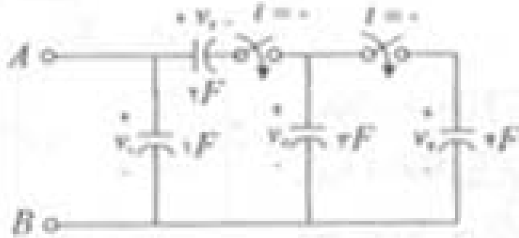
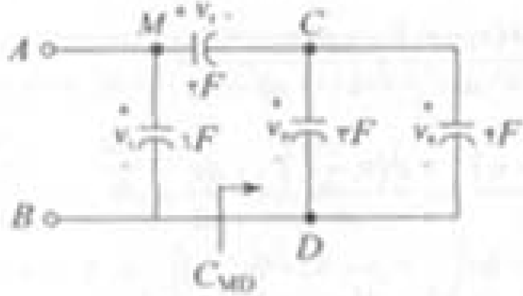
مسئله ۱



$v_1(0^-)=1V$ ، $v_2(0^-)=2V$ ، $v_3(0^-)=3V$ و $v_4(0^-)=4V$ در لحظه $t=0$ کلیدها بسته می شوند. ظرفیت خازن معادل دو سر A و B چیست.

شکل مسئله ۱

حل: بعد از بسته شدن کلید ها مدار به صورت زیر خواهد بود.



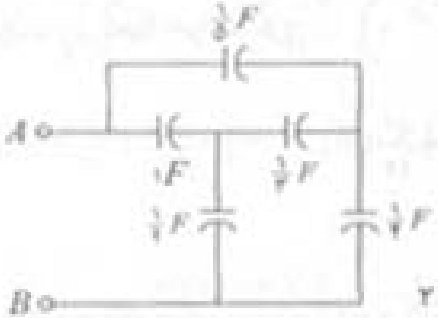
$$\text{کل } q = C_1v_1(0^-)+C_2v_2(0^-)+C_3v_3(0^-)+C_4v_4(0^-)=1+4+9+16=30 \rightarrow q_1+q_{MD}=30$$

$$v_1=v_{MD}\rightarrow \frac{q_1}{C_1}=\frac{q_{MD}}{C_{MD}} \rightarrow \frac{q_1}{1}=\frac{q_{MD}}{\frac{(3+4)\times 2}{3+4+2}} \rightarrow q_{MD}=\frac{14}{9}q_1 \rightarrow C_{MD}=\frac{14}{9}F$$

$$\rightarrow \begin{cases} q_1+q_{MD}=30 \\ q_{MD}=\frac{14}{9}q_1 \end{cases} \rightarrow q_1=\frac{270}{23} \rightarrow v_{AB}(0)=v_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{270}{23}V$$

$$C_{AB}=C_1+C_{MD}=1+\frac{14}{9}=\frac{23}{9}F$$

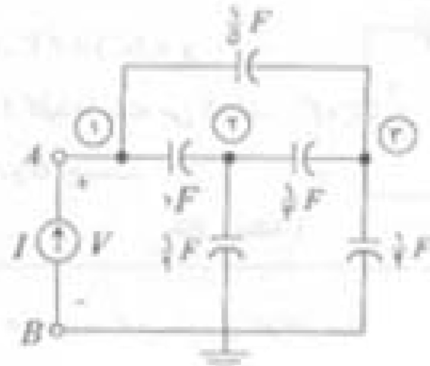
مسئله ۲



- $C_{AB}=?$ (خازنها دارای بار اولیه نمی باشند)
- خازنهای فوق را با مقاومت هایی که رسانایی آنها همان ظرفیت خازنها باشد تعویض می کنیم $R_{AB}=?$.

شکل مسئله ۲

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایش I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



KCL برای گره ۱ $\rightarrow -I + \dfrac{d(v_1 - v_2)}{dt} + \dfrac{1}{5}\dfrac{d(v_1 - v_3)}{dt} = 0$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow \dfrac{d(v_2 - v_1)}{dt} + \dfrac{1}{3}\dfrac{d(v_2 - v_3)}{dt} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_2}{dt} = 0$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow \dfrac{1}{5}\dfrac{d(v_3 - v_1)}{dt} + \dfrac{1}{3}\dfrac{d(v_3 - v_2)}{dt} + \dfrac{1}{4}\dfrac{dv_3}{dt} = 0$

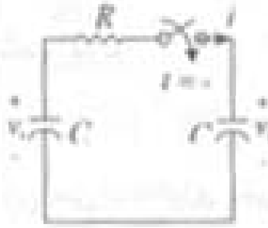
$$\rightarrow \begin{cases} 6\dfrac{dv_1}{dt} - 5\dfrac{dv_2}{dt} - \dfrac{dv_3}{dt} = 5I \\ 6\dfrac{dv_1}{dt} - 11\dfrac{dv_2}{dt} + 2\dfrac{dv_3}{dt} = 0 \\ 12\dfrac{dv_1}{dt} + 20\dfrac{dv_2}{dt} - 47\dfrac{dv_3}{dt} = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 5I & -5 & -1 \\ 0 & -11 & 2 \\ 0 & 20 & -47 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -1 \\ 6 & -11 & 2 \\ 12 & 20 & -47 \end{vmatrix}} = \frac{53}{24}I$$

$$\rightarrow I = \frac{24}{53}\frac{dV}{dt} \rightarrow C_{AB} = \frac{24}{53}F$$

حال اگربجای خازنهامقاومتهایی که رسانایی آنها همان ظرفیت خازنها باشدتعویض کنیم،واضح است که معادلات بصورت زیر تغییر خواهند کرد.

$$\begin{cases} 6v_1 - 5v_2 - v_3 = 5I \\ 6v_1 - 11v_2 + 2v_3 = 0 \\ 12v_1 + 20v_2 - 47v_3 = 0 \end{cases} \rightarrow V = v_1 = \frac{53}{24}I \rightarrow R_{AB} = \frac{V}{I} = \frac{53}{24}\Omega$$

مسئله ۳



شکل مسئله ۳

$v_1(0^-) = V_1$ و $v_2(0^-) = V_2$

الف- $i(t)$ برای $t \ge 0$ وانرژی تلف شده درفاصله $(0,T)$ راحساب کنید.

ب- $v_1, v_2 = ?$ حد v_1 و v_2 برای $t \to \infty$ راتعیین کنید.برای $t \to \infty$ انرژی ذخیره شده در خازنها و انرژی تلف شده در مقاومت را نیز حساب کنید. چه رابطه ای میان انرژی ها وجود دارد.

پ- اگر $R \to 0$ چه اتفاقی رخ می دهد و توجیه مقادیر بدست آمده در قسمت (ب) چیست.

حل : الف ـ با توجه به مقادیر اولیه داده شده و با توجه به شکل مسئله داریم :

$$i(0) = \frac{v_1(0) - v_2(0)}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad , \quad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{i}{c} \quad , \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{i}{c}$$

$$KVL \rightarrow -v_1 + iR + v_2 = 0 \rightarrow -v_1 - \frac{1}{c}\int(-i)\,dt + iR + v_2 + \frac{1}{c}\int i\,dt = 0$$

$$\rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{2}{Rc}i = 0 \rightarrow i(t) = ke^{-\frac{2}{Rc}t}$$

$$i(0) = \frac{V_1 - V_2}{R} \rightarrow \frac{V_1 - V_2}{R} = k \rightarrow i(t) = \frac{V_1 - V_2}{R}e^{-\frac{2}{Rc}t}\ ,\ t \ge 0$$

$$W_R(0,T) = \int_0^T Ri^2(t)\,dt = \int_0^T R\left(\frac{V_1 - V_2}{R}\right)^2 e^{-\frac{4}{Rc}t}\,dt = \frac{C(V_1 - V_2)^2}{4}\left(1 - e^{-\frac{4}{Rc}T}\right)$$

ب ـ با توجه به شکل مسئله داریم :

$$v_1 = V_1 + \frac{1}{C}\int_0^t(-i)\,dt = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{RC}\int_0^t e^{-\frac{2}{Rc}t}\,dt = \frac{V_1 - V_2}{2}e^{-\frac{2}{Rc}t} + \frac{V_1 + V_2}{2} \rightarrow \lim_{t\to\infty} v_1 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

$$v_2 = V_2 + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{RC}\int_0^t e^{-\frac{2}{Rc}t}\,dt = \frac{V_1 - V_2}{2}e^{-\frac{2}{Rc}t} + \frac{V_1 + V_2}{2} \rightarrow \lim_{t\to\infty} v_2 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

$$W_{C_1}(\infty) = \frac{1}{2}C\left(\lim_{t\to\infty} v_1\right)^2 = \frac{1}{8}C(V_1 + V_2)^2 \quad , \quad W_{C_2}(\infty) = \frac{1}{2}C\left(\lim_{t\to\infty} v_2\right)^2 = \frac{1}{8}C(V_1 + V_2)^2$$

انرژی تلف شده در مقاومت به ازای $t \to \infty$ برابراست با :

$$W_R(0,\infty) = \lim_{T\to\infty}\frac{C(V_1 - V_2)^2}{4}\left(1 - e^{-\frac{4}{Rc}T}\right) = \frac{1}{4}C(V_1 - V_2)^2$$

انرژی ذخیره شده اولیه در خازنها برابر است با :

$$W_{C_1}(0)+W_{C_2}(0)=\frac{1}{2}CV_1^2+\frac{1}{2}CV_2^2$$

همچنین داریم :

$$W_{C_1}(\infty)+W_{C_2}(\infty)+W_R(0,\infty)=\frac{1}{2}C\left(V_1+V_2\right)^2+\frac{1}{2}C\left(V_1-V_2\right)^2=\frac{1}{2}CV_1^2+\frac{1}{2}CV_2^2$$

و این یعنی اینکه انرژی ذخیره شده درخازنها در ابتدای کار برابر انرژی نهایی ذخیره شده درخازنها بعلاوهٔ انرژی تلف شده در مقاومت می باشد.(اصل بقای انرژی)

پ ـ با قرار دادن $R\to 0$ داریم :

$$i(t)=0\ ,\ v_1(t)=v_2(t)=\frac{V_1+V_2}{2}\ ,\ W_R(0,\infty)=0$$

در این حالت انرژی تلف شده به صورت انرژی حرارتی مقاومت R نخواهد بود و این اتلاف انرژی بواسطه جریان ضربه ای بعد از بسته شدن کلید می باشد که در ادامه آن را بدست خواهیم آورد. بدین منظور انتگرال $i(t)$ را در فاصله ۰ تا t حساب می کنیم.

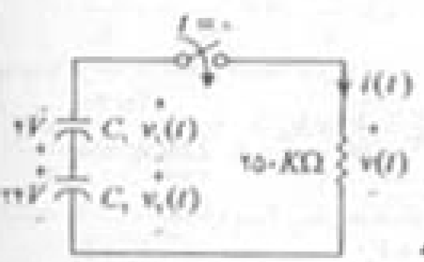
$$\int_0^t i(t')dt'=\int_0^t\frac{V_1-V_2}{R}e^{-\frac{t'}{RC/2}}dt'=2C\left(V_1-V_2\right)\left(1-e^{-\frac{t}{RC/2}}\right)$$

واضح است که اگر $R\to 0$ شود ، آنگاه $\int_0^t i(t')dt'=2C\left(V_1-V_2\right)$ شده و بنابر خاصیت تابع ضربه،

$$i(t)=2C\left(V_1-V_2\right)\delta(t)$$

می باشد که یک جریان ضربه با شدت $2C\left(V_1-V_2\right)$ در لحظه $t=0$ است.

مسئله ۴



شکل مسئله ٤

$v_1(0^-)=-4V$ ، $v_2(0^-)=24V$ ، $C_1=5\mu F$ و $C_2=20\mu F$.

الف- برای $t\ge 0^+$ ، $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ ، $v(t)$ و $i(t)$ را بیابید.

ب- انرژی ذخیره شده اولیه در خازنهای C_1 و C_2 را تعیین کنید.

پ- انرژی تلف شده در مقاومت $250K\Omega$ راتعیین کنید.آیا همه انرژی اولیه خازنها به مقاومت تحویل داده میشود.توضیح دهید.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله $i(0)=\frac{v_1(0)+v_2(0)}{250K\Omega}=\frac{20V}{250K\Omega}=80\mu A$ بوده و با نوشتن KVL در تنها حلقه مدار داریم .

$$-v_{1}-v_{2}+v=0 \rightarrow -۲۴-\frac{۱}{۲۰\times ۱۰^{-۶}}\int_{0}^{t} i(t)\,dt+۴-\frac{۱}{۵\times ۱۰^{-۶}}\int_{0}^{t} i(t)\,dt+۲۵۰\times ۱۰^{۳}\, i(t)=0$$

$$\rightarrow \frac{di(t)}{dt}+i(t)=0 \rightarrow i(t)=Ke^{-t}$$

$$i(0)=۸۰\ \mu A \rightarrow K=۸۰\times ۱۰^{-۶} \rightarrow i(t)=۸۰\times ۱۰^{-۶}e^{-t}$$

$$v(t)=۲۵۰\times ۱۰^{۳}\, i(t)=۲۰e^{-t}$$

$$v_{1}(t)=V_{1}+\frac{۱}{C}\int_{0}^{t}-i(t')\,dt'=-۴-\frac{۱}{۵\times ۱۰^{-۶}}\int_{0}^{t}۸۰\times e^{-t}\,dt=-۲۰+۱۶e^{-t}$$

$$v_{2}(t)=v(t)-v_{1}(t)=۲۰e^{-t}-\left(-۲۰+۱۶e^{-t}\right)=۲۰+۴e^{-t}$$

ب – انرژی ذخیره شده اولیه در خازنها بصورت زیر بدست می آید.

$$W_{1}(0)=\frac{۱}{۲}C_{1}v_{1}^{2}(0)=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۰^{-۶}\times (۴)^{2}=۴\times ۱۰^{-۵}\ W$$

$$W_{2}(0)=\frac{۱}{۲}C_{2}v_{2}^{2}(0)=\frac{۱}{۲}\times ۲۰\times ۱۰^{-۶}\times (۲۴)^{2}=۵۷۶\times ۱۰^{-۵}\ W$$

پ – انرژی کل ذخیره شده در مقاومت بصورت زیر بدست می آید.

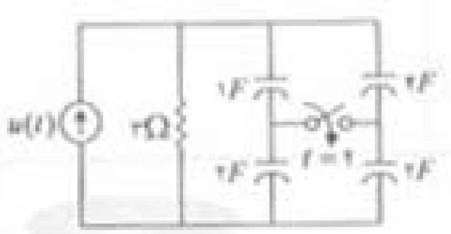
$$W(0,t)=\int_{0}^{t}Ri^{2}(t)=۲۵۰\times ۱۰^{۳}\int_{0}^{t}\left(۸۰\times ۱۰^{-۶}e^{-t}\right)^{2}=۸۰\times ۱۰^{-۵}\left(۱-e^{-۲t}\right)$$

$$W(0,\infty)=\lim_{t\to\infty}۸۰\times ۱۰^{-۵}\left(۱-e^{-۲t}\right)=۸۰\times ۱۰^{-۵}\ W$$

بنابرین همه انرژی ذخیره شده اولیه خازنها به مقاومت تحویل داده نمی شود.

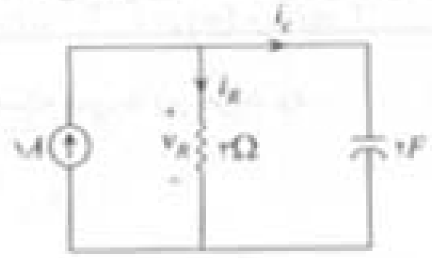
مسئله ۵

ولتاژ اولیه خازنها صفر است. ولتاژ مقاومت ۳ اهمی را برای تمام $t>0$ حساب کنید.



شکل مسئله ۵

حل: در فاصله $۲>t>0$، کلید باز بوده ، بنابراین $C_{eq}=\frac{۱\times ۲}{۱+۲}+\frac{۲\times ۴}{۲+۴}=۲F$ و مدار بصورت زیر خواهد بود.



می دانیم که خازن ابتدا اتصال کوتاه بوده و در نهایت مدار باز خواهد شد. بنابراین داریم :

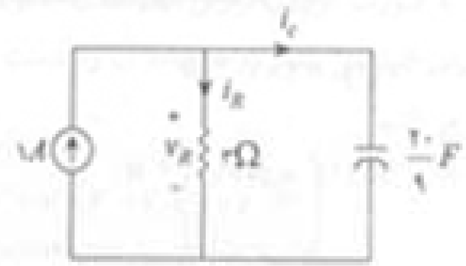
$$v_R(0)=0 \quad , \quad v_R(\infty)=3V \quad , \quad T=RC=6$$

$$\rightarrow v_R(t)=\left(v_R(0)-v_R(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_R(\infty)=(0-3)e^{-\frac{t}{6}}+3=3\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

و یا با فرض، $v_c(t)=a+be^{-\frac{t}{6}}$ و با اعمال شرایط فوق داریم:

$$\begin{cases} v_R(0)=0 \;\rightarrow\; a+b=0 \\ v_R(\infty)=3 \;\rightarrow\; a+0=3 \end{cases} \rightarrow a=3 \,,\, b=-3 \;\rightarrow\; v_R(t)=3\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

و برای $t>2$ ، کلید بسته بوده بنابراین $C_{eq}=\frac{(1+4)\times(2+2)}{(1+4)+(2+2)}=\frac{20}{9}$ و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$v_R(2)=3\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right)\Big|_{t=2}=0/77 \quad , \quad v_R(\infty)=3V \quad , \quad T=RC=\frac{20}{3}$$

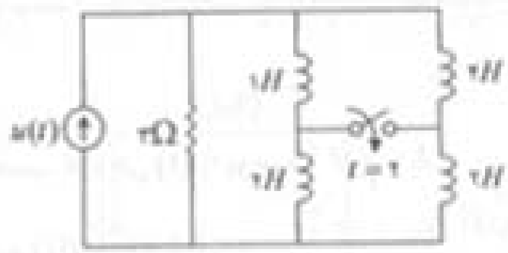
$$\rightarrow v_R(t)=\left(v_R(2)-v_R(\infty)\right)e^{-\frac{(t-2)}{T}}+v_R(\infty)=(0/77-3)e^{-\frac{(t-2)}{\frac{20}{3}}}+3=3-2/23e^{-0/15(t-2)}$$

$$\rightarrow v_R(t)=\begin{cases} 3\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right) & , \; 0\le t<2 \\ 3-2/23e^{-0/15(t-2)} & , \; t\ge 2 \end{cases}$$

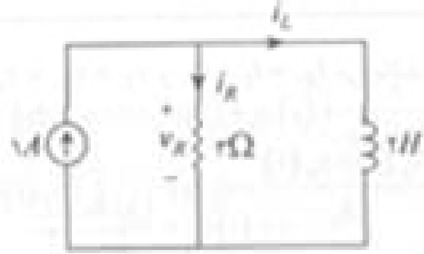
مسئله ۶

در شکل مسئله ۵ همه خازنها را با سلفهایی با اندوکتانس مساوی ظرفیت خازنها تعویض کرده و فرض کنید جریان اولیه همه سلفها صفر باشد. مسئله را بار دیگر حل کنید.

حل : در این حالت شکل مسئله بصورت زیر خواهد بود.



برای $2 > t > 0$، کلید باز می باشد، بنابراین $L_{eq} = \frac{(1+2)\times(4+2)}{(1+2)+(4+2)} = 2H$ بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.

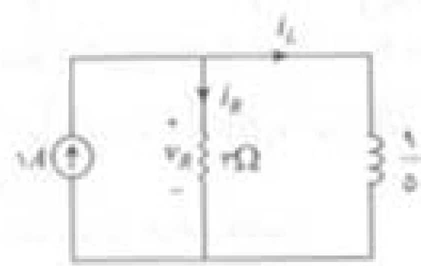


می دانیم که سلف در ابتدا مدار باز بوده و در نهایت اتصال کوتاه خواهد شد. بنابراین داریم :

$$v_R(0) = 3V \quad , \quad v_R(\infty) = 0 \quad , \quad T = \frac{L}{R} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \; v_R(t) = \left(v_R(0) - v_R(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + v_R(\infty) = (3-0)e^{-\frac{t}{\frac{2}{3}}} + 0 = 3e^{-\frac{3}{2}t}$$

برای $t > 2$، کلید بسته شده بنابراین $L_{eq} = \frac{1\times 4}{1+4} + \frac{2\times 2}{2+2} = \frac{9}{5}$ بوده و مدار بصورت زیر خواهد شد.

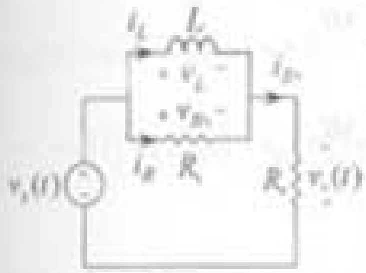


$$v_R(2) = 3e^{-1.5t}\Big|_{t=2} = 3e^{-3} = 0.15 \quad , \quad v_R(\infty) = 0V \quad , \quad T = \frac{L}{R} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \; v_R(t) = \left(v_R(2) - v_R(\infty)\right)e^{-\frac{(t-2)}{T}} + v_R(\infty) = 0.15e^{-\frac{5}{3}(t-2)}$$

$$\rightarrow \; v_R(t) = \begin{cases} 3e^{-\frac{3}{2}t} & , \; 0 \le t < 2 \\ 0.15e^{-\frac{5}{3}(t-2)} & , \; t \ge 2 \end{cases}$$

مسئله ۷



شکل مسئله ۷

- معادله دیفرانسیلی بر حسب خروجی $v_o(t)$ بنویسید. ($L = \frac{2}{3}H$ و $R_1 = 3\Omega$ و $R_2 = 6\Omega$ و $v_s(t) = e^{-\frac{9t}{2}}u(t)$)
- $i_L(0)$ را چنان تعیین کنید که خروجی $v_o(t)$ برای تمام زمانها صفر باشد.

حل : با توجه به شکل $v_L = v_{R_1} = v_s - v_o$ و $i_{R_2} = i_L + i_{R_1}$ می باشد. بنابراین داریم :

$$i_{R_2} - i_R - i_L = 0 \rightarrow \frac{v_o(t)}{R_2} - \frac{v_s(t) - v_o(t)}{R_1} - i_L(0) - \frac{1}{L}\int_0^t \big(v_s(t) - v_o(t)\big)dt = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_o(t)}{6dt} - \frac{d\big(v_s(t) - v_o(t)\big)}{3R_1dt} - \frac{3}{2}\big(v_s(t) - v_o(t)\big) = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_o(t)}{dt} + 3v_o(t) = \frac{2}{3}\frac{dv_s(t)}{dt} + 3v_s(t) = \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{2}\right)e^{-\frac{9t}{2}} + 3e^{-\frac{9t}{2}} \rightarrow \frac{dv_o(t)}{6dt} + 3v_o(t) = 0\ ,\ t \geq 0$$

با توجه به مدار واضح است که مقدار اولیه $v_o(t)$ به مقدار اولیه $i_L(t)$ و $v_s(t)$ بستگی دارد که بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ و جریان و قاعده جمع آثار آن را بدست می آوریم.

$$v_o(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}v_s(0) + R_2\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)i_L(0) = \frac{2}{3}v_s(0) + 2i_L(0) = \frac{2}{3} + 2i_L(0)$$

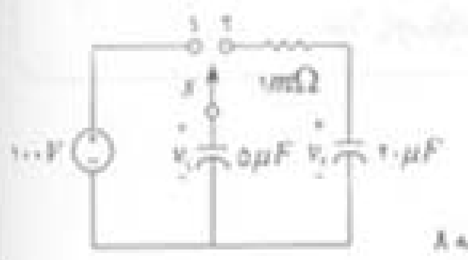
جواب آخرین معادله دیفرانسیل بدست آمده برابر است با :

$$v_o(t) = Ke^{-3t}\ ,\ v_o(0) = \frac{2}{3} + 2i_L(0) \rightarrow v_o(t) = \left[\frac{2}{3} + 2i_L(0)\right]e^{-3t}$$

می خواهیم که همواره $v_o(t) = 0$ باشد بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{2}{3} + 2i_L(0) = 0 \rightarrow i_L(0) = -\frac{1}{3}A$$

مسئله ۸



شکل مسئله ۸

- کلید S برای $t < 0$ در وضعیت ۱ بوده و در $t = 0$ به وضعیت ۲ می رود. v_1 و v_2 را برای $t > 0$ حساب کنید.

حل : از آنجا که کلید s به ازای $t<۰$ در وضعیت ۱ است لذا $v_۱(۰)=۱۰۰V$ و $v_۲(۰)=۰V$ بوده و به ازای $t>۰$ مدار بصورت زیر خواهد شد.

با نوشتن KVL برای تنها حلقه مدار داریم :

$$-v_۱+v_R+v_۲=۰$$

$$\to\ -\left(v_۱(۰)+\frac{۱}{۵\times۱۰^{-۶}}\int_۰^t -i(t')dt'\right)+۱\times۱۰^{۶}\,i(t)+v_۲(۰)+\frac{۱}{۲۰\times۱۰^{-۶}}\int_۰^t i(t')dt'=۰$$

$$\to\ \frac{۱}{۵}i(t)+\frac{di(t)}{dt}+\frac{۱}{۲۰}i(t)=۰\ \to\ \frac{di(t)}{dt}+\frac{۱}{۴}i(t)=۰$$

$$\to\ i(t)=Ke^{-۰/۲۵t}\ ,\ i(۰)=\frac{v_۱(۰)-v_۲(۰)}{۱\times۱۰^{۶}}=۱۰۰\mu A\ \to\ K=۱۰^{-۴}\ \to\ i(t)=۱۰^{-۴}e^{-۰/۲۵t}$$

$$\to\ v_۱(t)=v_۱(۰)+\frac{۱}{C_۱}\int_۰^t -i(t')dt'=۱۰۰+\frac{۱}{۵\times۱۰^{-۶}}\int_۰^t -۱۰^{-۴}e^{-۰/۲۵t'}dt$$

$$=۱۰۰+۸۰\left(e^{-۰/۲۵t}-۱\right)=۲۰+۸۰e^{-۰/۲۵t}$$

$$v_۲(t)=v_۲(۰)+\frac{۱}{C_۲}\int_۰^t i(t')dt'=۰+\frac{۱}{۲۰\times۱۰^{-۶}}\int_۰^t -۱۰^{-۴}e^{-۰/۲۵t'}dt'=۲۰\left(۱-e^{-۰/۲۵t}\right)$$

روش دوم : در این روش ولتاژ نهایی دو سر خازنها را بدست خواهیم آورد. به ازای $t\to\infty$ ، $v_۱=v_۲$ خواهد شد (زیرا باید $i=۰$ شود). بنابراین داریم.

$$\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{q_۲}{C_۲}\ \to\ \frac{q_۱}{۵}=\frac{q_۲}{۲۰}\ \to\ q_۲=۴q_۱$$

ازطرفی بنابر اصل بقای بار داریم :

$$q_۱+q_۲=C_۱v_۱(۰)=۵۰۰\mu c\ \to\ q_۱+۴q_۱=۵۰۰\mu c\ \to\ q_۱=۱۰۰\mu c$$

$$\to\ v_۱(\infty)=v_۲(\infty)=\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{۱۰۰\mu c}{۵\mu F}=۲۰V$$

و ثابت زمانی مدار برابر است با :

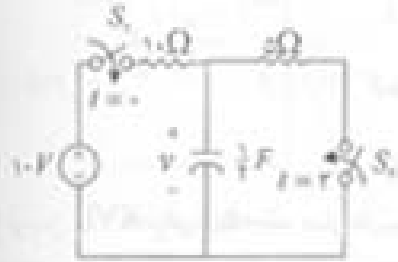
$$T=RC=۱\times۱۰^{۶}\,\frac{۵+۲۰}{۵+۲۰}\times۱۰^{-۶}=۴$$

$$\to\ v_۱(t)=\left(v_۱(۰)-v_۱(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_۱(\infty)=(۱۰۰-۲۰)e^{-\frac{t}{۴}}+۲۰=۸۰e^{-۰/۲۵t}+۲۰$$

$$\rightarrow v_c(t)=\left(v_c(0)-v_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_c(\infty)=\left(0-۲۰\right)e^{-\frac{t}{۴}}+۲۰=۲۰\left(۱-e^{-۰/۲۵t}\right)$$

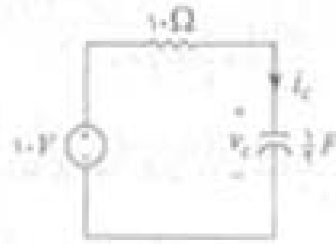
مسئله ۹

$v_c(0)=0$ ، $i_c(t)=?$ برای $t>0$.



شکل مسئله ۹

حل : برای $۲>t\geq 0$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

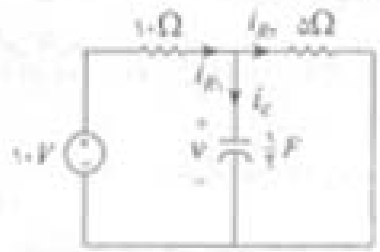


می دانیم که خازن ابتدا بصورت اتصال کوتاه و در نهایت بصورت مدار باز عمل می کند. بنابراین داریم:

$$i_c(0)=\frac{۱۰}{۱۰}=۱A \quad , i_c(\infty)=0 \quad , T=RC=۱۰\left(\frac{۱}{۲}\right)=۵$$

$$\rightarrow i_c(t)=\left(i_c(0)-i_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_c(\infty)=e^{-\frac{t}{۵}}=e^{-۰/۲t}$$

و برای $t\geq ۲$ مداربصورت زیر خواهد شد.



$$i_c\left(۲^{+}\right)=i_c\left(۲^{-}\right)+i_{R_2}\left(۲^{+}\right)=i_c\left(۲^{-}\right)+\frac{v_c\left(۲^{-}\right)}{۵}=i_c\left(۲^{-}\right)+\frac{۱۰-۱۰i_c\left(۲^{-}\right)}{۵}$$

$$=e^{-۰/۲(۲)}+\frac{۱۰-۱۰\left(e^{-۰/۲(۲)}\right)}{۵}=۰/۴۵۱$$

$$i_c(\infty)=0 \quad , \quad T=RC=\frac{۱۰\times ۵}{۱۰+۵}\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۵}{۳}$$

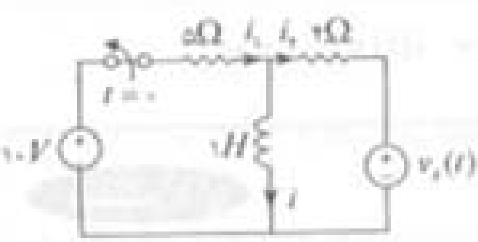
$$\rightarrow i_c(t) = \left(i_c(۳) - i_c(\infty)\right)e^{-\frac{t-۳}{\tau}} + i_c(\infty) = (-۰/۳۵۱ - ۰)e^{-\frac{۳}{۵}(t-۳)} + ۰ = -۰/۳۵۱\, e^{-۰/۶(t-۳)}$$

$$\rightarrow i_c(t) = \begin{cases} e^{-۰/۶t}, & ۰ \le t < ۳ \\ -۰/۳۵۱\, e^{-۰/۶(t-۳)}, & t \ge ۳ \end{cases}$$

مسئله ۱۰

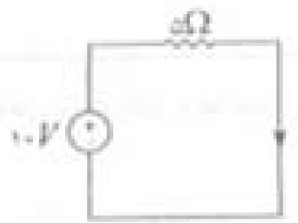
الف ـ $v_s(t) = ۱۰e^{-۲t}u(t)$، $i(t) = ?$ برای $t > ۰$.

ب ـ $v_s(t) = ۱۰e^{-۴t}u(t)$، $i(t) = ?$ برای $t > ۰$.



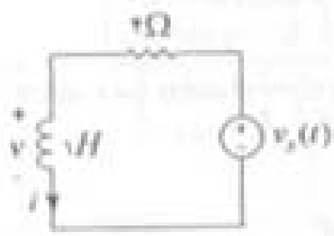
شکل مسئله ۱۰

حل: الف ـ قبل از باز شدن کلید $v_s(t) = ۰$ بوده و سلف اتصال کوتاه است. بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\rightarrow i(۰) = \frac{۱۰}{۵} = ۲A$$

و برای $t > ۰$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



$$-v - v_R + v_S = ۰ \rightarrow -\frac{di}{dt} - ۴i + v_s = ۰ \rightarrow \frac{di}{dt} + ۴i = ۱۰\, e^{-۲t}, t > ۰$$

که در ادامه با محاسبه پاسخ عمومی و خصوصی معادله فوق، آن را حل خواهیم کرد.

$$s + ۴ = ۰ \rightarrow s_0 = -۴ \rightarrow i_h(t) = k_1 e^{-۴t} \qquad \text{(پاسخ عمومی)}$$

$$i_p(t) = k_2\, e^{-۲t} \rightarrow -۲k_2\, e^{-۲t} + ۴k_2\, e^{-۲t} = ۱۰\, e^{-۲t} \rightarrow ۲k_2 = ۱۰ \rightarrow k_2 = ۵$$

$$\rightarrow i(t) = i_h(t) + i_p(t) = k_1\, e^{-۴t} + ۵\, e^{-۲t}$$

در نهایت با اعمال مقدار اولیه جریان، k_1 را نیز بدست می آوریم.

$$i(۰)=۲ \rightarrow k_1+۵=۲ \rightarrow k_1=-۳ \rightarrow i(t)=۵e^{-۲t}-۳e^{-۴t}$$

ب ـ در این حالت واضح است که $i(t)$ از حل کامل معادله $i(۰)=۲$ ، $\frac{di}{dt}+۴i=۱۰e^{-۴t}$ بدست می آید. پاسخ عمومی معادله $i_h(t)=k_1e^{-۴t}$ می باشد. با توجه به معادله دیفرانسیل ملاحظه می شود که $۱۰e^{-۴t}$ از پاسخ عمومی بدست می آید. بنابراین پاسخ خصوصی را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$i_p(t)=k_2te^{-۴t} \rightarrow \left(k_2e^{-۴t}-۴k_2te^{-۴t}\right)+۴k_2te^{-۴t}=۱۰e^{-۴t} \rightarrow k_2e^{-۴t}=۱۰e^{-۴t} \rightarrow k_2=۱۰$$

$$\rightarrow i(t)=k_1e^{-۴t}+۱۰te^{-۴t}\ ,\ i(۰)=۲ \rightarrow k_1=۲ \rightarrow i(t)=(۱۰+۲t)e^{-۴t}$$

مسئله ۱۱

$i_s(t)=(۱۰\sin ۲t)u(t)$ ، $v(t)=?$ برای $t>۰$.

شکل مسئله ۱۱

حل : با فرض اینکه ولتاژ اولیه خازن برابر صفر باشد خواهیم داشت :

$$i_c+i_R=i_s \rightarrow \frac{۱}{۲}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{۴}=i_s \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{۱}{۲}v=۲۰\sin ۲t$$

$$\rightarrow v_h(t)=ke^{-\frac{1}{2}t}\ ,\ v_p(t)=A\sin ۲t+B\cos ۲t$$

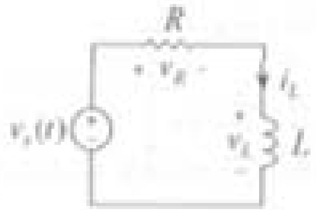
$$\rightarrow (۲A\cos ۲t-۲B\sin ۲t)+\left(\frac{۱}{۲}A\sin ۲t+\frac{۱}{۲}B\cos ۲t\right)=۲۰\sin ۲t$$

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}A-۲B=۲۰\\ ۲A+\frac{۱}{۲}B=۰\end{cases} \rightarrow A=\frac{۴۰}{۱۷}\ ,\ B=-\frac{۱۶۰}{۱۷}$$

$$v(t)=v_h(t)+v_p(t)=Ke^{-\frac{1}{2}t}+\frac{۴۰}{۱۷}\sin ۲t-\frac{۱۶۰}{۱۷}\cos ۲t$$

$$v(۰)=۰ \rightarrow K-\frac{۱۶۰}{۱۷}=۰ \rightarrow K=\frac{۱۶۰}{۱۷} \rightarrow v(t)=\frac{۱۶۰}{۱۷}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{۴۰}{۱۷}\sin ۲t-\frac{۱۶۰}{۱۷}\cos ۲t$$

مسئله ۱۲



φ را چنان تعیین کنید که هیچگونه پاسخ گذرایی در جریان i_L حاصل نشود.

$v_s(t)=v_m\cos(\omega t+\varphi)$

شکل مسئله ۱۲

حل: ابتدا i_L را بدست می آوریم.

$$v_L+v_R=v_s \rightarrow L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=v_m\cos(\omega t+\varphi)=v_m\cos\varphi\cos\omega t-v_m\sin\varphi\sin\omega t$$

$$\rightarrow i_L(t)=\underbrace{Ke^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{A\cos\omega t+B\sin\omega t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با فرض اینکه جریان اولیه سلف برابر صفر باشد داریم:

$$i_L(0)=0 \rightarrow K+A=0 \rightarrow K=-A$$

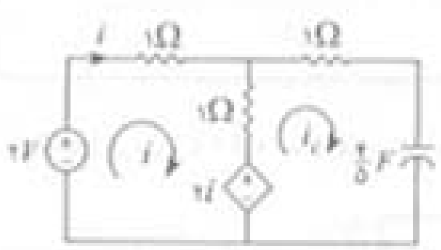
و شرط اینکه پاسخ گذرا نداشته باشیم این است که $K=0$ و یا $A=0$ باشد. با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$L(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)+R(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=v_m\cos\varphi\cos\omega t-v_m\sin\varphi\sin\omega t$$

$$\rightarrow \begin{cases} RA+L\omega B=v_m\cos\varphi \\ -L\omega A+RB=-v_m\sin\varphi \end{cases} \rightarrow A=\frac{\begin{vmatrix} v_m\cos\varphi & L\omega \\ -v_m\sin\varphi & R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{vmatrix}}=\frac{(R\cos\varphi+L\omega\sin\varphi)v_m}{R^2+L^2\omega^2}$$

$$A=0 \rightarrow R\cos\varphi+L\omega\sin\varphi=0 \rightarrow \tan\varphi=-\frac{R}{L\omega} \rightarrow \varphi=\tan^{-1}-\frac{R}{L\omega}$$

مسئله ۱۳



$i(t)=?$ ، $t\geq 0$. (ولتاژ اولیه خازن برابر صفر است)

شکل مسئله ۱۳

حل : ذکر این نکته ضروری است که منبع ولتاژ نابسته در $t=0$ وارد مدار می شود.

KVL برای مش ① $\rightarrow \quad -2+i+(i-i_1)+2i=0 \quad \rightarrow \quad i_1=4i-2$

KVL برای مش ② $\rightarrow \quad -2i+(i_1-i)+i_1+i_1(0)+\frac{5}{4}\int i_1 dt=0$

$\rightarrow \quad -2i+(4i-2-i)+i+\frac{5}{4}\int(4i-2)=0 \quad \rightarrow \quad i+\int\left(i-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt}+i=\frac{1}{2}$

$\rightarrow \quad i(t)=\underbrace{K_1e^{-t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_2=\frac{1}{2}$ خواهد شد. در ادامه $i(0)$ را بدست خواهیم آورد. از آنجا که $v_c(0)=0$ می باشد لذا در $t=0$ خازن اتصال کوتاه بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.

KVL برای مش ① $\rightarrow \quad -2+i+(i-i_1)+2i=0 \quad \rightarrow \quad 4i-i_1=2$

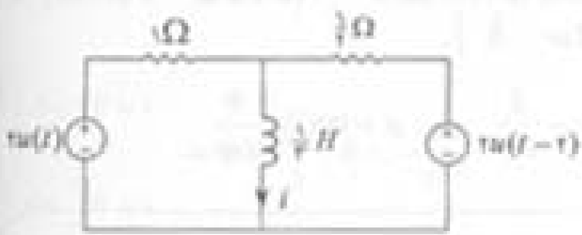
$\rightarrow \quad i=\frac{2}{5}A$

KVL برای مش ② $\rightarrow \quad -2i+(i_1-i)+i_1=0 \quad \rightarrow \quad -3i+2i_1=0$

$i(0)=\frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad K_1+\frac{1}{2}=\frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad K_1=\frac{3}{10} \quad \rightarrow \quad i(t)=\frac{3}{10}e^{-t}+\frac{1}{2} \quad , \quad t\geq 0$

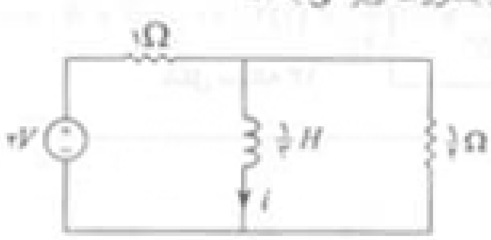
مسئله ۱۴

$i(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه و رسم کنید.



شکل مسئله ۱۴

حل : برای $0\leq t<2$ مدار بصورت زیر می باشد.



از آنجا که سلف در $t=۰$ بصورت مدار باز و در $t=\infty$ بصورت اتصال کوتاه عمل می کند لذا $i(۰)=۰$ و $i(\infty)=\frac{۲V}{۱\Omega}=۲A$ همچنین ثابت زمانی سیستم $T=\frac{L}{R}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱\times\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}}=۱$ می باشد بنابراین داریم.

$$i(t)=\left(i(۰)-i(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i(\infty)=(۰-۲)e^{-t}+۲=۲-۲e^{-t}$$

برای $t\geq ۲$ مدار بصورت زیر می باشد.

ابتدا مقادیر ابتدایی و نهایی $i(t)$ را بدست خواهیم آورد.

$$i(۲)=۲-۲e^{-۲}=۱/۷۳A \quad , \quad i(\infty)=\frac{۲V}{۱\Omega}+\frac{۱V}{\frac{۱}{۴}\Omega}=۶A$$

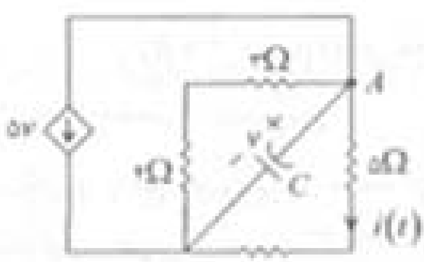
همانند قسمت قبل $T=۱$ می باشد بنابراین داریم.

$$i(t)=\left(i(۲)-i(\infty)\right)e^{-\frac{(t-۲)}{T}}+i(\infty)=(۱/۷۳-۶)e^{-\frac{(t-۲)}{۱}}+۶=۶-۴/۲۷e^{-(t-۲)}$$

$$\rightarrow \quad i(t)=\begin{cases}۲-۲e^{-t} & , \quad ۰\leq t<۲\\ ۶-۴/۲۷e^{-(t-۲)} & , \quad t\geq ۲\end{cases}$$

مسئله ۱۵

$C=۴mF$ ، $v_c(۰^-)=۳V$ ، $i(t)=?$ برای $t>۰$.



شکل مسئله ۱۵

حل : با نوشتن KCL برای گره A داریم.

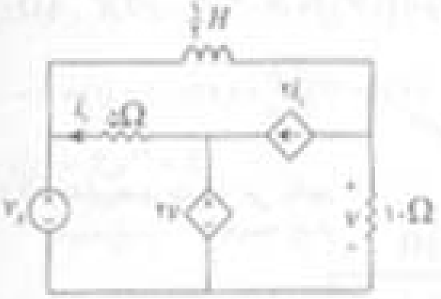
$$۵v+\frac{v}{۳+۴}+\frac{v}{۵+۲}+۴\times۱۰^{-۳}\frac{dv}{dt}=۰ \quad\rightarrow\quad \frac{dv}{dt}+۱۳۲۱\,v=۰ \quad\rightarrow\quad v(t)=Ke^{-۱۳۲۱t}$$

$$v(۰)=-v_c(۰)=-۳ \quad\rightarrow\quad K=-۳ \quad\rightarrow\quad v(t)=-۳e^{-۱۳۲۱t}$$

$i=\frac{v}{7} \rightarrow i(t)=-\frac{4}{7}e^{\dots}\ ,\ t>0$

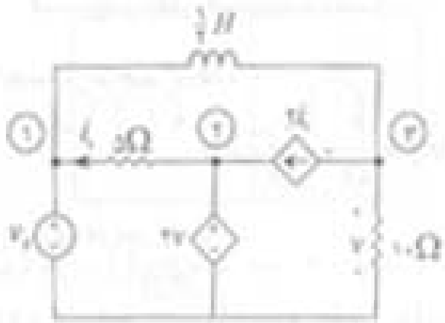
مسئله ۱۶

$v_s(t)=u(t)$ ، $i_L(0)=0$ ، $v(t)=?$



شکل مسئله ۱۶

حل : بدین منظور از تحلیل گره استفاده خواهیم کرد.



$v_1=1V\ ,\ \ v_2=2V\ ,\ \ v_3=V\ ,\ i_x=\frac{2v-1}{5}$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow\ i_L(0)+2\int_0^t(v-1)dt+2\left(\frac{2v-1}{5}\right)+\frac{v}{10}=0$

$\rightarrow\ 2(v-1)+\frac{4}{5}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{10}\frac{dv}{dt}=0\ \rightarrow\ \frac{dv}{dt}+\frac{20}{9}\frac{dv}{dt}=\frac{20}{9}\ \rightarrow\ v(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{20}{9}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

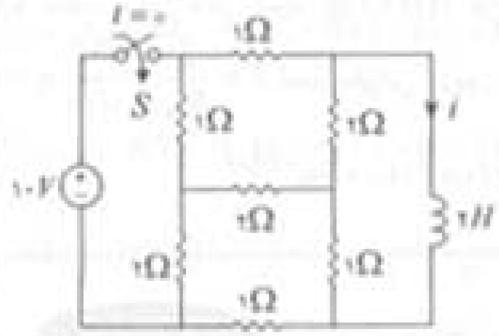
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_2=1$ بدست می آید و برای محاسبه K_1 باید $v(0)$ را بدست آوریم. می دانیم که سلف در $t=0$ بصورت مدار باز عمل می کند بنابراین KCL نوشته شده برای گره ۳ بصورت زیر تغییر می کند.

$2\left(\frac{2v(0)-1}{5}\right)+\frac{v(0)}{10}=0\ \rightarrow v(0)=\frac{4}{9}\rightarrow K_1+1=\frac{4}{9}\ \rightarrow K_1=-\frac{5}{9}$

$\rightarrow\ v(t)=1-\frac{5}{9}e^{-\frac{20}{9}t}$

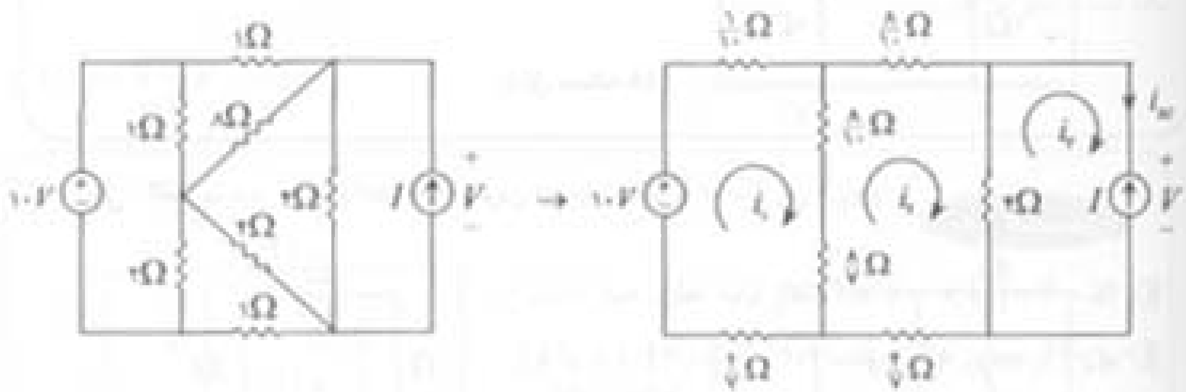
مسئله ۱۷

با در نظر گرفتن مقادیر I در لحظه های ۰ و ∞ جریان $i(t)$ را برای تمام $t>0$ تعیین کنید. $\left(i_L(0)=0\right)$



شکل مسئله ۱۷

حل: بدین منظور معادل تونن دو سر سلف را بدست می آوریم و برای این کار با استفاده از تبدیل ستاره به مثلث و برعکس مدار را ساده می کنیم.



$$\text{KVL} \text{ برای مش } (1) \rightarrow -10+\frac{i_1}{10}+\frac{8}{10}(i_1-i_2)+\frac{8}{7}(i_1-i_2)+\frac{2}{7}i_1=0$$

$$\text{KVL} \text{ برای مش } (2) \rightarrow \frac{8}{7}(i_2-i_1)+\frac{8}{10}(i_2-i_1)+\frac{8}{10}i_2+V+\frac{2}{7}i_2=0$$

$$\rightarrow \begin{cases}143i_1-136i_2=700\\136i_1-232i_2=70V\end{cases} \rightarrow i_2=\frac{\begin{vmatrix}143 & 700\\136 & 70V\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}143 & -136\\136 & -232\end{vmatrix}}=-0/6V+4/9 \quad , \quad i_3=-I$$

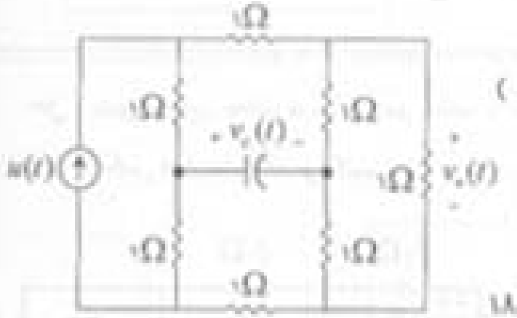
$$V=4\left(i_2-i_3\right)=4\left(-0/6V+4/9+I\right) \quad \rightarrow \quad I=0/85V-4/9$$

$$\rightarrow \quad I_{sc}=4/9A \quad , \quad R_{th}=\frac{1}{0/85}=1/18\Omega$$

می دانیم سلف در ابتدا $(t=0)$ بصورت مدار باز بوده و در $t=\infty$ اتصال کوتاه خواهد بود. از آنجا که جریان اولیه سلف برابر صفر است لذا $i(0)=0$ بوده و $i(\infty)=i_{sc}=2.98$ همچنین ثابت زمانی مدار برابر $T=\dfrac{L}{R_{th}}=\dfrac{2}{1.18}=1.7$ است بنابراین داریم:

$$i(t)=\left(i(0)-i(\infty)e^{-\frac{t}{T}}+i(\infty)\right)=(0-2.9)e^{-\frac{t}{1.7}}+2.9=2.9-2.9e^{-0.588t}$$

مسئله ۱۸



الف- $v_c(t)=?$ برای $t\geq 0$. (خازن بی بار است)

ب- $v_o(t)=?$ برای $t\geq 0$.

شکل مسئله ۱۸

حل: الف ـ بدین منظور ابتدا معادل تونن دو سر خازن را بدست می آوریم.

بنا بر تقارن، جریان از مقاومت سمت راست عبور نمی کند. پس داریم:

$$R_{th}=\frac{V}{I}=\frac{3\times 3}{3+3}=\frac{3}{2}\Omega$$

در ادامه ولتاژ مدار باز دو سر خازن را بدست خواهیم آورد.

$i_s = 1A$

① برای مش KVL $\rightarrow (i_1-1)+i_1+(i_1-i_2)+(i_1-i_2)+i_1+(i_1-1)=0$

② برای مش KVL $\rightarrow (i_2-i_1)+i_2+(i_2-i_1)=0 \rightarrow \begin{cases} 3i_1-i_2=1 \\ -2i_1+3i_2=0 \end{cases} \rightarrow i_1=\frac{3}{7}\ ,\ i_2=\frac{2}{7}$

$e_{oc}=(i_1-1)+i_1+(i_1-i_2)=3i_1-i_2-1=\frac{9}{7}-\frac{2}{7}-1=0$

از آنجا که خازن بی بار است لذا $v_c(0)=0$ همچنین $v_c(\infty)=e_{oc}=0$ بنابراین داریم:

$$v_c(t)=\left(v_c(0)-v_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_c(\infty)=(0-0)e^{-\frac{t}{T}}+0=0 \rightarrow v_c(t)=0 \quad , t\geq 0$$

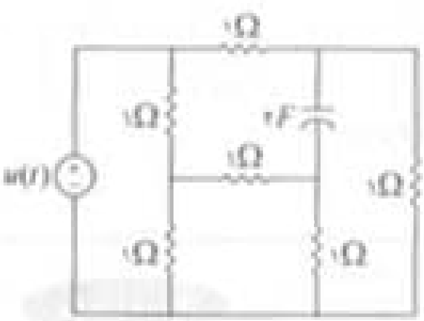
ب ـ از آنجا که ولتاژ دو سر خازن همواره برابر صفر است. لذا خازن نقشی نداشته و مدار فوق یک مدار مقاومتی ساده است. بنابراین داریم:

$$v_c(t)=i_2=\frac{2}{7}\,V \quad , t\geq 0$$

مسئله ۱۹

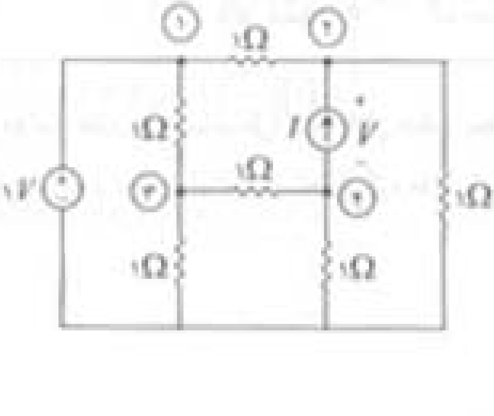
الف- ?= $v_c(t)$ ، $t\geq 0$ (ولتاژ اولیه خازن صفر است)

ب- اگر بجای خازن سلف $L=2H$ با $i_L(0)=0$ را قرار دهیم. $i_L(t)$ را به ازای $t\geq 0$ حساب کنید.



شکل مسئله ۱۹

حل : الف ـ ابتدا معادل تونن دو سر خازن را بدست خواهیم آورد. بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را بجای خازن قرارداده و با استفاده از روش تحلیل گره ولتاژ دو سر آن را بدست خواهیم آورد.



$e_1 = 1\,V$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow -I+e_2-1+e_2=0$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow e_3-1+e_3+e_3-e_4=0 \rightarrow \begin{cases} e_2=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2} \\ 3e_3-e_4=1 \\ -e_3+2e_4=-I \end{cases}$$

$$\text{KCL برای گره ۴} \rightarrow I+e_4-e_3+e_4=0$$

$$\rightarrow e_3=-\frac{3}{5}I+\frac{1}{5} \rightarrow V=e_2-e_3=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}I-\frac{1}{5}=\frac{11}{10}I+\frac{3}{10} \rightarrow R_{th}=\frac{11}{10}\Omega\ ,\ e_{oc}=\frac{3}{10}V$$

خازن ابتدا اتصال کوتاه و سپس مدار باز خواهد بود بنابراین :

$$v_c(0)=0\ ,\ v_c(\infty)=\frac{3}{10}V\ ,\ T=RC=\left(\frac{11}{10}\right)(2)=\frac{11}{5}\ \sec$$

$$\rightarrow v_c(t)=\big(v(0)-v(\infty)\big)e^{-\frac{t}{T}}+v(\infty)=\frac{3}{10}-\frac{3}{10}e^{-\frac{5}{11}t}\ ,\ t\ge 0$$

ب ـ می دانیم که سلف ابتدا بصورت مدار باز و در نهایت به صورت اتصال کوتاه عمل می کند. بنابراین داریم :

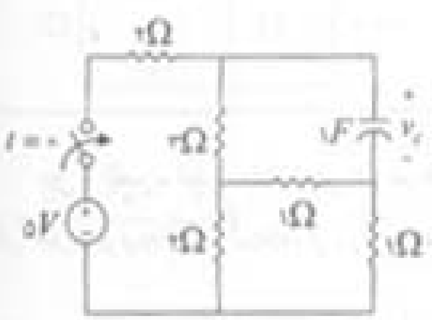
$$i_L(0)=0\ ,\ i_L(\infty)=i_{sc}=\frac{e_{oc}}{R_{th}}=\frac{3}{11}A\ ,\ T=\frac{L}{R}=\frac{2}{\frac{11}{10}}=\frac{20}{11}$$

$$\rightarrow i_L(t)=\big(i_L(0)-i_L(\infty)\big)e^{-\frac{t}{T}}+i_L(\infty)=\frac{3}{11}-\frac{3}{11}e^{-\frac{11}{20}t}\ ,\ t\ge 0$$

مسئله ۲۰

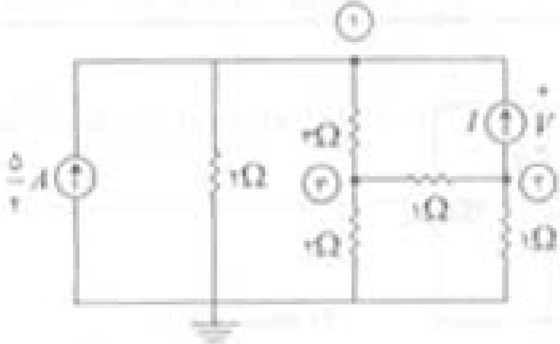
$v_c(t)=?$ ، $t\ge 0$ (ولتاژ اولیه خازن صفر است)

ولتاژ دو سر بقیه عناصر را برای $t\ge 0$ حساب کنید.



شکل مسئله ۲۰

حل : ابتدا معادل تونن دو سر خازن را حساب می کنیم. بدین منظور بجای خازن منبع جریان آزمایش I را قرار داده و با استفاده از تبدیل تونن به نرتن و با استفاده از تحلیل گره مدار را تحلیل می کنیم.



$①$ برای گره KCL $\rightarrow -\frac{۵}{۲}+\frac{e_۱}{۲}+\frac{e_۱-e_۳}{۳}-I=۰$

$②$ برای گره KCL $\rightarrow I+e_۲+e_۲-e_۳=۰$

$③$ برای گره KCL $\rightarrow \frac{e_۳-e_۱}{۳}+\frac{e_۳}{۲}+e_۳-e_۲=۰$

$$\rightarrow \begin{cases} ۵e_۱-۲e_۳=۶I+۱۵ \\ -۲e_۲+e_۳=I \\ -۲e_۱-۶e_۲+۱۱e_۳=۰ \end{cases} \rightarrow e_۱=\frac{\begin{vmatrix} ۶I+۱۵ & ۰ & -۲ \\ I & -۲ & ۱ \\ ۰ & -۶ & ۱۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۵ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۱ \\ -۲ & -۶ & ۱۱ \end{vmatrix}}=\frac{-۸۲I-۲۲۰}{-۷۲}=\frac{۸۲I}{۷۲}+\frac{۲۲۰}{۷۲}$$

$$e_۲=\frac{۱}{-۷۲}\begin{vmatrix} ۵ & ۶I+۱۵ & -۲ \\ ۰ & I & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۱۱ \end{vmatrix}=\frac{۳۹I-۳۰}{-۷۲}=-\frac{۳۹}{۷۲}I+\frac{۳۰}{۷۲}$$

$$V=e_۱-e_۲=\frac{۱۲۳}{۷۲}I+\frac{۲۱۰}{۷۲}=\frac{۴۱}{۲۴}I+\frac{۳۵}{۱۲}\rightarrow R_{th}=\frac{۴۱}{۲۴}\Omega\ ,\ e_{oc}=\frac{۳۵}{۱۲}v$$

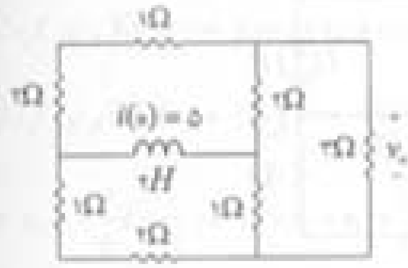
می دانیم که خازن در ابتدا $(t=۰)$ اتصال کوتاه و در نهایت $(t=\infty)$ مدار باز خواهد بود. بنابراین داریم:

$$v_c(۰)=۰\ ,\ v_c(\infty)=e_{oc}=\frac{۳۵}{۱۲}\ ,\ T=R_{th}C=\left(\frac{۴۱}{۲۴}\right)(۱)=\frac{۴۱}{۲۴}$$

$$\rightarrow v_c(t)=\left(v_c(۰)-v_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_c(\infty)=\frac{۳۵}{۱۲}-\frac{۳۵}{۱۲}e^{-\frac{۲۴}{۴۱}t}$$

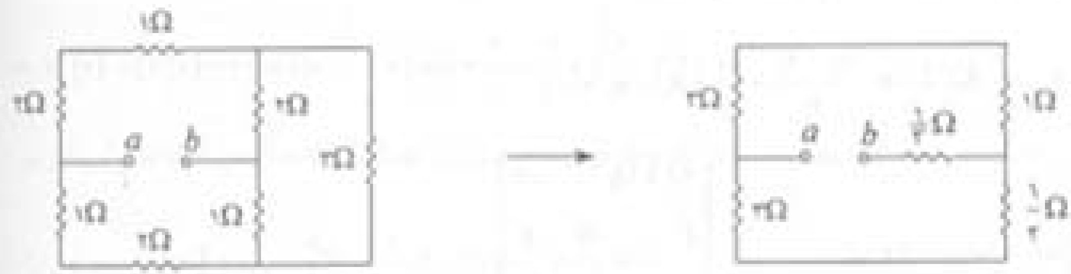
مسئله ۲۱

$v_o(t) = ?$ برای $t \geq 0$.



شکل مسئله ۲۱

حل: ابتدا مقاومت معادل دو سر سلف را جهت محاسبه ثابت زمانی سیستم بدست می آوریم. بدین منظور از تبدیل مثلث به ستاره استفاده خواهیم کرد.



$$\rightarrow\ R_{ab} = \left(\frac{1}{2} + 2\right) \mathrm{P} (2 + 1) + \frac{1}{3} = \frac{11}{5}\Omega \ \rightarrow\ T = \frac{L}{R_{ab}} = \frac{2}{\frac{11}{5}} = \frac{10}{11}$$

حال $v_o(0)$ و $v_o(\infty)$ را حساب می کنیم. واضح است که در نهایت تمامی انرژی ذخیره شده در سلف تخلیه شده و لذا تمامی ولتاژها و جریانها منجمله $v_o(\infty)$ برابر صفر خواهند بود و برای محاسبه $v_o(0)$ می توان بجای سلف با مقدار اولیه $i(0) = 5$ منبع جریان ثابت $5A$ را قرار داد و این مدل سازی فقط برای $t = 0$ معتبر است.

$i_2 - i_1 = 5$

$$\text{③ برای مش KVL} \ \rightarrow\ 4(i_3 - i_1) + 2i_3 + (i_3 - i_2) = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} -i_1 + i_2 = 5 \\ 4i_1 + i_2 - 6i_3 = 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 \end{cases}$$

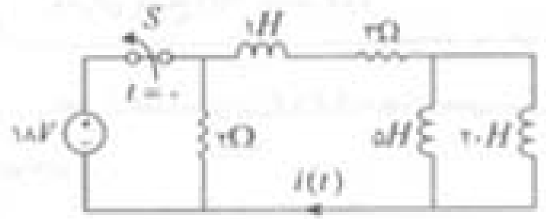
برای حلقه شامل تمام مش ها KVL $\rightarrow\ 3i_1 + 3i_2 + 3i_3 = 0$

$$\rightarrow i_1 = -\frac{7}{3}, \; i_2 = \frac{8}{3} \;, \; i_3 = -\frac{1}{3} \;\rightarrow\; v_o(0) = 3i_3(0) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1V$$

$$\rightarrow v(t) = \left(v(0) - v(\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty) = (-1-0)e^{-\frac{t}{\frac{30}{11}}} + 0 = -e^{-\frac{11}{30}t} \;, \; t \geq 0$$

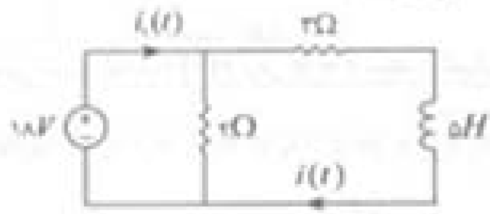
مسئله ۳۲

$i(t) = ?$ برای $t > 0$. (کلید S برای مدت طولانی بسته بوده)



شکل مسئله ۳۲

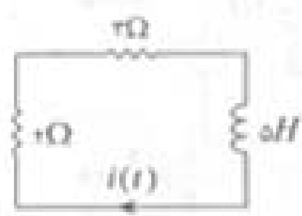
حل : دو سلف $20H$ و $5H$ موازی بوده و با سلف $1H$ سری اند. بنابراین $L_{eq} = 1 + \frac{5\times 20}{5+20} = 5H$ بوده و مدار را بصورت زیر برای $t < 0$ رسم می کنیم.



از آنجا که S به مدت طولانی بسته بوده لذا سلف $5H$ بصورت اتصال کوتاه عمل می کند. بنابراین داریم :

$$i_s(t) = \frac{18}{\frac{2\times 3}{2+3}} = 15A \;, \; i(t) = \frac{2}{2+3} i_s(t) = \frac{2}{5}(15) = 6A \;\rightarrow\; i(0) = 6A$$

برای $t > 0$ کلید S باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



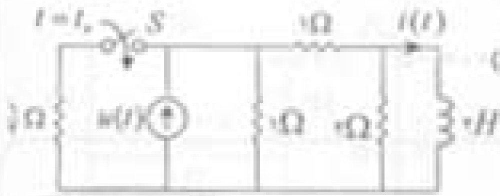
$$5i + 5\frac{di}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{di}{dt} + i = 0 \;\rightarrow\; i(t) = Ke^{-t}, \; i(0) = 6 \;\rightarrow\; K = 6 \;\rightarrow\; i(t) = 6e^{-t} \;, \; t > 0$$

مسئله ۲۳

الف- $i(t) = ?$ ، $0 < t < t_0$. (حالت اولیه صفر است)

ب- $i(t) = ?$ برای $t \geq t_0$.

پ- t_0 را چنان تعیین کنید که برای $t > t_0$ قسمت گذرای پاسخ $i(t)$ حذف شود.



شکل مسئله ۲۳

حل: الف ـ برای $0 \leq t < t_0$ مدار بصورت زیر خواهد بود که با استفاده از تبدیل تونن به نرتن آن را ساده خواهیم کرد.

از آنجا که حالت اولیه مدار صفر است لذا $i(0) = 0$ و در $t = \infty$ سلف اتصال کوتاه خواهد بود لذا $i(\infty) = \frac{1}{2} A$

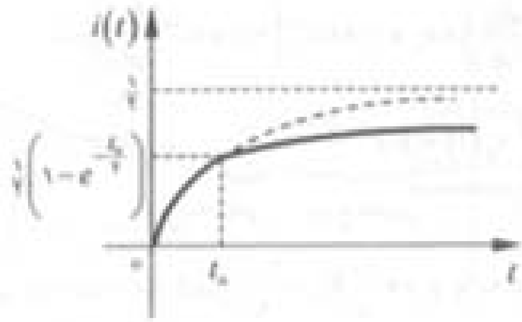
همچنین $T = \frac{L}{R} = 2$ بنابراین داریم

$$\rightarrow i(t) = \left(i(0) - i(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + i(\infty) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) \quad , \quad 0 \leq t < t_0$$

ب ـ در $t = t_0$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.

$$i(t_0) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{t_0}{2}}\right) \quad , \quad i(\infty) = \frac{1}{2} A \quad , \quad T = \frac{L}{R} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

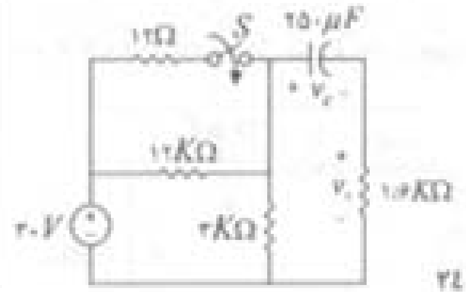
$$\rightarrow i(t) = \left(i(t_0) - i(\infty)\right)e^{-\frac{t-t_0}{T}} + i(\infty) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t_0}{2}} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{6}} + \frac{1}{2} \quad , \quad t \geq t_0$$



پ – بدین منظور باید $e^{-\frac{t_0}{\tau}}=0$ شود که به ازای $t_0=\infty$ رخ می دهد.

مسئله ۲۴

کلید S در $t<0$ به مدت طولانی باز است و در $t=1$ بسته شده و دوباره در $t=2$ باز می شود. $v_c(t)$ و $v_o(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه و رسم کنید.

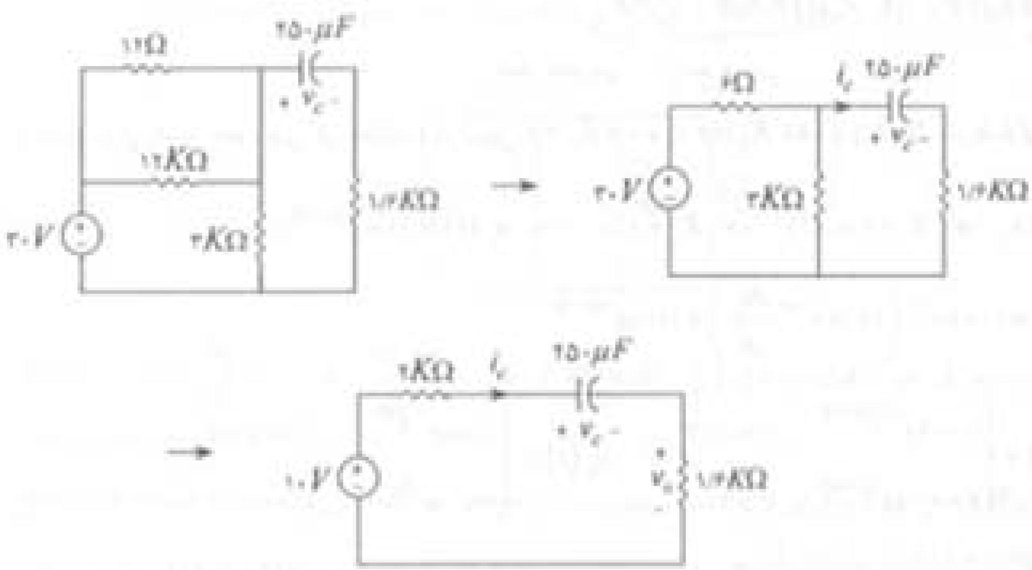


شکل مسئله ۲٤

حل : برای $t<1$ کلید S باز بوده و چون S برای مدت طولانی باز می باشد لذا خازن مدار باز می باشد. بنابراین داریم

$$v_o(1)=0 \quad , \quad v_c(1)=\frac{3}{12+3}30=6\,V$$

به ازای $1<t\leq 2$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\rightarrow\ -10+2\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)+v_c+1.6\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=0$$

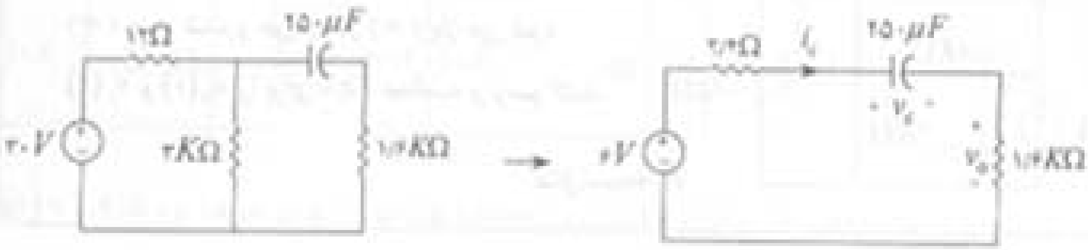
$$\rightarrow\ \frac{dv_c}{dt}+\frac{10}{9}v_c=\frac{100}{9}\ \rightarrow\ v_c(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{10}{9}(t-1)}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $0+\frac{10}{9}K_2=\frac{100}{9}$ و یا $K_2=10$ شده و با اعمال شرط اولیه داریم:

$$v_c(1)=6\ \rightarrow\ K_1+10=6\ \rightarrow\ K_1=-4\ \rightarrow\ v_c(t)=10-4e^{-\frac{10}{9}(t-1)}$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=1.6\times10^{3}i_c(t)=1.6\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=1.78e^{-\frac{10}{9}(t-1)}$$

در $t>2$ کلید دوباره باز می شود و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$v_c(2)=10-4e^{-\frac{10}{9}(2-1)}=8.7\ V$$

$$-6+2.4\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)+v_c+1.6\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=0$$

$$\rightarrow\ \frac{dv_c}{dt}+v_c=6\ \rightarrow\ v_c(t)=\underbrace{K_1e^{-(t-2)}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

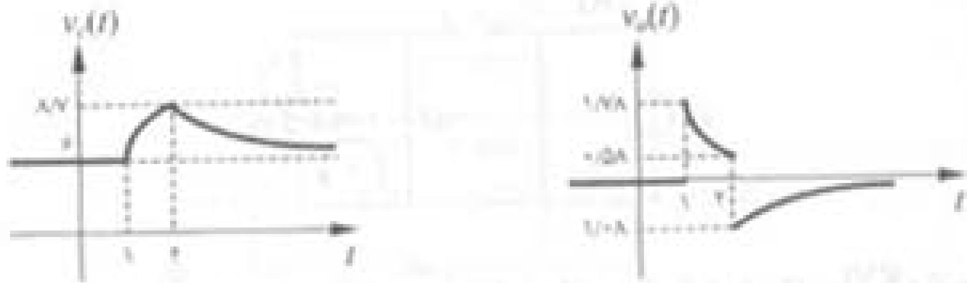
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $0+K_2=6$ و یا $K_2=6$ شده و با اعمال شرط اولیه داریم

$$v_c(2)=8.7\ \rightarrow\ K_1+6=8.7\ \rightarrow\ K_1=2.7\ \rightarrow\ v_c(t)=2.7e^{-(t-2)}+6$$

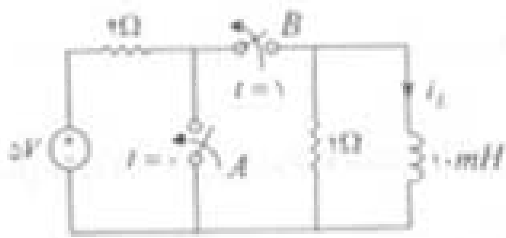
$$\rightarrow\ v_o(t)=1.6\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=1.08e^{-(t-2)}$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=\begin{cases}10-4e^{-\frac{10}{9}(t-1)}, & 1<t\le2\\ 6+2.7e^{-(t-2)}, & t>2\end{cases}\quad,\quad v_o(t)=\begin{cases}1.78e^{-\frac{10}{9}(t-1)}, & 1<t\le2\\ -1.08^{-(t-2)}, & t>2\end{cases}$$

شکل موجهای $v_o(t)$ و $v_c(t)$ در زیر رسم شده اند.



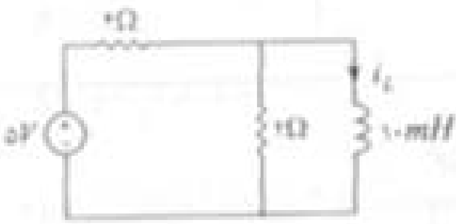
مسئله ۲۵



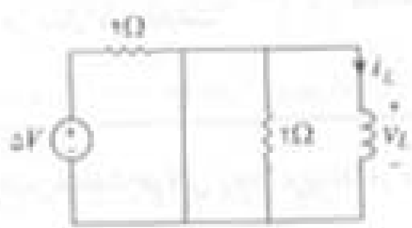
؟ = $i_L(t)$. (کلید A در ۰ = t بسته و کلید B در ۱ = t باز می شود).

شکل مسئله ۲۵

حل : برای ۰ > t مدار بصورت زیر خواهد بود.

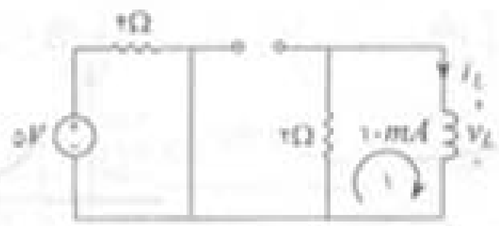


از آنجا که حالت فوق به مدت زیادی برقرار بوده و لذا در ۰ = t سلف اتصال کوتاه می باشد بنابراین $i_L(\cdot)=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵A$ بوده و برای ۱ > t ≥ ۰ کلید A نیز بسته بوده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$v_L=\cdot \rightarrow L\frac{di_L}{dt}=\cdot \rightarrow \frac{di_L}{dt}=\cdot \rightarrow i_L(t)=K \ , \ i_L(\cdot)=۱/۲۵A \rightarrow K=۱/۲۵A$$
$$\rightarrow i_L(t)=۱/۲۵A$$

در ۱ = t کلید B باز می شود و برای ۱ ≤ t مدار بصورت زیر خواهد شد. همچنین با توجه به قسمت قبل واضح است که $i_L(۱)=۱/۲۵A$ ، بنابراین داریم.

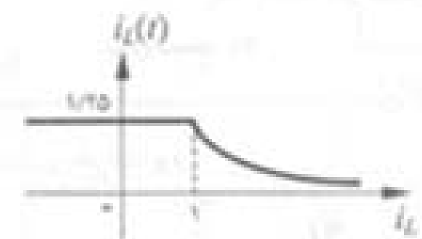


$$\text{KVL برای مش ①} \rightarrow v_L + 2i_L = 0 \rightarrow 10\times10^{-3}\frac{di_L}{dt}+2i_L=0 \rightarrow \frac{di_L}{dt}+200i_L=0$$

$$i_L(t)=Ke^{-200(t-1)}\ ,\ i_L(1)=1/25 \rightarrow K=1/25 \rightarrow i_L(t)=1/25e^{-200(t-1)}$$

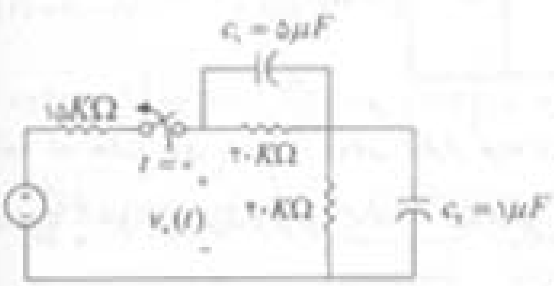
$$\rightarrow i_L(t)=\begin{cases}1/25A & ,\ 0\le t<1\\ 1/25e^{-200(t-1)} & ,\ t\ge1\end{cases}$$

شکل موج $i_L(t)$ در زیر رسم شده است.



مسئله ۲۶

- الف- ? = $v_o(t)$ ، $t \ge 0$ (کلید برای مدت طولانی وصل بوده و در $t=0$ باز می شود)
- ب- اگر کلید $60\ ms$ باز باشد چند درصد انرژی اولیه ذخیره شده در مدار در مقاومت ها تلف می شود.

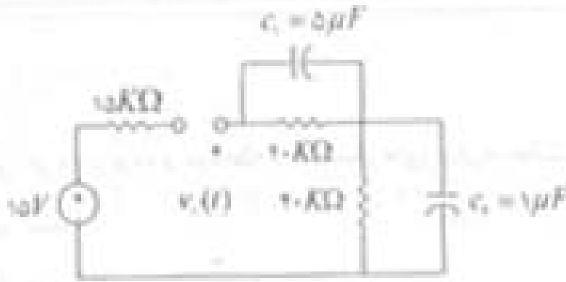


شکل مسئله ۲۶

حل : الف ـ از آنجا که کلید به مدت طولانی وصل بوده لذا هر دو خازن بصورت مدار باز عمل می کنند بنابراین در $t<0$ داریم.

$$v_{c1}(0)=\frac{20}{15+20+40}15V=4V\ ,\ v_{c2}(0)=\frac{40}{15+20+40}15V=8V$$

به ازای $t\ge0$ کلید باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



واضح است که در $t=\infty$ انرژی ذخیره شده خازنها کاملاً تلف شده و $v_{c1}(\infty) = v_{c2}(\infty) = ۰$ می شود. همچنین با توجه به شکل فوق داریم:

$$T_1 = RC_1 = \left(۲۰\times ۱۰^{۳}\right)\left(۵\times ۱۰^{-۶}\right) = ۰/۱ \quad , \quad T_2 = RC_2 = \left(۴۰\times ۱۰^{۳}\right)\left(۱\times ۱۰^{-۶}\right) = ۰/۰۴$$

$$\rightarrow \; v_{c1}(t) = \left(v_{c1}(۰) - v_{c1}(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T_1}} + v_{c1}(\infty) = ۴e^{-۱۰t}$$

$$\rightarrow \; v_{c2}(t) = \left(v_{c2}(۰) - v_{c2}(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T_2}} + v_{c2}(\infty) = ۸e^{-۲۵t}$$

$$\rightarrow \; v_c(t) = v_{c1}(t) + v_{c2}(t) = ۴e^{-۱۰t} + ۸e^{-۲۵t}$$

ب –

انرژی اولیه ذخیره شده در مدار $= \frac{۱}{۲}C_1V_1^2(۰) + \frac{۱}{۲}C_2V_2^2(۰)$

$$= \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۰^{-۶}\times ۴^{۲} + \frac{۱}{۲}\times ۱\times ۱۰^{-۶}\times ۸^{۲} = ۷۲\times ۱۰^{-۶}J$$

انرژی باقیمانده در خازنها ($t = ۴۰ms$) $= \frac{۱}{۲}C_1V_1^2(۴۰ms) + \frac{۱}{۲}C_2V_2^2(۴۰ms)$

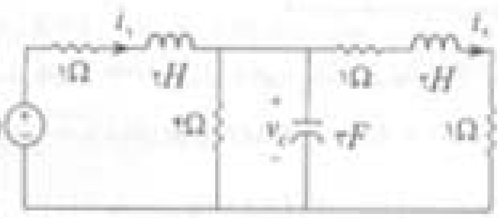
$$= \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۰^{-۶}\times\left(۴e^{-۰/۴}\right)^{۲} + \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۶}\times\left(۸e^{-۱/۰}\right)^{۲} = ۱۳/۶۴\times ۱۰^{-۶}J$$

انرژی تلف شده در مقاومت ها $= ۷۲\times ۱۰^{-۶} - ۱۳/۶۴\times ۱۰^{-۶} = ۵۸/۳۶\times ۱۰^{-۶}J$

درصد انرژی تلف شده در مقاومت ها $= \frac{۵۸/۳۶}{۷۲}\times ۱۰۰ = ۸۱/۰۵\%$

مسئله ۲۷

منبع برای مدت طولانی در مدار بوده و درلحظه $t=0$ متغیرهای مداریه حالت دایمی خود رسیده اند. کمیتهای زیر را حساب کنید.



شکل مسئله ۲۷

الف- $v_c(0^+)$ ، $i_1(0^+)$ ، $i_2(0^+)$

ب- $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$ ، $\frac{di_1(0^+)}{dt}$ ، $\frac{di_2(0^+)}{dt}$

پ- $\frac{d^2v_c(0^+)}{dt^2}$ ، $\frac{d^2i_1(0^+)}{dt^2}$ ، $\frac{d^2i_2(0^+)}{dt^2}$

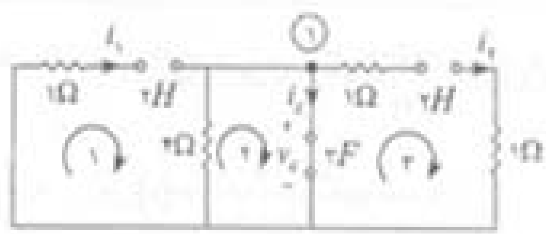
حل : الف ـ از آنجا که منبع به مدت طولانی در مدار بوده لذا سلف مانند اتصال کوتاه و خازن مانند مدار باز عمل می کند. بنابراین در $t=0^-$ مدار بصورت زیر می باشد.

از آنجا که منبع شامل تابع ضربه نیست لذا $i_1(0^+)=i_1(0^-)$ ، $i_2(0^+)=i_2(0^-)$ ، $v_c(0^+)=v_c(0^-)$ می باشد بنابراین داریم.

$$i_1(0^+)=\frac{7}{(1+1)\|4+1}=3A \quad , \quad i_2(0^+)=\frac{4}{(1+1)+4}i_1=\frac{4}{6}3A=2A$$

$$v_c(0^+)=4(i_1-i_2)=4(3-2)=4V$$

ب ـ در $t=0^+$ ، $u(-t)=0$ می باشد بنابراین مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



KVL برای حلقه شامل مش های ۱ و ۲ $\rightarrow \quad i_1+2\frac{di_1(0^+)}{dt}+v_c(0^+)=0$

$$\rightarrow \frac{di_1(0^+)}{dt} = -\frac{i_1(0^+) + v_C(0^+)}{۲} = -\frac{۷}{۲}$$

③ و ② برای حلقه شامل مشهای KVL $\rightarrow \quad -۲(i_1 - i_2) + i_2 + ۲\frac{di_2}{dt} + i_2 = ۰$

$$\rightarrow \frac{di_2(0^+)}{dt} = ۲i_1(0^+) - ۲i_2(0^+) = ۶ - ۶ = ۰$$

① برای گره KCL $\rightarrow \quad -i_1 + \frac{v_C}{۲} + ۳\frac{dv_C}{dt} + i_2 = ۰$

$$\rightarrow \frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{۱}{۳}\left(i_1(0^+) - i_2(0^+) - \frac{v_C(0^+)}{۲}\right) = \frac{۱}{۳}\left(۳ - ۲ - \frac{۲}{۲}\right) = ۰$$

پ ـ با توجه به مدار رسم شده در قسمت (ب) داریم :

$$v_C = i_1 + ۲\frac{di_1}{dt} \quad , \quad v_C = -i_2 - ۲\frac{di_2}{dt} - i_2$$

$$i_C = ۳\frac{dv_C}{dt} = ۳\frac{d\left(i_1 + ۲\frac{di_1}{dt}\right)}{dt} = ۳\frac{di_1}{dt} + ۶\frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_1(0^+)}{dt^2} = \frac{۱}{۲}\frac{dv_C(0^+)}{dt} - \frac{۱}{۲}\frac{di_1(0^+)}{dt} = ۰ - \frac{۱}{۲}\left(-\frac{۷}{۲}\right) = \frac{۷}{۴}$$

$$i_C = ۳\frac{dv_C}{dt} = \frac{۳d\left(-i_2 - ۲\frac{di_2}{dt} - i_2\right)}{dt} = -۶\frac{di_2}{dt} - ۶\frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

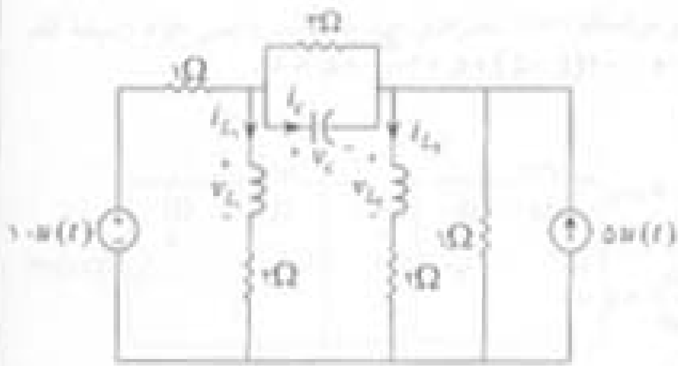
$$\rightarrow \frac{d^2 i_2(0^+)}{dt^2} = -\frac{di_2(0^+)}{dt} - \frac{۱}{۲}\frac{dv_C(0^+)}{dt} = ۰ - ۰ = ۰$$

$$v_{L_2} = ۲\frac{di_2}{dt} = ۲\frac{d(i_C + i_2)}{dt} = ۲\frac{d\left(\frac{۳dv_C}{dt} + i_2\right)}{dt} = ۶\frac{d^2 v_C}{dt^2} + ۲\frac{d^2 i_2}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 v_C(0^+)}{dt^2} = \frac{۱}{۳}\frac{di_1(0^+)}{dt} - \frac{۱}{۳}\frac{d^2 v_C(0^+)}{dt^2} = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(-\frac{۷}{۲}\right) - ۰ = -\frac{۷}{۶}$$

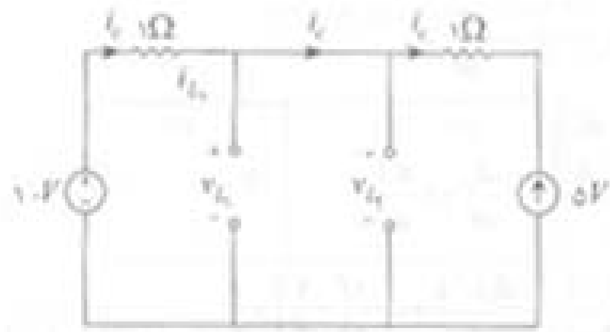
مسئله ۲۸

کمیتهای $i_c(0^+)$، $v_{L_1}(0^+)$، $v_{L_2}(0^+)$، $i_{L_1}(\infty)$، $i_{L_2}(\infty)$ و $v_c(\infty)$ را تعیین کنید.(تمام متغیرهای مدار برای $t \le 0$ صفر می باشند)



شکل مسئله ۲۸

حل : می دانیم که در ابتدا ($t = 0^+$) خازن مانند اتصال کوتاه و سلف مانند مدار باز عمل می کند بنابراین مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



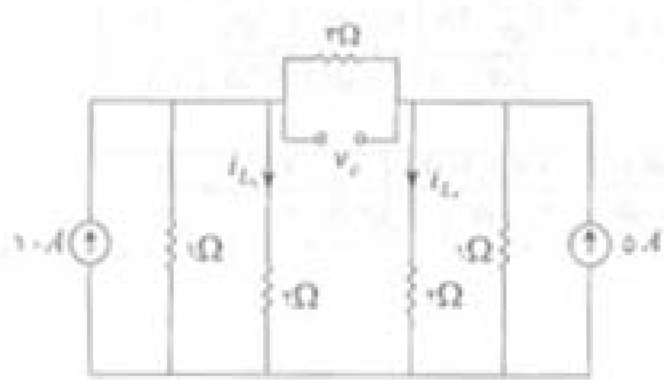
بنابراین داریم :

$$-10 + i_c(0^+) + i_c(0^+) + 5 = 0 \rightarrow i_c(0^+) = 2/5A$$

$$v_{L_1}(0^+) = 5 + \frac{1\Omega}{1\Omega + 1\Omega}10V - \frac{1\Omega}{1\Omega + 1\Omega}5V = 7/5V$$

$$v_{L_2}(0^+) = 10 + \frac{1\Omega}{1\Omega + 1\Omega}5 - \frac{1\Omega}{1\Omega + 1\Omega}10 = 7/5V$$

در نهایت ($t = \infty$) خازن مانند مدار باز و سلف مانند اتصال کوتاه عمل می کند بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



بنابر قاعده تقسیم جریان و قضیه جمع آثار و با توجه به شکل فوق می توان نوشت.

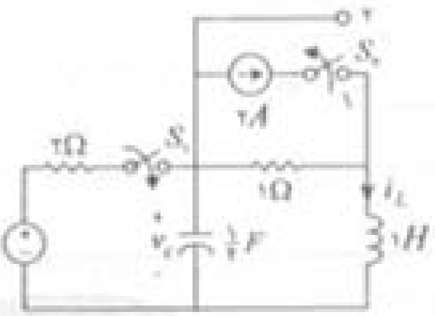
$$i_{L_1}(\infty)=\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}10A+\left(\frac{1\|2}{1\|2+(1\|2)+3}\right)\left(\frac{1}{1+2}\right)5A=\frac{110}{39}+\frac{10}{39}=\frac{120}{39}$$

$$i_{L_2}(\infty)=\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}5A+\left(\frac{1\|2}{1\|2+(1\|2)+3}\right)\left(\frac{1}{1+2}\right)10A=\frac{55}{39}+\frac{20}{39}=\frac{75}{39}A$$

$$v_c(\infty)=3\Omega\times\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}10A-3\Omega\times\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}5A=\frac{330}{39}-\frac{165}{39}=\frac{165}{39}$$

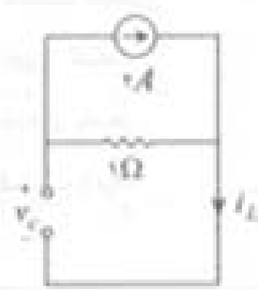
مسئله ۲۹

کمیتهای $i_L(0^+)$، $v_c(0^+)$، $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$، $\frac{di_L(0^+)}{dt}$ و $i_L(\infty)$ و $v_c(\infty)$ را حساب کنید. (S_1 و S_2 به ترتیب به مدت طولانی باز و بسته بوده و در $t=0$ به ترتیب بسته و باز میشوند)



شکل مسئله ۲۹

حل: از آنجا که در $t=0^-$ به مدت طولانی S_1 باز و S_2 بسته است بنابراین مدار به حالت دایمی خود رسیده، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.



$$i_L(0^-)=0\quad,\quad v_c(0^-)=-\frac{2A}{1\Omega}=-2V$$

در $t=0^+$ کلید S_1 بسته و S_2 باز شده و در حالت اولیه خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود. بنابراین داریم.

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = -2V$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

$$i = i_c + i_L \rightarrow \frac{10 - v_c}{2} = c\frac{dv_c}{dt} + i_L \rightarrow \frac{10 - v_c(0^+)}{2} = c\frac{dv_c(0^+)}{dt} + i_L(0^+)$$

$$\rightarrow \frac{10-(-2)}{2} = \frac{1}{2}\frac{dv_c(0^+)}{dt} + 0 \rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt} = 12$$

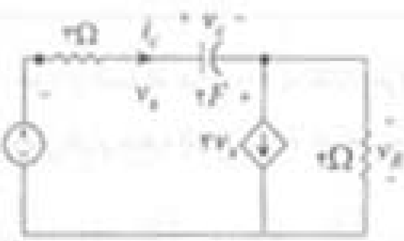
$$v_L = v_c - i_L \rightarrow \frac{di_L}{dt} = v_c - i_L \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = v_L(0^+) - i_L(0^+) = -2$$

در $(t = \infty)$ مدار به حالت دایمی خود خواهد رسید لذا خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد شد.

$i_L(\infty) = \frac{10}{2+1} = \frac{10}{3}A$, $v_c(\infty) = 1 \times i_L(\infty) = \frac{10}{3}V$

مسئله ۳۰

- الف- معادله دیفرانسیل بر حسب v_c نوشته و پاسخ پله مدار را حساب کنید.
- ب- $v_R(0)$ و $v_R(\infty)$ را با استفاده از قسمت (الف) بدست آورده و $v_R(t)$ را برای تمام t تعیین کنید.
- پ- معادله دیفرانسیل بر حسب v_R نوشته و پاسخ پله آن را حساب کنید درستی جواب قسمت (ب) را تایید کنید.



شکل مسئله ۳۰

حل: الف ـ با توجه به شکل مدار داریم:

$v_R = v_s + v_x$, $v_x = -(2i_c + v_c)$

$$\text{KCL} \rightarrow -i_c + 3v_x + \frac{v_R}{4} = 0 \rightarrow -i_c - 3(2i_c + v_c) + \frac{v_s - (2i_c + v_c)}{4} = 0$$

$$\rightarrow 43i_c + 13v_c = v_s \rightarrow 43\left(2\frac{dv_c}{dt}\right) + 13v_c = v_s \rightarrow 86\frac{dv_c}{dt} + 13v_c = v_s$$

برای $v_s(t) = u(t)$ به ازای $t \geq 0$ داریم.

$$۸۶\frac{dv_c}{dt}+۱۳v_c=۱ \rightarrow v_c(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_2=\frac{۱}{۱۳}$ بدست می آید و با فرض اینکه $v_c(۰)=۰$ باشد خواهیم داشت.

$$v_c(۰)=۰ \rightarrow K_1+\frac{۱}{۱۳}=۰ \rightarrow K_1=-\frac{۱}{۱۳} \rightarrow v_c(t)=\frac{۱}{۱۳}\left(۱-e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}\right)\ ,\ t\geq ۰$$

ب ـ می دانیم که $i_c(t)=۲\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{۱}{۴۳}e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}$ می باشد. در ادامه با توجه به نتایج قسمت قبل داریم

$$i_c(۰)=\frac{۱}{۴۳}\ ,\ v_c(۰)=۰ \rightarrow v_x(۰)=-\left(۳i_c(۰)+v_c(۰)\right)=-\frac{۳}{۴۳}V$$

$$\rightarrow v_R(۰)=v_s(۰)+v_x(۰)=۱-\frac{۳}{۴۳}=\frac{۴۰}{۴۳}V$$

$$i_c(\infty)=۰\ ,\ v_c(\infty)=\frac{۱}{۱۳} \rightarrow v_x(\infty)=-\left(۳i_c(\infty)+v_c(\infty)\right)=-\frac{۱}{۱۳}$$

$$\rightarrow v_R(\infty)=v_s(\infty)+v_x(\infty)=۱-\frac{۱}{۱۳}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

واضح است که ثابت زمانی مدار تغییری نخواهد کرد بنابراین خواهیم داشت

$$\rightarrow v_R(t)=\left(v_R(۰)-v_R(\infty)\right)e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}+v_R(\infty)=\left(\frac{۴۰}{۴۳}-\frac{۱۲}{۱۳}\right)e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}+\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۴}{۵۵۹}e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}+\frac{۱۲}{۱۳}$$

پ ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_c=i_R+۳v_x=\frac{v_R}{۴}+۳\left(v_R-v_s\right)=\frac{۱۳v_R}{۴}-۳v_s$$

$$-v_s-v_x+v_R=۰ \rightarrow -v_s+\left(۳i_c+\frac{۱}{۲}\int i_c\,dt\right)+v_R=۰$$

$$\rightarrow -v_s+\left(\frac{۳۹}{۴}v_R-۹v_s\right)+\int\left(\frac{۱۳v_R}{۸}-\frac{۳}{۲}v_s\right)dt+v_R=۰ \rightarrow \frac{dv_R}{dt}+\frac{۱۳}{۸۶}v_R=\frac{۴۰}{۴۳}\frac{dv_s}{dt}+\frac{۶}{۴۳}v_s$$

برای $v_s(t)=u(t)$ به ازای $t>۰$ داریم.

$$\rightarrow \frac{dv_R(t)}{dt}+\frac{۱۳}{۸۶}v_R(t)=\frac{۴۰}{۴۳}\delta(t)+\frac{۶}{۴۳}u(t)=\frac{۶}{۴۳}\ ,\ t>۰$$

$$\rightarrow v_R(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_2 = \frac{12}{13}$ بدست آمده و با اعمال شرط اولیه داریم.

$$v_R(0^+) = \frac{20}{43} \;\to\; K_1 + \frac{12}{13} = \frac{20}{43} \;\to\; K_1 = \frac{20}{43} - \frac{12}{13} = \frac{4}{559}$$

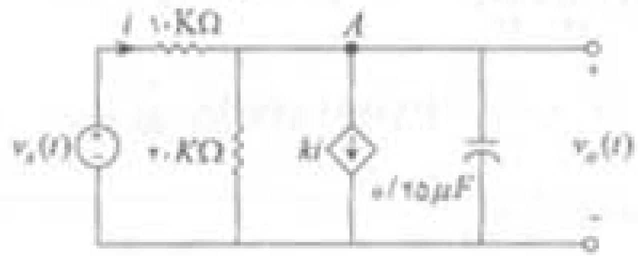
$$\to\; v_R(t) = \frac{4}{559} e^{-\frac{13}{56}t} + \frac{12}{13} \;,\; t > 0$$

که با نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) یکسان است.

مسئله ۳۱

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که $v_o(t)$ را به $v_s(t)$ ارتباط دهد.

ب- برای $v_s(t) = 12u(t)$ و $K = 0/75$ ، ۱، ۱/۲۵، ۱/۵ پاسخ حالت صفر $v_o(t)$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۳۱

حل: الف- با توجه به شکل مسئله $i = \frac{v_s - v_o}{10 \times 10^3}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } (A) \;\to\; -\frac{v_s - v_o}{10 \times 10^3} + \frac{v_o}{20 \times 10^3} + K\left(\frac{v_s - v_o}{10 \times 10^3}\right) + 0/25 \times 10^{-6} \frac{dv_o}{dt} = 0$$

$$\to\; \frac{dv_o}{dt} + 100(5 - 4K)v_o = 400(1 - K)v_s$$

ب- می خواهیم پاسخ حالت صفر را بدست آوریم بنابراین $v_o(0) = 0$ بوده و با جایگذاری $v_s(t) = 12u(t)$ و یا $v_s(t) = 12 \;,\; t > 0$ ، $v_o(t)$ را به ازای $t > 0$ بدست خواهیم آورد.

$$K = 0/75 \;\to\; \frac{dv_o}{dt} + 200v_o = 1200 \;\to\; v_o(t) = K_1e^{-200t} + K_2 \;\to\; 200K_2 = 1200 \;\to\; K_2 = 6$$

$$v_o(0) = 0 \;\to\; K_1 + 6 = 0 \;\to\; K_1 = -6 \;\to\; v_o(t) = 6\left(1 - e^{-200t}\right)$$

$$K = 1 \to\; \frac{dv_o}{dt} + 100v_o = 0 \;\to\; v_o(t) = K_1e^{-100t} \to\; v_o(0) = 0 \;\to\; K_1 = 0 \;\to\; v_o(t) = 0$$

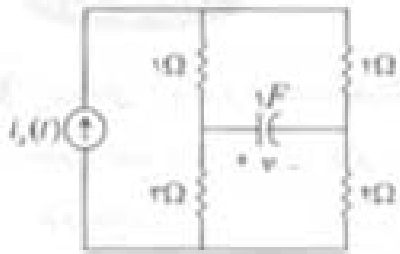
$$K = 1/25 \to\; \frac{dv_o}{dt} = -1200 \to\; v_o(t) = -1200t + K_1 \;,\; v_o(0) = 0 \to\; K_1 = 0 \to\; v_o(t) = -1200t$$

$$K = 1/5 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} - 100 v_c = -2400 \rightarrow v_c(t) = K_1 e^{-100t} + K_2 \rightarrow -100 K_2 = -2400$$

$$\rightarrow K_2 = 24 \;,\; v_c(0) = 0 \rightarrow K_1 + 24 = 0 \rightarrow K_1 = -24 \rightarrow v_c(t) = 24\left(1 - e^{-100t}\right)$$

مسئله ۳۲

پاسخ پله و ضربه ولتاژ v حرف کوچک را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۲

حل : با استفاده از روش تحلیل مش ابتدا پاسخ پله ولتاژ v را بدست خواهیم آورد.

$$i_1 = i_s(t) = u(t) \quad , \quad i_c = i_2 - i_3$$

۱ برای مش KVL $\rightarrow \left(i_2 - u(t)\right) + 2 i_2 - v_c = 0 \rightarrow 3 i_2 - v_c = u(t)$

۳ برای مش KVL $\rightarrow 3\left(i_3 - u(t)\right) + v_c + 4 i_3 = 0 \rightarrow 7 i_3 + v_c = 3u(t)$

$$\begin{cases} -21 i_2 + 7 v_c = -7u(t) \\ 21 i_3 + 3 v_c = 9u(t) \end{cases} \rightarrow 21\left(i_3 - i_2\right) + 10 v_c = 2u(t)$$

$$\rightarrow 21 i_c + 10 v_c = 2u(t) \rightarrow 21\frac{dv_c}{dt} + 10 v_c = 2u(t) \rightarrow v_c(t) = \left(K_1 e^{-\frac{10}{21}t} + K_2\right)u(t)$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $10K_2 = 2$ و یا $K_2 = 0/2$ شده و از آنجا که پاسخ پله را می خواهیم حساب کنیم لذا حالت اولیه صفر بوده و $v_c(0) = 0$ می باشد بنابراین داریم

$$v_c(0) = 0 \rightarrow K_1 + 0/2 = 0 \rightarrow K_1 = -0/2$$

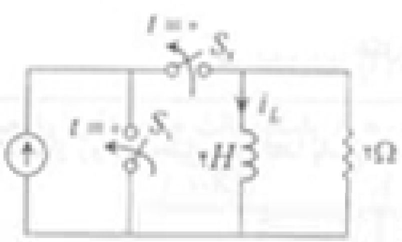
$$\rightarrow s(t) = 0/2\left(1 - e^{-\frac{10}{21}t} + K_2\right)u(t)$$

برای محاسبه پاسخ ضربه از پاسخ پله مشتق خواهیم گرفت.

$$s(t)=۰/۲\left(۱-e^{-\frac{1}{21}t}+K_1\right)\ ,\ t>۰ \quad \rightarrow \quad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{۲}{۲۱}e^{-\frac{1}{21}t}\ ,\ t>۰$$

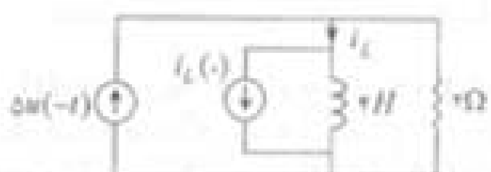
مسئله ۳۳

کلیدهای S_1 و S_2 برای مدت طولانی به ترتیب باز و بسته بوده و در $t=۰$ بسته و باز می شوند مداری بدون کلید و با $i_L(۰)=۰$ برای $t<۰$ رسم کرده تا برای $t>۰$ دارای جواب یکسان برای i_L با مدار فوق باشد.



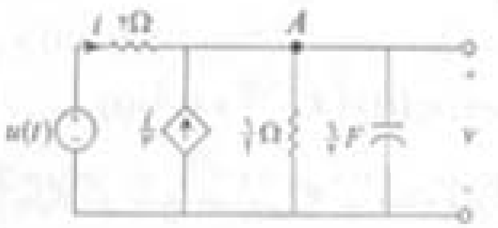
شکل مسئله ۳۳

حل : اگر بخواهیم یک سلف با جریان اولیه را بصورت بدون جریان اولیه رسم کنیم آن را بصورت یک سلف بدون جریان اولیه و موازی با یک منبع جریان ثابت با جریانی برابر جریان اولیه سلف رسم می کنیم و لذا مدار خواسته شده بصورت زیر می باشد.



مسئله ۳۴

پاسخ پله $v(t)$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۳۴

حل : با توجه به شکل مسئله $i=\frac{u(t)-v}{۲}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } Ⓐ \quad \rightarrow \quad -\frac{u(t)-v}{۲}-\frac{۱}{۴}\left(\frac{u(t)-v}{۲}\right)+\frac{v}{\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\frac{dv}{dt}=۰$$

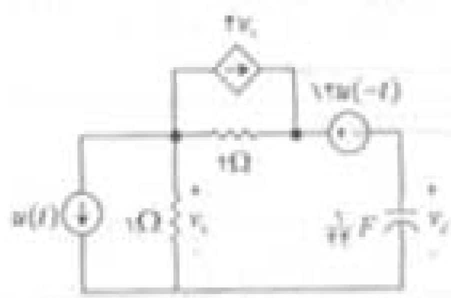
$$\rightarrow\ ۳\frac{dv}{dt}+۱۶v=۲u(t)\ \rightarrow\ v(t)=\left(K_۱e^{-\frac{۱۶}{۳}t}+K_۲\right)u(t)$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی $K_۲$ در معادله دیفرانسیل $۱۶K_۲=۲$ و یا $K_۲=\frac{۱}{۸}$ شده و از آنجا که می خواهیم پاسخ پله را محاسبه کنیم لذا حالت اولیه صفر بوده و خواهیم داشت.

$$v_c(۰)=۰\ \rightarrow\ K_۱+\frac{۱}{۸}=۰\ \rightarrow\ K_۱=-\frac{۱}{۸}\ \rightarrow\ s(t)=v(t)=\frac{۱}{۸}\left(۱-e^{-\frac{۱۶}{۳}t}\right)u(t)$$

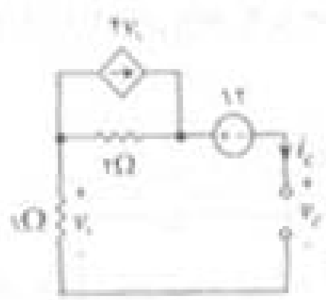
مسئله ۳۵

$v_c(t)$ را برای $t>۰$ حساب کرده و آن را رسم کنید.



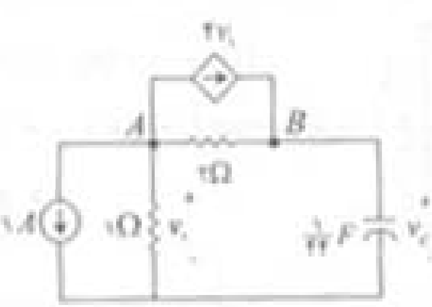
شکل مسئله ۳۵

حل : برای $t<۰$، $u(-t)=۱$ و $u(t)=۰$ بوده ودر $t=۰^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده و خازن مدار باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\rightarrow\ v_c(۰^-)=-۱۲\,V$$

و برای $t>۰$ ، $u(-t)=۰$ و $u(t)=۱$ شده و با استفاده از تحلیل گره خواهیم داشت.



$v_۱=e_A$ ، $e_B=v_c$

KCL برای گره (A) $\rightarrow\ ۱+\frac{e_A}{۱}+۴e_A+\frac{e_A-v_c}{۲}=۰\ \rightarrow\ e_A=\frac{v_c-۲}{۱۱}$

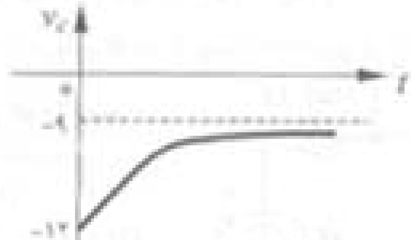
KCL برای گره Ⓑ

$$\rightarrow \frac{v_c - \frac{v_c - 2}{11}}{2} - 2\left(\frac{v_c - 2}{11}\right) + \frac{1}{22}\frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + 4v_c = -36$$

$$\rightarrow v_c(t) = K_1 e^{-4t} + K_2$$

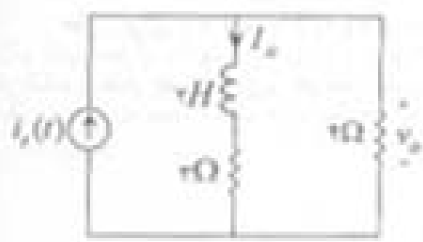
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $4K_2 = -36$ و یا $K_2 = -9$ خواهد شد و از آنجا هیچ جریان بی نهایتی از خازن نمی گذرد لذا $v_c(0^+) = v_c(0^-) = -12$ شده و خواهیم داشت.

$$v_c(0^+) = -12 \rightarrow K_1 - 9 = -12 \rightarrow K_1 = -3 \rightarrow v_c(t) = -9 - 3e^{-4t}\ ,\ t > 0$$



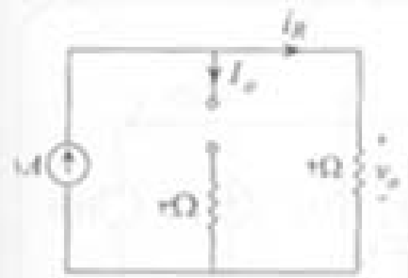
مسئله ۳۶

$i_s(t) = u(t)$ و $i_L(0) = I_0$ می باشد. v_o را حساب کنید.



شکل مسئله ۳۶

حل: در $t = 0^-$ ، $i_L(0^-) = I_0$ بوده و لذا $I_0 = \frac{v_o(0^-)}{4}$ و یا $v_o(0^-) = 4I_0$ بوده و برای $t = 0^+$ سلف مدار باز شده و خواهیم داشت.



$$\rightarrow -1 + I_0 + i_R = 0 \rightarrow -1 + I_0 + \frac{v_o}{4} = 0$$

$$\rightarrow v_o(0^+) = 4(1 - I_0)$$

برای $t > 0$ با توجه به شکل مسئله ۳۶ داریم:

$$\text{KCL} \rightarrow -1 + i_L + \frac{v_o}{4} = 0 \rightarrow i_L = 1 - \frac{v_o}{4}$$

$$\text{KVL} \rightarrow -2i_L - v_L + v_o = 0 \rightarrow -2i_L - 2\frac{di_L}{dt} + v_o = 0$$

$$\rightarrow\; -2\left(1-\frac{v_c}{2}\right)-2\frac{d\left(1-\frac{v_c}{2}\right)}{dt}+v_c=0 \;\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt}+\frac{7}{2}v_c=6 \;\rightarrow\; v_c(t)=K_1e^{-\frac{7}{2}t}+K_2\;,\; t>0$$

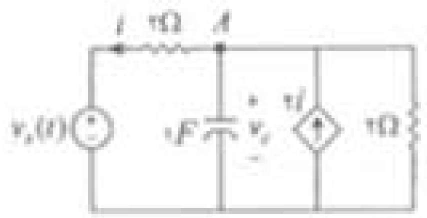
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{7}{2}K_2=6$ و یا $K_2=\frac{12}{7}$ خواهد شد و خواهیم داشت.

$$\rightarrow\; v_c(0^+)=4-4I_0 \;\rightarrow\; K_1+\frac{12}{7}=4-4I_0 \;\rightarrow\; K_1=\frac{16}{7}-4I_0$$

$$\rightarrow\; v_c(t)=\left(\frac{12}{7}+\left(\frac{16}{7}-4I_0\right)e^{-\frac{7}{2}t}\right)u(t)$$

مسئله ۳۷

پاسخ پله و ضربه ولتاژ دو سر خازن چیست.



شکل مسئله ۳۷

حل : ابتدا پاسخ پله را حساب می کنیم. با فرض $v_s(t)=u(t)=1\;,\;t>0$ و با توجه به شکل مسئله $i=\frac{v_c-1}{2}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } A \;\rightarrow\; \frac{v_c-1}{2}+\frac{dv_c}{dt}-2\left(\frac{v_c-1}{2}\right)+\frac{v_c}{2}=0 \;\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt}=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow\; v_c(t)=-\frac{1}{2}t+K_1\;,\; t>0$$

از آنجا که می خواهیم پاسخ پله را حساب کنیم لذا حالت اولیه صفر بوده، بنابراین داریم.

$$v_c(0)=0 \;\rightarrow\; K_1=0 \;\rightarrow\; s(t)=v_c(t)=-\frac{1}{2}t\,u(t)$$

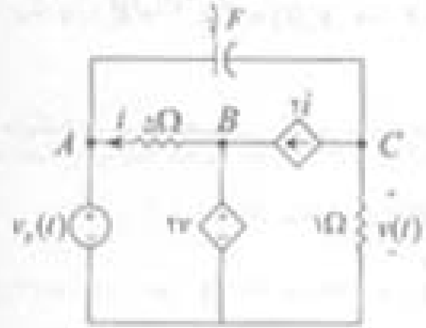
در نهایت برای محاسبه پاسخ ضربه از پاسخ پله مشتق می گیریم.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=-\frac{1}{2}u(t)-\frac{1}{2}t\delta(t)$$

جمله $-\frac{1}{2}t\delta(t)$ متحد با صفر است زیرا برای $t=0$ ، $-\frac{1}{2}t$ صفر بوده و به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین داریم.

$$h(t)=-\frac{1}{2}u(t)$$

مسئله ۳۸



پاسخ پله v را برای $t>0$ حساب کنید.

شکل مسئله ۳۸

حل: با فرض $t>0$، $v_s(t)=u(t)=1$ و با توجه به شکل مسئله $i=\frac{2v-1}{5}$ بوده و خواهیم داشت:

$$\text{KCL برای گره } C \rightarrow \frac{1}{2}\frac{d(v-1)}{dt}+2\left(\frac{2v-1}{5}\right)+\frac{v}{1}=0$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{18}{5}v=\frac{4}{5} \rightarrow v(t)=K_1e^{-\frac{18}{5}t}+K_2,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{18}{5}K_2=\frac{4}{5}$ ویا $K_2=\frac{2}{9}$ خواهد شد. همچنین در $t=0^+$، خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v(0^+)=v_s=1$ بوده و داریم

$$v_c(0^+)=1 \rightarrow K_1+\frac{2}{9}=1 \rightarrow K_1=\frac{7}{9} \rightarrow v(t)=\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t}\right)u(t)$$

مسئله ۳۹

در مسئله ۳۸ خروجی را به ازای $v_s(t)=4\left(u(t)-u(t-2)\right)$ حساب کنید.

حل: بنابر خاصیت خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان داریم.

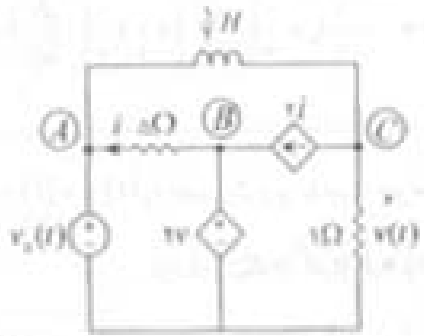
$$v_s(t)=u(t) \rightarrow v(t)=\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t}\right)u(t)$$

$$v_{new}(t)=4\left(v(t)-v(t-2)\right)=4v(t)-4v(t-2)=\left(\frac{8}{9}+\frac{28}{9}e^{-\frac{18}{5}t}\right)u(t)-\left(\frac{8}{9}+\frac{28}{9}e^{-\frac{18}{5}(t-2)}\right)u(t-2)$$

مسئله ۴۰

اگر در مسئله ۳۸ خازن $\frac{۱}{۴}$ فارادی با سلف $\frac{۱}{۴}$ هانری تعویض شود $v(t)$ را حساب کنید.

حل : با انجام تعویض گفته شده مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



با فرض $t>0$ ، $v_s(t)=u(t)=1$ و با توجه به شکل مسئله $i=\frac{2v-1}{5}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره C} \rightarrow i_L(0)+4\int_0^t (v-1)\,dt+2\left(\frac{2v-1}{5}\right)+\frac{v}{1}=0$$

$$\rightarrow 5i_L(0)+\int_0^t (10v-10)\,dt+9v-2=0$$

$$\rightarrow 10v-10+9\frac{dv}{dt}=0 \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{10}{9}v=\frac{10}{9} \rightarrow v(t)=K_1e^{-\frac{10}{9}t}+K_2 \; , \; t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{10}{9}K_2=\frac{10}{9}$ و یا $K_2=1$ شده و همچنین در $t=0^+$ سلف همانند مدار باز عمل کرده بنابراین معادله KCL گره c بصورت زیر تغییر خواهد کرد.

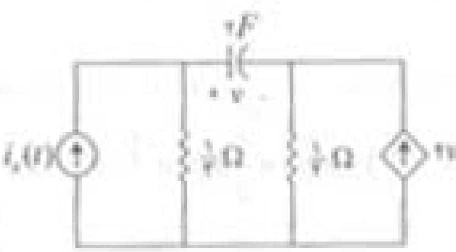
$$2\left(\frac{2v(0^+)-1}{5}\right)+\frac{v_c(0^+)}{1}=0 \rightarrow v_c(0^+)=\frac{2}{9}$$

$$\rightarrow K_1+1=\frac{2}{9} \rightarrow K_1=-\frac{7}{9} \rightarrow v(t)=\left(1-\frac{7}{9}e^{-\frac{10}{9}t}\right)u(t)$$

مسئله ۴۱

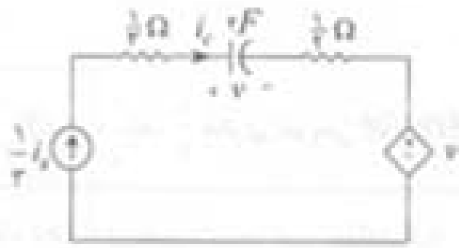
الف- معادله دیفرانسیل بر حسب v را بدست آورید.

ب- پاسخ پله وضربه راجداگانه حساب کرده و ارتباط میان آنها را بررسی کنید.



شکل مسئله ٤١

حل : الف ـ با استفاده از تبدیل نوتن - ترتن داریم.



$$-\frac{۱}{۳}i_s + \frac{۱}{۳}i_c + v + \frac{۱}{۲}i_c + v = ۰ \quad \rightarrow \quad -\frac{۱}{۳}i_s + \frac{۱}{۳}\left(۲\frac{dv}{dt}\right) + v + \frac{۱}{۲}\left(۲\frac{dv}{dt}\right) + v = ۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{۶}{۵}v = \frac{i_s}{۵}$$

ب ـ پاسخ پله به ازای $t > ۰$ و $i_s(t) = u(t) = ۱$ بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{۶}{۵}v = \frac{۱}{۵}\ ,\ t > ۰ \quad \rightarrow \quad v(t) = K_1 e^{-\frac{۶}{۵}t} + K_۲\ ,\ t > ۰$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی $K_۲$ در معادله دیفرانسیل $\frac{۶}{۵}K_۲ = \frac{۱}{۵}$ و یا $K_۲ = \frac{۱}{۶}$ شده همچنین در $t = ۰^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v_c(۰^+) = ۰$ شده و خواهیم داشت.

$$v_c(۰^+) = ۰ \quad \rightarrow \quad K_۱ + \frac{۱}{۶} = ۰ \quad \rightarrow \quad K_۱ = -\frac{۱}{۶} \quad \rightarrow \quad s(t) = v(t) = \frac{۱}{۶}u(t)\left(۱ - e^{-\frac{۶}{۵}t}\right)$$

پاسخ ضربه را به ازای $v_s(t) = \delta(t)$ محاسبه خواهیم کرد. بدین منظور ابتدا $v(۰^+)$ را بدست می آوریم. بدین منظور با فرض $v(۰^-) = ۰$ از معادله دیفرانسیل در بازه ۰^- تا ۰^+ انتگرالگیری خواهیم کرد.

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{۶}{۵}v(t) = \frac{۱}{۵}\delta(t)$$

$$\rightarrow \quad \int_{۰^-}^{۰^+}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{۶}{۵}\int_{۰^-}^{۰^+}v(t) = \frac{۱}{۵}\int_{۰^-}^{۰^+}\delta(t) \quad \rightarrow \quad v(۰^+) - v(۰^-) + ۰ = \frac{۱}{۵}$$

$$v(۰^-) = ۰ \quad \rightarrow \quad v(۰^+) = \frac{۱}{۵}$$

صفر بودن انتگرال $\int_{۰^-}^{۰^+} v(t)$ به علت کراندار بودن تابع $v(t)$ است. همچنین به ازای $t > ۰$، $\delta(t) = ۰$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل بصورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{۶}{۵}v(t) = ۰ \quad \rightarrow \quad v(۰^+) = \frac{۱}{۵}\ ,\ t > ۰$$

$$\rightarrow \quad v(t) = \left(Ke^{-\frac{۶}{۵}t}\right)u(t)\ ,\ v(۰^+) = \frac{۱}{۵} \quad \rightarrow \quad K = \frac{۱}{۵} \quad \rightarrow \quad h(t) = v(t) = \frac{۱}{۵}u(t)e^{-\frac{۶}{۵}t}$$

در ادامه ارتباط میان $s(t)$ و $h(t)$ را مورد بررسی قرار می دهیم. با مشتق گیری از $s(t)$ داریم.

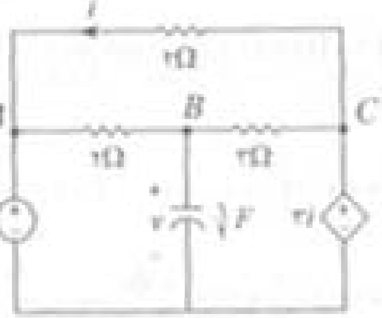
$$s(t)=\frac{1}{6}u(t)\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)\ \rightarrow\ \frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{6}\delta(t)\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)+\frac{1}{5}u(t)e^{-\frac{6}{5}t}$$

جمله $\frac{1}{6}\delta(t)\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)$ متحد با صفر است زیرا به ازای $t=0$، جمله $\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)$ برابر صفر بوده و به ازای $t>0$ جمله $\delta(t)$ برابر صفر می باشد بنابراین داریم.

$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{5}u(t)e^{-\frac{6}{5}t}\ \rightarrow\ \frac{ds(t)}{dt}=h(t)$$

مسئله ۴۲

پاسخ پله و پاسخ ضربه v را حساب کنید. (خازن بدون ولتاژ اولیه است)



شکل مسئله ۴۲

حل: با جایگذاری $e_s(t)=u(t)=1,\ t>0$ و با توجه به شکل مسئله پاسخ پله را بصورت زیر محاسبه می کنیم.

$$i=\frac{e_c-1}{2},\ e_c=3i\ \rightarrow\ i=\frac{3i-1}{2}\ \rightarrow\ i=1$$

$$\text{KCL برای گره } B\ \rightarrow\ \frac{v-1}{2}+\frac{v-3(1)}{3}+\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}=0\ \rightarrow\ \frac{dv}{dt}+\frac{5}{3}v=3$$

$$\rightarrow\ v(t)=K_1e^{-\frac{5}{3}t}+K_2\ ,\ t>0$$

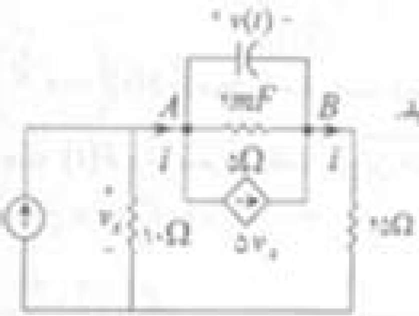
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{5}{3}K_2=3$ و یا $K_2=\frac{9}{5}$ شده همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v(0^+)=0$ شده و خواهیم داشت.

$$v(0^+)=0\ \rightarrow\ K_1+\frac{9}{5}=0\ \rightarrow\ K_1=-\frac{9}{5}\ \rightarrow\ s(t)=v(t)=\frac{9}{5}u(t)\left(1-e^{-\frac{5}{3}t}\right)$$

پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله می باشد بنابراین داریم.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=۲u(t)e^{-\frac{t}{۲}}$$

مسئله ۴۳



شکل مسئله ۴۳

- پاسخ پله و پاسخ ضربه ولتاژ خازن $v(t)$ را حساب کنید.
- همچنین v_x را نیز بدست آورید.

حل : با جایگذاری $i_s(t)=u(t)=۱۰ \ , \ t>۰$ و با توجه به شکل مدار پاسخ پله را بصورت زیر محاسبه می کنیم.

$$v=v_A-v_B=v_x-۲۵i=v_x-۲۵\left(۱-\frac{v_x}{۱۰}\right) \rightarrow v_x=۰/۲۹v+۷/۱۴$$

$$\text{(A) برای گره KCL} \rightarrow -۱۰+\frac{۰/۲۹v+۷/۱۴}{۱۰}+۵(۰/۲۹v+۷/۱۴)+\frac{v}{۵}+۲\times۱۰^{-۳}\frac{dv}{dt}=۰$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt}+۸۴۰v=-۱۷۷۰۰ \rightarrow v(t)=K_1e^{-۸۴۰t}+K_2 \ , \ t>۰$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $۸۴۰K_2=-۱۷۷۰۰$ و یا $K_2=-۲۱/۰۷$ شده ، همچنین در $t=۰^-$ خازن اتصال کوتاه بوده لذا $v(۰^+)=۰$ بوده و خواهیم داشت.

$$v(۰^+)=۰ \rightarrow K_1-۲۱/۰۷=۰ \rightarrow K_1=۲۱/۰۷ \rightarrow s(t)=v(t)=۲۱/۰۷u(t)\left(e^{-۸۴۰t}-۱\right)$$

همچنین $v_x(t)$ برابر خواهد شد با

$$v_x(t)=۰/۲۹v(t)+۷/۱۴=۰/۲۹\left[۲۱/۰۷\left(e^{-۸۴۰t}-۱\right)\right]+۷/۱۴ \ , \ t>۰$$

$$\rightarrow s_x(t)=v_x(t)=u(t)\left(۱/۰۳+۶/۱e^{-۸۴۰t}\right)$$

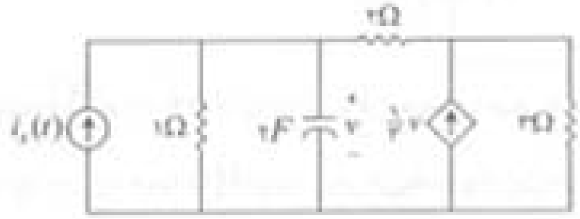
در ادامه برای محاسبه پاسخ ضربه از پاسخ پله مشتق می گیریم.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(۲۱/۰۷u(t)\left(e^{-۸۴۰t}-۱\right)\right)=-۱۷۷۰۰u(t)e^{-۸۴۰t}$$

$$h_x(t)=\frac{ds_x(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(u(t)\left(۱/۰۳+۶/۱e^{-۸۴۰t}\right)\right)=-۵۱۲۴u(t)e^{-۸۴۰t}$$

مسئله ۴۴

پاسخ پله و پاسخ ضربه ۲ را جداگانه حساب کنید و ارتباط میان آنها را عملاً نشان دهید.



شکل مسئله ۴۴

حل : با جایگذاری $i_s(t)=u(t)=1$ ، $t>0$ و با توجه به شکل مسئله داریم.

$$\text{KCL برای گره } \textcircled{B} \rightarrow \frac{v_B - v}{2} = \frac{1}{3}v + \frac{v_B}{3} \rightarrow v_B = v$$

$$\text{KCL برای گره } \textcircled{A} \rightarrow -1 + \frac{v}{1} + 2\frac{dv}{dt} + \frac{v - v}{2} = 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow v(t) = K_1 e^{-\frac{1}{2}t} + K_2 \ , \ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{1}{2}K_2 = \frac{1}{2}$ و یا $K_2 = 1$ شده همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v(0^+)=0$ شده و خواهیم داشت.

$$v(0^+)=0 \rightarrow K_1 + 1 = 0 \rightarrow K_1 = -1 \rightarrow s(t) = v(t) = u(t)\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

با جایگذاری $i_s(t)=\delta(t)$ معادله دیفرانسیل مورد نظر بصورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{2}v(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$

با انتگرالگیری از دو طرف رابطه فوق از 0^- تا 0^+ ، مقدار $v(0^+)$ را بدست می آوریم. توجه کنید که $v(0^-)=0$ می باشد.

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{dv(t)}{dt}dt + \frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+} v(t) = \frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \rightarrow v(0^+) - v(0^-) + 0 = \frac{1}{2} \rightarrow v(0^-) = 0 \rightarrow v(0^+) = \frac{1}{2}$$

می دانیم که به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{2}v(t) = 0 \ , \ v(0^+) = \frac{1}{2} \ , \ t>0 \rightarrow v(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t} \ , \ t>0 \ , \ v(0^+) = \frac{1}{2} \rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow h(t) = v(t) = \frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

در ادامه به ارتباط بین پاسخ پله و ضربه می پردازیم. بدین منظور از پله مشتق می گیریم.

$$\frac{ds(t)}{dt}=\delta(t)\left(1-e^{-t/2}\right)+\frac{1}{2}u(t)e^{-t/2}$$

جمله $\delta(t)\left(1-e^{-t/2}\right)$ به ازای $t\geq 0$ متحد با صفر است زیرا برای $t=0$ جمله $1-e^{-t/2}$ برابر صفر بوده و به ازای $t>0$ ، جمله $\delta(t)$ برابر صفر می باشد بنابراین داریم.

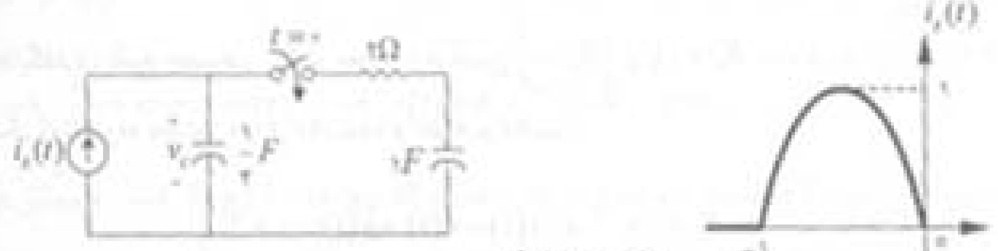
$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{2}u(t)e^{-t/2}=h(t)$$

و این یعنی اینکه پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله می باشد.

مسئله ۴۵

ولتاژ $v_c(t)$ را برای تمام t محاسبه و رسم کنید. (خازنها بدون ولتاژ اولیه می باشند)

آیا هیچگونه انرژی در مدار باقی می ماند و علت آن چیست.



شکل مسئله ۴۵

حل : با توجه به شکل موج $i_s(t)$ می توان نوشت $-1<t\leq 0$ به ازای $t<0$

$$i_s(t)=\begin{cases}0 & , t\leq -1\\ -\sin\pi t & , -1<t\leq 0\\ 0 & , t>0\end{cases}$$

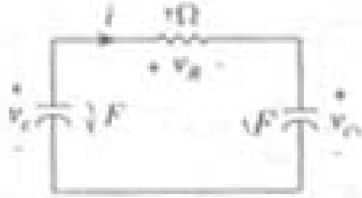
کلید باز بوده بنابراین داریم.

$$i_c(t)=i_s(t)\ ,\ t\leq -1\ \rightarrow\ v_c(t)=0\ \rightarrow\ v_c(-1)=0$$

$$-1<t\leq 0\ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(-1)+\frac{1}{c}\int_{-1}^{t}i_c(t)dt=v_c(-1)-2\int_{-1}^{t}\sin\pi t dt$$

$$=\frac{2}{\pi}(1+\cos\pi t)\ \rightarrow\ v_c(0)=\frac{4}{\pi}$$

به ازای $t>0$ جریان $i_s(t)$ برابر صفر شده و کلید بسته می شود بنابراین مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$i = -\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}$$

$$\text{KVL.} \;\rightarrow\; -v_c + v_R + v_{C1} = 0 \;\rightarrow\; -v_c + 2\left(-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) + v_{C1}(0) + \frac{1}{1}\int\left(-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) = 0$$

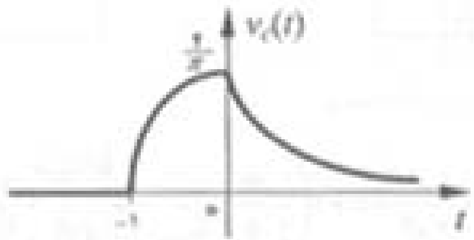
$$\rightarrow\; -\frac{dv_c}{dt} + \frac{d^2 v_c}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} \;\rightarrow\; \frac{d^2 v_c}{dt} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt} + \frac{3}{2}v_c = 0$$

$$\rightarrow\; v_c(t) = Ke^{-\frac{3}{2}t} \;,\; t > 0$$

$$v_c(0) = \frac{4}{\pi} \;\rightarrow\; K = \frac{4}{\pi} \;\rightarrow\; v_c(t) = \frac{4}{\pi}e^{-\frac{3}{2}t} \;,\; t > 0$$

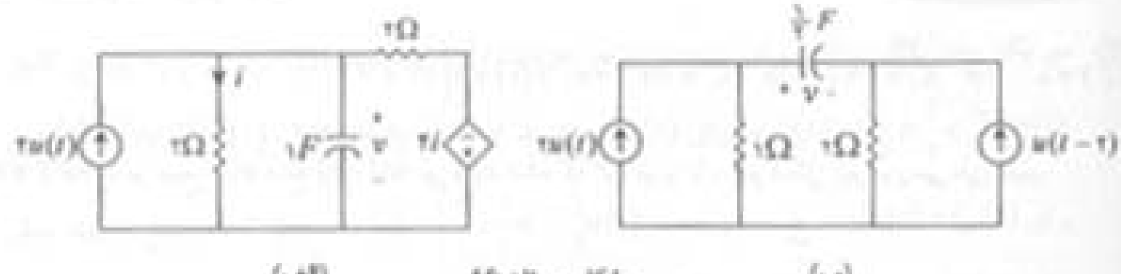
$$\rightarrow\; v_c(t) = \begin{cases} 0 & , \; t \le -1 \\ \frac{2}{\pi}(1+\cos \pi t) & , \; -1 < t \le 0 \\ \frac{4}{\pi}e^{-\frac{3}{2}t} & , \; t > 0 \end{cases}$$

شکل موج $v_c(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۴۶

در دو مدار شکل مسئله ۴۶ v را برای $t \ge 0$ حساب کنید. (ولتاژ اولیه خازن صفر است)



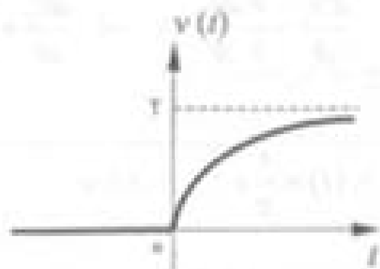
شکل مسئله ۴۶

حل : الف ـ با توجه به شکل (الف) $i=\frac{v}{2}$ بوده و خواهیم داشت.

$$-4+\frac{v}{2}+\frac{dv}{dt}+\frac{v-\left(-2\frac{v}{2}\right)}{2}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+2v=4 \quad \rightarrow \quad v(t)=K_1e^{-2t}+K_2 \;,\; t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $2K_2=4$ و یا $K_2=2$ شده همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v(0^+)=0 \quad \rightarrow \quad K_1+2=0 \quad \rightarrow \quad K_1=-2 \quad \rightarrow \quad v(t)=2u(t)\left(1-e^{-2t}\right) \;,\; t>0$$



ب ـ با توجه به شکل (ب) به ازای $0<t<2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

$$i_c=\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}$$

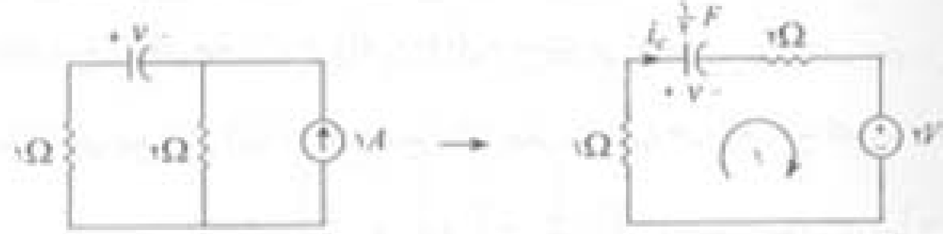
برای مش۱ KVL $\rightarrow \quad -2+\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}+v+2\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\right)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$$\rightarrow \quad v(t)=K_1e^{-\frac{2}{3}t}+K_2 \;,\; t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{2}{3}K_2=\frac{4}{3}$ و یا $K_2=2$ شده و همچنین خازن در $t=0^+$ اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v(0^+)=0 \quad \rightarrow \quad K_1+2=0 \quad \rightarrow \quad K_1=-2 \quad \rightarrow \quad v(t)=2\left(1-e^{-\frac{2}{3}t}\right)$$

در $t=2$ علاوه بر منبع $u(t)$ منبع $u(t-2)$ نیز وارد شده که اثر آن را با رسم شکل زیر بررسی می کنیم.



$i_c = \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}$

برای مش ۱ KVL $\rightarrow \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + v + 2\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right) + 2 = 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{2}{3}v = -\frac{4}{3}$

$\rightarrow v(t) = K_1 e^{-\frac{2}{3}(t-2)} + K_2 \quad , \quad t > 2$

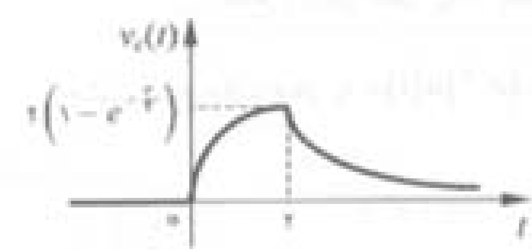
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{2}{3}K_2 = -\frac{4}{3}$ و یا $K_2 = -2$ شده همچنین از آنجا که فقط اثر منبع فوق را بررسی می کنیم لذا $v(2) = 0$ بوده و داریم

$v(2) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 = 2 \quad \rightarrow \quad v(t) = 2e^{-\frac{2}{3}(t-2)} - 2 \ , \ t > 2$

و بنا بر قاعده جمع آثار $v(t)$ برای $t > 2$ بصورت زیر خواهد بود.

$$v(t) = 2\left(1 - e^{-\frac{2}{3}t}\right) + 2e^{-\frac{2}{3}(t-2)} - 2 = 2\left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right)e^{-\frac{2}{3}t} \rightarrow v_c(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 2\left(1 - e^{-\frac{2}{3}t}\right) & , \ 0 < t \le 2 \\ 2\left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right)e^{-\frac{2}{3}t} & , \ t > 2 \end{cases}$$

شکل موج $v(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۳۷

در یک مدار RC موازی برای ورودی منبع جریان $i_{s1}(t)$ و شرط اولیه $v_c(0) = V_0$ پاسخ کامل $v(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)$ و برای $i_{s2}(t)$ و شرط اولیه V_0 پاسخ کامل، $v(t) = \left(2e^{-2t}\right)u(t)$ و برای $i_{s1}(t) + i_{s2}(t)$ پاسخ حالت صفر $v(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$ بدست آمده.پاسخ حالت صفر ناشی از $i_{s1}(t)$ چیست. مقادیر R و C و V_0 و $i_{s1}(t)$ و $i_{s2}(t)$ را تعیین کنید.

حل : ابتدا پاسخ ورودی صفر را برای $i_{y1}(t)+i_{y2}(t)$ بدست می آوریم.

پاسخ ورودی صفر برای $(i_{y1}+i_{y2})$ + پاسخ حالت صفر برای $(i_{y1}+i_{y2})$ = پاسخ کامل برای $(i_{y1}+i_{y2})$

$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)=\left(2e^{-2t}\right)u(t)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)+$ پاسخ ورودی صفر برای $(i_{y1}+i_{y2})$

$\rightarrow$ پاسخ ورودی صفر برای $(i_{y1}+i_{y2})=\left(2e^{-2t}\right)u(t)$

واضح است که پاسخ ورودی صفر برای i_{y1} و i_{y2} یکسان می باشد بنابراین داریم.

پاسخ ورودی صفر برای i_{y1} = پاسخ ورودی صفر برای i_{y2} = $\left(2e^{-2t}\right)u(t)$

$\rightarrow$ پاسخ حالت صفر i_{y1} = پاسخ کامل i_{y1} − پاسخ ورودی صفر برای i_{y1}

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)-\left(2e^{-2t}\right)u(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)u(t)$$

از طرفی $v_c(0)=V_0$ می باشد که با توجه به پاسخ ورودی صفر $V_0=2$ خواهد شد. همچنین $T=RC=\frac{1}{2}$ می باشد که با انتخاب $R=\frac{1}{2}\Omega$ ، $C=1F$ خواهد شد با دقت درپاسخ حالت صفر i_{y1} ملاحظه می شود که پاسخ پله یک مدار RC موازی است بنابراین $i_{s1}(t)=Iu(t)$ و لذا خواهیم داشت.

$$IR=\frac{1}{2}\ ,\ R=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ I=1\ \rightarrow\ i_{s1}(t)=u(t)$$

همچنین می توان نوشت

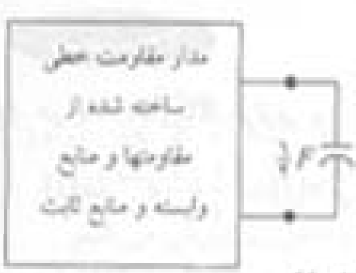
پاسخ حالت صفر i_{y2} = پاسخ کامل i_{y2} − پاسخ ورودی صفر i_{y2}

$=\left(3e^{-2t}\right)u(t)-\left(2e^{-2t}\right)u(t)=\left(e^{-2t}\right)u(t)=$ مشتق پاسخ حالت صفر i_{y1}

$$\rightarrow\ i_{s2}(t)=\frac{di_{s1}(t)}{dt}=\delta(t)$$

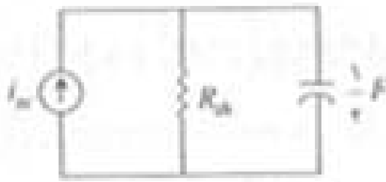
مسئله ۴۸

ولتاژ خازن $\frac{1}{4}F$ با مقدار اولیه صفر برابر $v_c(t)=2-2e^{-\frac{t}{4}}$ می باشد.اگرسلف $L=12H$ را به جای خازن وصل می کردیم ولتاژ دو سر سلف به چه صورتی درمی آمد.



شکل مسئله ۴۸

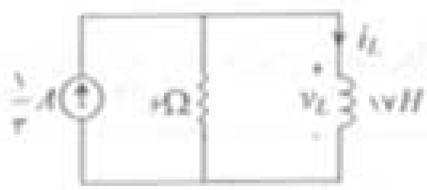
حل : ابتدا معادل نورتن مدار مقاومت خطی را بدست می آوریم.(توجه کنید که فقط زمان $t>0$ را در نظر می گیریم)



$$v_c(t)=2\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right) \rightarrow R_{th}C=2 \ , \ C=\frac{1}{3}F \rightarrow R_{th}\left(\frac{1}{3}\right)=2 \rightarrow R_{th}=6\Omega$$

$$i_{sc}R_{th}=2 \rightarrow i_{sc}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}A$$

حال بجای خازن، سلف را قرار داده و از معادل نورتن مدار مقاومت خطی استفاده می کنیم.



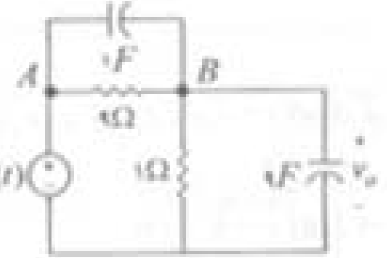
$$-\frac{1}{3}+\frac{v_L}{6}+\frac{1}{12}\int v_L\,dt=0 \rightarrow \frac{1}{6}\frac{dv_L}{dt}+\frac{1}{12}v_L=0 \rightarrow \frac{dv_L}{dt}+\frac{1}{2}v_L=0 \rightarrow v_L(t)=Ke^{-\frac{t}{2}}$$

در $t=0$ سلف مدار باز بوده بنابراین داریم

$$v_L(0)=\left(\frac{1}{3}A\right)(6\Omega)=2V \rightarrow K=2 \rightarrow v_L(t)=2e^{-\frac{t}{2}}$$

مسئله ۴۹

پاسخ پله v_o را برای تمام t تعیین و رسم کنید.



شکل مسئله ۴۹

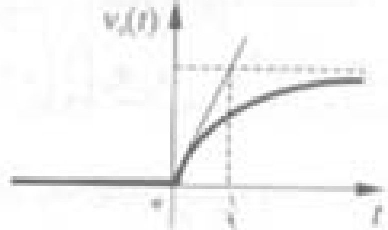
حل : برای تعیین پاسخ پله $t>0$ ، $v_s(t)=u(t)=1$ قرار می دهیم در $t=0$ خازن ها اتصال کوتاه بوده لذا $v_o(0)=0$ می باشد و برای $t=\infty$ خازنها مدار باز شده ولذا با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت

$$v_o(\infty)=\frac{1}{9+1}1=\frac{1}{10}v$$

واضح است که دو مدار RC مجزا داریم. بنابراین ثابت زمانی ولتاژ v_o ، $T = RC = 1\times 9 = 9$ خواهد شد. پس خواهیم داشت:

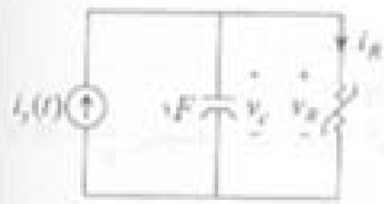
$$v_o(t) = \left(v_o(0) - v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + v_o(\infty) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-\frac{t}{9}}\right)\ ,\ t>0 = \frac{1}{10}u(t)\left(1-e^{-\frac{t}{9}}\right)$$

شکل موج $v_o(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۵۰

ثابت کنید پاسخ ضربه v_c مشتق پاسخ پله v_c نمی باشد. ($i_R = v_R^2$)



شکل مسئله ۵۰

حل : ابتدا پاسخ پله v_c را بدست می آوریم. بدین منظور با فرض $t>0$ ، $i_s(t) = u(t) = 1$ داریم:

$$-1 + \frac{dv_c}{dt} + v_c^2 = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{1-v_c^2} = dt \rightarrow \left(\frac{dv_c}{1-v_c} + \frac{dv_c}{1+v_c}\right) = 2dt$$

با انتگرالگیری از طرفین معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$\left(-\ln(1-v_c) + \ln(1+v_c)\right) = 2t + C$$

از طرفی می دانیم که خازن در $t=0$ اتصال کوتاه خواهد بود. بنابراین $v_c(0)=0$ بوده لذا خواهیم داشت:

$$v_c(0) = 0 \rightarrow \left(-\ln(1) + \ln(1)\right) = 0 + C \rightarrow C = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{1+v_c}{1-v_c}\right) = 2t$$

$$\rightarrow \frac{1+v_c}{1-v_c} = e^{2t} \rightarrow s(t) = v_c(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}-1}$$

در ادامه با جایگذاری $i_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را محاسبه خواهیم کرد.

$$-\delta(t) + \frac{dv_c}{dt} + v_c^2 = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + v_c^2 = \delta(t)\ ,\ t \geq 0$$

حال با انتگرالگیری از 0^- تا 0^+، $v_c(0^+)$ را بدست خواهیم آورد.

$$\int_{0^-}^{0^+}\frac{dv_c}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}v_c^2dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\rightarrow v_c(0^+)-v_c(0^-)+0=1\ \rightarrow\ v_c(0^-)=0\ \rightarrow\ v_c(0^+)=1$$

واضح است که v_c^2 در بازه 0^- تا 0^+ کرانددار می باشد و لذا $\int_{0^-}^{0^+}v_c^2dt=0$ شد ولی $\frac{dv_c}{dt}$ در بازه 0^- تا 0^+ کرانددار نیست. بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{dv_c}{dt}+v_c^2=0\ ,\ t\geq 0\ ,\ v_c(0^+)=1\ \rightarrow\ \frac{dv_c}{v_c^2}=-dt\ \rightarrow\ -\frac{1}{v_c}=-t+C\ ,\ v_c(0^+)=1$$

$$\rightarrow\ C=-1\ \rightarrow\ h(t)=v_c(t)=\frac{1}{t+1}$$

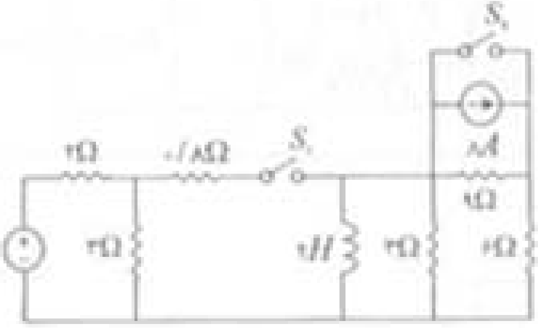
با گرفتن مشتق از پاسخ پله داریم.

$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{4e^{2t}(e^{2t}+1)-4e^{2t}(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^2}=\frac{8e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\neq h(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله نمی باشد و این به علت غیر خطی بودن مدار است.

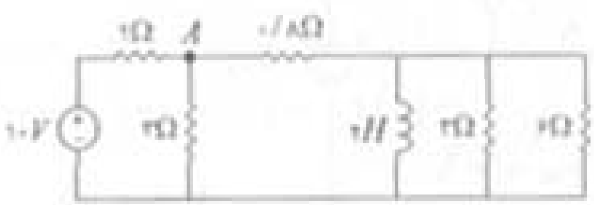
مسئله ۵۱

S_1 و S_2 برای مدت طولانی به ترتیب باز و بسته بوده اند. در $t=0$، S_1 را بسته و سپس در $t=1$ هردو را باز می کنیم. جریان گذرنده از سلف برای $0\leq t\leq 1$ و $t\geq 1$ چیست.



شکل مسئله ۵۱

حل : برای $0\leq t\leq 1$ کلید S_1 و S_2 هردو بسته اند ملاحظه می شود که همه جریان $8A$ از اتصال کوتاه ناشی از بسته بودن S_2 می گذرد بنابراین منبع جریان $8A$ عملاً از مدار خارج خواهد بود.



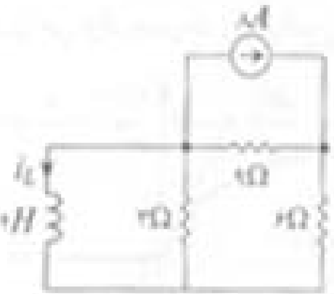
در $t=0^-$ سلف مدار باز بوده لذا $i_L(0^-)=0$ می باشد و در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v_A=\frac{3\|0/8}{3\|0/8+2}10v=2/4v\ \rightarrow\ i_L(\infty)=\frac{2/4}{0/8}=3A$$

معادل دو سر سلف $R=(۳P۶)P\left[(۳P۲)+۰/۸\right]=۱\Omega \;\rightarrow\; T=\frac{L}{R}=۲$

$\rightarrow\; i_L(t)=\left(i_L(۰)-i_L(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_L(\infty)=۳\left(۱-e^{-\frac{t}{۲}}\right)$

برای $۱<t$ ، k_1 و k_2 هر دو باز خواهند بود و مدار بصورت زیر می باشد.



با توجه به قسمت قبل $i_L(۱)=۳\left(۱-e^{-\frac{۱}{۲}}\right)=۱/۱۸$ بوده و همچنین می دانیم که سلف در $t=\infty$ اتصال کوتاه خواهد بود بنابراین با استفاده از قاعده تقسیم جریان داریم:

$i_L(\infty)=-\frac{۹}{۹+۶}۸=-۴/۸$

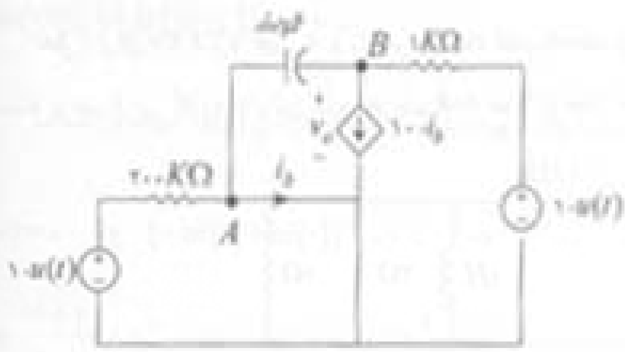
معادل دو سر سلف $R=(۹+۶)P۲=\frac{۱۵}{۶} \;\rightarrow\; T=\frac{L}{R}=\frac{۲}{\frac{۱۵}{۶}}=\frac{۱۲}{۱۵}$

$\rightarrow\; i_L(t)=\left(i_L(۱)-i_L(\infty)\right)e^{-\frac{t-۱}{T}}+i_L(\infty)=۵/۹۸e^{-\frac{۱۵}{۱۲}(t-۱)}-۴/۸$

$$\rightarrow\; i_L(t)=\begin{cases}۳\left(۱-e^{-\frac{t}{۲}}\right) & ,\; ۰\le t\le ۱\\ ۵/۹۸e^{-۱/۲۵(t-۱)}-۴/۸ & ,\; t>۱\end{cases}$$

مسئله ۵۲

$v_x=?$



شکل مسئله ۵۲

حل:

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow\; i_b+\frac{۰-۱۰}{۲۰۰\times۱۰^{۳}}=-۰/۰۰۱\times۱۰^{-۶}\frac{dv_x}{dt} \;\rightarrow\; i_b=۵\times۱۰^{-۵}+۱۰^{-۹}\frac{dv_x}{dt}$

$$\text{KCL} \text{ برای گره } \textcircled{B} \rightarrow 100\left(5\times10^{-6}+10^{-9}\frac{dv_o}{dt}\right)+10^{-6}\frac{dv_o}{dt}+\frac{v_o-10}{1\times10^{3}}=0$$

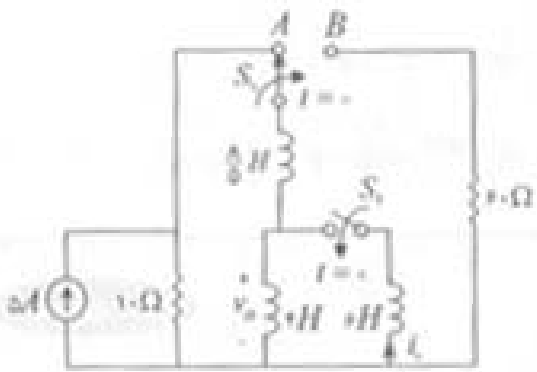
$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt}+\frac{10^{4}}{101}v_o=\frac{5}{101}\times10^{4} \rightarrow v_o(t)=K_1e^{-\frac{10^{4}}{101}t}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{10^{4}}{101}K_2=\frac{5}{101}\times10^{4}$ و یا $K_2=5$ شده وهمچنین در $t=0$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v_o(0)=0 \rightarrow K_1+5=0 \rightarrow K_1=-5 \rightarrow v_o(t)=5u(t)\left(1-e^{-\frac{10^{4}}{101}t}\right)$$

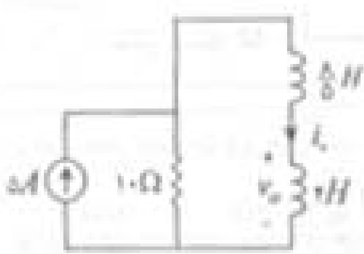
مسئله ۵۳

$v_o(t)$ و $i_o(t)$ را برای $t\geq0$ حساب کنید. (به مدت طولانی S_1 در وضعیت A و S_2 باز می باشد.)



شکل مسئله ۵۳

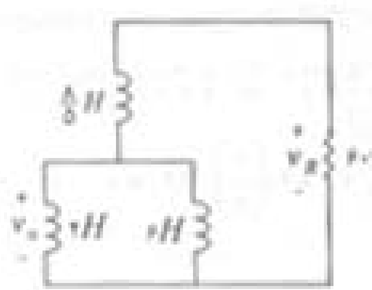
حل : برای $t<0$ مدار بصورت زیر می باشد.



در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی رسیده و سلفها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین داریم.

$$i_{L_1}(0^-)=i_{L_2}(0^-)=5A\ ,\ i_{L_3}(0^-)=0\ ,\ v_o(0^-)=0\ ,\ i_o(0^-)=0$$

برای $t>0$ مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



از آنجا که هیچگونه ولتاژ نا معینی به دو سر سلفها وصل نمی شود لذا داریم.

$$i_{L_1}(0^+) = i_{L_1}(0^-) = 5A \ , \ i_{L_2}(0^+) = i_{L_2}(0^-) = 5A \ , \ i_o(0^+) = i_o(0^-) = 0$$

بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت $v_R = 60(-5) = -300V$ بوده و خواهیم داشت.

$$v_o(0^+) = \frac{4 \| 6}{4 \| 6 + \frac{8}{5}} v_R = \frac{12}{20}(-300) = -180V$$

می دانیم که در $t = \infty$ سلفها اتصال کوتاه شده ولذا $v_o(\infty) = 0$ خواهد بود. در ادامه ثابت زمانی مدار را حساب خواهیم کرد.

$$T = \frac{L}{R} = \frac{4 \| 6 + \frac{9}{5}}{R} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

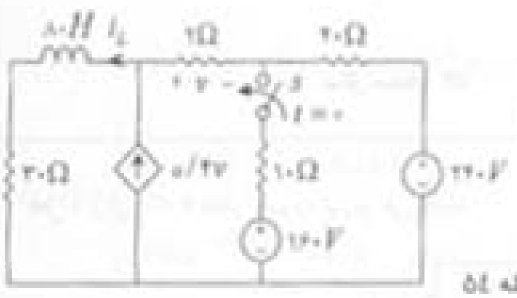
$$\to \ v_o(t) = \left(v_o(0^+) - v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + v_o(\infty) = -180e^{-15t} \ , \ t > 0$$

$$i_o(t) = i_o(0) + \frac{1}{6}\int_0^t \left(-v_o(t)\right)dt = 30\int_0^t e^{-15t} = -2e^{-15t}\Big|_0^t = 2\left(1 - e^{-15t}\right) \ , \ t > 0$$

مسئله ۵۴

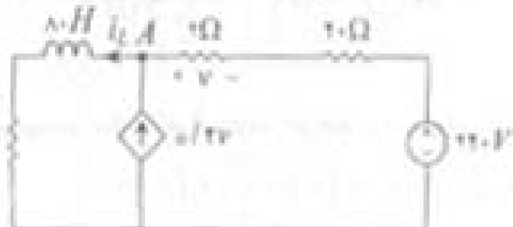
$i_L(t)$ را برای $t > 0$ حساب کنید. بدست آورده و رسم کنید.

(S برای مدت طولانی باز بوده است)



شکل مسئله ۵۴

حل: به ازای $t < 0$ کلید S باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



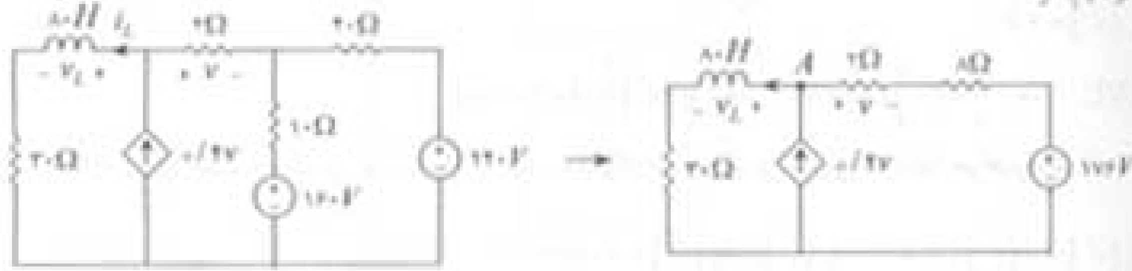
در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده و سلف بصورت اتصال کوتاه عمل می کند بنابراین داریم

KCL برای گره A $\to \ i_L - 0/4v + \frac{v}{2} = 0 \ \to \ v = -10 i_L$

KVL برای حلقه بیرونی $\to \ -30 i_L + v + 20\left(\frac{v}{2}\right) + 220 = 0 \ \to \ -30 i_L - 21v = 220$

$$\rightarrow\quad -۳۰ i_L + ۲۷۰ i_L = ۲۴۰ \quad\rightarrow\quad i_L\left(0^-\right) = \frac{۲۴۰}{۲۴۰} = ۱A$$

برای $t>0$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد که با استفاده از تبدیل تونن- نرتن آن را ساده خواهیم کرد.



$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow i_L - ۰/۴v + \frac{v}{۲} = ۰ \rightarrow v = -۱۰ i_L$$

$$\text{KVL برای حلقه بیرونی} \rightarrow -۳۰ i_L - v_L + v + ۸\left(\frac{v}{۲}\right) + ۱۷۶ = ۰$$

$$\rightarrow -۳۰ i_L - v_L + \left(-۱۰ i_L\right) + ۸\left(\frac{-۱۰ i_L}{۲}\right) + ۱۷۶ = ۰$$

$$\rightarrow v_L + ۸۰ i_L = ۱۷۶ \rightarrow ۸۰\frac{di_L}{dt} + ۸۰ i_L = ۱۷۶ \rightarrow \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{۱۱}{۵}$$

$$\rightarrow i_L(t) = K_1 e^{-t} + K_2 \ ,\ t>0$$

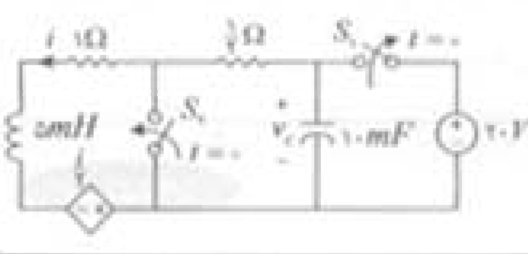
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $K_2 = \frac{۱۱}{۵}$ شده ، همچنین از آنجا که هیچ ولتاژ بی نهایتی به دو سر سلف اعمال نشده است لذا خواهیم داشت.

$$i_L\left(0^+\right) = i_L\left(0^-\right) = ۱A \rightarrow K_1 + \frac{۱۱}{۵} = ۱ \rightarrow K_1 = -\frac{۶}{۵} \rightarrow i_L(t) = \frac{۱۱}{۵} - \frac{۶}{۵}e^{-t} \ ,\ t>0$$

مسئله ۵۵

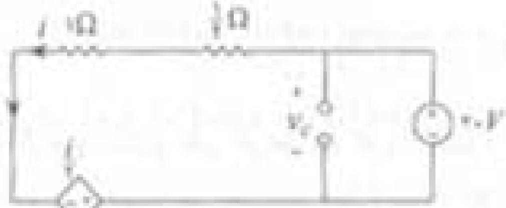
$v_c(t)$ و $i_L(t)$ را برای $t>0$ حساب کنید.

(برای مدت طولانی s_1 بسته و s_2 باز بوده است)



شکل مسئله ۵۵

حل: به ازای $t=0^-$، s_1 بسته و s_2 باز بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده است بنابراین سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز بوده و خواهیم داشت.



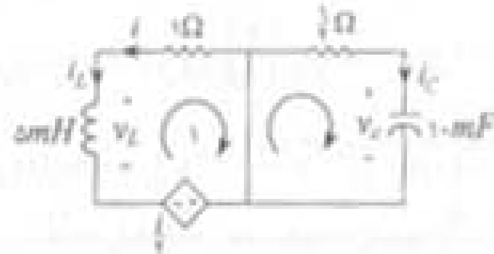
$v_c(0^-) = 20V$

$$\text{KVL} \rightarrow \frac{i}{2} - i - \frac{1}{2}i + 20 = 0 \rightarrow i_L(0^-) = i(0^-) = 20A$$

و از آنجا که روی خازن جریان بی نهایت و یا روی سلف ولتاژ بی نهایت واقع نمی شود لذا خواهیم داشت:

$$v_c(0^+) = v(0^-) = 20V \ , \ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 20A$$

برای $t > 0$، S_1 باز و S_2 بسته خواهد شد و مدار زیر را خواهیم داشت:



$i = i_L$

$$\text{KVL برای مش ①} \rightarrow \frac{i_L}{2} - v_L - i_L = 0 \rightarrow 5\times10^{-3}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt} + 100 i_L = 0 \rightarrow i_L(t) = Ke^{-100t} \ , \ t > 0$$

$$\rightarrow i_L(0^+) = 20A \rightarrow K = 20 \rightarrow i_L(t) = 20e^{-100t} \ , \ t > 0$$

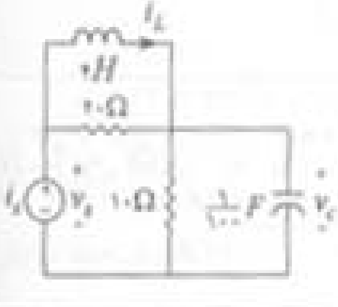
$$\text{KVL برای مش ②} \rightarrow \frac{1}{2}i_c + v_c = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(10\times10^{-3}\frac{dv_c}{dt}\right) + v_c = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_c}{dt} + 200 v_c = 0 \rightarrow v_c(t) = Ke^{-200t}$$

$$v_c(0^+) = 20V \rightarrow K = 20 \rightarrow v_c(t) = 20e^{-200t} \ , \ t > 0$$

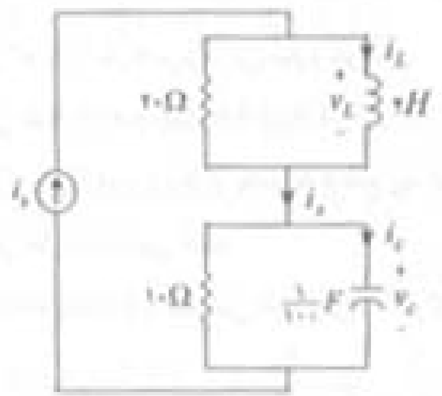
مسئله ۵۶

$v_c(t)$ و $i_L(t)$ و $v_s(t)$ را بیابید. ($i_s = 20 + 40u(t)$)



شکل مسئله ۵۶

حل : واضح است که یک مدار RC موازی با یک مدار RL موازی، سری شده است.



به ازای $t<0$ هر دو مدار به حالت دایمی خود یعنی $i_s(t)=30A$ رسیده اند. به عبارت دیگر سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است بنابراین داریم.

$$i_L(0^+)=30A \ , \ v_c(0^+)=(10\Omega)(30\Omega)=300\Omega$$

به ازای $t>0$، $i_s(t)=30+60u(t)=90A$ شده بنابراین داریم

$$\frac{v_L}{20}+i_L=90 \ \rightarrow \ \frac{4\frac{di_L}{dt}}{20}+i_L=90 \ \rightarrow \ \frac{di_L}{dt}+5i_L=450 \ \rightarrow \ i_L(t)=K_1e^{-5t}+K_2 \ , \ t>0$$

با جایگذاری K_2 در معادله دیفرانسیل $5K_2=450$ و یا $K_2=90$ شده ، و همچنین با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت.

$$i_L(0^+)=30A \ \rightarrow \ 30=K_1+90 \ \rightarrow \ K_1=-60 \ \rightarrow \ i_L(t)=-60e^{-5t}+90 \ ; \ t>0$$

در ادامه به محاسبه $v_c(t)$ خواهیم پرداخت.

$$\frac{v_c}{10}+i_c=90 \ \rightarrow \ \frac{v_c}{10}+\frac{1}{100}\frac{dv_c}{dt}=90 \ \rightarrow \ \frac{dv_c}{dt}+10v_c=9000 \ \rightarrow \ v_c(t)=K_1e^{-10t}+K_2 \ , \ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $10K_2=9000$ و یا $K_2=900$ شده ، و همچنین با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت.

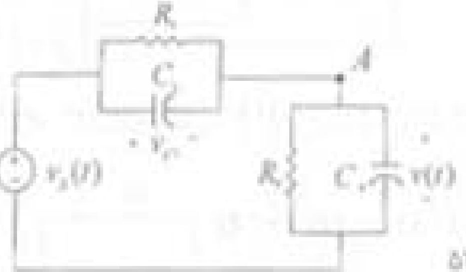
$$v_c(0^+)=300 \ \rightarrow \ K_1+900=300 \ \rightarrow \ K_1=-600 \ \rightarrow \ v_c(t)=-600e^{-10t}+900 \ , \ t>0$$

و در نهایت $v_s(t)$ را بدست خواهیم آورد.

$$v_s(t)=v_L+v_c=4\frac{di_L}{dt}+v_c=120e^{-5t}-600e^{-10t}+900 \ , \ t>0$$

مسئله ۵۷

- الف- معادله دیفرانسیلی که v را به v_s مربوط می سازد بنویسید.
- ب- پاسخ پله v را تعیین کنید. $\left(v_{C_1}(0) = v_{C_2}(0) = 0 \right)$
- پ- چه رابطه ای بین R_1 و R_2 و C_1 و C_2 برقرار باشد تا v تابع پله شود.
- ت- جریان گذرنده از هر خازن را تعیین کنید.
- ث- اگرمنبع ولتاژ $v_s(t)$ با جریان $i_s(t)$ تعویض شود جواب سئوالات بالا به چه صورت درمی آید.



شکل مسئله ۵۷

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_{C_1} = v_s - v$$

$$\text{KCL برای گره } A \quad \rightarrow \quad -\frac{v_s - v}{R_1} - C_1 \frac{d(v_s - v)}{dt} + \frac{v}{R_2} + C_2 \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)} v_s$$

ب ـ پاسخ پله با حل معادله دیفرانسیل فوق به ازای $t > 0$ ، $v_s(t) = u(t) = 1$ بدست خواهد آمد

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v = \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)} \quad \rightarrow \quad v(t) = K_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} + K_2 \ , \ t > 0$$

باجایگذاری پاسخ خصوصی K_2 درمعادله دیفرانسیل $\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} K_2 = \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)}$ ویا $K_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ شده، و همچنین در $t = 0$ هر دو خازن اتصال کوتاه شده ومقاومت ها را از مدار خارج خواهند کرد ولی می توان نوشت.

$$v_{C_1}(0^+) + v_{C_2}(0^+) = v_s(0^+) = 1V \quad \rightarrow \quad v(0^+) = v_{C_2}(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(1V) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$\rightarrow \quad K_1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad \rightarrow \quad K_1 = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

$$\rightarrow\ s(t)=v(t)=u(t)\left\{\frac{R_2}{R_1+R_2}+\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}t}\right\}$$

پ ـ بدین منظور باید ضریب قسمت نمایی $s(t)$ برابر صفر شود و یا:

$$\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}=0\ \rightarrow\ C_1R_1+C_1R_2=C_1R_2+C_2R_2\ \rightarrow\ C_1R_1=C_2R_2$$

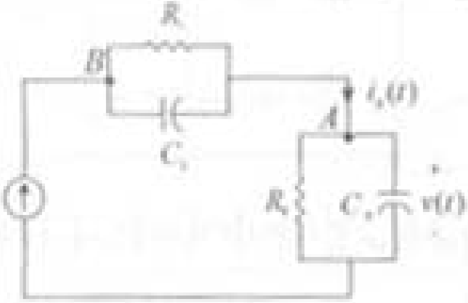
ت ـ با توجه به شکل مدار می توان نوشت.

$$i_{C_2}=C_2\frac{dv}{dt}=C_2\frac{ds(t)}{dt}=\frac{C_2(R_1+R_2)}{R_1R_2(C_1+C_2)}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)u(t)e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}t}$$

$$v_{C_1}=v_s-v_{C_2}=1-v_{C_2}\ ,\ t>0$$

$$\rightarrow\ i_{C_1}=C_1\frac{d(1-v_{C_2})}{dt}=-C_1\frac{dv_{C_2}}{dt}=\frac{C_1(R_1+R_2)}{R_1R_2(C_1+C_2)}\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}t}\ ,t>0$$

ث ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد شد.



جریان ورودی دو قسمت RC و RL یکسان است بنابراین مدار بصورت دو مدار مرتبه اول مجزا عمل می کند.

$$\text{KCL برای گره } A\ \rightarrow\ \frac{v}{R_2}+C_2\frac{dv}{dt}=i_s\ \rightarrow\ \frac{dv}{dt}+\frac{v}{R_2C_2}=\frac{i_s}{C_2}$$

$$i_s(t)=u(t)=1\ ,t>0\ \rightarrow\ \frac{dv}{dt}+\frac{v}{R_2C_2}=\frac{1}{C_2}\ \rightarrow\ v(t)=K_1e^{-\frac{t}{R_2C_2}}+K_2$$

$$\frac{K_2}{R_2C_2}=\frac{1}{C_2}\rightarrow K_2=R_2\ ,v(0^+)=0\rightarrow K_1+R_2=0\rightarrow K_1=-R_2\ \rightarrow v(t)=R_2u(t)\left(1-e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\right)$$

واضح است که هیچ وقت ضریب قسمت نمایی صفر نشده و پاسخ $v(t)$ نمی تواند بصورت یک تابع پله باشد.

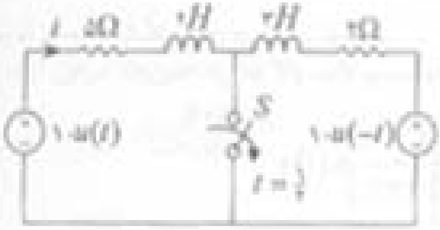
در ادامه جریان گذرنده از خازنها را حساب می کنیم.

$$i_{C_2}=C_2\frac{dv}{dt}=u(t)e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\ \ ,\ t>0$$

و به روشی مشابه $v_{C_2}(t) = Ru(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{RC_2}}\right)$ بوده بنابراین داریم:

$$i_{C_2} = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = u(t)e^{-\frac{t}{RC_2}} \quad , \; t > 0$$

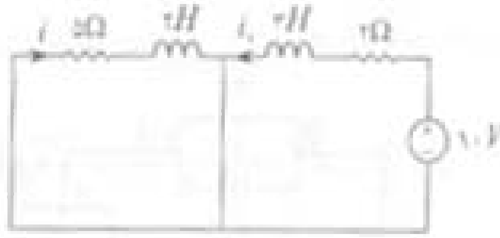
مسئله ۵۸



جریان i را برای تمام t محاسبه کنید. (S برای مدت طولانی بسته بوده است.)

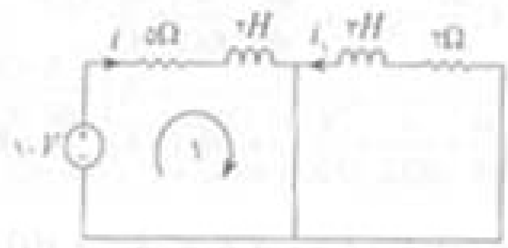
شکل مسئله ۵۸

حل : به ازای $t < 0$ ، $u(t) = 0$ و $u(-t) = 1$ و کلید S بسته می باشد بنابراین شکل مدار بصورت زیر خواهد بود.



واضح است که برای $t < 0$ ، $u(t) = 0$ بوده بنابراین $i(0^+) = i(0^-) = 0$ می باشد همچنین از آنجا که سلف H ۳ در حالت دایمی اتصال کوتاه شده لذا $i_1(0^+) = \frac{10}{2} = 5A$ خواهد بود.

به ازای $0 < t < \frac{1}{2}$ ، $u(t) = 1$ و $u(-t) = 0$ و کلید بسته بوده لذا مدار بصورت زیر خواهد بود.



برای مش ۱ KVL $\rightarrow \; -10 + 5i + 2\frac{di}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{di}{dt} + \frac{5}{2}i = 5 \;\rightarrow\; i(t) = K_1 e^{-\frac{5}{2}t} + K_2 \;,\; 0 < t < \frac{1}{2}$

$$\frac{5}{2}K_2 = 5 \;\rightarrow\; K_2 = 2 \;,\; i(0^+) = 0 \;\rightarrow\; K_1 + 2 = 0 \;\rightarrow\; K_1 = -2$$

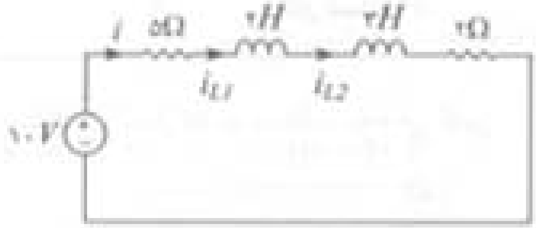
$$\rightarrow\ i(t)=۲\left(۱-e^{-\frac{۵}{۲}t}\right)\ ,\ ۰<t<\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)=۲\left(۱-e^{-\frac{۵}{۴}}\right)=۱/۴۳$$

برای محاسبه $i_L(t)$ می توان نوشت:

$$i_L(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}=Ke^{-\frac{۱}{۲}t}\ ,\ i_L(۰^+)=۵\ \rightarrow\ K=۵\ \rightarrow\ i_L(t)=۵e^{-\frac{۱}{۲}t}\ ,\ ۰<t<\frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow\ i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)=۵e^{-\frac{۱}{۴}}=۳/۵۸$$

برای $t>\frac{۱}{۲}$ ، کلید باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$-۱۰+۵i+۲\frac{di}{dt}+۳\frac{di}{dt}+۲i=۰\ \rightarrow\ \frac{di}{dt}+\frac{۷}{۵}i=۲\ \rightarrow\ i(t)=K_1e^{-\frac{۷}{۵}\left(t-\frac{۱}{۲}\right)}+K_2\ ,\ t>\frac{۱}{۲}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{۷}{۵}K_2=۲$ و یا $K_2=\frac{۱۰}{۷}=۱/۴۳$ شده، و همچنین $i\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)$ را می توان بصورت زیر حساب کرد.

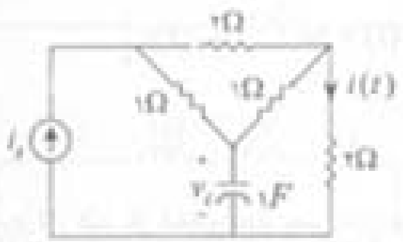
$$i\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)=\frac{\varphi\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)}{L}=\frac{L_1i_{L1}\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)+L_2i_{L2}\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)}{L_1+L_2}=\frac{۲i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)+۳\left(-i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)\right)}{L_1+L_2}=\frac{۲(۱/۴۳)-۳(۳/۵۶)}{۲+۳}=-۱/۵۷A$$

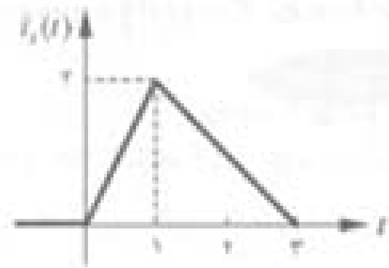
$$\rightarrow\ K_1+۱/۴۳=-۱/۵۷\ \rightarrow\ K_1=-۳\ \rightarrow\ i(t)=۱/۴۳-۳e^{-\frac{۷}{۵}\left(t-\frac{۱}{۲}\right)}$$

$$\rightarrow\ i(t)=\begin{cases}۰ & ,\ t<۰\\ ۲\left(۱-e^{-\frac{۵}{۲}t}\right) & ,\ ۰<t<\frac{۱}{۲}\\ ۱/۴۳-۳e^{-\frac{۷}{۵}\left(t-\frac{۱}{۲}\right)} & ,\ t>\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

مسئله ۵۹

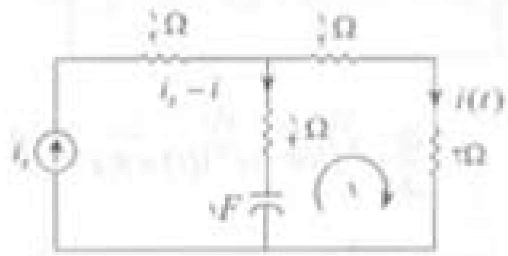
$i(t)$ را به ازای $t \ge 0$ محاسبه و رسم کنید. ($v_c(0^-)=2$)





شکل مسئله ۵۹

حل : ابتدا مدار را با استفاده از تبدیل مثلث به ستاره ساده می کنیم.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow -\left(v_c(0^-)+\int (i_s-i)dt\right)-\frac{1}{4}(i_s-i)+\frac{1}{2}i+2i=0$

$$\rightarrow -(i_s-i)-\frac{1}{4}\frac{d(i_s-i)}{dt}+\frac{5}{2}\frac{di}{dt}=0 \rightarrow \frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=\frac{1}{11}\cdot\frac{di_s}{dt}+\frac{4}{11}i_s$$

به ازای $0 \le t < 1$، $i_s(t)=2t$ بوده بنابراین خواهیم داشت.

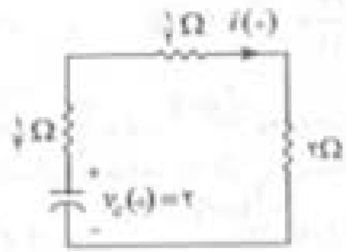
$$\frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=\frac{8}{11}t+\frac{2}{11} \rightarrow i(t)=\underbrace{Ke^{-\frac{4}{11}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{At+B}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جابگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$A+\frac{4}{11}(At+B)=\frac{8}{11}t+\frac{2}{11} \rightarrow \frac{4}{11}At+\left(A+\frac{4}{11}B\right)=\frac{8}{11}t+\frac{2}{11}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{4}{11}A=\frac{8}{11} \\ A+\frac{4}{11}B=\frac{2}{11} \end{cases} \rightarrow A=2 \ , \ B=-5 \rightarrow i(t)=Ke^{-\frac{4}{11}t}+2t-5$$

در $t=0$، مدار بصورت زیر می باشد.



$$i(0)=\frac{v_c(0)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2}=\frac{2}{\frac{11}{4}}=\frac{8}{11}$$

$$\rightarrow K-5=\frac{8}{11} \rightarrow K=\frac{63}{11} \rightarrow i(t)=\frac{63}{11}e^{-\frac{4}{11}t}+4t-5$$

و به ازای $1\le t<2$، $i_s(t)=3-t$ بوده بنابراین خواهیم داشت.

$$\frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=-\frac{4}{11}t+1 \rightarrow i(t)=\underbrace{Ke^{-\frac{4}{11}(t-1)}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{A(t-1)+B}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$\frac{4}{11}At+\frac{1}{11}(7A+4B)=-\frac{4}{11}t+1 \rightarrow \begin{cases}\frac{4}{11}A=-\frac{4}{11}\\ \frac{1}{11}(7A+4B)=1\end{cases} \rightarrow A=-1\ ,\ B=\frac{9}{2}$$

$$\rightarrow i(t)=Ke^{-\frac{4}{11}(t-1)}-t+\frac{11}{2}$$

$$\rightarrow i(1^+)=i(1^-)=\frac{63}{11}e^{-\frac{4}{11}t}+4t-5\Big|_{t=1}=0.98 \rightarrow K+\frac{9}{2}=0.98 \rightarrow K=-3.52$$

$$\rightarrow i(t)=-3.52e^{-\frac{4}{11}(t-1)}-t+\frac{11}{2}$$

و در نهایت به ازای $t\ge 2$، $i_s(t)=0$ بوده و داریم.

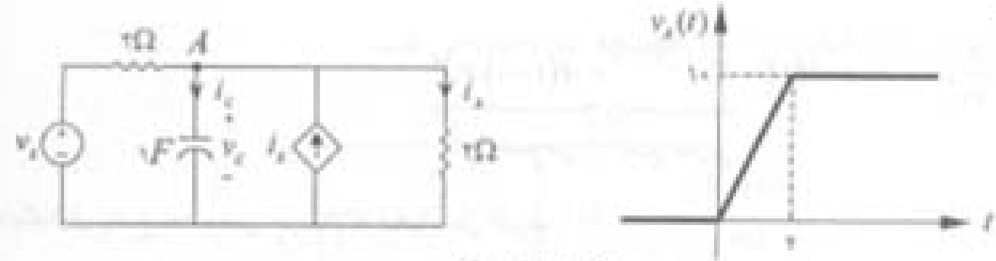
$$\frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=0 \rightarrow i(t)=Ke^{-\frac{4}{11}(t-2)}$$

$$\rightarrow i(2^+)=i(2^-)=-3.52e^{-\frac{4}{11}(t-1)}-t+\frac{11}{2}\Big|_{t=2}=2.85 \rightarrow K=0.02 \rightarrow i(t)=0.02e^{-\frac{4}{11}(t-2)}$$

$$\rightarrow\ i(t)=\begin{cases}0 \quad , \quad t<0\\ \dfrac{63}{11}e^{-\frac{2}{11}t}+2t-5 \quad , \quad 0\le t<1\\ -3/59e^{-\frac{2}{11}(t-1)}-t+\dfrac{11}{2} \quad , \quad 1\le t<2\\ 0/02e^{-\frac{2}{11}(t-2)} \quad , \quad t\ge 2\end{cases}$$

مسئله ۶۰

$v_c=?$



شکل مسئله ۶۰

حل : با توجه به شکل مسئله داریم

$$\text{KCL برای گره } A \ \rightarrow\ \frac{v_c-v_s}{2}+\frac{dv_c}{dt}-i_x+i_x=0\ \rightarrow\ \frac{dv_c}{dt}+\frac{1}{2}v_c=\frac{v_s}{2}$$

به ازای $0\le t<2$ معادله دیفرانسیل فوق بصورت زیر خواهد شد.

$$\frac{dv_c}{dt}+\frac{1}{2}v_c=\frac{5}{2}t\ \rightarrow\ v_c(t)=\underbrace{Ke^{-\frac{1}{2}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{At+B}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$A+\frac{1}{2}(At+B)=\frac{5}{2}t\ \rightarrow\ \frac{A}{2}t+\left(A+\frac{B}{2}\right)=\frac{5}{2}t\ \rightarrow\ \begin{cases}\dfrac{A}{2}=\dfrac{5}{2}\\ A+\dfrac{B}{2}=0\end{cases}\ \rightarrow\ A=5\ ,\ B=-10$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=Ke^{-\frac{1}{2}t}+5t-10\ ,\ v_c(0)=0\ \rightarrow\ K-10=0\ \rightarrow\ K=10$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=10e^{-\frac{1}{2}t}+5t-10$$

به ازای $t \geq ۲$ ، $i_s(t)=۱۰$ بوده و معادله دیفرانسیل زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{dv_c}{dt}+\frac{۱}{۲}v_c=۵ \;\rightarrow\; v_c(t)=\underbrace{K_۱e^{-\frac{۱}{۲}(t-۲)}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_۲}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی $K_۲$ در معادله دیفرانسیل $\frac{K_۲}{۲}=۵$ و یا $K_۲=۱۰$ شده و خواهیم داشت.

$$v_c(۲^+)=v_c(۲^-)=۱۰e^{-\frac{t}{۲}}+۵t-۱۰\Big|_{t=۲}=۳/۶۸ \;\rightarrow\; K_۱+۱۰=۳/۶۸ \;\rightarrow\; K_۱=-۶/۳۲$$

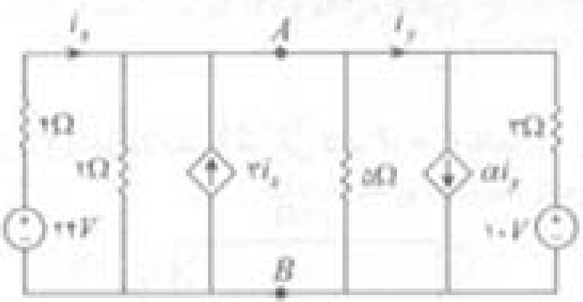
$$\rightarrow\; v_c(t)=-۶/۳۲e^{-\frac{t}{۲}}+۱۰ \;\rightarrow\; v_c(t)=\begin{cases}۰ , & t<۰\\ ۱۰e^{-\frac{t}{۲}}+۵t-۱۰ , & ۰\leq t<۲\\ -۶/۳۲e^{-\frac{۱}{۲}(t-۲)}+۱۰ , & t\geq ۲\end{cases}$$

مسئله ۶۱

$v_{AB}=۱۲$ ، $\alpha=?$. الف- از تحلیل گره استفاده کنید.

ب- از معادل تونن دو سر A و B استفاده کنید.

پ- خازن c با ولتاژ اولیه $۲V$ را به دو سر A و B وصل می کنیم. $v_c(t)$ چیست.



شکل مسئله ۶۱

حل: الف ـ گره B را مبدا فرض کرده و با توجه به شکل مسئله خواهیم داشت.

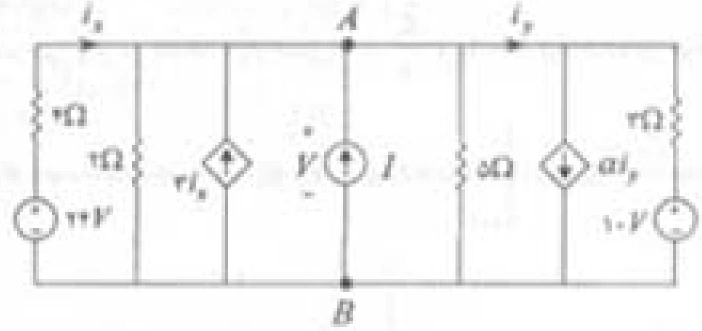
$$v_{AB}=۱۲ \;,\; v_B=۰ \;\rightarrow\; v_A=۱۲ \;\rightarrow\; i_x=\frac{۲۴-۱۲}{۴}=۳A$$

$$i_y=\alpha i_y+\frac{۱۲-۱۰}{۲} \;\rightarrow\; i_y=\frac{۲}{۲(۱-\alpha)}$$

برای گره A KCL $\rightarrow\; -i_x+\frac{۱۲}{۲}-۳i_x+\frac{۱۲}{۵}+i_y=۰$

$$\rightarrow\quad -۳+\frac{۱۲}{۲}-۹+\frac{۱۲}{۵}+\frac{۲}{۳(۱-\alpha)}=۰\quad\rightarrow\quad \alpha=\frac{۲۲}{۲۷}$$

ب ـ بدین منظور منبع جریان آزمایش I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه خواهیم کرد.



$$i_x=\frac{۲۴-V}{۴}\quad,\quad i_y=\alpha i_y+\frac{V-۱۰}{۳}\quad\rightarrow\quad i_y=\frac{V-۱۰}{۳(۱-\alpha)}$$

KCL برای گره Ⓐ

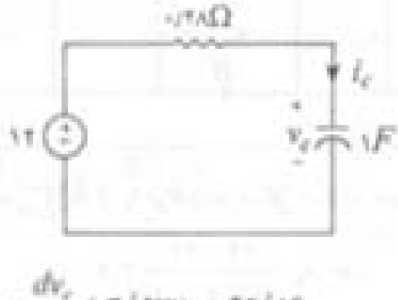
$$\rightarrow\quad -\frac{۲۴-V}{۴}+\frac{V}{۲}-۳\left(\frac{۲۴-V}{۴}\right)+\frac{V}{۵}+\frac{V-۱۰}{۳(۱-\alpha)}-I=۰$$

$$V=\frac{۶۰(۱-\alpha)}{۱۲۲-۱۰۲\alpha}I+\frac{۱۶۴۴۰-۱۴۴۰\alpha}{۱۲۲-۱۰۲\alpha}\quad\rightarrow\quad e_{oc}=v_{AB}=\frac{۱۶۴۴۰-۱۴۴۰\alpha}{۱۲۲-۱۰۲\alpha}=۱۲\quad\rightarrow\quad \alpha=\frac{۱۷۶}{۲۱۶}=\frac{۲۲}{۲۷}$$

پ ـ بدین منظور معادل تونن دو سر A و B را بکار می بریم.

$$V=\frac{۶۰\left(۱-\frac{۲۲}{۲۷}\right)}{۱۲۲-۱۰۲\left(\frac{۲۲}{۲۷}\right)}I+\frac{۱۶۴۴۰-۱۴۴۰\frac{۲۲}{۲۷}}{۱۲۲-۱۰۲\frac{۲۲}{۲۷}}=۰/۲۸I+۱۲$$

بنابراین مدار مورد نظر بصورت زیر خواهد شد. فرض می کنیم $C=۱F$ باشد.



$$-۱۲+۰/۲۸\left(\frac{dv_c}{dt}\right)+v_c=۰\quad\rightarrow\quad \frac{dv_c}{dt}+۳/۵۷v_c=۴۲/۸۶$$

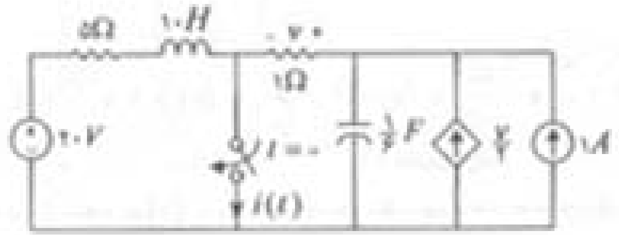
$$\rightarrow\quad v_c(t)=k_1e^{-t/۰/۲۸}+k_2\quad,\quad t>۰$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی k_2 در معادله دیفرانسیل $k_2=۱۲$ شده و با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت.

$v_c(۰)=۲ \;\rightarrow\; k+۱۲=۲ \;\rightarrow\; k=-۱۰ \;\rightarrow\; v_c(t)=۱۲-۱۰e^{-۲/۵t} \quad , \quad t>۰$

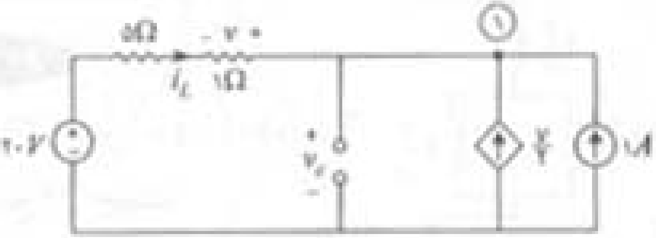
مسئله ۶۲

$i(t)=?$ برای $t>۰$.



شکل مسئله ۶۲

حل: به ازای $t<۰$ کلید باز بوده و در $t=۰^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده بنابراین سلف اتصال کوتاه وخازن مدار باز خواهد بود.



$v=-i_L$

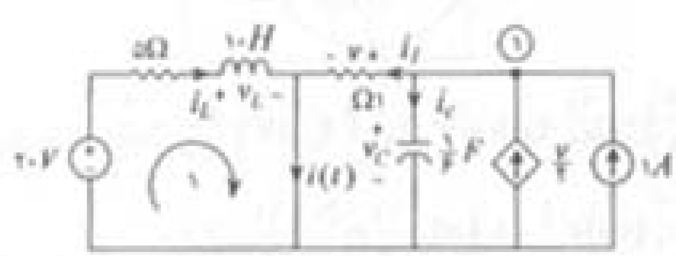
KCL برای گره ۱ $\rightarrow\; -i_L-\left(\frac{-i_L}{۲}\right)-۱=۰ \;\rightarrow\; -i_L(۰^-)=-۲A$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow\; -۲۰+۵i_L+i_L+v_c=۰ \;\rightarrow\; v_c(۰^-)=۲۰-۶i_L(۰^-)=۳۲V$

و از آنجا که هیچ ولتاژ و یا جریانی با مقادیر بی نهایت به دو سر سلف و یاخازن اعمال نمی شود لذا خواهیم داشت.

$i_L(۰^+)=i_L(۰^-)=-۲A \quad , \quad v_c(۰^+)=v_c(۰^-)=۳۲V$

در $t=۰$ کلید بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



دو مدار مجزای مرتبه اول داریم که هر کدام را به طور جداگانه تحلیل می کنیم.

$v=v_c$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow\; \frac{v_c}{۱}+\frac{۱}{۶}\frac{dv_c}{dt}-\frac{v_c}{۲}-۱=۰ \;\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt}-۳v_c=۶$

$$\rightarrow\ v_c(t)=K_۱e^{-۲t}+K_۲$$

$$۲K_۲=۶\ \rightarrow\ K_۲=۲\ ,\ v_c(0^+)=۳۲\ \rightarrow\ K_۱+۲=۳۲\ \rightarrow\ K_۱=۳۰$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=۳۰e^{-۲t}+۲$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow\ -۲۰+۵i_L+۱۰\dfrac{di_L}{dt}=0\ \rightarrow\ \dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{۱}{۲}i_L=۲\ \rightarrow\ i_L(t)=K_۱e^{-\frac{t}{۲}}+K_۲$

$$\frac{۱}{۲}K_۲=۲\ \rightarrow\ K_۲=۴\ ,\ i_L(0^+)=-۲\ \rightarrow\ K_۱+۴=-۲\ \rightarrow\ K_۱=-۶\ \rightarrow\ i_L(t)=-۶e^{-\frac{t}{۲}}+۴$$

$$\rightarrow\ i=i_L+i_۱=i_L+\frac{v}{۱}=i_L+v_c=۳۰e^{-۲t}-۶e^{-\frac{t}{۲}}+۶$$

مسئله ۶۳

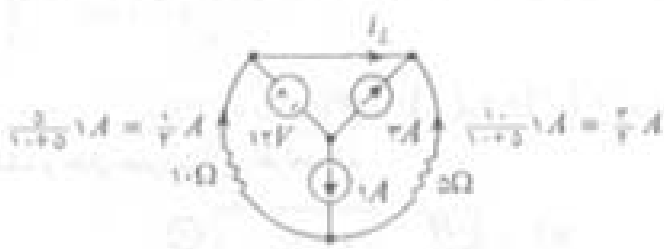
الف- $i_L(t)=?$ برای $t>0$ ($i_L(0)=0$)

ب- نقش منبع $۱۲V$ چیست.

پ- منبع $۱۲V$ را با مقاومت غیرخطی $v_R=e^{-i_R}$ جایگزین می کنیم i_L را تعیین کنید.

شکل مسئله ۶۳

حل : **الف** ـ در $t=\infty$ ، سلف مانند اتصال کوتاه عمل می کند و مدار را می توان بصورت زیر در نظر گرفت. توجه کنید جریان شاخه ها را با استفاده از قاعده تقسیم جریان بدست آورده ایم.



$$\rightarrow\ i_L(\infty)=-\left(۳+\frac{۲}{۳}\right)=-\frac{۱۱}{۳}A\qquad ,\qquad T=\frac{L}{R}=\frac{۲}{۱۰+۵}=\frac{۲}{۱۵}$$

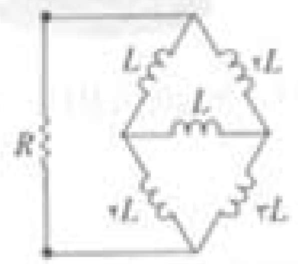
$$\rightarrow\ i_L(t)=\left(i_L(0)-i_L(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_L(\infty)=\frac{۱۱}{۳}e^{-\frac{۱۵t}{۲}}-\frac{۱۱}{۳}\ ,\ t>0$$

ب ـ ملاحظه می شودکه منبع ولتاژ $۱۲V$ دارای جریان ثابت $۴A$ بوده وتاثیری برروی ولتاژشاخه ها ندارد،بنابراین منبع ولتاژ فقط عامل اتصال دو گره است.

پ ـ با جایگذاری مقاومت غیر خطی واضح است که جریان آن ثابت و برابر $۴A$ خواهد بود و ولتاژ آن هر چه شود تاثیری در مدار نخواهد داشت. بنابراین در این حالت نیز $i_L(t)$ مانند قسمت (الف) بدست خواهد آمد.

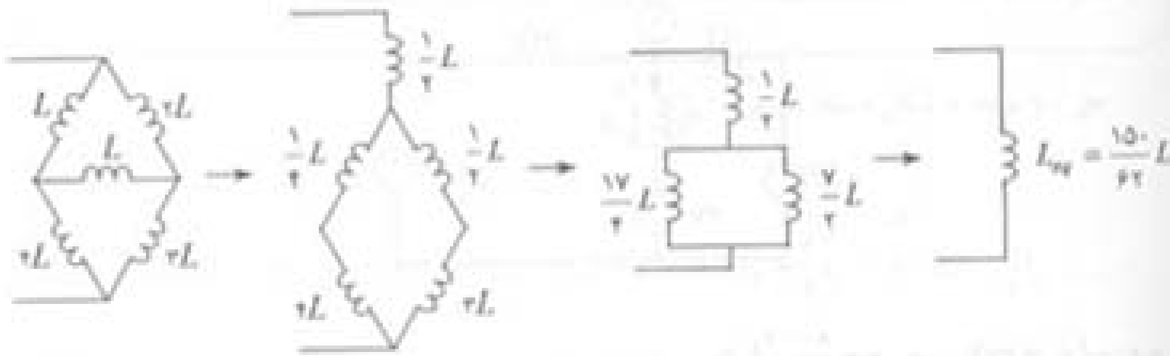
مسئله ۶۴

- ثابت زمانی مدار را تعیین کنید.
- منبع جریان پله واحد را به دو سر R وصل می کنیم. $v_R(t)$ را بدست آورید.



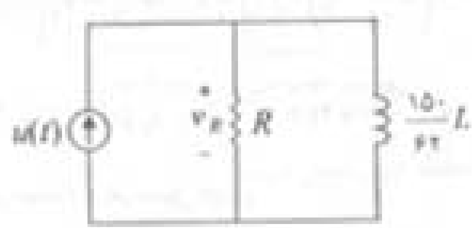
شکل مسئله ۶٤

حل : برای محاسبه معادل سلف ها می توان از تبدیل مثلث به ستاره استفاده کرد.



$$\rightarrow T = \frac{L_{eq}}{R} = \frac{\frac{150}{62}L}{R} = \frac{150}{62}\frac{L}{R}$$

با وصل کردن منبع جریان پله واحد، مدار بصورت زیر خواهد شد.

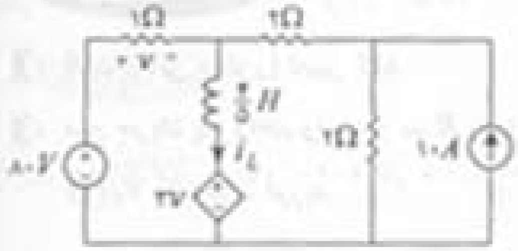


در $t = 0^+$ ، سلف مدار باز بوده و لذا $v_R(0^+) = R$ و در $t = \infty$ سلف اتصال کوتاه خواهد شد و $v_R(\infty) = 0$ خواهد بود بنابراین داریم.

$$v_R(t) = \left(v_R(0) - v_R(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + v_R(\infty) = Re^{-\frac{62}{150}\frac{R}{L}t}\ ,\ t > 0$$

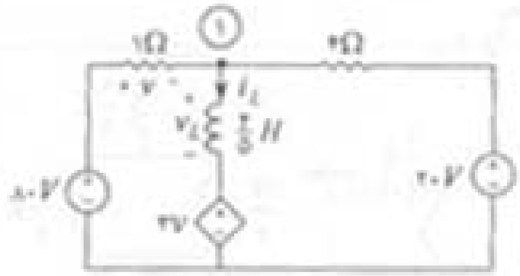
مسئله ۶۵

$i_L(t) = ?$ برای $t > 0$. ($i_L(0) = 2$)



شکل مسئله ۶۵

حل : با استفاده از تبدیل تونن - نرتن مدار را بصورت زیر ساده می کنیم.



$$v = 80 - (v_L + 3v) \rightarrow v = \frac{80 - v_L}{4}$$

KCL برای گره ① $\rightarrow -\frac{v}{1} + i_L + \frac{(v_L + 3v) - 80}{4} = 0$

$$\rightarrow -\frac{(80 - v_L)}{4} + i_L + \frac{1}{4}\left(v_L + 3\left(\frac{80 - v_L}{4}\right) - 20\right) = 0 \rightarrow \frac{5}{16} v_L + i_L = 10$$

$$\rightarrow \frac{5}{16}\left(\frac{4}{5}\frac{di_L}{dt}\right) + i_L = 10 \rightarrow \frac{di_L}{dt} + 4i = 40 \rightarrow i_L(t) = K_1 e^{-4t} + K_2 \ , \ t > 0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$4K_2 = 40 \rightarrow K_2 = 10 \ , \ i_L(0) = 2 \rightarrow K_1 + 10 = 2 \rightarrow K_1 = -8$$

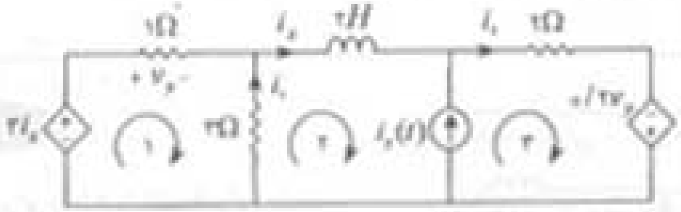
$$\rightarrow i_L(t) = -8e^{-4t} + 10 \ , \ t > 0$$

مسئله ۶۶

معادله دیفرانسیلی بر حسب i_x را بنویسید.

الف- پاسخ حالت صفر را برای ورودی $۲e^{-۰/۱t}$ را بدست آورید.

ب- پاسخ حالت صفر را برای ورودی $۳\sin ۲t$ بدست آورید.



شکل مسئله ۶۶

حل : با توجه به شکل مسئله داریم :

$$\frac{v_p}{۱}+i_1=i_x \rightarrow i_1=i_x-v_p \quad , \quad i_2=i_x+i_s$$

برای مش ① KVL $\rightarrow -۲i_x+v_p-۲(i_x-v_p)=۰ \rightarrow v_p=\frac{۴}{۳}i_x \rightarrow i_1=-\frac{۱}{۳}i_x$

برای حلقه شامل مش های ② و ③ KVL $\rightarrow ۲\left(-\frac{۱}{۳}i_x\right)+۲\frac{di_x}{dt}+۲(i_x+i_s)-۰/۲\left(\frac{۴}{۳}i_x\right)=۰$

$$\rightarrow \frac{di_x}{dt}+۰/۱i_x=-i_s$$

الف ـ با جایگذاری $i_s=۲e^{-۰/۱t}$ خواهیم داشت.

$$\frac{di_x}{dt}+۰/۱i_x=-۲e^{-۰/۱t} \rightarrow i_x(t)=\underbrace{K_1e^{-۰/۱t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2e^{-۰/۱t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$K_2e^{-۰/۱t}-۰/۱K_2te^{-۰/۱t}+۰/۱K_2te^{-۰/۱t}=-۲e^{-۰/۱t} \rightarrow K_2e^{-۰/۱t}=-۲e^{-۰/۱t} \rightarrow K_2=-۲$$

$$i_x(۰)=۰ \rightarrow K_1=۰ \rightarrow i_x(t)=-۲te^{-۰/۱t}$$

ب ـ با جایگذاری $i_s(t)=۳\sin ۲t$ داریم.

$$\frac{di_x}{dt}+۰/۱i_x=-۳\sin ۲t \rightarrow i_x(t)=\underbrace{Ke^{-۰/۱t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{A\sin ۲t+B\cos ۲t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل A و B را بدست خواهیم آورد.

$$۲A\cos ۲t-۲B\sin ۲t \rightarrow ۰/۱A\sin ۲t+۰/۱B\cos ۲t=-۳\sin ۲t$$

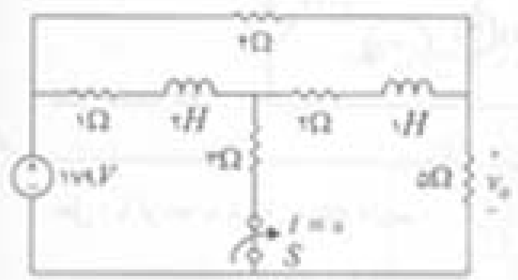
$$\rightarrow \begin{cases} ۰/۱A-۲B=-۳ \\ ۲A+۰/۱B=۰ \end{cases} \rightarrow A=۰/۰۷۷\ ,\ B=-۱/۵۴$$

$$i_L(۰)=۰ \rightarrow K-۱/۵۴=۰ \rightarrow K=۱/۵۴$$

$$\rightarrow i_L(t)=۱/۵۴e^{-۲t}+۰/۷۷\sin ۲t-۱/۵۴\cos ۲t\ ,\ t>۰$$

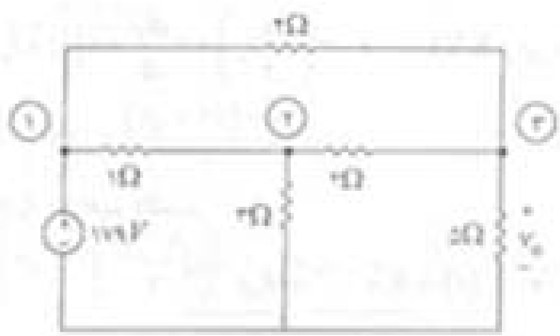
مسئله ۶۷

$v_o(t)=?$ برای $t>۰$. (کلید S برای مدت طولانی بسته بوده است.)



شکل مسئله ۶۷

حل : به ازای $t<۰$ کلید S بسته بوده و در $t=۰^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده بنابراین سلفها اتصال کوتاه خواهند بود.



$e_1=۱۷۹\,V$

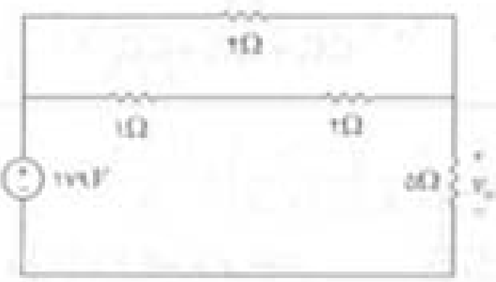
$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{e_2-۱۷۹}{۱}+\frac{e_2}{۳}+\frac{e_2-e_3}{۲}=۰$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{e_3-۱۷۹}{۴}+\frac{e_3}{۵}+\frac{e_3-e_2}{۲}=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۱۱e_2-۳e_3=۱۰۷۴ \\ -۱۰e_2+۱۹e_3=۸۹۵ \end{cases}$$

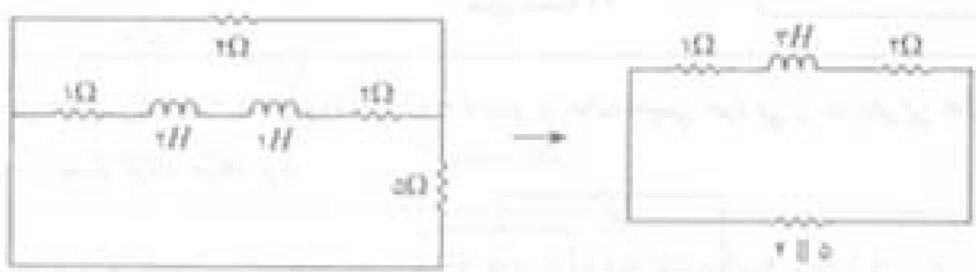
$$\rightarrow v_o(۰^+)=v_o(۰^-)=e_3=۱۱۵\,V$$

برای $t>۰$ کلید S باز شده و در $t=\infty$ سلفها اتصال کوتاه شده و لذا مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\rightarrow\ v_o(\infty)=\frac{5}{5+(1+2)\parallel 4}179V=133/3$$

با صفر کردن منابع ثابت L_{eq} و R_{eq} را محاسبه می کنیم.

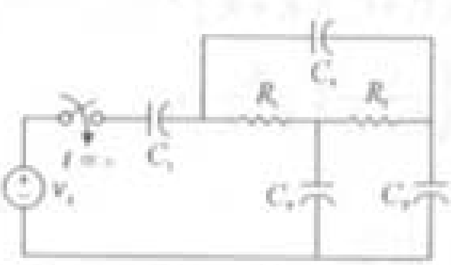


$$L_{eq}=2+1=3H\ ,\ \ R_{eq}=(4\parallel 5)+1+2=\frac{47}{9}\ \rightarrow\ T=\frac{L_{eq}}{R_{eq}}=\frac{27}{47}$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=\big(v_o(0)-v_o(\infty)\big)e^{-\frac{t}{T}}+v_o(\infty)=-18/3e^{-\frac{47}{27}t}+133/3\ ,\ t>0$$

مسئله ۶۸

ولتاژ تمام خازنها را در $t=0^+$ بدست آورید. (ولتاژ اولیه خازن ها صفر است).



شکل مسئله ۶۸

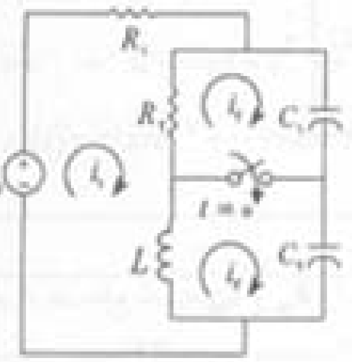
حل : در $t=0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند شد. بنابراین $v_{C_0}(0^+)=0$ بوده و ولتاژ v_s بر روی سه خازن C_1 و C_2 و C_3 خواهند افتاد و مقاومت ها عملاً از مدار خارج خواهند شد پس خواهیم داشت.

$$v_{C_1}(0^+)=\frac{C}{C_1+C}v_s=\frac{\dfrac{C_2\times C_3}{C_2+C_3}}{C_1+\dfrac{C_2\times C_3}{C_2+C_3}}=\frac{C_2C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}v_s$$

و به همین ترتیب می توان نوشت.

$$v_{C2} = \frac{C_1C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}v_s \quad , \quad v_{C3} = \frac{C_1C_2}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}v_s$$

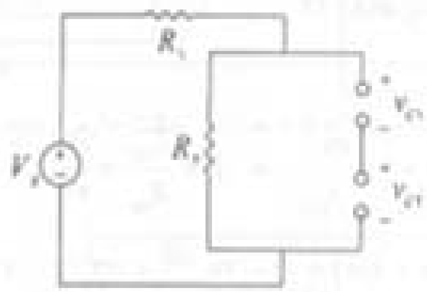
مسئله ۶۹



شکل مسئله ۶۹

$i_1(0^+)$ و $i_2(0^+)$ و $i_3(0^+) = ?$ (کلید برای مدت طولانی باز بوده است)

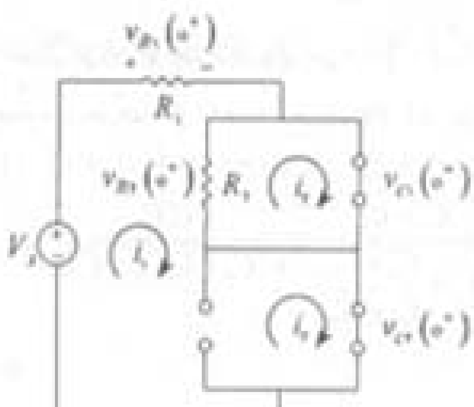
حل : به ازای $t < 0$ کلید باز بوده و در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد. بنابراین خازن ها مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.



$$v_{C1} + v_{C2} = v_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}v_s \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_{C1}(0^+) = v_{C1}(0^-) = \left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}\right)\left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right)v_s \\ v_{C2}(0^+) = v_{C2}(0^-) = \left(\dfrac{C_1}{C_1 + C_2}\right)\left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right)v_s \end{cases}$$

$$v_{R1}(0^+) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}v_s$$

و به ازای $t > 0$ کلید بسته شده و در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود.

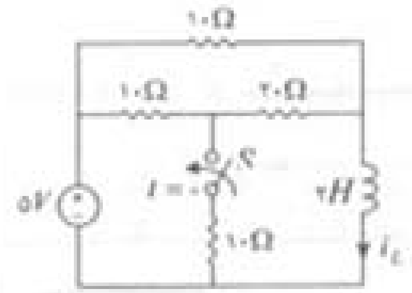


$$i_۲\left(0^-\right)=۰ \quad , \quad i_۱\left(0^+\right)=\frac{v_{R_۱}\left(0^+\right)}{R_۱}=\frac{۱}{R_۱+R_۲}v_۰$$

$$v_{R_۲}\left(0^+\right)=v_{C_۱}\left(0^+\right) \quad \rightarrow \quad i_۲\left(0^+\right)=\frac{v_{C_۱}\left(0^+\right)}{R_۲}=\left(\frac{C_۲}{C_۱+C_۲}\right)\left(\frac{۱}{R_۱+R_۲}\right)v_۰$$

مسئله ۷۰

$i_L(t)=?$ برای $t \geq 0$ (کلید S به مدت طولانی باز بوده است).

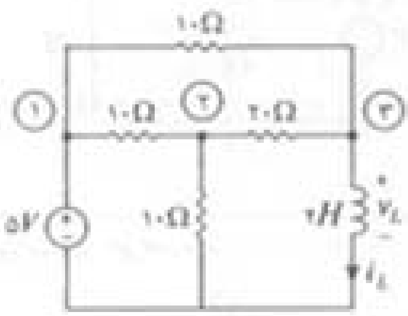


شکل مسئله ۷۰

حل : در $t=0^-$ چون کلید S بمدت طولانی باز بوده است پس می توان سلف را اتصال کوتاه درنظر گرفت.

$$i_L(0^-)=\frac{۵}{۱۰\parallel۳۰}=\frac{۲}{۳}A$$

در $t \geq 0$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$e_۱=۵V \quad , \quad e_۳=v_L$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow i_L+\frac{v_L-e_۲}{۲۰}+\frac{v_L-۵}{۱۰}=۰$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{e_۲-v_L}{۲۰}+\frac{e_۲}{۱۰}+\frac{e_۲-۵}{۱۰}=۰$$

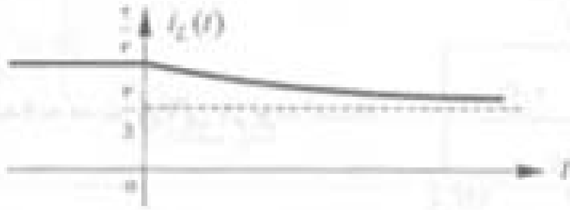
$$\rightarrow \begin{cases} ۲۰i_L+۳v_L-e_۲=۱۰ \\ ۵e_۲-v_L=۱۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow ۱۰۰i_L + ۱۴v_L = ۶۰ \rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{۲۵}{۷} i_L = \frac{۱۵}{۷} \rightarrow i_L(t) = K_۱ e^{-\frac{۲۵}{۷}t} + K_۲$$

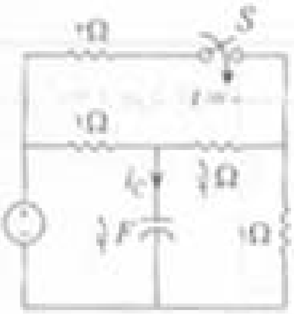
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\frac{۲۵}{۷} K_۲ = \frac{۱۵}{۷} \rightarrow K_۲ = \frac{۳}{۵}$$

$$i_L(0) = \frac{۲}{۳} \rightarrow K_۱ + \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۳} \rightarrow K_۱ = \frac{۱}{۱۵} \rightarrow i_L(t) = \frac{۱}{۱۵} e^{-\frac{۲۵}{۷}t} + \frac{۳}{۵}$$



مسئله ۷۱

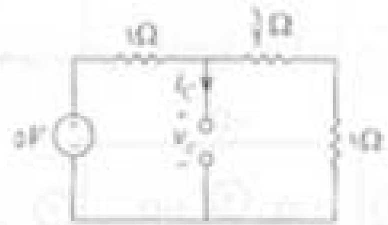


جریان گذرنده از خازن را برای $t > 0$ بدست آورید.

(کلید S بمدت طولانی باز بوده است)

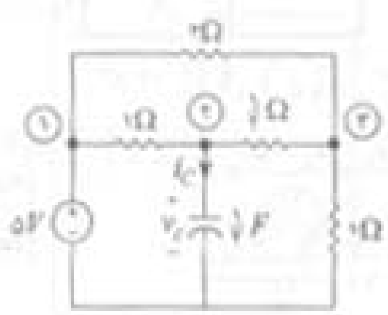
شکل مسئله ۷۱

حل : در $t = 0^-$ چون کلید S بمدت طولانی باز بوده است پس می توان خازن را مدار باز در نظر گرفت.



$$v_c(0^-) = \frac{۱ + \frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۲} + ۱} ۵ = ۳V$$

در $t = 0^+$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$e_1 = ۵V \quad , \quad e_2 = v_c$

$$(۲)\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{v_c - ۵}{۱} + \frac{v_c - e_3}{۱/۲} + i_c = ۰$$

$$\rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{۲۶}{۷} v_c = \frac{۹۰}{۷}$$

$$(۳)\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{e_3 - v_c}{۱/۲} + \frac{e_3}{۱} + \frac{e_3 - ۵}{۲} = ۰$$

$$\rightarrow v_c(t) = K_1 e^{-\frac{۲۶}{۷}t} + K_2 \quad , \quad \frac{۲۶}{۷} K_2 = \frac{۹۰}{۷} \rightarrow K_2 = \frac{۴۵}{۱۳}$$

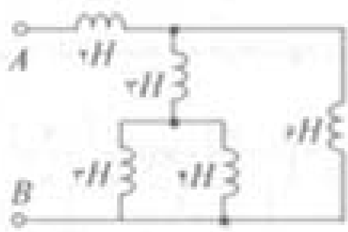
$$v_c(۰) = ۳ \rightarrow K_1 + \frac{۴۵}{۱۳} = ۳ \rightarrow K_1 = -\frac{۶}{۱۳} \rightarrow v_c(t) = -\frac{۶}{۱۳} e^{-\frac{۲۶}{۷}t} + \frac{۵۵}{۱۳}$$

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = \frac{۱}{۲}\frac{dv_c}{dt} = \frac{۱}{۲}\frac{d}{dt}\left(\frac{۵۵}{۱۳} - \frac{۶}{۱۳} e^{-\frac{۲۶}{۷}t}\right)$$

$$\rightarrow i_c(t) = \frac{۱}{۲}\left(-\frac{۲۶}{۷}\right)\left(-\frac{۶}{۱۳} e^{-\frac{۲۶}{۷}t}\right) = \frac{۶}{۷} e^{-\frac{۲۶}{۷}t} \quad , \quad t > ۰$$

مسئله ۷۲

$L_{AB} = ?$



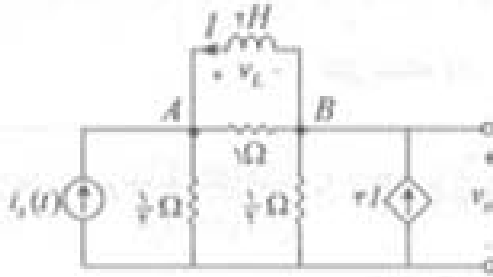
شکل مسئله ۷۲

حل : با توجه به شکل مدار می توان نوشت.

$$L_{AB} = \left[(۳ \| ۴) + ۳\right] \| ۶ + ۲ = \left(\frac{۱۲}{۷} + ۳\right) \| ۶ + ۲ = \frac{\frac{۳۳}{۷} \times ۶}{\frac{۳۳}{۷} + ۶} + ۲ = \frac{۱۱۶}{۲۵} H$$

مسئله ۷۳

پاسخ پله و ضربه v_{out} را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۳

حل: با توجه به شکل $e_A = v_{out} + v_L$ و $e_B = v_{out}$، $I = -i_L$ بوده و خواهیم داشت:

$$\text{KCL} \text{ برای گره } (B) \rightarrow -\left(-۲i_L\right)+\frac{v_{out}}{\frac{۱}{۲}}-\frac{v_L}{۱}-i_L=۰ \rightarrow v_{out}=\frac{۱}{۲}\left(v_L-۲i_L\right)$$

$$\text{KCL} \text{ برای گره } (A) \rightarrow -i_s+\frac{\frac{۱}{۲}\left(v_L-۲i_L\right)+v_L}{\frac{۱}{۲}}+i_L+\frac{v_L}{۱}=۰$$

$$\rightarrow ۴v_L-i_L=i_s \rightarrow ۴\left(۲\frac{di_L}{dt}\right)-i_L=i_s \rightarrow \frac{di_L}{dt}-\frac{۱}{۸}i_L=\frac{i_s}{۸}$$

به ازای $t>۰$ ، $i_s(t)=u(t)=۱$ خواهیم داشت:

$$\frac{di_L}{dt}-\frac{۱}{۸}i_L=\frac{۱}{۸} \;,\; i_L(۰)=۰ \rightarrow i_L(t)=\left(۱-e^{\frac{t}{۸}}\right) \;,\; t>۰$$

$$\rightarrow v_{out}=\frac{۱}{۲}\left(v_L-۲i_L\right)=\frac{۱}{۲}\left(۲\frac{di_L}{dt}-۲i_L\right)=\frac{di_L}{dt}-i_L=\frac{۱}{۸}e^{\frac{t}{۸}}+\left(۱-e^{\frac{t}{۸}}\right) \;,\; t>۰$$

$$\rightarrow v_{out}=u(t)\left(۱-\frac{۷}{۸}e^{\frac{t}{۸}}\right)$$

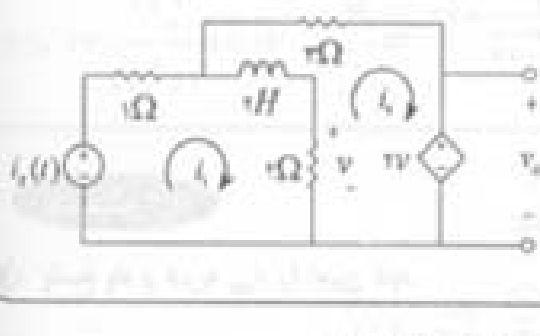
و پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله خواهد بود زیرا مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.

$$i_s(t)=\delta(t) \rightarrow v_{out}=\delta(t)\left(۱-\frac{۷}{۸}e^{\frac{t}{۸}}\right)+u(t)\frac{۱}{۸}\left(-\frac{۷}{۸}e^{\frac{t}{۸}}\right)=\left(۱-\frac{۷}{۸}\right)+u(t)\frac{۱}{۸}\left(-\frac{۷}{۸}e^{\frac{t}{۸}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۸}u(t)\left(۱-\frac{۷}{۸}e^{\frac{t}{۸}}\right)$$

مسئله ۷۴

- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل دهید.
- پاسخ پله و ضربه v_o را حساب کنید.



شکل مسئله ۷٤

حل: با توجه به شکل مسئله $v_o = ۲v$ و یا $v=\frac{v_o}{۲}$ بوده و خواهیم داشت:

$$۲\left(i_1-i_2\right)=v=\frac{v_o}{۲} \rightarrow i_1=\frac{v_o}{۴}+i_2$$

KVL برای حلقه شامل مشهای ۱و۲ $\to \quad -i_s + i_c + ۳i_1 + v_c = ۰$

$$\to \quad -i_s + \frac{v_c}{۴} + i_1 + ۳i_1 + v_c = ۰ \quad \to \quad i_1 = \frac{i_s}{۴} - \frac{۵v_c}{۱۶}$$

KVL برای مش ۲ $\to \quad -v - ۲\dfrac{d(i_c - i_1)}{dt} + ۳i_1 + v_c = ۰$

$$\to \quad -\frac{v_c}{۴} - ۲\frac{d\left(\frac{v_c}{۴}\right)}{dt} + ۳\left(\frac{i_s}{۴} - \frac{۵v_c}{۱۶}\right) + v_c = ۰ \quad \to \quad \frac{dv_c}{dt} + \frac{۷}{۸}v_c = \frac{۳}{۲}i_s$$

با جایگذاری $i_s(t) = u(t) = ۱ \; , \; t > ۰$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{۷}{۸}v_c = \frac{۳}{۲} \quad \to \quad v_c(t) = K_1e^{-\frac{۷}{۸}t} + K_2 \; , \; t > ۰ \quad \to \quad \frac{۷}{۸}K_2 = \frac{۳}{۲}$$

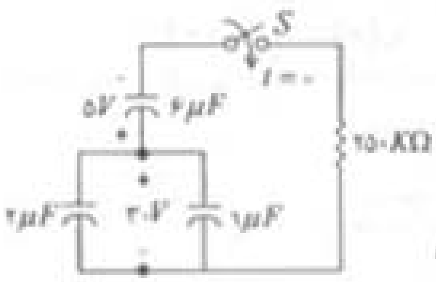
$$\to \quad K_2 = \frac{۱۲}{۷} \; , \; v_c(۰) = ۰ \quad \to \quad K_1 + \frac{۱۲}{۷} = ۰ \quad \to \quad K_1 = -\frac{۱۲}{۷} \quad \to \quad v_c(t) = \frac{۱۲}{۷}u(t)\left(۱ - e^{-\frac{۷}{۸}t}\right)$$

از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله می باشد.

$$i_s(t) = \delta(t) \quad \to \quad v_c(t) = \frac{۱۸}{۷}u(t)e^{-\frac{۷}{۸}t}$$

مسئله ۷۶

- **کلید S در $t = ۰$ بسته می شود. چند درصد انرژی اولیه ذخیره شده در خازنها در مقاومت تلف می شود.**
- **چرا با وجود مقاومت در مدار تمامی انرژی ذخیره شده در خازنها در مقاومت تلف نمی شود.**



شکل مسئله ۷۶

حل : انرژی اولیه ذخیره شده در خازنها برابر است با :

$$W_۰ = \frac{۱}{۲}C_1V_1^2 + \frac{۱}{۲}C_2V_2^2 + \frac{۱}{۲}C_3V_3^2 = \frac{۱}{۲}\times۶\times۱۰^{-۶}\times۵^۲ + \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^{-۶}\times۳۰^۲ + \frac{۱}{۲}\times۱\times۱۰^{-۶}\times۳۰^۲ = ۱۴۲۵\times۱۰^{-۶}J$$

انرژی تلف شده در مقاومت برابر است با :

$$W_e = \frac{۱}{۲}C_{eq}V_{eq}^2 = \frac{۱}{۲}\left(\frac{(۱+۲)\times۶}{(۱+۲)+۶}\right)(۳۰-۵)^۲ = ۶۲۵\times۱۰^{-۶}J \quad \to \quad W_۰ - W_e = ۸۰۰\times۱۰^{-۶}J$$

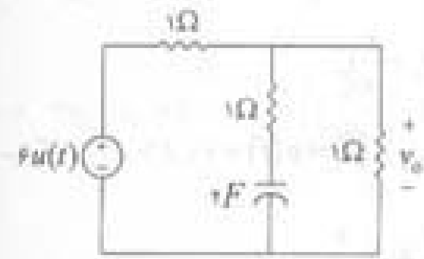
درصد انرژی اولیه ذخیره شده در خازنها که در مقاومت تلف می شود.

$$\frac{۶۲۵}{۱۴۲۵} = ۴۳/۸۶\%$$

مقدار اختلاف $W_o - W_\infty$ به علت انرژی تلف شده در دو خازن $۱\mu F$ و $۲\mu F$ بر اثر ایجاد جریان ضربه در حلقه شامل دو خازن و همچنین مختلف العلامه بودن پلاریته ولتاژهای اولیه $۳۰V$ و $۵V$ می باشد.

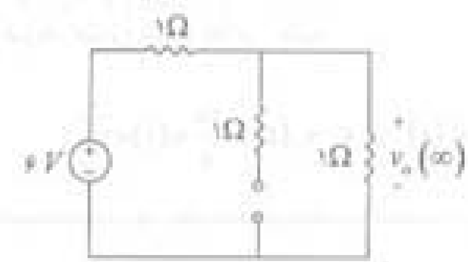
مسئله ۷۷

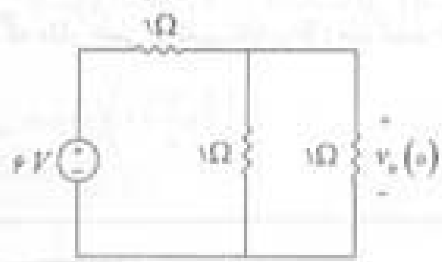
با محاسبه $v_o(0)$ و $v_o(\infty)$ و بدون نوشتن معادله دیفرانسیل، $v_o(t)$ را برای $t > 0$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۷

حل : در $t = 0$ خازن اتصال کوتاه و در $t = \infty$ خازن مدار باز می باشد. بنابراین داریم:





$$v_o(\infty) = \frac{۱}{۱+۱}۶ = ۳V$$

$$v_o(\infty) = \frac{۱P۱}{۱P۱+۱}۶ = ۲V$$

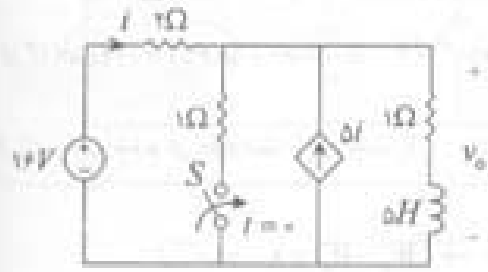
$$T = R_{\text{معادل در سر خازن}} \cdot C = (۱P۱+۱)(۲) = \left(\frac{۳}{۲}\right)(۲) = ۳$$

$$v_o(t) = \left(v_o(0) - v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{۳}} + v_o(\infty) = -e^{-\frac{t}{۳}} + ۳ \;,\; t > 0$$

مسئله ۷۸

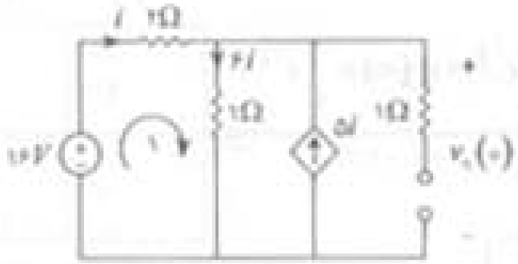
با محاسبه $v_o(0)$ و $v_o(\infty)$ و بدون نوشتن معادله دیفرانسیل، $v_o(t)$ را محاسبه کنید.

(کلید S برای مدت طولانی باز بوده است)



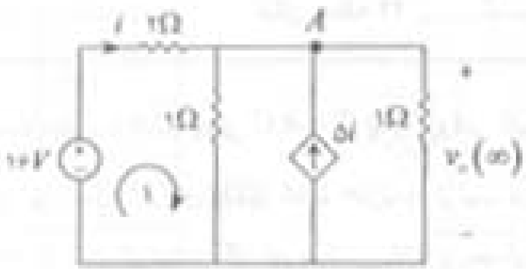
شکل مسئله ۷۸

حل : در $t=0$ سلف مدار باز بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



برای مش ۱ $KVL \;\rightarrow\; -16+2i+6i=0 \;\rightarrow\; i=2 \;\rightarrow\; v_c(0)=6i=12V$

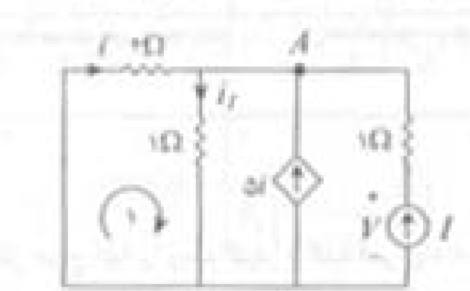
و در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه شده و مدار بصورت زیر می باشد.



برای مش ۱ $KVL \;\rightarrow\; -16+2i+v_c=0 \;\rightarrow\; i=\frac{16-v_c}{2}$

برای گره A $KCL \;\rightarrow\; -\frac{16-v_c}{2}+\frac{v_c}{1}-5\left(\frac{16-v_c}{2}\right)+\frac{v_c}{1}=0 \;\rightarrow\; v_c(\infty)=\frac{48}{5}V$

برای محاسبه ثابت زمانی سیستم باید مقاومت معادل دو سر سلف را بدست آوریم. بدین منظور منبع نابسته را برابر صفر قرار داده و منبع جریان آزمایش I را به جای سلف قرار می دهیم.



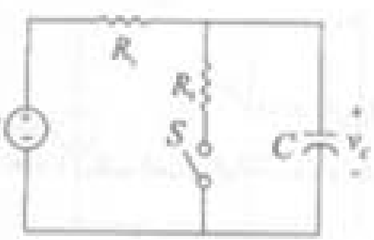
برای گره A $KCL \;\rightarrow\; -i+i_1-5i-I=0 \;\rightarrow\; i_1=6i+I$

برای مش ۱ $KVL \;\rightarrow\; 2i+(6i+I)=0 \;\rightarrow\; i=-\frac{I}{8}$

برای حلقه بیرونی KVL $\rightarrow 2\left(-\frac{I}{8}\right)-I+V=0 \rightarrow V=\frac{5}{4}I \rightarrow R=\frac{5}{4} \rightarrow T=\frac{L}{R}=\frac{5}{\frac{5}{4}}=4$

$$\rightarrow v_o(t)=\left(v_o(0)-v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{4}}+v_o(\infty)=\frac{12}{5}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{28}{5}$$

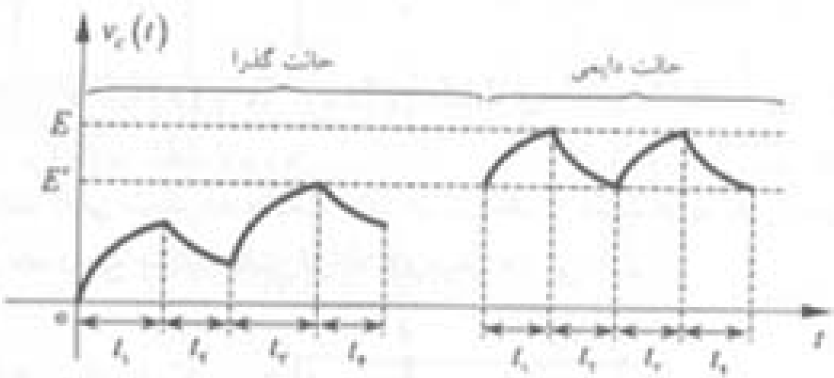
مسئله ۷۹



منبع E در $t=0$ به مدار وصل می شود. $v_c(t)$ و شکل موج آن را تعیین کنید. (عمل باز و بسته شدن کلید بطور متناوب با زمانهای t_1 و t_2 انجام می گیرد.)

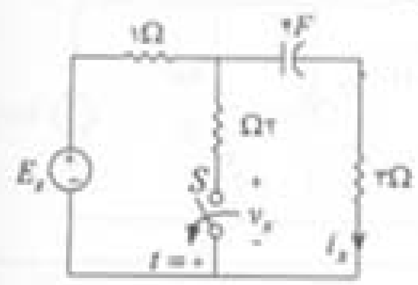
شکل مسئله ۷۹

حل : وقتی کلید بازاست خازن با ثابت زمانی $T=RC$ شارژ ووقتی کلید بسته است خازن با ثابت زمانی $\frac{RR_1}{R+R_1}C$ دشارژ می شود و این عمل شارژ و دشارژ شدن خازن به ترتیب در بازه های زمانی t_1 و t_2 تا زمانی که دریکی از اعمال شارژ $v_c=E$ شود که حالت گذرای مدارمی باشد و بعد از زمان فوق واضح است که حالت دایمی مدار بصورت یک موج دندان اره ای در یک محدوده معین ولتاژ خواهد بود.

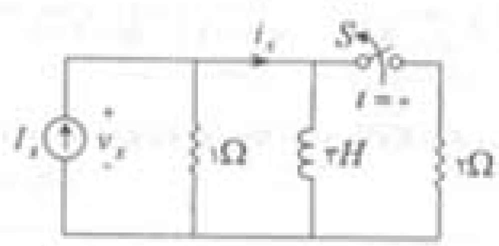


مسئله ۸۰

v_x و i_x را تعیین و شکل موج آنها را رسم کنید. (کلید S برای $t<0$ بسته بوده است.)



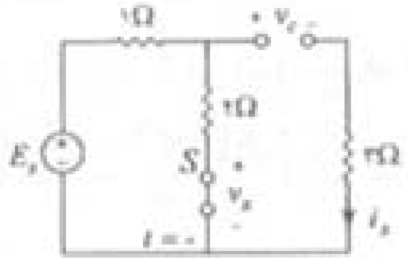
(الف)



(ب)

شکل مسئله ۸۰

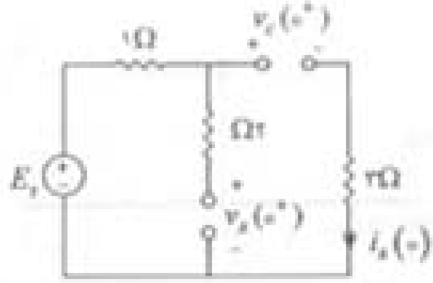
حل : الف ـ در $t=0^-$ کلید بسته و مدار به حالت دایمی خود رسیده و لذا خازن مدار باز خواهد بود.

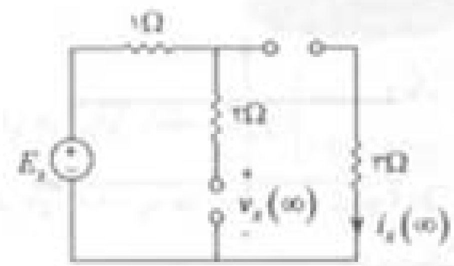


$$\rightarrow\ i_x(0^-)=0\ ,\ v_x(0^-)=0$$

$$v_c(0^+)=v_c(0^-)=\frac{2}{1+2}E_s=\frac{2}{3}E_s$$

در $t=0^+$ کلید باز شده و لذا خازن اتصال کوتاه و در $t=\infty$ مدار به حالت دایمی رسیده و لذا خازن مدار باز خواهد بود.





$$i_x(0^+)=\frac{E_s-v_c(0^+)}{1+3}=\frac{E_s-\frac{2}{3}E_s}{4}=\frac{E_s}{12}\ ,\ v_x(0^+)=3i_x(0^+)+v_c(0^+)=3\frac{E_s}{12}+\frac{2}{3}E_s=\frac{11}{12}E_s$$

$$i_x(\infty)=0\ ,\ v_x(\infty)=E_s$$

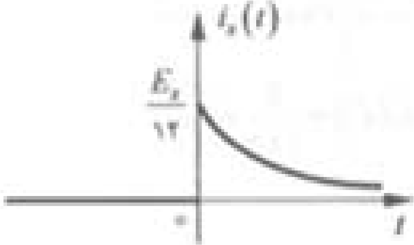
$$T=R_{\text{معادل دو سر خازن}}\cdot C=(1+3)(4)=16$$

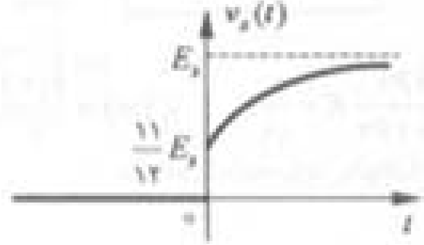
$$i_x(t)=\left(i_x(0)-i_x(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_x(\infty)=\frac{1}{12}E_se^{-\frac{1}{16}t}\ ,\ t>0$$

$$v_x(t)=\left(v_x(0)-v_x(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_x(\infty)=E_s\left(1-\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{16}t}\right)\ ,\ t>0$$

$$\rightarrow\ i_x(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<0\\ \frac{1}{12}E_se^{-\frac{1}{16}t} & ,\ t>0\end{cases}\ ,\ v_x(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<0\\ E_s\left(1-\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{16}t}\right) & ,\ t>0\end{cases}$$

شکل موجهای $v_x(t)$ و $i_x(t)$ در شکل زیر رسم شده اند.



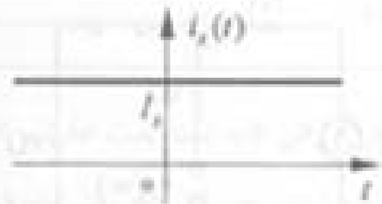


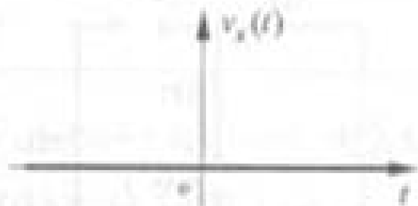
پ ـ در $t=0^-$ کلید به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده و لذا سلف اتصال کوتاه خواهد بود.

$$\rightarrow i_s(0^-)=I_s\ ,\ v_s(0^-)=0$$

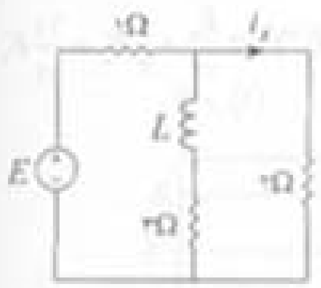
مطابق شکل فوق واضح است که مقاومت ۲Ω عملاً از مدار خارج است. لذا با باز بودن کلید S در $t>0$ تغییری در مدار رخ نخواهد داد بنابراین داریم:

$i_s(t)=I_s\ ,\ v_s(t)=0$





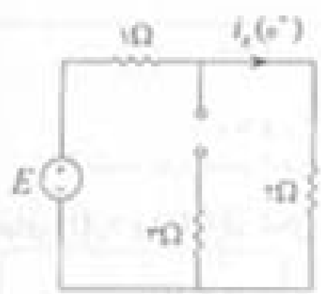
مسئله ۸۱

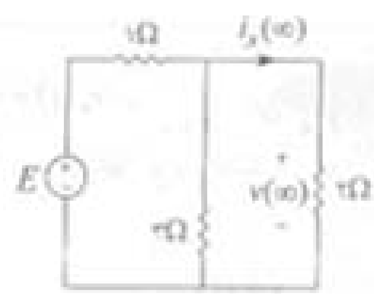


- $i_s(\infty)$ را تعیین کنید. (E در $t=0$ وصل می شود)
- به ازای چه مقدار L جریان $i_s(t)$ در $t=2\sec$ به ۱۱۰٪ مقدار نهایی خود می رسد. ($i_L(0)=0$).

شکل مسئله ۸۱

حل : در $t=0^+$ سلف مدار باز و در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه خواهد بود.





$$v(\infty)=\frac{2\parallel 3}{1+2\parallel 3}E=\frac{6}{11}E\ ,\ i_s(\infty)=\frac{v(\infty)}{2}=\frac{3}{11}E\ ,\ i_s(0^+)=\frac{E}{1+2}=\frac{E}{3}$$

$$T=\frac{L}{R_{\text{معادل دو سر سلف}}}=\frac{L}{۳+\frac{۱۰۲}{۱۵۳}}=\frac{۳}{۱۱}L$$

$$i_x(t)=\left(i_x(۰)-i_x(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_x(\infty)=\frac{۲}{۳۳}Ee^{\frac{-۱۱t}{۳L}}+\frac{۳}{۱۱}E\ ,\ t>۰$$

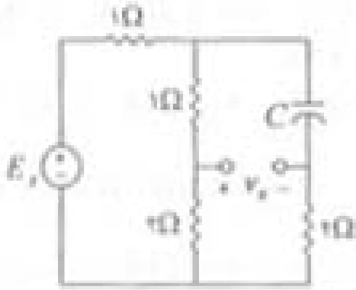
$$i_x(۲)=۱/۱\,i_x(\infty)\ \rightarrow\ \frac{۲}{۳۳}Ee^{\frac{-۲۲}{۳L}}+\frac{۳}{۱۱}E=۱/۱\left(\frac{۳}{۱۱}E\right)\ \rightarrow\ e^{\frac{-۲۲}{۳L}}=۰/۴۵$$

$$\rightarrow\ L=\frac{-۲۲}{۳\ln ۰/۴۵}=۹/۱۸H$$

مسئله ۸۲

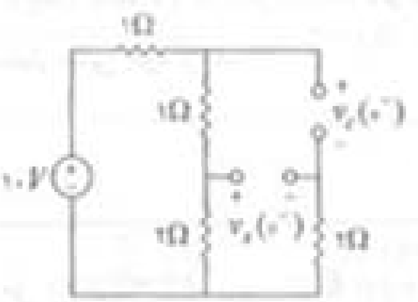
◄ $E_s=\begin{cases}۱۰\ , & t<۰\\ -۱۰\ , & t>۰\end{cases}$ ، مقدار نهایی v_x را تعیین کنید.

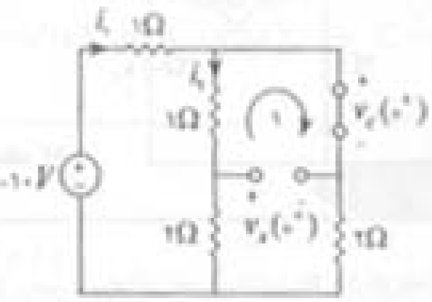
◄ **C را چنان تعیین کنید که در $t=۱$ ، v_x به ٪۹۰ مقدار نهایی خود برسد.**

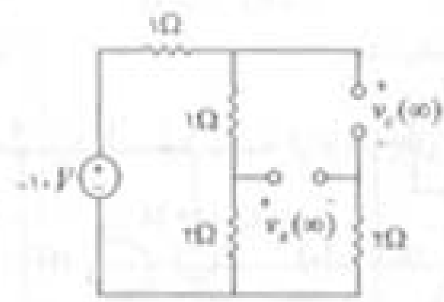


شکل مسئله ۸۲

حل : در $t=۰^-$ برای مدت طولانی $E_s=۱۰V$ بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده لذا خازن مدار باز است. در $t=۰^+$ ، $E_s=-۱۰V$ شده و خازن اتصال کوتاه خواهد شد و در $t=\infty$ برای مدت طولانی $E_s=-۱۰V$ بوده و خازن مدار باز می باشد.







با توجه به شکلهای فوق خواهیم داشت.

$$v_c\left(0^-\right)=\frac{۱+۲}{۱+۱+۲}۱۰V=\frac{۱۵}{۲}V\ ,\ v_c\left(0^+\right)=v_c\left(0^-\right)=\frac{۱۵}{۲}V$$

$$i_1\left(0^+\right)=\frac{-۱۰}{۱+(۱+۲)P۲}=-\frac{۵۰}{۱۱}A\ ,\ i_2\left(0^+\right)=\frac{۲}{۱+۲+۲}\left(-\frac{۵۰}{۱۱}\right)=-\frac{۲۰}{۱۱}A$$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow -i_2\left(0^+\right)+v_c\left(0^+\right)-v_o\left(0^+\right)=0 \rightarrow \frac{۲۰}{۱۱}+\frac{۱۵}{۲}-v_o\left(0^+\right)=0 \rightarrow v_o\left(0^+\right)=\frac{۲۰۵}{۲۲}$

$$v_o(\infty)=\frac{۲}{۱+۱+۲}(-۱۰V)=-۵V$$

$$T=R_{\text{معادل دو سر خازن}}\cdot C=\left[۲+۱P(۱+۲)\right]C=\frac{۱۱}{۴}C$$

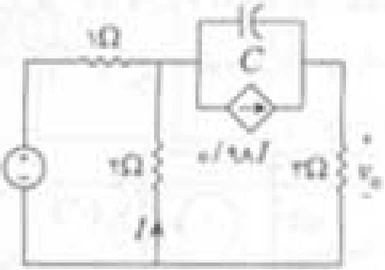
$$\rightarrow\ v_o(t)=\left(v_o\left(0^+\right)-v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_o(\infty)=\frac{۳۱۵}{۲۲}e^{-\frac{۴}{۱۱C}t}-۵\ ,\ t>0$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=\begin{cases}۵\ , & t<0\\ \frac{۳۱۵}{۲۲}e^{-\frac{۴}{۱۱C}t}-۵\ , & t>0\end{cases}$$

$$v_o(۱)=۰/۹v_o(\infty)\ \rightarrow\ \frac{۳۱۵}{۲۲}e^{-\frac{۴}{۱۱C}}-۵=۰/۹(-۵)\ \rightarrow\ C=۱۰۸\,\mu F$$

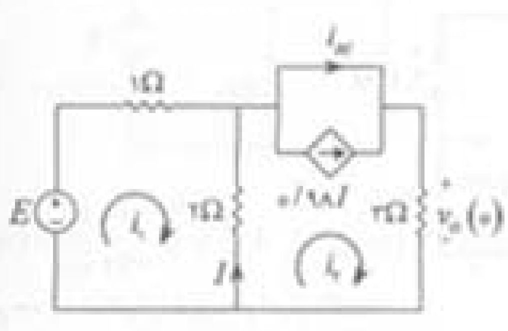
مسئله ۸۳

C چقدر باشد تا $v_o(t)$ در $t=۱۰۰$ نانو ثانیه به ۹۰٪ مقدار نهایی خود برسد.

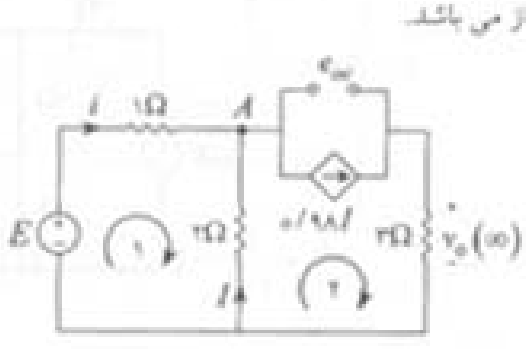


شکل مسئله ۸۳

حل : فرض کنیم که منبع ولتاژ E در $t=0$ به مدار وصل شود. در $t=0$ خازن اتصال کوتاه و در $t=\infty$ مدار باز می باشد.



(الف)



(ب)

برای شکل (الف) داریم :

KVL برای مش ۱ $\rightarrow -E+i_1+2(i_1-i_2)=0$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow 2(i_2-i_1)+3i_2=0$

$$\rightarrow \begin{cases} 3i_1-2i_2=E \\ 2i_1-5i_2=0 \end{cases} \rightarrow i_2=\frac{2}{11}E=0/18E \ , \ i_1=\frac{5}{11}E=0/45E$$

$v_c(0)=3i_2=0/54E \ , \ I=i_2-i_1=-0/27E$

و با توجه به شکل (ب) خواهیم داشت.

KCL برای گره A $\rightarrow -i-I+0/98I=0 \rightarrow i=-0/02I$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow -E+(-0/02I)-2I=0 \rightarrow I=-0/49E$

$v_c(\infty)=3(0/96I)=-1/45E$

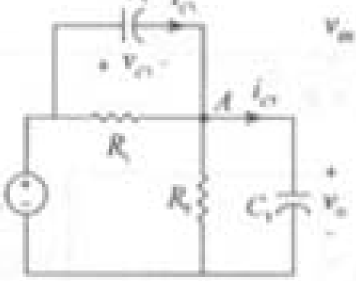
KVL برای مش ۲ $\rightarrow 2I+e_{oc}+3(0/98I)=0 \rightarrow e_{oc}=-4/94I=2/42E$

$$T=R_{\text{دو سر خازن}}C=\frac{e_{oc}}{i_{sc}}C=\frac{2/42E}{0/44E}C=5/5C$$

$$\rightarrow v_c(t)=(v_c(0)-v_c(\infty))e^{-\frac{t}{T}}+v_c(\infty)=1/89Ee^{-\frac{0/18t}{C}}-1/45E \ , \ t>0$$

$$v_c(100ns)=0/9v_c(\infty) \rightarrow 1/89Ee^{-\frac{18}{C}\times10^{-9}}-1/45E=0/9(-1/45E) \rightarrow C=7/01nF$$

مسئله ۸۴



$$v_{in}=\begin{cases} E(1-e^{-\beta t}) \ , & t\geq 0 \\ 0 \ , & t<0 \end{cases}$$

- ولتاژ $v_o(t)$ را برای $t>0$ حساب کنید.
- حد $v_o(t)$ را برای $\beta\rightarrow\infty$ حساب کنید.
- در حالت خاص $R_1C_1=R_2C_2$ ولتاژ $v_o(t)$ را حساب کنید.

شکل مسئله ۸۴

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$v_{in}=v_{C1}+v_o \rightarrow v_{C1}=v_{in}-v_o$

(A) ۰ برای گره $KCL \rightarrow -i_{C_1} - \frac{v_{C_1}}{R_1} + i_{C_2} + \frac{v_{C_2}}{R_2} = 0$

$$\rightarrow -C_1 \frac{d(v_{in} - v_o)}{dt} - \frac{v_{in} - v_o}{R_1} + C_2 \frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R_2} = 0$$

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v_o = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{dv_{in}}{dt} + \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)} v_{in}$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v_o = \frac{E(C_1\beta - 1)}{R_1 (C_1 + C_2)} e^{-\beta t} + \frac{E}{R_1 (C_1 + C_2)}$$

$$\rightarrow v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_2 e^{-\beta t} + K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} - \beta\right) K_2 e^{-\beta t} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} K_3 = \frac{E(C_1 R_1 \beta - 1)}{R_1 (C_1 + C_2)} e^{-\beta t} + \frac{E}{R_1 (C_1 + C_2)}$$

$$K_2 = \frac{E R_2 (C_1 R_1 \beta - 1)}{R_1 + R_2 - \beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \quad , \quad K_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$v_o(0) = 0 \rightarrow K_1 + K_2 + K_3 = 0 \rightarrow K_1 = -(K_2 + K_3)$$

$$v_o(t) = -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} E + \frac{E R_2 (C_1 R_1 \beta - 1)}{R_1 + R_2 - \beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)}\right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}$$

$$+ \frac{E R_2 (C_1 R_1 \beta - 1)}{R_1 + R_2 - \beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)} e^{-\beta t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

به ازای $\beta \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:

$$v_o(t) = -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} E + \frac{C_1 R_1 \beta}{-\beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)}\right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$= -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) E e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

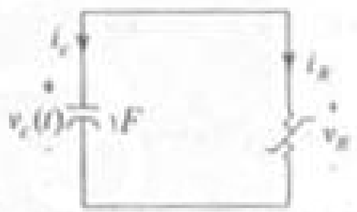
$$= -\left(\frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)}\right) E e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

به ازای $R_2C_2 = R_1C_1$ ضریب جمله نهایی(پاسخ گذرا) برابر صفر شده و خواهیم داشت.

$$v_c(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

مسئله ۸۵

$v_c(t)$ را برای $t > 0$ محاسبه و رسم کنید.
$(v_c(0) = 1$ و $i_R = v_R + v_R^3)$



شکل مسئله ۸۵

حل :

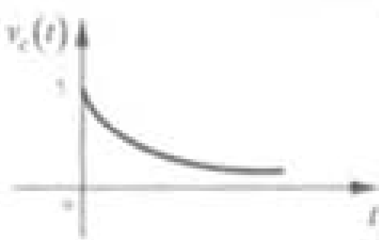
$$i_c = -i_R \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\left(v_R + v_R^3\right),\ v_c = v_R \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\left(v_c + v_c^3\right) \rightarrow \frac{dv_c}{v_c\left(1+v_c^2\right)} = -dt$$

$$\rightarrow \frac{dv_c}{v_c} - \frac{v_c dv_c}{1+v_c^2} = -dt \rightarrow \ln v_c - \ln\left(\frac{1+v_c^2}{2}\right) = -t + c \rightarrow \ln\frac{2v_c}{1+v_c^2} = -t + c$$

$$\rightarrow \frac{v_c}{1+v_c^2} = Ke^{-t},\ v_c(0) = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = K \rightarrow \frac{v_c}{1+v_c^2} = \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$\rightarrow v_c(t) = e^t - \sqrt{e^{2t} - 1}$$

شکل موج $v_c(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۸۷

$v_c(t)$ را برای $t > 0$ تعیین و رسم کنید.
($i_s(t) = r(t)$ و حالت اولیه مدار صفر است)

شکل مسئله ۸۷

حل : ورودی مدار $i_s(t)=r(t)=\begin{cases} t\ , & t>0 \\ 0\ , & t<0\end{cases}$ بوده و با توجه به شکل مدار داریم.

$$\text{برای گره } A \text{ ،} KCL \to -t+\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{\frac{1}{t}}=0 \to \frac{dv_c}{dt}+2tv_c=2t$$

$$\to \frac{dv_c}{dt}=2t\left(1-v_c\right) \to \frac{dv_c}{1-v_c}=2t\,dt \to -\ln\left(1-v_c\right)=t^2+C \to 1-v_c=Ke^{-t^2}$$

$$\to v_c(t)=1-Ke^{-t^2}\ ,\ v_c(0)=0 \to 1-K=0 \to K=1 \to v_c(t)=1-e^{-t^2}\ ,\ t>0$$

شکل موج $v_c(t)$ در شکل زیر رسم شده است.