با تشریحی در آن است که در یک تست پاسخ جلوی چشم شماست، فقط باید چشمتان را خوب باز کنید.

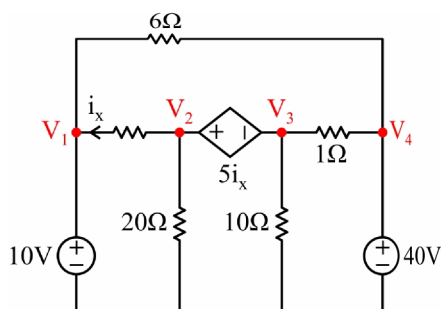
مثلاً در همین مسئله، اگر دقت کنید، گزینه‌ای درست است که در آن رابطه زیر برقرار باشد:

$$V_2 - V_3 = 2$$

مستقل از آن که این V_2 و V_3 چه مقادیری هستند.

البته کاربرد چشم خوب باز شده در اینجا بسیار ساده و پیش پا افتاده بود. به زودی در مسایل تستی دشوار از آن بهره‌های اساسی خواهیم برد! به عبارت دیگر چشم را باید شست؛ جور دیگر باید دید!

۷- ولتاژهای V_1 و V_2 و V_3 و V_4 را پیدا کنید.



شکل (۴۸-۱) مدار تمرین ۷

به نظر شما اولین قدم در حل این مسئله، چه باید باشد؟



www.PowerEn.ir

اینکه i_x را (که منبع وابسته به آن مربوط است) برحسب متغیرهای مطلوبمان (مثلاً در این مسئله ولتاژها) بنویسیم.



کاملاً درست است؛ تا بی خودی متغیر اضافی ایجاد نشود.



پس می نویسیم:

$$i_x = \frac{V_2 - V_1}{5}$$

$$V_1 = 10^V \text{ و } V_4 = 40^V$$

آیا اشکالی دارد که از همین ابتدا بنویسیم:



نه تنها اشکالی ندارد، بلکه کاملاً عاقلانه و لازم است.

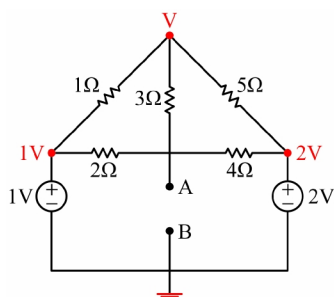


حالا در گره مرکب V_2 و V_3 ، یک KCL می زنیم. (شروع از رابطه مستطیلیه !)

$$V_2 - V_3 = 5i_x = 5 \times \frac{V_2 - V_1}{5} = V_2 - V_1$$

$$V_3 = V_1 = 10^V$$

$$\text{KCL در گره مرکب: } \frac{V_2 - 10}{5} + \frac{V_2}{20} + \frac{10}{10} + \frac{10 - 40}{1} = 0 \Rightarrow V_2 = 124^V$$



شکل (۴۹-۱) مدار تمرین ۸

۸- در صورتی که شاخه AB را اتصال کوتاه کنیم، چه جریانی

از آن می گذرد؟



اگر شاخه AB را اتصال کوتاه کنیم و نقطه B را زمین در نظر

بگیریم، فقط یک گره با ولتاژ مجهول باقی می ماند. (گره بالایی مدار) در آن گره KCL می زنیم:



$$\text{KCL: } V - 1 + \frac{V}{3} + \frac{V - 2}{5} = 0 \Rightarrow V = \frac{21}{23} \text{ V}$$

حال برای جریان شاخه AB باید سه جریان را حساب کرده و سپس جمع کنیم:

$$i_{AB} = \frac{1-0}{2} + \frac{2-0}{4} + \frac{\frac{21}{23}-0}{3} = \frac{30}{23} \text{ A}$$

PowerEn.ir



تا این جافعلاً برای روش گره کافی است؛ به سراغ روش دوم می رویم



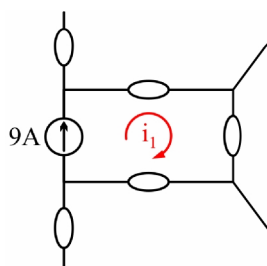
۲-۴-۱ روش تحلیل مش

هدف: پیدا کردن جریان مش‌ها

روش: KVL را در همهٔ مش‌ها (به جز مش بیرونی و مش‌های با جریان معلوم) می‌نویسیم.



منظور از مش با جریان معلوم چیست؟



یعنی هرگاه در یک مش، منبع جریان مستقل وجود داشته باشد؛



البته به گونه‌ای که بتوان مقدار جریان مش را با یک نگاه به دست آورد.

شکل (۵۰-۱) مش با جریان معلوم

مثلاً در شکل (۵۰-۱) جریان مش i_1 مشخص است و دیگر نیازی به KVL زدن در آن حلقه نیست، هرچند این KVL غلط نیست ولی کاری بی‌فایده است.

آیا در اینجا مشابه قبل که گره مرکب داشتیم، مش مرکب نیز معنی دارد؟

:

حتماً! چرا که این روش دوگان روش گره است. با توجه به مفاهیم دوگانی خود شما حدس می‌زنید که در چه صورتی



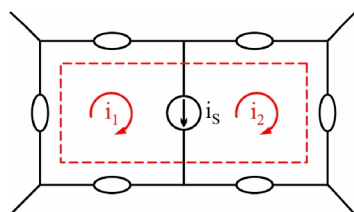
مش مرکب داریم؟



وقتی بین دو مش با جریان مجهول، یک منبع جریان باشد!



www.PowerEn.ir



شکل (۱-۵۱) مش مرکب

و آن گاه چه می‌کنیم؟



ابتدا به کمک رابطه مستطیلیه! جریان یکی از مش‌ها را برحسب



جریان مش همسایه می‌نویسیم؛ سپس کل دو مش همسایه را در حکم یک مش در نظر می‌گیریم و برایش KVL می‌زنیم.

و در این جا رابطه مستطیلیه به این صورت است:



$$i_1 - i_2 = i_s$$

(۱-۱۹)

تا دیر نشده، چند مفهوم کوچک را برای دانشجویانی که کمی دچار فراموشی شده‌اند! یادآوری می‌کنم.

مش: ساده‌ترین حلقه‌ای که شاخه‌ای درونش نباشد.

جریان مش: یک جریان فرضی با جهت دلخواه - مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت - است که از همه شاخه‌های درون مش می‌گذرد.

آیا منظور از جریان فرضی را می‌فهمید؟

یعنی مثلاً در شاخه‌ای که بین دو مش مشترک باشد، جریان واقعی برابر تفاضل جریان مش‌هاست.



حالا کمی در مورد KVL حرف بزنیم، چرا که مینا در این روش:



KVL

است.

ببینید، در این روش دو جهت داریم؛ یکی جهت جریان و یکی جهت حرکت در حلقه‌ها. اگر هنگام حرکت در مش از سر منفی منبع ولتاژ وارد شویم، مقدار $-E_s$ منظور می‌کنیم و اگر از سر مثبت منبع ولتاژ وارد شویم، E_s قرار می‌دهیم. و اما در مورد مقاومت‌ها (و به عبارتی امپدانس‌ها):

PowerEn.ir



اگر هنگام حرکت، هم جهت جریان بودیم، مقدار $+RI$ را در نظر می گیریم و اگر در خلاف جهت جریان در حال

حرکت بودیم، $-RI$ قرار می دهیم.



و اگر به منبع جریان برخوردیم چطور؟

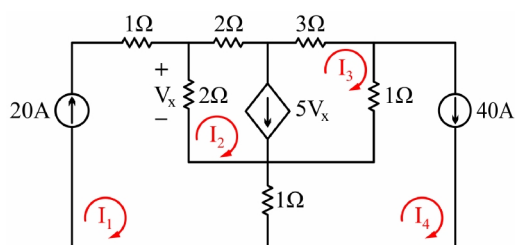


واضح است، چراکه در این روش به منبع ولتاژ علاقه مند هستیم! پس مدارهای به شکل (۴۵-۱) (ب) را به صورت

ترکیب (۴۵-۱) الف) تبدیل می کنیم.



۹- جریان های I_1 تا I_4 را محاسبه کنید.



شکل (۵۲-۱) مدار تمرین ۹

ظاهراً این مدار چهار مش دارد؛ یعنی چهار معادله، چهار مجهول، اما با نگاهی ساده داریم:

$$I_1 = 20 \text{ A} \quad , \quad I_4 = 40 \text{ A}$$

$$V_x = 2(20 - I_2)$$

و برای رابطه مستطیلیه !:

$$I_2 - I_3 = 5V_x \Rightarrow \boxed{I_3 = 11I_2 - 200}$$

حالا در مش مرکب (۲ و ۳) KVL می زنیم:

$$\text{KVL} : 2I_2 + 3(11I_2 - 200) + 1(11I_2 - 200 - 40) + 2(I_2 - 20) = 0$$

یعنی یک معادله یک مجهول 😊 پس I_2 و در نتیجه I_3 معلوم شد ...

حالا می خواهیم راجع به یک روش جدید و به عبارتی من درآوردی! با هم حرف بزنیم.

ببینید، روش‌های گره و مش روش‌های استاندارد هستند که ممکن است بهترین روش برای حل یک مسئله نباشند؛ اما به هر حال متدهای سنتی تحلیل مدار هستند. روش بهینه ما یک اسم سرخ‌پوستی^۱ دارد:



۱-۳-۴ روش KCL بازی؛ و سپس KVL در حلقه خوب!

عملکرد ما در این روش از نامش پیداست. ابتدا KCL بازی می‌کنیم و سپس در حلقه یا حلقه‌های خوب KVL

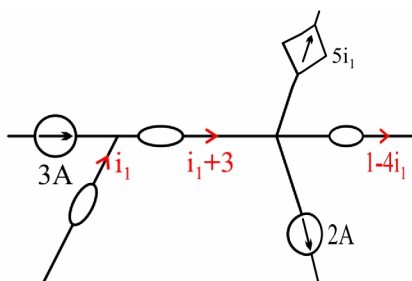


می‌زنیم. می‌دانید یعنی چه؟

KCL بازی یعنی با جریان‌های واقعی روی شکل خود مدار بازی

می‌کنیم؛ یعنی جریان شاخه‌ها را روی شکل مدار مشخص می‌کنیم.

مثلاً این‌جوری:



شکل (۱-۵۳) نمونه‌ای برای KCL بازی

و حال واضح است که حلقه خوب به حلقه‌ای گفته می‌شود که با KVL زدن در آن، جریان مجهول معلوم شود؛ یعنی دارای کمترین جریان‌های مجهول باشد.

ضمناً حلقه خوب، حلقه‌ای است که حتی‌المقدور شامل یک عنصر نباشد. خودتان حدس بزنید!

قطعاً منبع جریان، چراکه ولتاژ منبع جریان مجهول است و این از خوبی حلقه خوب می‌کاهد



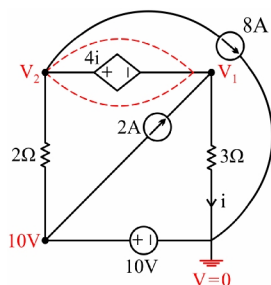
عالی است!



حال بهترین راه برای فهم این روش، حل تعدادی مسئله نمونه است.

۱- در فرهنگ ما ممکن است نام کسی «شجاع» باشد، اما با دیدن یک سوسک جان به جان آفرین تسلیم می‌کند؛ ولی در فرهنگ سرخ‌پوستی وقتی اسم کسی را «درازقد فریادکش» می‌گذارند، یعنی قطعاً قد بلندی دارد و دائماً فریاد سر می‌دهد. به نظر من اسم‌های بامسمّا بهترند!

www.PowerEn.ir



شکل (۵۴-۱) مدار تمرین ۱۰- روش گره

۳-۱۰- جریان i چند آمپر است؟



ابتدا به روش گره:



گره زمین را سمت راست منبع ولتاژ می‌گیریم، ولتاژ سمت چپ برابر ۱۰ ولت شده، حالا ۲ گره با ولتاژ مجهول داریم

(V_1 و V_2) که بین آن‌ها منبع ولتاژ است. ابتدا داریم:

$$i = \frac{V_1}{3}$$

و رابطه مستطیلیه!

$$V_2 - V_1 = 4i = 4 \frac{V_1}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{7}{3} V_1$$

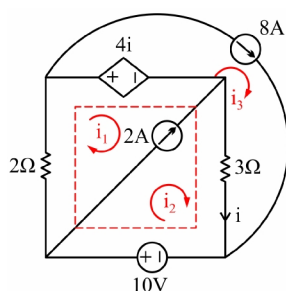
و در نهایت KCL در گره مرکب:

$$\text{KCL: } \frac{\frac{7}{3} V_1 - 10}{2} + 8 - 2 + \frac{V_1}{3} = 0$$

$$7V_1 - 30 + 36 + 2V_1 = 0 \Rightarrow 9V_1 = -6 \Rightarrow V_1 = -\frac{2}{3} \text{ V}$$

و بالاخره برای i داریم:

$$i = \frac{V_1}{3} = -\frac{2}{9} \text{ A}$$



شکل (۵۵-۱) مدار تمرین ۱۰- روش مش



حالا به روش مش:



PowerEn.ir



www.PowerEn.ir

جریان i_3 که معلوم است و برای مش‌های ۱ و ۲ از KVL در مش مرکب بهره می‌گیریم:

ابتدا:

$$i_3 = 8 \text{ A}$$

$$i = i_2 - 8$$

و رابطه مستطیلیه:

$$i_2 - i_1 = 2 \Rightarrow \boxed{i_1 = i_2 - 2}$$

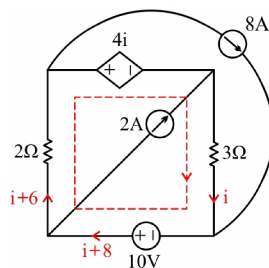
و حالا KVL در مش مرکب:

$$\text{KVL} : 4(i_2 - 8) + 3(i_2 - 8) - 10 + 2(i_2 - 2) = 0$$

$$4i_2 - 32 + 3i_2 - 24 - 10 + 2i_2 - 4 = 0 \Rightarrow 9i_2 = 70 \Rightarrow i_2 = \frac{70}{9}$$

و سرانجام برای i داریم:

$$i = i_2 - 8 = -\frac{2}{9} \text{ A}$$



ببینید این مسئله به دو روش گره و مش حل شد؛ هر دو روش

هم برای این مثال روش‌های خیلی خوبی بودند، چراکه به یک معادله یک مجهولی تبدیل شدند، با این حال، حتی همین مثال هم یک تبلیغ خوبی برای روش «KCL بازی و KVL در حلقه خوب» است. این مدار را به روش ابتکاری حل می‌کنیم:

شکل (۱-۵۶) مدار تمرین ۱۰ روش KCL بازی،
KVL در حلقه خوب!

اول روی شکل مدار، با جریان‌های واقعی KCL بازی می‌کنیم؛ سپس در حلقه مشخص شده KVL می‌زنیم:

$$\text{KVL} : 4i + 3i - 10 + 2(i + 6) = 0 \rightarrow 9i + 2 = 0 \Rightarrow i = -\frac{2}{9} \text{ A}$$

ملاحظه می‌کنید که این روش چقدر کار را ساده می‌کند! بعداً چندین مثال دیگر با این روش حل خواهیم کرد.



روش بهینه:

واضح است که در مدارهای با گره کمتر، روش گره و در مدارهای با مش کمتر، روش مش، روش بهینه است.

PowerEn.ir



و برای آدم‌های باهوش! روش ابتکاری KCL بازی و سپس KVL در حلقه خوب توصیه می‌شود.



دقیقاً! و گاهی هم روش ابتکاری KVL بازی و سپس KCL در گره خوب.

خوب دقت کنید، یک‌بار دیگر تکرار می‌کنم:

۴-۴-۱ روش KVL بازی و سپس KCL در گره خوب!



وحتماً KVL بازی یعنی مشخص کردن ولتاژ گره‌ها روی خود شکل مدار؛ یعنی همین‌جور روی گره‌ها قدم می‌زنیم و

ولتاژ آن‌ها را با اعداد معلوم یا مقادیر پارامتری مجهول مشخص می‌کنیم و چشمانمان را باز کرده و در یک گره خوب که البته گاهی گره مرکب هست، KCL می‌زنیم تا مجهول مثل آب خوردن به دست بیاید.

۵-۱ مدارهای متقارن

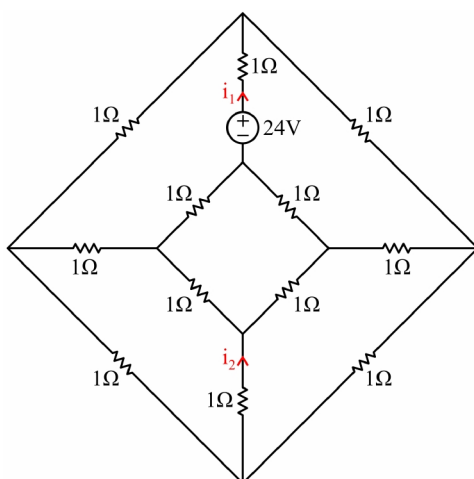


گاهی توجه به تقارن در تحلیل مدار، کار را بسیار ساده‌تر می‌کند. (یعنی از تعداد مجهولات می‌کاهد).

روش تشخیص: واضح است دیگر، فقط باید چشمان را خوب باز کنیم. نباید تخفیف دهیم، متقارن یعنی در مدار یک آینه باشد، حتی اگر پلاریته یک منبع، تقارن را به هم بزند، دیگر متقارن نیست.



۱۱- در مدار زیر جریان‌های i_1 و i_2 را پیدا کنید.



شکل (۵۷-۱) مدار تمرین ۱۱

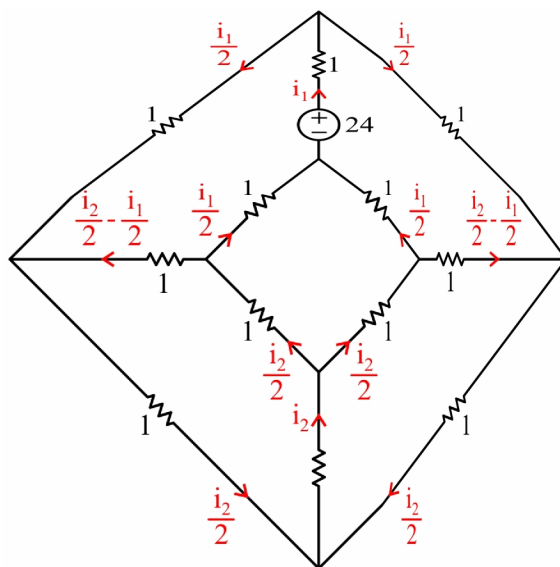
حالا پیشنهاد بدهید.



www.PowerEn.ir

اولاً مدار نسبت به محور قائم وسطی متقارن است؛ پس جریان i_1 به دو جریان مساوی $\frac{i_1}{2}$ تقسیم می‌شود.

همچنین در پایین مدار، دو جریان $\frac{i_2}{2}$ خواهیم داشت، با این کار در دو مش سمت راستی یا سمت چپی، دو جریان i_1 و i_2 مجهول بوده و با KVL مقادیرشان مشخص می‌شود.



شکل (۵۸-۱) استفاده از تقارن در تقسیم جریان‌ها

و داریم:

$$\text{KVL: } \begin{cases} i_1 + \frac{i_1}{2} - \frac{i_2}{2} + \frac{i_1}{2} + \frac{i_1}{2} = 24 \\ i_2 + \frac{i_2}{2} + \frac{i_2}{2} - \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow i_1 = 10 \text{ A} , i_2 = 2 \text{ A}$$

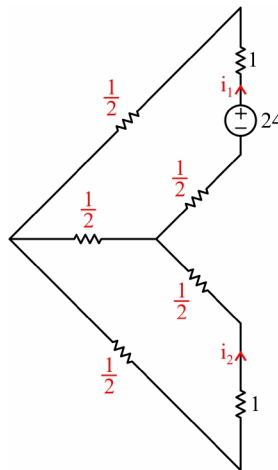
احسنت! من خلاصه می‌کنم:



در یک مدار متقارن، وقتی جریان i در محور تقارن مدار به n شاخه یکسان می‌رسد، سهم هر شاخه برابر $\frac{i}{n}$ می‌شود. و این یک سبک حل مسایل شامل مدارهای متقارن است.

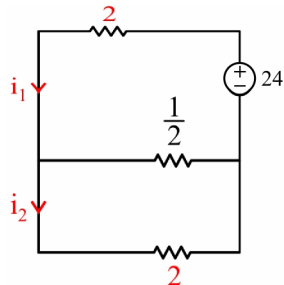


اما من پیشنهاد بهتری دارم؛ می‌گوییم چون مدار متقارن است، آن را از وسط (یعنی محور تقارنش) تا کنیم و روی نیمه دیگر قرار دهیم. در این آینه هر گره‌ای روی تصویر خود قرار می‌گیرد، چون آن گره‌ها، هم‌پتانسیل هستند. این کار مجاز است. واضح است که مقاومت‌های R متناظر که روی هم قرار می‌گیرند، برابر $\frac{R}{2}$ می‌شوند. $(R \parallel R)$.



شکل (۱-۵۹) استفاده از تقارن! در مدار متقارن

و باز این مدار ساده و ساده‌تر می‌شود، به طوری که:



شکل (۱-۶۰) مدار ساده‌شده

$$i_1 = \frac{24}{2 + \frac{1}{2.5}} = 10 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{0.5}{2.5} \times i_1 = 2 \text{ A}$$

و داریم:

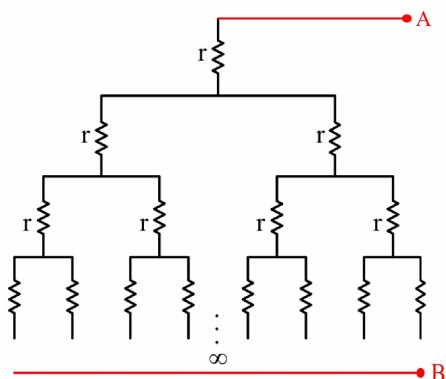


به عبارت دیگر، در هر مدار متقارن، می‌توان گره‌های هم‌پتانسیل را روی هم قرار داد؛ یعنی می‌توان مدار را روی محور تقارنش تا کرد و معمولاً این روش سریع‌تر ما را به پاسخ می‌رساند. در مجموع دیدید که توجه به تقارن، یک مدار شامل تعداد گره‌ها و مش‌های زیاد را با حداقل معادلات ممکن تحلیل می‌کند. فقط یادمان باشد که هنگام تا کردن مدار، کاری به عناصر روی محور تقارن نداریم؛ ولی سایر عناصر با جفت یکسان خود موازی می‌شوند؛ یعنی مقاومت‌ها و سلف‌ها نصف و خازن‌ها دو برابر شده و همین‌طور منابع جریان هم دو برابر می‌شوند اما منابع ولتاژ هیچ تغییری نمی‌کنند. این تا کردن کار خیلی خوبی است، دست کم کار ما را نصف می‌کند.



۱۲- مقاومت معادل در مدار زیر چقدر است؟

www.PowerEn.ir

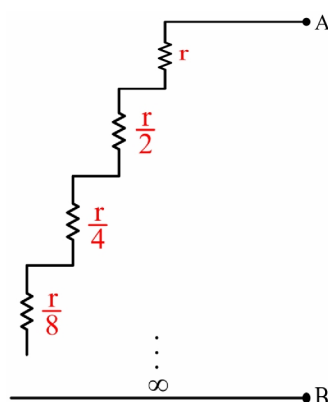


شکل (۶۱-۱) مدار تمرین ۱۲

باز مدار را روی محور وسطی (محور تقارنش) تا می‌کنیم. جالب اینکه باز یک مدار متقارن دیگر به وجود می‌آید و



همین‌طور تا بی‌نهایت، این عمل را تکرار می‌کنیم تا در نهایت به مدار زیر برسیم:



شکل (۶۲-۱) بی‌نهایت بار تا شده مدار تمرین ۱۲

و حالا به راحتی می‌گوییم:

$$R_{AB} = r + \frac{r}{2} + \frac{r}{4} + \frac{r}{8} + \dots = r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2r$$

البته این مسئله را هم می‌توانستیم از تقسیم جریان در شاخه‌های محور تقارن حل کنیم.

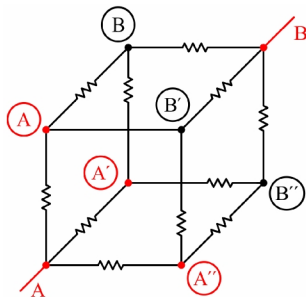
PowerEn.ir



همین طور است، ولی معمولاً قرار دادن گره‌های هم‌پتانسیل روی هم بهتر است. باز یک مثال دیگر:



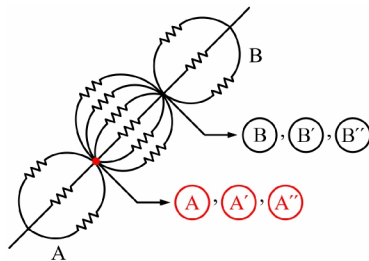
۱۳- مقاومت معادل پیدا کنید. (همه مقاومت‌ها برابر r است.)



شکل (۶۳-۱) مدار تمرین ۱۳

در ابتدا برای حل این مسئله هیچ‌گونه مقاومت سری یا موازی، در هیچ شرایطی دیده نمی‌شود، اما اگر دقت کنیم، گره‌های A ، A' و A'' با یکدیگر هم‌پتانسیل هستند؛ همچنین گره‌های B ، B' و B'' .

پس آن‌ها را روی هم قرار می‌دهیم. مدار به شکل زیر می‌شود:
(تجسم فضایی کنید!)



شکل (۶۴-۱) ساده شده مدار تمرین ۱۳



حال همچون نوشیدن آب گوارا می‌گوییم:

$$R_{AB} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5r}{6}$$



www.PowerEn.ir

PowerEn.ir