فصل 2 تبدیل لاپلاس و تحلیل مدار به کمک آن

مقدمه

قبل از شروع این فصل بسیار مهم و کاربردی، بد نیست کمی توضیحات مقدماتی بدهم که ذهن شماکاملاً آماده شود.

ببینید بعضی وقت‌ها حل برخی از مسایل در حوزه (یا همان شهر) زمان بسیار دشوار است. اما همین مسئله وقتی که به حوزه (شهر) فرکانس منتقل می‌شود، بسیار راحت می‌شود. (و البته گاهی هم بالعکس است.) پس اگر ما ابزاری داشته باشیم که به کمک آن بتوانیم مدارمان را از حوزهٔ t به حوزهٔ S ببریم، زندگی شیرین می‌شود. خیالتان راحت؛ چنین ابزاری را داریم؛ نام یکی از ابزارهای کارآمد، «آقای لاپلاس» است؛ از آقای لاپلاس ممنونیم و تبدیل ارزشمند او را ارج می‌نهیم.

۲ـ۱ تبدیل لاپلاس

از دو پنجره به سرزمین لاپلاس نگاه می‌کنیم؛ یکی افق ریاضی[1] و دیگری نگاه مداری

ابتدا نگاه ریاضی:

ایدهٔ اصلی آن است که برای هر تابع در حوزهٔ زمان $f(t)$، یک تابع در حوزهٔ فرکانس $F(s)$ متناظر می‌شود و بالعکس.

منظور همان رابطهٔ:

(۲ـ۱)
$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

است؟

1ـ که البته شما آن را به خوبی فرا گرفته‌اید...

بله، ولی در درس مدار ما به خواص و قضایای تبدیل لاپلاس کار داریم[1]، خواصی همچون:

الف) یکتایی: یعنی به ازای هر تابع $f(t)$ ، یک و فقط یک تابع $F(s)$ به عنوان تبدیل لاپلاس آن وجود دارد و بالعکس.

ب) خطی بودن؛ یعنی:

$$L\left\{k_1 f_1 + k_2 f_2\right\} = k_1 F_1 + k_2 F_2 \tag{۲ـ۲}$$

ج) انتقال در حوزهٔ فرکانس:

$$e^{-at} f(t) \quad \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad F(s+a) \tag{۳ـ۲}$$

د) انتقال در حوزهٔ زمان:

$$f(t-a)\,u(t-a) \quad \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad e^{-as}\,F(s) \tag{۴ـ۲}$$

هـ)مشتق‌گیری در حوزهٔ زمان:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad S^n F(s) - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} f'(0) - \mathbf{L} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}} \tag{۵ـ۲}$$

مثلاً:

$$f'(t) \quad \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad S\,F(s) - f(0) \tag{۶ـ۲}$$

و یا:

$$f''(t) \quad \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad S^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \tag{۷ـ۲}$$

و) انتگرال‌گیری در زمان:

$$\int_0^t f(t)\,.\,dt \quad \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad \frac{1}{S} F(s) \tag{۸ـ۲}$$

ز) مشتق‌گیری در فرکانس:

$$(-1)^n t^n f(t) \quad \overset{\mathscr{L}}{\underset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad \frac{d^n F(s)}{ds^n} \tag{۹ـ۲}$$

1ـ یادتان باشد که سیگنال‌های مورد بررسی در درس مدار به ازای $t \ge 0$ تعریف شده‌اند.

مثلاً:

$$-tf(t) \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftharpoons}} F'(s)$$ (۱۰ـ۲)

ح) انتگرال‌گیری در فرکانس:

$$\frac{f(t)}{t} \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftharpoons}} \int_0^s F(s)ds$$ (۱۱ـ۲)

ط) تغییر مقیاس زمانی:

$$\underset{a>0}{f(at)} \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$ (۱۲ـ۲)

و حالا دو قضیهٔ فوق‌العاده مهم[1]!

ی) قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to 0} f(t) \overset{\text{مقدار اولیه}}{=} \lim_{S\to\infty} sF(s)$$ (۱۳ـ۲)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \overset{\text{مقدار نهایی}}{=} \lim_{S\to 0} sF(s)$$ (۱۴ـ۲)

خیلی جالب است ها! یعنی رفتار تابع $f(t)$ در دو کرانهٔ صفر و بی‌نهایت، همچون رفتار S برابر تبدیل لاپلاس آن $(sF(s))$ در دو کرانهٔ بی‌نهایت و صفر است؛ به قول استاد در مفهوم این حرف باید تأمل کرد؛ من یه جورایی احساس می‌کنم که بوی خوبی در کلاس می‌آید! بوی مطبوع رابطه صفره و رابطه بی‌نهایته. فکر کنم دارم فلسفه آن‌ها را درک می‌کنم که چرا آن اتفاقات جالب در حوزهٔ زمان رخ می‌داد. حالا می‌فهمم که چرا لحظهٔ کلیدزنی $(t=0)$ این‌قدر آشوبناک $(s\to\infty)$ است! و حس خوبی دارم از اینکه در زمان حالت دایمی $(t\to\infty)$، مدار لبریز از آرامش $(s=0)$ است. من عاشق این نگاه‌های فلسفی در مهندسی‌ام!

ک) تبدیل لاپلاس توابع نیم‌متناوب[2]:

اگر $f(t)$ تابع نیم‌متناوب با دورهٔ تناوب T و ایجادشده از تکرار $f_1(t)$ باشد، داریم:

$$f(t) \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{1-e^{-Ts}} F_1(s)$$ (۱۵ـ۲)

که در آن:

$$F_1(s) = L\ \{f_1(t)\}$$ (۱۶ـ۲)

1ـ این دو قضیه بیشتر از درس مدار، در درس کنترل خطی حایز اهمیت است.

2ـ چرا که تابع ما در $t \ge 0$ تعریف شده است.

پس وجود فاکتور $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ در حوزه فرکانس، بیانگر تناوب در حوزهٔ زمان با پریود T است.

حالا جدول تبدیل لاپلاس توابع مهم را نگاه کنید[1] :

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$r(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\frac{t^n}{n!}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
(فرد) $\sin(\omega t)\,.\,u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ (زوج)
(زوج) $\cos(\omega t)\,.\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$ (فرد)
(فرد) $\sinh(\omega t)\,.\,u(t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$ (زوج)
(زوج) $\cosh(\omega t)\,.\,u(t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$ (فرد)
مشتق مرتبه i ام ضربه $\delta^{(i)}(t)$	s^i
کانولوشن $f*g$	ضرب $F\times g$
ضرب $f\times g$	کانولوشن $F*g$
$\vdots$	$\vdots$

شکل (۲ـ۱) تبدیل لاپلاس توابع مهم

و بالاخره در مورد **عکس تبدیل لاپلاس**:

گاهی اوقات‌مثلاً هنگام تحلیل مدار به کمک تبدیل لاپلاس، هنگامی که از شهر زمان (t) به شهر فرکانس (s) رفته‌ایم و مدار را با سادگی دوچندان حل کرده‌ایم، حالا پاسخ زمانی را می‌خواهیم، پس بایدمجدداً به شهر زمان برگردیم. به این عمل، عکس تبدیل لاپلاس می‌گوییم.

1ـ و همین الان لطفاً حفظ کنید. (البته اگر حفظ نیستید!)

در قدم اول سعی بر آن است که با قضایا و جدول گفته‌شده، L^{-1} بگیریم، در غیر این صورت از روش‌هایی مانند **«تجزیه به کسرهای جزئی»**[1] بهره می‌گیریم.

اگر جسارت نباشد، یک سؤال دارم؛ آیا بررسی تبدیل لاپلاس از نقطه‌نظر ریاضی در درس مدار آن هم برای کنکور کارشناسی ارشد، تا به این حد لازم است؟

به‌جای آن‌که مستقیماً پاسخ سؤال شما را بگویم، از شما دعوت می‌کنم به تمرین‌های زیر که سؤالات کنکور ارشد درس مدار است، توجه کنید:

1ـ **اگر** $V(s)=\dfrac{-36s^2-24s+2}{12s^3+17s^2+6s}$ **باشد، مقدار** $\dfrac{dv}{dt}(0^+)$ **چقدر است؟**

1) $\dfrac{3}{4}$ 2) $\dfrac{7}{4}$ 3) $\dfrac{5}{4}$ 4) $\dfrac{9}{4}$

من حل می‌کنم! به کمک قضیهٔ مقدار اولیه داریم:

$$\frac{dV}{dt}(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\,L\left\{\frac{dv}{dt}\right\}$$

پس حالا $L\left\{\frac{dv}{dt}\right\}$ را می‌خواهیم، آن هم معلوم است دیگر:

$$L\left\{\frac{dv}{dt}\right\}=sV(s)-v(0^+)$$

و حالا $V(0)$ لازم است که یک‌بار دیگر از قضیه مقدار اولیه بهره می‌گیریم:

$$v(0^+)=\lim_{s\to\infty} sV(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-36s^3+\mathbf{L}}{12s^3+\mathbf{L}}=-3$$

حالا مقدار اولیه را در رابطه $L\left\{\frac{dv}{dt}\right\}$ جایگذاری می‌کنیم:

$$L\left\{\frac{dv}{dt}\right\}=\frac{27s^2+20s}{12s^3+17s^2+6s}$$

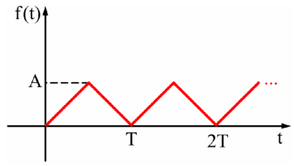
و بالاخره:

$$\frac{dv}{dt}(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{27s^3+\mathbf{L}}{12s^3+\mathbf{L}}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$$

1ـ من حدس می‌زنم در n درس، بحث تجزیه به کسرهای جزئی را خوانده‌اید؛ پس برای پرهیز از طولانی شدن کلام، مرور آن را به خودتان واگذار می‌کنم.

آفرین؛ خیلی عالی بود؛ به‌خصوص اینکه برای حل مسئله «از آخر» شروع کردی؛ یعنی اول دیدی که نیاز به $L\left(\frac{dv}{dt}\right)$ هست و بعد فهمیدی که نیاز به $v(0)$ داریم و... من به این رویکرد در حل مسئله به شدت علاقه‌مندم! یعنی «حل از آخر» که در کلاس «الکترومغناطیس» هم‌مفصلاً به آن می‌پردازیم واصولاً در مهندسی «حل از آخر» شاهکار است ... پس تکرار کنید: «حل از آخر»، «حل از آخر»، «حل از آخر»...

2ـ تبدیل لاپلاس موج متناوب شکل زیر را بیابید.



شکل (۲ـ۲) شکل موج تمرین 2

اگر آن تکهٔ تکرارشونده را $f_1(t)$ بنامیم، به کمک توابع معروف پله و شیب داریم:

$$f_1(t)=\frac{2A}{T}r(t)-\frac{4A}{T}r\left(t-\frac{T}{2}\right)+\frac{2A}{T}r(t-T)$$

و اگر از این بخش، تبدیل لاپلاس بگیریم:

$$F_1(s)=\frac{2A}{T}\left(\frac{1}{s^2}-2\frac{1}{s^2}e^{-\frac{T}{2}s}+\frac{1}{s^2}e^{-Ts}\right)$$

و به کمک اتحاد اول [1] :

$$F_1(s)=\frac{2A}{T}\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2$$

و سرانجام به کمک رابطهٔ (15ـ2):

$$F(s)=\frac{2A}{T}\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2\times\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

و با اتحاد مزدوج دوران دبیرستان:

$$F(s)=\frac{2A}{T}\frac{1}{s^2}\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{1+e^{-\frac{T}{2}s}}$$

3ـ عکس تبدیل لاپلاس بگیرید.

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+9)}\quad,\quad G(s)=\frac{1}{s^2+s-2}$$

1ـ یاد باد آن روزگاران، یاد باد ! تا چشم به هم بزنید، دوران دانشگاه همان‌قدر برایتان قدیمی می‌شود که دوران دبیرستان هم‌اکنون در نظرتان هست و چه‌بسا قدیمی‌تر و...

بسیار ساده است دیگر:

$$\frac{1}{s^2+9}=\frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{3}\sin 3t$$

$$\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+9} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3t\,dt=\frac{1}{9}(1-\cos 3t)$$

و در مورد دومی، ابتدا تجزیه به کسرهای جزئی:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s-2}=\frac{1}{(s-1)(s+2)}=\frac{\frac{1}{3}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{s+2}$$

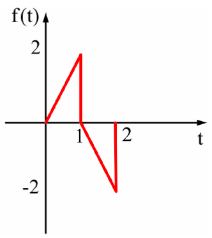
و بنابراین:

$$g(t)=\frac{1}{3}\left(e^{+t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

4ـ تبدیل لاپلاس شکل (2ـ3) را این‌گونه می‌توان نوشت:

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)\,e^{-s}+F_3(s)e^{-2s}$$

که در آن F_1 و F_2 و F_3 توابع گویایی از s هستند. این توابع به چه صورت‌اند؟



شکل (۲ـ۳) شکل موج تمرین 4

باز بسیار ساده است؛ ابتدا تابع $f(t)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(t)=2r(t)-2u(t-1)-4r(t-1)+2r(t-2)+2u(t-2)$$

با توجه به خواص تبدیل لاپلاس:

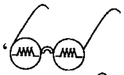
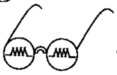
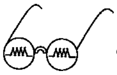
$$F(s)=\underbrace{\left(\frac{2}{s^2}\right)}_{F_1}+\underbrace{\left(-\frac{2}{s}-\frac{4}{s^2}\right)}_{F_2}e^{-s}+\underbrace{\left(\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}\right)}_{F_3}e^{-2s}$$

۲ـ۲ تحلیل مدار به کمک تبدیل لاپلاس

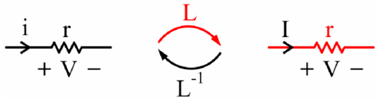
حال برویم سراغ کاربردهای تبدیل لاپلاس در تحلیل مدار که اصل کار ماست. ببینید، سبک مرسوم مراجع و دیگر کتاب‌ها در استفاده از تبدیل لاپلاس آن است که ابتدا معادلهٔ دیفرانسیل مدار را (در حوزهٔ زمان) می‌نویسند و سپس معادله دیفرانسیل را به کمک تبدیل لاپلاس حل می‌کنند. به این ترتیب که با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادلهٔ دیفرانسیل، به یک معادلهٔ جبری در حوزهٔ s می‌رسیم و پس از حل آن و عکس لاپلاس گرفتن به پاسخ مدار در حوزه زمان می‌رسیم.

اما من این روش را نمی‌پسندم!

به نظر من این بهتر است که کل هیکل! مدار را به حوزهٔ s ببریم و حالا دیگر یک مدار مقاومتی (و به عبارت شیک‌تر امپدانسی) خواهیم داشت، پس دیگر خبری از معادله دیفرانسیل نخواهد بود و کار ساده‌تر می‌شود.

این حرف‌ها شما را به یاد چه چیزی می‌اندازد؟ آفرین درست است؛ به یاد همان عینک مشهور! ، یعنی عینک مقاومت‌بین؛ دوباره همه چیز را به چشم مقاومتی می‌بینیم؛ اما راستش را بخواهید، کارایی این  خیلی بیشتر از مدل قبلی‌اش است. با این  کارهایی می‌کنیم که بیا و ببین! آرم عینک قبلی jω بود و آرم این عینک S است!

پس بیایید ببینیم که تک‌تک عناصر هنگامی‌که از حوزهٔ t به حوزهٔ s می‌روند، چه بلایی بر سرشان می‌آید:

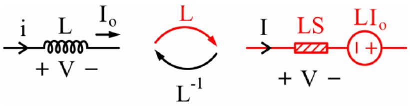


$$v = r \cdot i \quad (۱۸\text{ـ}۲) \qquad V = r \times I \quad (۱۷\text{ـ}۲)$$

شکل (۲ـ۴) مقاومت در حوزهٔ زمان و فرکانس[1] و معادلات آن‌ها

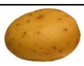
و برای **سلف** :

من عرض می‌کنم، به این شکل می‌شود:

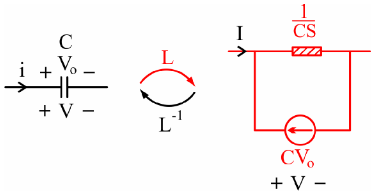


$$V = L\frac{di}{dt} \quad (۲۰\text{ـ}۲) \qquad V = LSI - LI_0 \quad (۱۹\text{ـ}۲)$$

شکل (۲ـ۵) سلف در حوزهٔ زمان و فرکانس و معادلات آن‌ها

1ـ گاهی می‌گویم مقاومت‌ها نسبت به فرکانس هیچ حساسیتی ندارند مثل  !!!

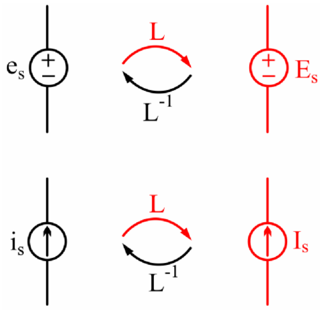
و برای جناب خازن:



$$i = C\frac{dv}{dt} \quad (۲۲\text{_}۲) \qquad I = CSV - CV_0 \quad (۲۱\text{_}۲)$$

شکل (۲ـ۶) خازن در حوزهٔ زمان و فرکانس و معادلات آن‌ها

و در مورد منابع هم که واضح است:



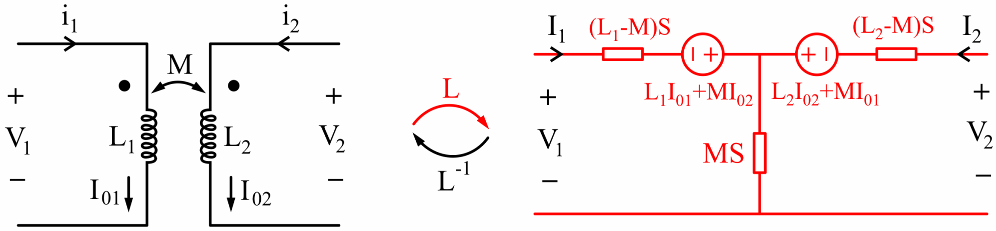
شکل (۲ـ۷) منابع در حوزهٔ زمان و فرکانس

که واضح است E_s و I_s به ترتیب تبدیل لاپلاس e_s و i_s هستند. آیا علت این دوگانی واضح است؟

بله دیگر از معادلات (2ـ19) و (2ـ21) که لاپلاس بگیریم به معادلات (2ـ20) و (2ـ22) می‌رسیم.

پس این روش کار ما را ساده‌تر هم می‌کند. مثلاً اگر سلف‌های تزویج عنصر ما باشند!

باز هم واضح است که:



$$\begin{cases} V_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = M\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \qquad (۲\_۲۴)$$

$$\begin{cases} V_1 = SL_1I_1 + SMI_2 - L_1I_{01} - MI_{02} \\ V_2 = SMI_1 + SL_2I_2 - MI_{01} - L_2I_{02} \end{cases} \qquad (۲\_۲۳)$$

شکل (۲ـ۸) سلف‌های تزویج در حوزهٔ زمان و فرکانس و معادلات آن‌ها

یک سؤال!

در جایی یک جدول به شکل زیر دیدم:

عنصر	امپدانس Z (Ω)	ادمیتانس Y ( )
r	r	$\frac{1}{r}$
L	LS	$\frac{1}{LS}$
C	$\frac{1}{CS}$	CS

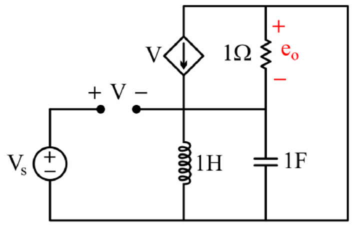
شکل (۲ـ۹) جدول تبدیل عناصر حوزه زمان به حوزهٔ فرکانس

چرا این موضوع کمی با آنچه گفته شد، متفاوت است؟

این جدول‌دقیقاً همان گفته‌های قبلی است، با این توضیح که در اینجا فرض ما استراحت اولیه یا حالت صفر است.

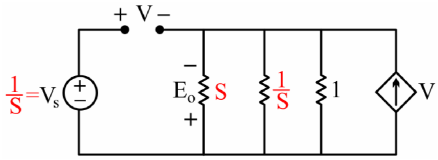
پس خلاصه می‌کنم:
به کمک تبدیلات عناصر از حوزهٔ t به حوزهٔ s (که در اصل این نیز یک **عینک** عالی است) کل مدار به حوزهٔ s می‌رود، معادلات جبری است[1]، حالا پاسخ در حوزهٔ s با روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی معلوم است و در صورت لزوم، پاسخ در حوزهٔ زمان را نیز پیدا می‌کنیم، به حدی این کار لذت‌بخش است که نگو و نپرس؛ و در هر آزمونی همیشه سؤال‌های فراوانی هست که به کمک آقای لاپلاس خیلی ساده و جذاب حل می‌شوند.

5ـ پاسخ پله $e_o(t)$ کدام است؟



شکل (۲ـ۱۰) مدار تمرین 5

ابتدا مدار را به حوزهٔ S می‌بریم، ضمناً این سیم سمت راست مدار را که بیخودی کِش آمده است! به حالت اولیه برمی‌گردانیم، آن‌گاه مدار این‌جوری می‌شود:



شکل (۲ـ۱۱) سادهٔ‌شدهٔ مدار تمرین 5

با یک KCL خواهیم داشت:

$$KCL\quad:\quad\left(\frac{1}{S}+S+1\right)E_o+V=0$$

و ازطرفی:

$$V=V_S+E_o=\frac{1}{S}+E_o$$

پس:

$$E_o=\frac{-1}{(S+1)^2}$$

و با عکس تبدیل لاپلاس:

$$e_o(t)=-te^{-t}u(t)$$

یعنی مدار در حالت میرای بحرانی بود. خدا وکیلی اگر می‌خواستیم این مدار را در حوزهٔ t حل کنیم خیلی دشوارتر بود، مگه نه؟

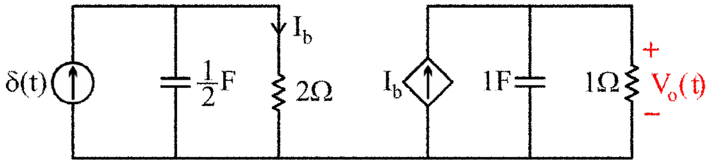
1ـ با این مزیت بر روش فازوری که در آنجا معادلات به صورت جبر مختلط بود، ولی در اینجا به صورت جبر حقیقی.

بله، ولی اگر از کلک بسیار قشنگ «شرایط اولیه مشتق» کمک بگیریم، از این هم ساده‌تر می‌شود! به یک زبان دیگر حرفم را تکرار می‌کنم:

یک حرف حسابی!: خُب ما در حل این مسئله در قدم اول سراغ لاپلاس رفتیم، چراکه درس این جلسهٔ ما لاپلاس است؛ اما اگر این مسئله در کنکور ارشد بیاید[1]، باید خودمان تشخیص بدهیم که لاپلاس میان‌بُر بسیار خوبی است. بعضی وقت‌ها باید فریاد بی‌صدای مسئله را بشنویم که می‌گوید:

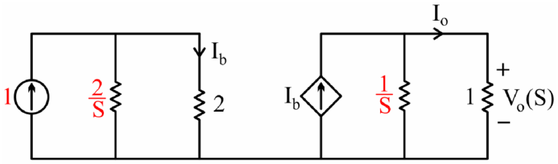
«مرا از روش لاپلاس حل کنید[2]!»

6ـ پاسخ ضربه $V_o(t)$ را در مدار زیر تعیین کنید.



شکل (۲ـ۱۲) مدار تمرین 6

هیکل مدار ! را به حوزهٔ S می‌بریم، داریم:



شکل (۲ـ۱۳) مدار تمرین 6 در حوزهٔ S

با دوبار تقسیم جریان داریم:

$$I_b = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{2}{s}+2} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$

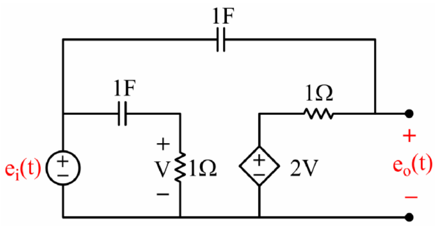
$$V_o = 1 \times I_o = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}+1} \times \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$v_o(t) = t e^{-t} u(t)$$

1ـ که البته آمده بوده است.

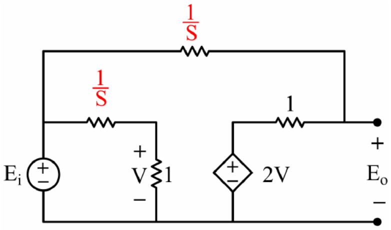
2ـ هنوز آن گوش باز را فراموش نکرده‌اید که ؟ !

7ـ در شبکهٔ مقابل $H(s)=\dfrac{E_o(s)}{E_i(s)}$ کدام است؟



شکل (۲ـ۱۴) مدار تمرین 7

باز مدار را در حوزهٔ لاپلاس رسم می‌کنیم:



شکل (۲ـ۱۵) مدار تمرین 7 در حوزهٔ S

حالا ابتدا با یک تقسیم ولتاژ، ولتاژ V را پیدا می‌کنیم:

$$V=\frac{1}{1+\frac{1}{s}}E_i=\frac{sE_i}{s+1}$$

و سپس با یک KCL در گرهٔ راستی حل مسئله تمام است.

$$KCL\ :\ s\left(E_o-E_i\right)+E_o-2\frac{sE_i}{s+1}=0\ \Rightarrow\ \frac{E_o}{E_i}=\frac{s^2+3s}{(s+1)^2}$$

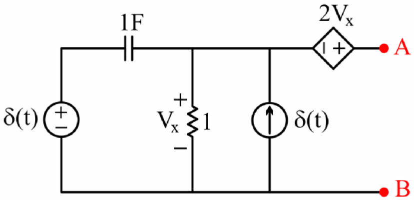
8ـ مدار معادل تونن دیده‌شده در سرهای A و B در حوزهٔ فرکانس به چه صورت است؟

1) $E_{oc}=3\ ,\ Z_{eq}=\dfrac{3}{s+1}$

2) $E_{oc}=\dfrac{3}{s}\ ,\ Z_{eq}=\dfrac{3s}{s+1}$

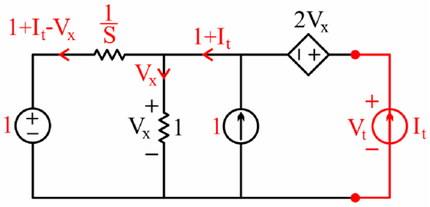
3) $E_{oc}=\dfrac{3}{s}\ ,\ Z_{eq}=\dfrac{3}{s+1}$

4) $E_{oc}=3\ ,\ Z_{eq}=3s+3$



شکل (۲ـ۱۶) مدار تمرین 8

به نظر کار ساده‌ای است، مدار را با لاپلاس نگاه می‌کنیم.



شکل (۲ـ۱۷) مدار تمرین 8 در حوزهٔ S

حال پس از KCL بازی، به این KVL ها نگاه کنید:

$$KVL\ :\ V_t=2V_x+V_x=3V_x$$

در حلقه چپی KVL : $1=\frac{1}{S}\left(V_x-I_t-1\right)+V_x$

$$S\left(1-V_x\right)+1-V_x=-I_t \quad \Rightarrow \quad (S+1)V_x=(S+1)+I_t$$

$$V_t=3\,V_x=\underbrace{\frac{3}{s+1}}_{Z_{eq}}\,I_t+\underbrace{3}_{E_{oc}} \qquad (۲ـ۲۵)$$

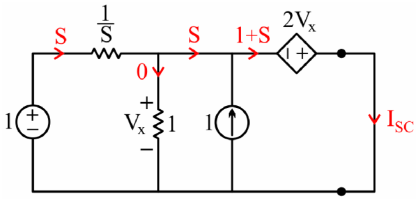
پس با توجه به رابطه بالا گزینه 1 درست می‌شود.

آیا وقت کم است یا من اجازه دارم مطلبی را بگویم؟

نه به هیچ وجه وقت کم نیست! اصلاً مگر ما هولیم که زودتر جلو برویم، به نظر من «یک چاه نفت از صدها چاه آب ارزشمندتر است.[1]» پس بفرمایید:

جسارتاً می‌خواهم بگویم ما باید از داشته‌های ذهنی قبلی‌مان همه‌جا استفاده کنیم. آیا یادتان هست در بحث مدار معادل می‌گفتیم که وقتی در یک تست، e_{oc} و R_{eq} را می‌خواهند، به‌جای یافتن تک‌تک آن‌ها، بهتر است یک‌ضرب i_{sc} را پیدا کنیم و بعد بگوییم گزینه‌ای درست است که در آن $\frac{e_{oc}}{R_{eq}}$ برابر i_{sc} یافته‌شده بشود...

خُب حالا هم می‌رویم سراغ I_{sc} :



شکل (۲ـ۱۸) مدار تمرین 8 به سبک دانشجوی sharp !

با یک KVL ساده داریم:

$$2V_x+V_x=0 \quad \Rightarrow \quad V_x=0$$

پس جریان خازن $\frac{1}{s}$ برابر است با 1 * S که روی شکل مشخص شده و حالا با KCL بازی روی شکل معلوم است که:

$$I_{sc}=S+1$$

پس فقط گزینه 1 می‌تواند درست باشد.

1ـ برای همین توصیه می‌کنم به‌جای مطالعهٔ سطحی تا می‌توانید با متهٔ ذهنتان به مطالب عمق بدهید.

۲ـ۳ کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل سیستم‌های خطی

مشاهده کردید که تبدیل لاپلاس در تحلیل مدارها کمک‌های جدی به ما می‌کند؛ به‌علاوه این تبدیل قابلیت‌های فراوان دیگری هم دارد، تا آنجا که می‌توان گفت درس کنترل خطی بدون آقای لاپلاس و S مثل پنجاه بدون پنج است! و ازآنجاکه درس «مدار» درحقیقت «مادر» دروس مهندسی برق است، بد نیست که همین جا اشاراتی به سایر کاربردهای تبدیل آقای لاپلاس در تحلیل سیستم‌ها ـخصوصاً خطی ـ کنیم؛ حالا یک نوع دیگر از مسایل را می‌بینیم.

می‌دانیم که تابع شبکه در حوزهٔ فرکانس به این صورت قابل تعریف است:

$$\text{تابع شبکه } H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}} \qquad (۲ـ۲۶)$$

که البته رابطه‌اش با پاسخ ضربه (در حوزهٔ زمان) نیز به وضوح پیداست:

$$H(s) = L\{h(t)\} = \text{تبدیل لاپلاسِ پاسخِ ضربه} \qquad (۲ـ۲۷)$$

شکل (۲ـ۱۹) بلوک دیاگرام یک سیستم‌فوق ساده!

به عبارت دیگر جای ضرب و کانولوشن در حوزه‌های زمان و فرکانس عوض می‌شود؛ یعنی:

$$L\{x(t)*h(t)\} = X(s)\times H(s)=Y(s) \qquad (۲ـ۲۸)$$

یک کاربرد خیلی جالب در اینجا آن است که:

تبدیل لاپلاس پاسخ کامل برابر است با تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر به علاوهٔ تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر؛ و این نکته در حل بعضی از مسئله‌ها، چقدر کاربرد دارد! مثال بعد را به دقت حل کنید تا منظورم را بهتر درک کنید.

9ـ پاسخ حالت صفر یک مدار LTI به ورودی $\delta(t)$ برابر $e^{-t}u(t)$ است. درصورتی‌که در شرایط اولیهٔ معین، پاسخ کامل شبکهٔ مذکور به ورودی $2u(t)$ برابر تابع زیر است:

$$y(t)=2\left(1-e^{-t}\right)u(t)+5e^{-2t}u(t)$$

پاسخ کامل تحت همان شرایط اولیه به ورودی $2e^{-3t}u(t)$ برابر کدام است؟

چون نکته‌اش را حضرت‌عالی فرمودید، مشکل حل است؛ با داشتن پاسخ ضربه، پاسخ پله (یعنی انتگرالش) معلوم است.

$$\text{پاسخ پله } s(t) = \int_0^t h(t)\,dt = \left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

پس خروجیِ ناشی از ورودیِ $2u(t)$ برابر است با:

$$\text{خروجی ناشی از **فقط** ورودی } 2u(t) = 2\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

پس از رابطهٔ $y(t)$ داده‌شده در صورت مسئله و مقایسه‌اش با رابطه اخیر معلوم است که بخش $5e^{-2t}u(t)$ اثر شرایط اولیه است که با تغییر ورودی، تغییر نمی‌کند. حال اثر ناشی از ورودیِ $2e^{-3t}u(t)$ را می‌جوییم:

$$X(s)=\frac{2}{s+3}\quad,\quad H(s)=\frac{1}{s+1}\quad\Rightarrow\quad Y=\frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

با تجزیه به کسرهای جزئی چنین به دست می‌آید:

$$Y=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\quad\Rightarrow\quad y(t)=\left(e^{-t}-3e^{-3t}\right)u(t)$$

پس پاسخ کامل برابر است با:

$$X(s)=\left(e^{-t}-e^{-3t}+5e^{-2t}\right)u(t)$$

مسئلهٔ قشنگی بود؛ یه جوریی شبیه مسایل درس سیگنال و سیستم بود. این طور که پیداست در درس «مدار» ما باید همه چیز بلد باشیم؛اصلاً یکی از خوبی‌های این درس همین است.

باز یک نوع دیگر از مسایل در بحث لاپلاس[1] :

10ـ پاسخ شبکه‌ای به ورودی پله واحد به صورت زیر است:

$$u_0(t)=\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)u(t)$$

پاسخ حالت دایمی شبکهٔ مذکور به ورودی زیر چیست؟

$$u_i(t)=2\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)u(t)$$

ابتدا تابع تبدیل را به دست می‌آوریم:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{s}}=\mathbf{L}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

و سپس تبدیل لاپلاس ورودی $u_i(t)$ را نیز پیدا می‌کنیم:

$$U_i(s)=\mathbf{L\,L}$$ [2]

این که کار دشواری نیست، فقط کمی طولانی است؛ باید ابتدا $\cos(a+b)$ را بسط بدهیم و سپس از تک‌تک جملات لاپلاس بگیریم و حاصل به دست‌آمده را در $H(s)$ ضرب کنیم و سپس از نتیجهٔ نهایی عکس لاپلاس بگیریم. پس من شروع می‌کنم!

1ـ اصولاً لاپلاس از پر مسئله‌ترین و پرکاربردترین بخش‌های درس مدار است.

2ـ این نقطه‌چین‌ها به معنی صبر چند دقیقه‌ای  سر کلاس (یا در خانه!) است.

این بار دیگر من موافق نیستم. ببینید وقتی واضح است که حل یک مسئله تا این حد طولانی می‌شود، در آزمونی که **«مدیریت زمان»** خیلی مهم است از خیرش بگذرید[1] !

اما حالا این روش را نگاه کنید:

کلمهٔ کلیدی در این مسئله پاسخ **حالت دایمی** است؛ اگر به ورودی نگاه کنید، فرکانس ورودی معلوم است دیگر:

$$\omega = 1$$

پس می‌توان در تابع تبدیل به‌جای s مقدار $j\omega = j$ را گذاشت و به پاسخ فرکانسی رسید:

$$H(j\omega) = H(j1) = \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \quad -90^\circ$$

پس خروجی معلوم است دیگر:

$$|Y| = |H| \times |X| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$Y = \quad H + \quad X = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

پاسخ مثل آب خوردن پیدا شد:

$$y(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

خوشتان آمد؟ حالا نوبت شماست.

11ـ پاسخ ضربه یک مدار LTI برابر است با:

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$$

پاسخ حالت دایمی این مدار به ورودی $e_s(t) = 2\cos t$ برابر است با:

1) $\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t$ 2) $\frac{2}{5}\cos t$ 3) $\frac{2}{5}\cos(t+90)$ 4) هیچ‌کدام

با همین روش خوشگلی که گفته شد، ابتدا تابع تبدیل را پیدا می‌کنیم؛ یعنی اول راه از حوزهٔ S کمک می‌گیریم:

$$H(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{s}{2}}{(s+2)\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

1ـ شوخی نمی‌کنم؛ یکی از نکات خیلی مهم در یک آزمون تستی آن است که دانشجو بفهمد چه تست‌هایی رافعلاً نباید سراغشان برود! بعضی‌ها تا روز کنکور معنی این جمله را نمی‌فهمند که: «برای هر تست حدود 3 دقیقه وقت داریم!» ولی من مطمئنم که شماها خیلی خوب معنی این جمله را می‌فهمید! خیلی بهتر از سایرین!

حالا به حوزهٔ فازور $(j\omega)$ می‌رویم، چون فرکانس ورودی $\omega = 1$ است، پاسخ فرکانس به راحتی به دست می‌آید:

$$H(j1) = \frac{\frac{j}{2}}{(j+2)\left(j+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{j}{2}}{5\frac{j}{2}} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \quad 0$$

و درنتیجه برای خروجی داریم:

خروجی $y(t) = \frac{1}{5} \times 2\cos(t+0) = \frac{2}{5}\cos t$

حالا یک نفر این حرف آخر را جمع‌بندی کند.

در تحلیل در حالت دایمی سینوسی با ورودی

ورودی $X(t) = A\cos(\omega_i t + \theta)$

و با داشتن $H(s)$، اگر در تابع تبدیل $H(s)$ به‌جای S مقدار:

$S = j\omega_i$

را قرار دهیم، پاسخ فرکانسی $H(j\omega_i)$ و درنتیجه $|H|$ و H را نیز داریم؛ حالا خروجی معلوم است دیگر:

$y(t) = B\cos(\omega_i t + \varphi)$

به طوری‌که:

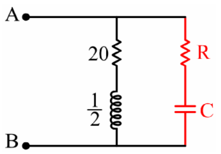
$B = A \times |H(j\omega_i)|$

$\varphi = \theta + \quad H(j\omega_i)$

البته به شرط آنکه مسئله از ما پاسخ دایمی سینوسی را بخواهد ولی اگر پاسخ گذرا را بخواهد، باید تا آخر مسئله از حوزه S برویم.

باز یک‌جور مسئله دیگر:

12ـ R و C را چنان تعیین کنید که امپدانس Z_{AB} مستقل از فرکانس باشد.



شکل (۲ـ۲۰) مدار تمرین 12

این هم برای راهنمایی:

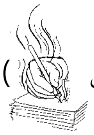
Z_{AB} را به صورت تابعی کسری از S پیدا کنید؛ حالا برای حذف S (که همان شرط مستقل از فرکانس بودن است) کاری کنید که چندجمله‌ای صورت ضریبی از مخرج شود!

بفرمایید:

سکوت

چرا کسی جواب را نمی‌گوید؟

آخر با راهنمایی شما، تمام شد دیگر؛ کاری برای ما نماند!

نه نه! اشتباه نکنید؛ شما سر جلسهٔ کنکور خیلی از مسایل را بلد هستید، اما نمی‌توانید به جواب آخر برسید، لازمهٔ کار مهارت است که با ممارست حاصل می‌شود. یک‌بار دیگر هم گفته‌ام، دست‌هایتان را داغ کنید. (رجوع به شکل )

پس می‌گویم:

$$Z_{AB} = \frac{\left(R+\frac{1}{CS}\right)\left(20+\frac{S}{2}\right)}{R+\frac{1}{CS}+20+\frac{S}{2}}$$

$$Z_{AB} = \frac{0.5RCS^2+(20RC+0.5)S+20}{0.5CS^2+(20C+RC)S+1}$$

برای مستقل از S بودن باید چنین داشته باشیم:

$$\frac{0.5RC}{0.5C} = \frac{20RC+0.5}{20C+RC} = \frac{20}{1}$$

درنتیجه R و C به راحتی به دست می‌آیند:

$$R = 20\Omega \quad , \quad C = \frac{1}{800}F$$

آفرین، تازه کار تمام شد. راستی فهمیدید که چه اتفاقی افتاد؟ شاید شما گرم بودید و متوجه نشدید! به بهانهٔ این مثال یک مبحث زیبا آموختیم! و آن هم چیزی نبود جز «مدارهای مستقل از فرکانس»؛ من‌اصولاً این نوع آموزش را خیلی دوست دارم؛ اسمش را آموزش در حین مسئله[1] می‌گذارند.

1ـ یا به قولی همان Learning by doing خودمان!

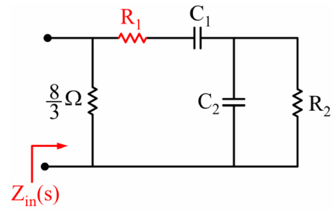
لطفاً قبل از اینکه به بهانهٔ مسئلهٔ بعدی یه چیز جدیدی یاد بگیریم، به من یه‌کم فرصت بدهید! ببینید وقتی می‌گوییم امپدانس ورودی مستقل از فرکانس یا S است، یعنی اگر S برابر با صفر یا ∞ یا  یا ... باشد، Z_{in} تغییری نمی‌کند؛ حالا من یک پیشنهاد دارم؛ بیایید مقادیر $Z_{in}(0)$ و $Z_{in}(\infty)$ را با یکدیگر مساوی بگذاریم؛ با توجه به شکل (2ـ20) نتیجه این‌گونه می‌شود:

$$\begin{cases} Z_{in}(0) = 20 \\ Z_{in}(\infty) = R \end{cases} \Rightarrow \quad R = 20\Omega$$

استاد استدلالم درست بود؟

بله و حرفت آن‌قدر قشنگ بود که من به احترام حرفت، دو سه تا مسئلهٔ جالب می‌گویم که با نکته‌ای که شما کشف کرده‌ای، فوق‌العاده زیبا می‌شود.

13ـ در مدار داده‌شده، امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ دارای قطب‌های $S=-1$ و $S=-3$ و صفرهای $S=-2$ و $S=-4$ است. مقدار مقاومت R_1 در این شبکه چقدر است؟



شکل (۲ـ۲۱) مدار تمرین 13

1) $\frac{64}{5}$　　2) $\frac{8}{5}$　　3) 1　　4) $\frac{8}{3}$

حتماً این مسایل هم **لِم** خاصی دارد ! بله؟

آری، مشابه حرف قشنگ دوستت؛ در این‌گونه مسایل، ابتدا تابع تبدیل (مربوط به امپدانس، ادمیتانس یا ...) را می‌نویسیم، سپس به مدار و تابع تبدیل یک‌بار در $S = 0$ و یک‌بار در $S \to \infty$ نگاه می‌کنیم و آن‌ها را معادل قرار می‌دهیم. فقط یادتان هست که:

عنصر	$S=0$	$S \to \infty$
r	r	r
C	O.C.	S.C.
L	S.C.	O.C.

شکل (۲ـ۲۲) عناصر مداری در کرانه‌های فرکانس $(S \to \infty \;,\; S=0)$

پس راحت شد دیگه:

$$Z(s) = K\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

$$\text{at} \quad S = 0 \quad \to \quad \begin{cases} Z(0) = \dfrac{8}{3} & \text{از نگاه مداری} \\ Z(0) = K\dfrac{8}{3} & \text{از نگاه فرمولی} \end{cases}$$

پس:

$$K = 1$$

و همچنین:

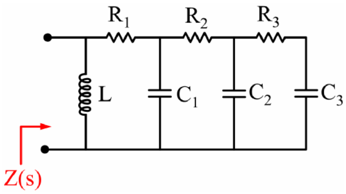
$$S \to \infty \to \begin{cases} Z(\infty) = \dfrac{8}{3} \parallel R_1 & \text{از نگاه مداری} \\ Z(\infty) = 1 & \text{از نگاه فرمولی} \end{cases}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{R_1} = 1 \quad \to \quad R_1 = \frac{8}{5}\Omega$$

پس گزینه 2 درست است.

باز یکی دیگر!

14ـ کدام‌یک از توابع شبکه در گزینه‌های زیر می‌تواند تابع امپدانس برای مدار شکل زیر باشد؟



شکل (۲ـ۲۳) مدار تمرین 14

1) $Z(s)=\dfrac{s^3+4s^2+5s}{s^4+2s^3+5s^2+7s+1}$

2) $Z(s)=\dfrac{(s+1)(s+5)(s+9)}{s(s+2)(s+11)}$

3) $Z(s)=\dfrac{s^4+5s^3+2s^2+3s}{5s^4+6s^3+9s^2+2s+1}$

4) $Z(s)=\dfrac{5s^4+6s^3+2s^2+s+3}{s^3+9s^2+2s+1}$

در $S=0$ و $S\to\infty$ امپدانس مدار را داریم:

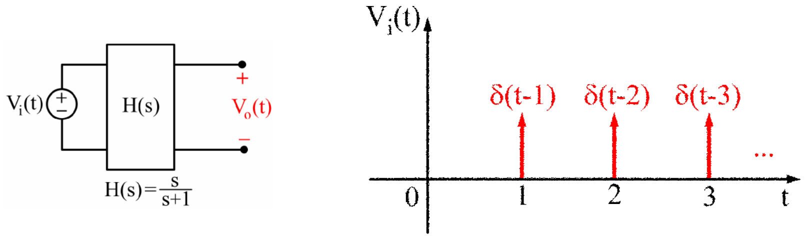
$Z(\infty)=R_1=$ یک عدد

$Z(0)=0=$ صفر!

از $Z(\infty)$ به‌دست‌آمده می‌فهمیم که درجهٔ صورت باید برابر درجهٔ مخرج باشد و از صفر بودن $Z(0)$ متوجه می‌شویم که صورت مضربی از S است، پس گزینهٔ 3 درست می‌شود.

و یک مسئله هم به عنوان حسن ختام بحث لاپلاس[1] :

15ـ پاسخ شبکهٔ شکل زیر به ورودی $V_i(t)$ داده‌شده، کدام است؟



شکل (۲ـ۲۴) شبکه و ورودی در تمرین 15

1) تکرار پریودیک $\left(1-1.58e^{-t}\right)u(t)$ با پریود یک

2) تکرار پریودیک $\left(1-1.58e^{-t}\right)u(t)+0.58e^{-(t-1)}u(t-1)$ با پریودِ یک

3) تکرار پریودیک $1-0.58e^{-t}u(t)-0.58e^{-(t-1)}u(t-1)$ با پریودِ یک

4) هیچ‌کدام

1ـ هرچند از بحث لاپلاس هر چه مسئله حل کنید باز هم کم است؛ برای همین مسئله‌های آخر فصل را خوب خوب بجوید.

می‌دانیم که:

$$H(s)=\frac{s}{s+1}=1-\frac{1}{s+1}$$

و با عکس لاپلاس داریم:

$$h(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$$

رابطهٔ بالا می‌گوید اگر به شبکه ضربه بدهیم، مقدار $\delta(t)-e^{-t}u(t)$ را می‌دهد؛ و حالا که قطار ضربه داده‌ایم، یعنی:

$$V_i(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\delta(t-i)$$

پس خروجی طبق قضیه جمع آثار برابر است با:

$$V_o(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\delta(t-i)-e^{-(t-i)}u(t-i)\right]$$

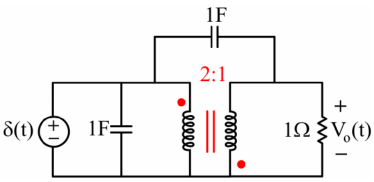
ازطرفی این با هیچ‌کدام از سه گزینهٔ اول نمی‌خواند، از طرف دیگر ظاهر گزینه‌ها نشان می‌دهد که یکی از 1 یا 2 یا 3 درست است، چه کنیم؟

ببین دوست خوب من، جواب شما صد در صد درست است، پس چرا مشکوکی؟ همان که گفتی، گزینهٔ هیچ‌کدام درست است.

خسته نباشید؛ فصل خوبی بود. تبدیل یک تابع از حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس رمزی بود که از اول خلقت وجود داشت؛ آقای لاپلاس و آقای فوریه و... این رمز را کشف کردند و مهندسی امروز بسیار مدیون امثال آن‌هاست... .

مسایل تکمیلی فصل دوم

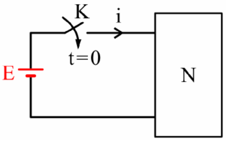
1ـ پاسخ ضربه مدار شکل مقابل کدام است؟ (مهندسی برق 79)



1) $\frac{-2}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$ 2) $\frac{-4}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$

3) $\frac{2}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$ 4) $\frac{4}{13}e^{-\frac{5}{13}t}u(t)$

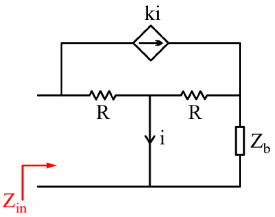
2ـ امپدانس ورودی یک‌قطبی شکل زیر برابر است با $Z(S)=\frac{s^2+s+2}{2s^2+s+1}$. اگر با بسته شدن کلید در لحظهٔ $t=0$، جریان i در لحظهٔ $t=0^+$ برابر 6 آمپر باشد، مقدار E چند ولت است؟ (یک‌قطبی N در حالت صفر فرض شود.) (مهندسی برق 78)



1) 3 2) 6

3) 9 4) 12

3ـ در شبکه زیر $\lim\limits_{k\to\infty} Z_{in}$ چقدر است؟ (مهندسی برق 76)



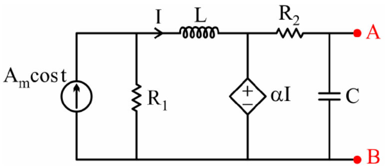
1) $-Z_b$

2) Z_b-R

3) Z_b+R

4) بی‌نهایت

4ـ امپدانس دیده‌شده در سرهای A و B مدار شکل زیر کدام است؟



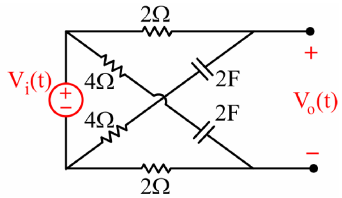
1) $\dfrac{R_2}{1+j\omega cR_2}$

2) $\dfrac{j\omega LR_1}{1+j\omega cR_2}$

3) $\dfrac{R_1+R_2}{1+j\omega c\left(R_1+R_2\right)}$

4) $\dfrac{R_1+R_2}{1+j\omega cR_2}$

5ـ در شبکه متقارن زیر، تابع شبکه $H(S)=\dfrac{V_o(S)}{V_i(S)}$ برابر است با:



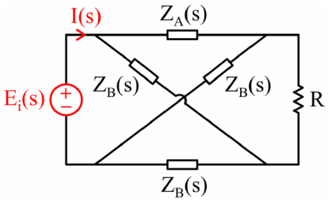
1) $\dfrac{2s+1}{12s+1}$

2) $\dfrac{2s+1}{12s+4}$

3) $\dfrac{4s+1}{12s+4}$

4) $\dfrac{4s+1}{12s+1}$

6ـ در شکل زیر که نشان‌دهنده یک لتیس متقارن ختم‌شده به مقاومت R است، درصورتی‌که $Z_A(S)Z_B(S)=R^2$ باشد، $Z_{eq}(S)=\dfrac{E_i(S)}{I(S)}$ برابر است با:



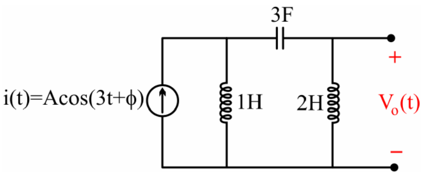
1) $2R$

2) Z_A+Z_B+R

3) R

4) Z_A+Z_B+2R

7ـ ولتاژ خروجی $V_o(t)$ در حالت دایمی در مدار شکل زیر به چه صورت کلی است؟



1) $K\cos(3t+\theta)$

2) $k_1\cos\left(3t+\theta_1\right)+k_2\cos\left(\dfrac{t}{3}+\theta_2\right)$

3) $kt\cos(3t+\theta)$

4) $k_1 t\cos\left(3t+\theta_1\right)+k_2\cos\left(\dfrac{t}{3}+\theta_2\right)$

8ـ درصورتی‌که ورودی به یک سیستم خطی برابر با $u(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2}e^{jkt}$ و تابع تبدیل مدار برابر با $H(S)=\frac{S}{S+1}$ باشد، خروجی پایدار $y(t)$ برابر با کدام گزینهٔ زیر است؟

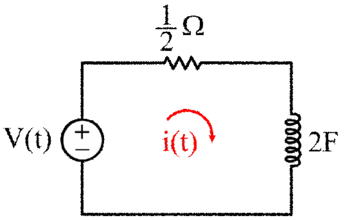
1) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jkt}}{k(k-j)}$

2) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jkt}}{k-j}$

3) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jkt}}{k+j}$

4) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jkt}}{k+j}$

9ـ ولتاژ پالس برابر با معادلهٔ $V(t)=10\left[u(t)-u(t-1)\right]$ به مدار زیر اعمال شده است. جریان $i(t)$ برابر با کدام گزینهٔ زیر است، درحالی‌که $V_c\left(0^-\right)=0$ است.



1) $20e^{-t}-10e^{-(t-2)}u(t-1)$

2) $10e^{-t}-10e^{-(t-1)}u(t-1)$

3) $20e^{-t}-20e^{-(t-1)}u(t-1)$

4) $20e^{-t}+20e^{-(t-1)}u(t-1)$

10ـ واکنش تابع ضربه یک سیستم خطی برابر با $h(t)=\frac{3}{4}\left(e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$ است، درصورتی‌که سیگنال ورودی برابر با $U(s)=2e^{-5s}$ باشد، خروجی $y(t)$ برابر با کدام گزینه است؟

1) $y(t)=\left\{e^{-(t-5)}+e^{-3(t-5)}\right\}u(t)$

2) $y(t)=\frac{3}{2}\left\{e^{-(t-5)}+e^{-3(t-5)}\right\}u(t-5)$

3) $y(t)=\frac{3}{2}\left\{e^{-(t-5)}+e^{-3(t-5)}\right\}u(t)$

4) هیچ‌کدام

11ـ در یک مدار الکتریکی $H(s)$ برابر با رابطه $H(s)=\frac{V(s)}{E(s)}=\frac{10(s+1)}{s^2+2s+3}$ تعریف شده است.

درصورتی‌که $e(t)=4\cos 2t$ باشد، ولتاژ سینوسی در حالت پایدار $V_{SS}(t)$ برابر با کدام گزینه است؟

1) $21.76\cos(2t+40.6°)$

2) $20.2\cos(2t+40.6°)$

3) $21.76\cos(2t-40.6°)$

4) $43.52\cos(2t-40.6°)$

12ـ درصورتی‌که $G(\omega)=\frac{-\omega^2+1}{(j\omega+1)(j\omega-1)(j\omega-3)}$ باشد، $g(t)$ برابر با کدام گزینهٔ زیر است؟

1) $g(t)=\begin{cases}e^{-t} & t>0\\ e^{t}+\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$

2) $g(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-t} & t>0\\ -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$

3) $g(t)=\begin{cases}e^{-t} & t>0\\ e^{t}-\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$

4) $g(t)=\begin{cases}e^{-t}+1 & t>0\\ e^{t}-\frac{5}{4}e^{t} & t<0\end{cases}$

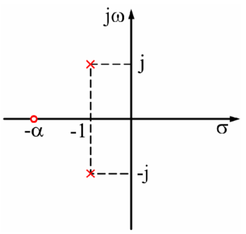
13ـ شکل زیر صفرها و قطب‌های تابع تبدیل یک مدار را نشان می‌دهد. ضریب ثابت تبدیل را برابر 1 فرض کنید. یک جمله از پاسخ پله این مدار به شکل $ke^{-t}\cos(t+\phi)$ است. $(k>0)$ مقدار α را به نحوی تعیین کنید که k حداقل باشد.

1) 0

2) 1

3) 2

4) $\frac{1}{2}$



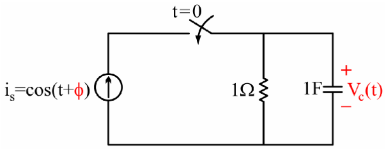
14ـ اگر بخواهیم در مدار زیر حالت گذرا در پاسخ $V_c(t)$ برای $t>0$ حذف شود، مقدار ϕ چند درجه است؟ (شرایط اولیه ولتاژ دو سر خازن صفر است.)

1) صفر

2) 45°

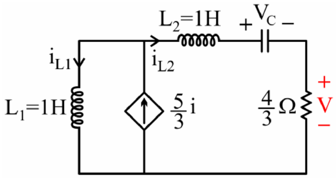
3) 90°

4) 135°



15ـ پاسخ ورودی صفر متغیر V در مدار شکل زیر در $t>0$ چیست؟

$\left(V_C(0)=1V\ ,i_{L2}(0)=3A\ \ ,\ i_{L1}(0)=3A\right)$



1) $4e^{-t}-8e^{-3t}$

2) $-4e^{-t}+8e^{-3t}$

3) $3e^{-t}-4e^{-3t}$

4) $-3e^{-t}+4e^{-3t}$

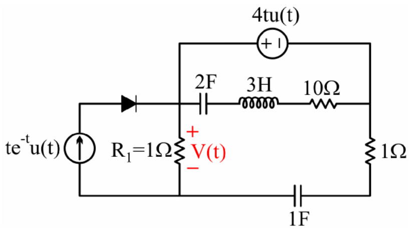
16ـ در مدار شکل زیر ولتاژ دو سر مقاومت R_1 کدام‌یک از پاسخ‌های زیر است؟

1) $V(t)=\left(4+e^{-t}+3e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$

2) $V(t)=2tu(t)+\left(e^{-t}+3e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$

3) $V(t)=\left(4-e^{-t}-3e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$

4) هیچ‌کدام

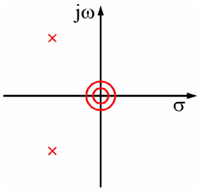


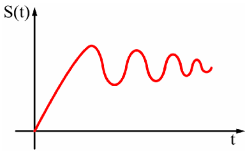
17ـ تابع انتقال یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان RLC به شکل $H(S)=K\dfrac{S+d}{S^2+aS+b}$ است. هر گاه پاسخ شبکه به تحریک $x(t)=u(t)\cos t$ به صورت زیر باشد، ضرایب ثابت و حقیقی k، d، b و a عبارت‌اند از:
(مهندسی برق 69)

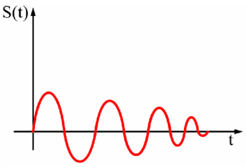
$$y(t)=\left[e^{-2t}\cos\left(t+30^{0}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t+45^{0}\right)\right]u(t)$$

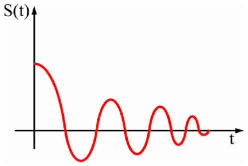
1) $k=4\ ,\ d=0\ ,\ a=4\ ,\ b=5$
2) $k=4\ ,\ d=1\ ,\ a=4\ ,\ b=2$
3) $k=1\ ,\ d=0\ ,\ a=4\ ,\ b=5$
4) هیچ‌کدام

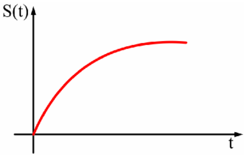
18ـ اگر نمودار قطب و صفر شکل مقابل، مربوط به تابع شبکه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، پاسخ پله این مدار در حوزهٔ زمان برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟
(مهندسی برق 83)



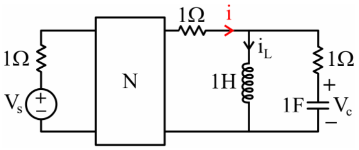
1) 

2) 

3) 

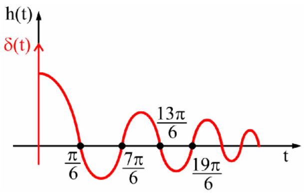
4) 

19ـ در شکل زیر، N یک مدار مقاومتی خطی و بدون منابع مستقل است. اگر تابع انتقال $\dfrac{I}{V_s}=\dfrac{3\left(S^2+S+1\right)}{4S^2+4S+3}$ و شرایط اولیه $i_L\left(0^-\right)=2A$ و $v_C\left(0^-\right)=1V$ را داشته باشیم، شرایط اولیه $i\left(0^-\right)$ برابر است با:
(مهندسی برق 84)

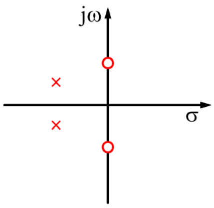


1) $-\dfrac{1}{3}$
2) $-\dfrac{1}{4}$
3) $\dfrac{3}{4}$
4) $\dfrac{1}{4}$

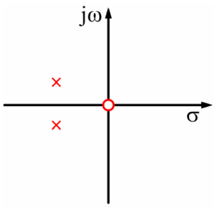
20ـ در یک فیلتر میان‌نگذر با پاسخ ضربه واحد داده‌شده $h(t)$، محل صفرها و قطب‌های مدار به کدام‌یک از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟ (x : محل قطب و o : محل صفر) (مهندسی برق 84)



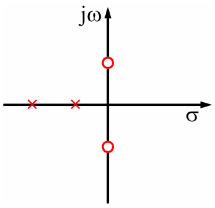
(1



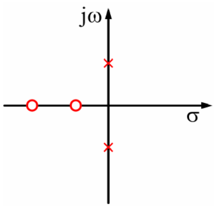
(2



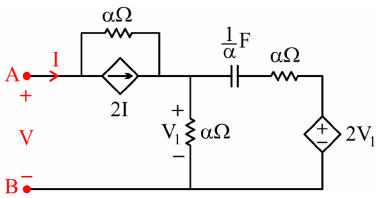
(3



(4



21ـ در مدار شکل زیر کدام بیان درست است؟ (مهندسی برق 84)



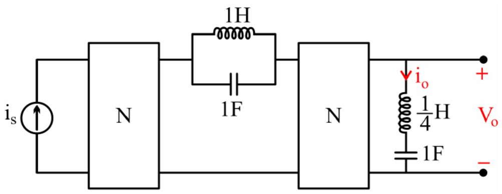
1) مدار از دو سر AB معادل یک اتصال کوتاه است.

2) مدار از دو سر AB معادل یک خازن با ظرفیت α فاراد است.

3) مدار از دو سر AB معادل یک مقاومت برابر α اهم است.

4) مدار از دو سر AB معادل یک سلف با اندوکتانس α هانری است.

22ـ شبکه N، از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. اگر $i_s(t) = \cos t + \cos 2t$ باشد، آن‌گاه در حالت دایمی کدام‌یک از متغیرهای $v_o(t)$ و $i_o(t)$ برابر صفر می‌شود؟ (مهندسی برق 83)



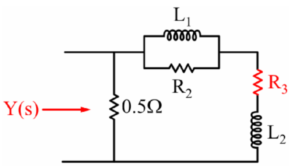
1) فقط $i_o(t)$

2) فقط $v_o(t)$

3) هم $v_o(t)$ و هم $i_o(t)$

4) نه $i_o(t)$ و نه $v_o(t)$

23ـ در مدار شکل زیر، ادمیتانس ورودی دارای دو صفر در $s=-2$ و $s=-2.5$ و یک قطب مضاعف در $s=-1$ است. مقاومت R_3 کدام است؟ (مهندسی برق 83)

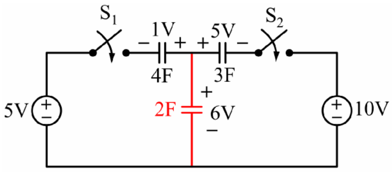


1) $\frac{1}{4}\Omega$
2) $\frac{1}{8}\Omega$
3) 1Ω
4) 2Ω

24ـ پاسخ ضربه مداری به صورت $h(t)=\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+45°)u(t)$ است. پاسخ حالت دایم سینوسی این مدار به ورودی $10\cos(2t-23.4°)u(t)$ برابر است با: (مهندسی برق 84)

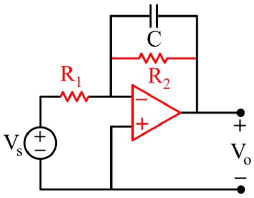
1) $4.5\cos(2t-50°)u(t)$
2) $4.5\cos(2t+50°)u(t)$
3) $-4.5\cos(2t-50°)u(t)$
4) $-4.5\cos(2t+50°)u(t)$

25ـ کلیدهای S_1 و S_2 در مدار شکل زیر به طور همزمان بسته می‌شوند. ولتاژ V دو سر خازن 2 فارادی بعد از بسته شدن کلیدها کدام است؟ (مهندسی برق 86)



1) 3
2) 4
3) 6
4) 9

26ـ در مدار شکل زیر مقادیر R_1 و R_2 را چنان انتخاب کنید که رفتار مدار فیلتر پایین‌گذری باشد که در باند گذر دارای بهره 5 و فرکانس قطع 1000Hz باشد. مقدار C را برابر $\frac{1}{\pi}$ میکروفاراد بگیرید. (مهندسی برق 86)

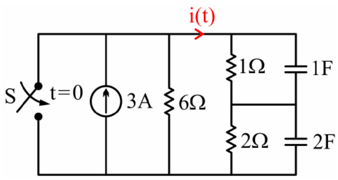


1) $R_1=100$, $R_2=500$
2) $R_1=100$, $R_2=100$
3) $R_1=200\pi$, $R_2=1000\pi$
4) $R_1=1000\pi$, $R_2=200\pi$

27ـ عکس تبدیل لاپلاس $F(S)=\frac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}}$ تابع $f(t)$ است. $f(2.5)$ کدام است؟ (مهندسی برق 86)

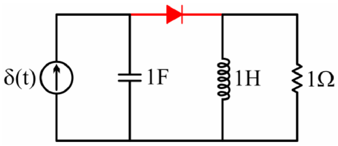
1) -2
2) صفر
3) 2
4) 3

28ـ در مدار شکل زیر کلید S برای مدت‌زمان طولانی باز و در $t=0$ بسته می‌شود. $i(t)$ برای زمان‌های $t\ge 0$ مطابق کدام‌یک از گزینه‌هاست؟ (مهندسی برق 87)



1) $-4\delta(t)-e^{-t}$
2) $-2\delta(t)-e^{-\frac{t}{2}}$
3) $-2\delta(t)-e^{-t}$
4) $-4\delta(t)-e^{-\frac{t}{2}}$

29ـ در مدار شکل زیر شرایط اولیه صفر و دیود D ایده‌آل است. $C=1F$، $L=1H$، $R=1\Omega$ پس از چند ثانیه جریان دیود D قطع می‌شود؟ (مهندسی برق 87)

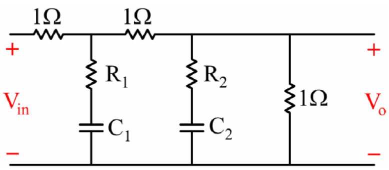


1) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
2) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$
3) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
4) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

30ـ تابع شبکه انتقال ولتاژ مدار شکل زیر به صورت مقابل است:

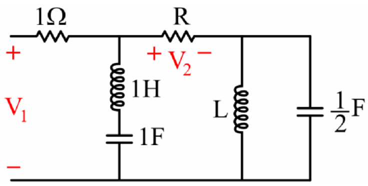
$$\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{2s^2+3s+1}{As^2+Bs+C}$$

مقادیر A، B و C کدام است؟ (مهندسی برق 84)



1) $A=8 \;,\; B=13 \;,\; C=3$
2) $A=13 \;,\; B=8 \;,\; C=1$
3) $A=13 \;,\; B=13 \;,\; C=3$
4) $A=8 \;,\; B=3 \;,\; C=1$

31ـ تابع شبکه $H(s)=\frac{V_2(S)}{V_1(S)}=\frac{s^4+as^3+5s^2+bs+c}{3s^4+5s^3+19s^2+8s+12}$ در مدار شکل مقابل داده شده است.



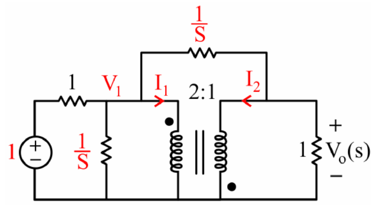
مقادیر مجهول a، b و c کدام‌اند؟ (مهندسی برق 86)

1) $(a,b,c)=(1,1,3)$
2) $(a,b,c)=(1,0,4)$
3) $(a,b,c)=(0,1,4)$
4) $(a,b,c)=(0,0,4)$

حل تشریحی

1. **گزینه 1 درست است.**

فکر کنم KCL راه مناسبی باشد چون به خاطر خازن، انتقال که نمی‌توانیم بدهیم.



$$KCL1: I_1 + SV_1 + \left(V_1 - 1\right) + \left(V_1 - V_o\right)S = 0$$

$$KCL2: V_o + I_2 + \left(V_o - V_1\right)S = 0$$

$$\frac{V_1}{V_o} = -2 \text{ و } \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$$

با جایگذاری روابط بالا در KCL 2 داریم:

$$I_2 = -V_o - V_oS - 2V_oS = -V_o - 3V_oS$$

با جایگذاری در KCL 1 داریم:

$$\frac{-V_o - 3V_oS}{2} - 2V_oS + \left(-2V_o - 1\right) + \left(-2V_o - V_o\right)S = 0 \quad \Rightarrow \quad V_o(S) = \frac{-2}{13S + 5}$$

$$\Rightarrow V_o(t) = \frac{-2}{13}\frac{1}{S + \frac{5}{13}} = \frac{-2}{13}e^{-\frac{5}{13}t}$$

2. گزینه 1 درست است.

می‌دانیم که:

$$I(S)=\frac{V(S)}{Z(S)}=\frac{E/S}{\dfrac{s^2+s+2}{2s^2+s+1}}=\frac{E}{S}\,\frac{2s^2+s+1}{s^2+s+2}$$

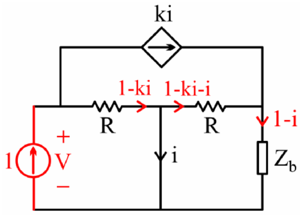
حالا می‌توانیم از قضیه مقدار اولیه استفاده کنیم:

$$i\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty} S\,I(S)=2E=6\ \Rightarrow\ E=3V$$

3. گزینه 1 درست است.

می‌توانیم مانند مقاومت معادل به دست آوردن، از روش I_t و V_t استفاده کنیم تا امپدانس معادل به دست آید.

$$KVL: V_t=R(1-ki)$$



یک معادله دیگر هم که بنویسیم، i هم به دست می‌آید:

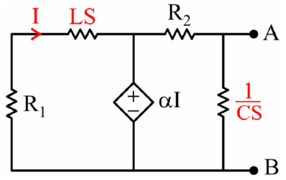
$$KVL: R(1-ki-i)+Z_b(1-i)=0$$

$$\Rightarrow\ \left(-KR-R-Z_b\right)i=-Z_b-R\ \Rightarrow\ i=\frac{Z_b+R}{KR+R+Z_b}$$

$$\Rightarrow\ Z_{in}=V_t=R-KR\,\frac{Z_b+R}{kR+R+Z_b}\ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} Z_{in}=R-\left(Z_b+R\right)=-Z_b$$

4. گزینه 1 درست است.

با صفر کردن منبع جریان و بردن مدار به حوزهٔ لاپلاس داریم:



حالا با یک KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$(R_1 + LS)I + \alpha I = 0 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + LS + \alpha)I = 0$$

پس یا $I = 0$ است و یا $\alpha = -R_1 - LS$

α یک عدد است و نمی‌تواند با فرکانس عوض شود، پس‌حتماً $I = 0$ است؛ درنتیجه سمت چپ مدار اتصال کوتاه می‌شود و فقط یک R و C موازی داریم:

$$Z_{AB} = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega} = \frac{\frac{R_2}{j\omega}}{R_2 + \frac{1}{j\omega}} = \frac{R_2}{R_2 j\omega + 1}$$

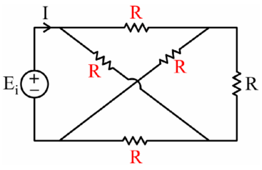
5. گزینه 4 درست است.

ولتاژ سر مثبت و منفی V_o از تقسیم ولتاژ بین امپدانس‌های سری به دست می‌آید و V_o هم از تفاضل سر مثبت و منفی‌اش:

$$V_o = V_o^+ - V_o^- = \frac{4 + \frac{1}{2s}}{4 + \frac{1}{2s} + 2} V_i - \frac{2}{2 + 4 + \frac{1}{2s}} V_i = \frac{2 + \frac{1}{2s}}{6 + \frac{1}{2s}} V_i = \frac{4s + 1}{12s + 1} V_i$$

6. گزینه 3 درست است.

می‌شود Z_A و Z_B را برابر مقادیری گرفت که در رابطه داده‌شده صدق کنند؛ مثلاً اگر هر دو را برابر R در نظر بگیریم، در حدس گزینه درست هم به مشکل برنمی‌خوریم:



حالا اگر مقاومت معادل از دو سر منبع ولتاژ را بیابیم، مسئله تمام است.

از دو سر منبع ولتاژ، پل وتسون داریم. پس شاخهٔ وسطی پل که همان مقاومت عمودی است حذف می‌شود و:

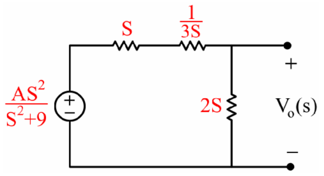
$$R_{in} = 2R \quad 2R = R$$

7. گزینه 2 درست است.

چون در گزینه‌ها زاویه مشخص نیست پس در تبدیل لاپلاس گرفتن از منبع جریان هم لازم نیست φ را در نظر بگیریم، بنابراین:

$$I(s) = \frac{As}{s^2+9}$$

یک تبدیل نورتن به تونن کار را راحت‌تر می‌کند، درنتیجه:



$$\Rightarrow \quad V_o(s) = \frac{2s}{2s+s+\frac{1}{3s}} \times \frac{As^2}{s^2+9} = \frac{\frac{3}{2}s^2}{s^2+\frac{1}{9}} \times \frac{As^2}{s^2+9}$$

پس مشخص است که در تجزیه کسرها دو فرکانس به دست می‌آید. $\omega = 3$ و $\omega = \frac{1}{3}$ که یکی از آن‌ها فرکانس ورودی است و دیگری فرکانس نوسان مدار که هر دو در خروجی ظاهر شده‌اند.

8. گزینه 1 درست است.

اول ورودی را در حوزه لاپلاس بنویسیم و با ضرب در تابع تبدیل خروجی را در حوزهٔ لاپلاس به دست آوریم:

$$u(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\frac{1}{s-jk}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s}{s+1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\frac{1}{s-jk} = \frac{-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2(-1-jk)}}{s+1} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{1}{k^2}\frac{jk}{jk+1}}{s-jk}$$

چون در مسئله، تنها جواب پایدار مورد نظر است از بخشی که مخرجش $s+1$ است و جواب ناپایدار را می‌دهد لازم نیست عکس لاپلاس بگیریم، پس:

$$Y(s)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{1}{k^2}\frac{jk}{jk+1}}{s-jk}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{k(jk+1)(s-jk)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k(k-j)(s-jk)}$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{+jkt}}{k(k-j)}$$

آفرین که سؤال را حل کردید و به جواب کاملاً درستی هم رسیدید، ولی راحت‌تر از این حرف‌ها هم حل می‌شد.

زمانی که فرکانس ورودی را داشتید، می‌توانستید به‌جای S در تابع تبدیل $j\omega$ قرار دهید و بعد اندازه آن را در اندازهٔ ورودی ضرب و زاویه‌اش را با زاویه ورودی در آن فرکانس جمع کنید. اینجا هم فرکانس ورودی k است، پس:

$$H(jk)=\frac{jk}{jk+1}\quad\Rightarrow\quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{jk}{jk+1}\cdot\frac{1}{k^2}e^{jkt}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jkt}}{k(k-j)}$$

9. گزینه 3 درست است.

به راحتی داریم:

$$I(s)=\frac{V(s)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}}$$

$$V(s)=10\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right)$$

$$\Rightarrow\quad I(s)=\frac{\frac{10}{s}\left(1-e^{-s}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}}=\frac{20\left(1-e^{-s}\right)}{s+1}=\frac{20}{s+1}-\frac{20e^{-s}}{s+1}$$

حالا عکس تبدیل لاپلاس کار را تمام می‌کند:

$$i(t)=20e^{-t}-20e^{-(t-1)}u(t-1)$$

10.گزینه 2 درست است.

اول $h(t)$ را به حوزه لاپلاس می‌بریم و با ضرب در ورودی لاپلاس خروجی را پیدا می‌کنیم و بعد هم عکس لاپلاس می‌گیریم.

نه!! ما که می‌دانیم e^{-TS} باعث می‌شود تابع در حوزهٔ زمان به اندازهٔ T شیفت پیدا کند، پس این کارها لازم نیست؛ به‌خاطر سیگنال ورودی فقط دامنه تابع ضربه را دو برابر کرده و زمان آن را هم 5 واحد شیفت می‌دهیم و داریم:

$$\Rightarrow\ y(t)=\frac{3}{2}\left\{e^{-(t-5)}+e^{-3(t-5)}\right\}u(t-5)$$

11.گزینه 3 درست است.

در اینجا هم می‌توانیم به‌جای S در تابع تبدیل، j2 را که فرکانس ورودی است قرار دهیم و اندازه و زاویهٔ آن را به دست آوریم:

$$H(j2)=\frac{10(j2+1)}{(j2)^2+2j2+3}=\frac{10(j2+1)}{-1+j4}$$

$$\Rightarrow\ \left|H(j2)\right|=\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{17}}=5.4\ ,\quad \angle H(j2)=\tan^{-1}2-\tan^{-1}-4=-40.6^\circ$$

$$\Rightarrow\ V_{SS}(t)=5.4\times 4\cos(2t+0-40.6^\circ)=21.7\cos(2t-40.6^\circ)$$

12.گزینه 2 درست است.

اول $G(\omega)$ را به $G(s)$ تبدیل می‌کنیم و سپس عکس لاپلاس می‌گیریم.

$$j\omega\rightarrow s\quad ,\quad \omega^2\rightarrow -s^2$$

$$\Rightarrow\ G(s)=\frac{s^2+1}{(s+1)(s-1)(s-3)}=\frac{\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{5}{4}}{s-3}$$

عبارت با مخرج $s+1$ را که می‌شناسیم و چون قطب سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارد برای $t>0$ پایدار است و قطب سمت راست محور $j\omega$ برای $t<0$ پایدار خواهد بود، پس:

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-t} & t>0\\ -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{5}{4}e^{3t} & t<0\end{cases}$$

13. گزینه 2 درست است.

از روی صفرها و قطب‌ها، تابع تبدیل را می‌توان نوشت:

$$H(S)=\frac{(S+\alpha)}{\left[S-(-1+j)\right]\left[S-(-1-j)\right]}=\frac{S+\alpha}{(S+1)^2+1}$$

و پاسخ پله مدار به صورت زیر است:

$$y(S)=\frac{1}{S}\cdot\frac{S+\alpha}{(S+1)^2+1}=\frac{\frac{\alpha}{2}}{S}+\frac{-\frac{\alpha}{2}S-\alpha+1}{(S+1)^2+1}$$

و حالا عکس لاپلاس می‌گیریم و k را برحسب α به دست می‌آوریم.

البته چون k ضریب جملهٔ نوسانی میرا است، تنها از این بخش، باید عکس لاپلاس بگیریم:

$$L^{-1}\left[\frac{-\frac{\alpha}{2}S-\alpha+1}{(S+1)^2+1}\right]=L^{-1}\left[\frac{-\frac{\alpha}{2}(S+1)-\frac{\alpha}{2}+1}{(S+1)^2+1}\right]$$

$$=\frac{-\alpha}{2}e^{-t}\cos t+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-t}\sin t$$

بگذارید من ادامه بدهم:

$$y(t)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\;e^{-t}\cos(t+\varphi)$$

$$\Rightarrow\quad k=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\quad;\quad\left(\frac{dk}{d\alpha}=0\;\Rightarrow\;k_{min}\right)\Rightarrow 2\times\frac{\alpha}{2}\times\frac{1}{2}+2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)=0\;\Rightarrow\;\alpha=1$$

14. گزینه 4 درست است.

اول منبع جریان را به حوزهٔ لاپلاس می‌بریم و V_c را از روی آن به دست می‌آوریم.

$$I_S(S)=\frac{S}{S^2+1}$$

نشد، به ϕ توجه نکردید:

$$i_s(t)=\cos(t+\phi)=\cos t\,\cos\phi-\sin t\,\sin\phi$$

$$\Rightarrow\quad I_S(S)=\frac{S}{S^2+1}\cos\phi-\frac{1}{S^2+1}\sin\phi$$

متوجه اشتباهم شدم، پس:

$$V_C(S)=\frac{\frac{1}{S}}{\frac{1}{S}+1}\times I_S(S)=\frac{1}{1+S}\times I_S(S)=\frac{(S\cos\phi-\sin\phi)}{(S^2+1)\,(S+1)}=\frac{A}{S^2+1}+\frac{B}{S+1}$$

و برای صفر شدن حالت گذرا باید صورت کسر با مخرج $s+1$، یعنی B ، صفر باشد:

$$B=\frac{-\cos\phi-\sin\phi}{2}=0\Rightarrow\tan\phi=-1\Rightarrow\phi=135^{0}$$

15. گزینه 2 درست است.

در حوزه لاپلاس یک KVL در حلقه بزرگ می‌زنیم:

$$SI+\frac{I}{S}+\frac{4}{3}I+\left(1-\frac{5}{3}\right)IS=0$$

مقادیر اولیه سلفها و خازن‌ها را فراموش کردید:

$$V_L(S)=L(SI-i(0))$$

$$V_C(S)=\frac{V_C(0)}{S}+\frac{1}{CS}I$$

$$\Rightarrow\quad SI-3+\frac{1}{S}+\frac{I}{S}+\frac{4}{3}I-\frac{2}{3}SI+2=0\quad\Rightarrow\quad I=\frac{3(S-1)}{(S+1)(S+3)}$$

$$\Rightarrow\quad V(S)=\frac{4}{3}I(S)=\frac{4(S-1)}{(S+1)(S+3)}=\frac{-4}{S+1}+\frac{8}{S+3}$$

$$\Rightarrow\quad V(t)=\left(-4e^{-t}+8e^{-3t}\right)u(t)$$

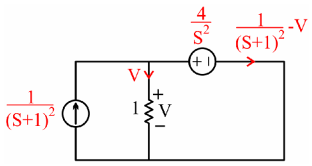
وای!! اصلاً این کارها را لازم نداشت؛ یه نگاهی به گزینه‌ها بندازید، مقدارهای اولیه همه‌شون با هم فرق دارن و:

$$V\left(0^+\right)=\frac{4}{3}i_{L2}(0)=\frac{4}{3}\times3=4$$

16. گزینه 3 درست است.

منبع ولتاژ که بخش موازی با خود را حذف می‌کند و دیود هم به دلیل گذشتن جریان مثبت از آن روشن است.

بله، حالا می‌توانیم کل مدار را به حوزه لاپلاس ببریم:



$$KVL:-V+\frac{4}{S^2}+\left(1+\frac{1}{S}\right)\left[\frac{1}{(S+1)^2}-V\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad V=\frac{5S+4}{2S(S+1)\left(S+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{S}+\frac{-1}{S+1}+\frac{-3}{S+\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow\quad V(t)=\left[4-e^{-t}-3e^{-\frac{t}{2}}\right]u(t)$$

17. گزینه 4 درست است.

$Y(s)$ را باید از دو طریق به دست آوریم و متحد قرار دهیم:

$$Y(s)=x(S)H(S)=\frac{S}{S^2+1}.\frac{K(S+d)}{S^2+aS+b}$$

و از طرف دیگر داریم:

$$y(t)=\left[e^{-2t}[\cos t\cos 30-\sin t\sin 30]+\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos t\cos 45-\sin t\sin 45]\right]u(t)$$

$$\Rightarrow\quad Y(s)=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{(S+2)}{(S+2)^2+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(S+2)^2+1}+\frac{1}{2}\,\frac{S}{S^2+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{S^2+1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(S+2)-\frac{1}{2}}{(S+2)^2+1}+\frac{\frac{1}{2}(S-1)}{S^2+1}$$

حالا باید $Y(S)$ اولی را تجزیه کنیم و با دومی متحد قرار دهیم.

چون گزینه هیچ‌کدام هم داریم، یه‌ذره دقت کنیم...!!!

مخرج‌ها را می‌توانیم متحد قرار دهیم، ولی صورت $Y(s)$ اولی از درجه 2 و دومی از درجه 3 است، پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم آن‌ها را متحد قرار دهیم.

18. گزینه 3 درست است.

باید بر اساس صفر و قطب‌های داده‌شده، تابع تبدیل را بنویسیم و مقدار اولیه و نهایی را با توجه به قضایا به دست آوریم.

و یادمون نره که پاسخ پله خواسته شده و باید $H(S)$ را در لاپلاس ورودی هم ضرب کنیم، پس داریم:

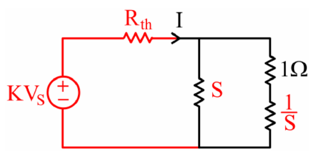
$$Y(S)=X(S)H(S)=\frac{1}{S}\times k\frac{S^2}{(S+\alpha)^2+\omega_0^2}\quad\Rightarrow\quad y\left(0^+\right)=\lim_{S\to\infty}SY(S)=K$$

پس تنها گزینه 3 می‌تواند صحیح باشد.

19.گزینه 4 درست است.

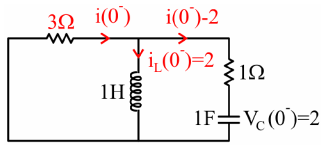
چون شبکه N مقاومتی و بدون منبع مستقل است، می‌توانیم به‌جای سمت چپ مدار یک معادل تونن قرار دهیم و با استفاده از تابع انتقال داده‌شده مقادیر معادل را بیابیم.

پس مدار ساده‌شده این‌طور می‌شود:



$$\left.\begin{aligned} \frac{I}{V_S}(S=0)=\frac{3}{3}=1=\frac{k}{R_{th}} \\ \frac{I}{V_S}(S\to\infty)=\frac{3}{4}=\frac{k}{R_{th}+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad k=R_{th}=3$$

حالا مدار را در $t=0^-$ در نظر بگیریم و با جایگذاری مقادیر داده‌شده در صورت سؤال و صفر کردن منبع، چون مدار قرار است برای $t>0$ شروع به کار کند، به دنبال $i\left(0^-\right)$ می‌گردیم. پس از KCL بازی کردن داریم:



$$KVL: i\left(0^-\right)-2+1+3i\left(0^-\right)=0 \quad \Rightarrow \quad i\left(0^-\right)=\frac{1}{4}A$$

20. گزینه 1 درست است.

چون پاسخ نوسانی میراشونده است پس قطب‌های سیستم باید شامل بخش حقیقی و موهومی باشد:

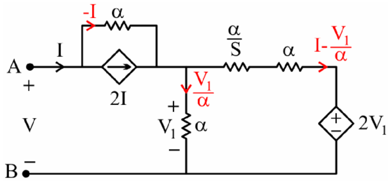
$$S=-\alpha\pm j\omega_d$$

بنابراین گزینه 2، پاسخ است.

در $h(t)$ تابع $\delta(t)$ هم وجود دارد که لاپلاس آن 1 می‌شود؛ پس درجه صورت و مخرج تابع تبدیل باید برابر باشد و درنتیجه دو صفر هم باید داشته باشیم و گزینه 1 درست خواهد بود.

21. گزینه 4 درست است.

باید رابطه $V-I$ را پیدا کنیم، پس برویم سراغ KCL بازی و KVL زدن:



$$V_1=\left(\frac{\alpha}{S}+\alpha\right)\left(I-\frac{V_1}{\alpha}\right)+2V_1 \quad\Rightarrow\quad V_1=\alpha(S+1)I$$

$$V=-\alpha I+V_1=\alpha S I \quad\Rightarrow\quad Z=\frac{V}{I}=\alpha S$$

بنابراین مدار معادل یک سلف است.

22. گزینه 2 درست است.

$\omega=1$ فرکانس تشدید LC موازی است که مدار باز می‌شود و ورودی را از i_o و v_o قطع می‌کند و هر دو برابر صفر می‌شوند.

و $\omega=2$ فرکانس تشدید LC سری است که اتصال کوتاه می‌شود و v_o را صفر می‌کند؛ بنابراین v_o در هر دو فرکانس صفر است، ولی i_o فقط در فرکانس یک، برابر صفر است، پس گزینه 2 درست است.

23. گزینه 2 درست است.

با استفاده از صفرها و قطب‌های داده‌شده، ادمیتانس ورودی به این شکل خواهد بود:

$$Y(S)=\frac{(S+2)(S+2.5)}{(S+1)^2}$$

و یک ضریب نامشخص K هم برای اندازه اضافه می‌کنیم.

و حالا شرایط $S\to 0$ و $S\to\infty$ را در تابع ادمیتانس و شکل مدار با هم تطبیق می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} Y(S=0)=K\dfrac{2\times 2.5}{1}=\dfrac{1}{0.5}+\dfrac{1}{R_3} \\ Y(S\to\infty)=K=\dfrac{1}{0.5} \quad\Rightarrow\quad K=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad R_3=\frac{1}{8}\,\Omega$$

24.گزینه 1 درست است.

از فرمول $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$ استفاده می‌کنیم که دامنه‌ها در هم ضرب و زاویه‌ها جمع می‌شوند.

و برای به دست آوردن لاپلاس $h(t)$ کسینوس را ابتدا در حوزهٔ زمان بسط می‌دهیم:

$$h(t)=\sqrt{2}e^{-t}(\cos t\cos 45°-\sin t\sin 45°)=e^{-t}(\cos t-\sin t)\quad\Rightarrow\quad H(S)=\frac{(1+S)-1}{(1+S)^2+1}=\frac{S}{(1+S)^2+1}$$

حالا به‌جای S ، j2 یعنی فرکانس ورودی را قرار می‌دهیم و دامنه و فاز را پیدا می‌کنیم:

$$H(j2)=\frac{j2}{(j2+1)^2+1}=\frac{j2}{-2+2j}=\frac{1}{j+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad -\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

دامنه همه گزینه‌ها که 4.5 است برای زاویه همحتماً در ربع چهارم می‌شود و با توجه به $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$ باید زاویه‌ای کمی کوچک‌تر از $30°$ باشد، پس:

$$Y=\quad X+\quad H\approx -23.4°-27°\approx -50°$$

که گزینه 1 درست خواهد بود.

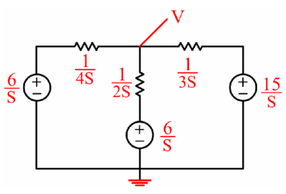
25.گزینه 4 درست است.

مقادیر اولیه ولتاژ خازن‌ها را به صورت منابع ولتاژ سری با آن‌ها در نظر می‌گیریم، سپس در گرهٔ V یک KCL می‌زنیم:

$$\left(V-\frac{6}{S}\right)4S+\left(V-\frac{6}{S}\right)2S+\left(V-\frac{15}{S}\right)3S=0$$

$$9SV=81\quad\Rightarrow\quad V(S)=\frac{81}{9S}=\frac{9}{S}\quad\Rightarrow\quad v(t)=9u(t)$$

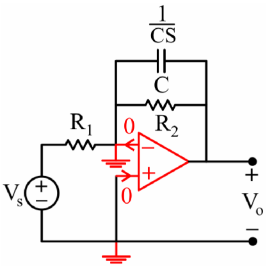
$$v(0^+)=9V$$



در این مدار بعد از بسته شدن کلید، حلقه خازنی ایجاد شد که در حوزه زمانی کلی دردسر آفرین است ولی شما که از حوزه لاپلاس مسئله را حل کردیداصلاً متوجه آن هم نشدید. خلاصه آنکه: «تحلیل در حوزه لاپلاس بهترین راه‌حل برای مدارات شامل حلقه خازنی و کات‌ست سلفی است.»

26.گزینه 1 درست است.

با نوشتن KCL در سر منفی ورودی آپامپ، تابع تبدیل را به دست می‌آوریم:



$$\frac{-V_S}{R_1}=V_o\left(\frac{1}{R_2}+CS\right)\ \Rightarrow\ \frac{V_o}{V_S}=\frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1+R_2CS}$$

که مشخص است فیلتری پایین‌گذر با بهره $\frac{R_2}{R_1}$ است، پس $\frac{R_2}{R_1}=5$ که در گزینه‌های 1 و 3 صدق می‌کند.

البته چون ذکر شده فیلتر پایین‌گذر است، می‌توانستید به ازای $S \to 0$ ، بهره مدار را به دست آورده و برابر 5 قرار دهید، آنگاه داشتیم:

$$\left|\frac{V_o}{V_s}\right|=\left|\frac{-R_2}{R_1}\right|=5$$

و فرکانس قطع هم در مدار مرتبه اول RC برابر $\frac{1}{RC}$ است، پس داریم:

$$\omega_C=\frac{1}{R_2C}=\frac{1}{R_2\frac{1}{\pi}\times10^{-6}}=2\pi\times1000\ \Rightarrow\ R_2=500\,\Omega$$

27.گزینه 2 درست است.

می‌دانیم که e^{-TS} اگر در حوزهٔ لاپلاس در تابعی ضرب شود، تابع را به اندازه T در حوزهٔ زمان شیفت می‌دهد.

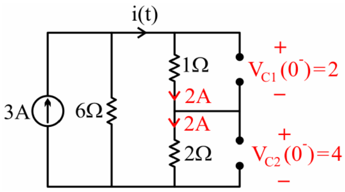
و اگر تابعی در حوزه لاپلاس در $\frac{1}{1-e^{-ts}}$ ضرب شود، به منزلهٔ متناوب شدن آن تابع در حوزهٔ زمان با دوره تناوب Tاست. پس صورت و مخرج $F(S)$ را در مزدوج مخرج ضرب کنیم تا به این صورت درآید:

$$F(S)=\frac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}}\times\frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-2s}}=\frac{2\left(e^{-s}-e^{-3s}\right)}{1-e^{-4s}}$$

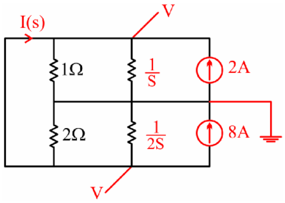
پس عکس لاپلاس آن، $f(t)=2\big(\delta(t-1)-\delta(t-3)\big)$ با دوره تناوب 4 است و $f(2.5)=0$ است.

28.گزینه 4 درست است.

اول باید در $t=0^-$ که مدار به حالت پایدار رسیده است، مقادیر اولیه را بیابیم:



بعد از بسته شدن کلید بهتر است که مدار را در حوزه لاپلاس در نظر بگیریم:



$$\text{KCL}: V+VS-2+\frac{V}{2}+V2S+8=0 \quad\Rightarrow\quad V(S)=\frac{-2}{\left(S+\frac{1}{2}\right)}$$

پس برای $I(S)$ داریم:

$$I(S)=V+VS-2=\frac{-2}{S+\frac{1}{2}}(S+1)-2=-4-\frac{1}{S+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad i(t)=-4\delta(t)-e^{-\frac{1}{2}t}$$

29.گزینه 3 درست است.

این از آن سؤال‌های ورودی ضربه نیست که با به دست آوردن مقادیر اولیه در $t=0^+$ پاسخ پیدا شود؛ پس همان بهتر که از لاپلاس جریان دیود را به دست بیاوریم، بعد عکس لاپلاس بگیریم تا ببینیم کی صفر می‌شود که دیود خاموش شود.

فعلاً لاپلاس گرفتن را من شروع کنم تا ببینیم چطور می‌شود!

$$i_D(s)=\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}+s\quad 1}=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

اوه اوه!! حالا چطور عکس لاپلاس بگیریم؟

صبرکن الان درستش می‌کنیم:

$$i_D(s)=\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \;\Rightarrow\; i_D(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=0$$

$$\Rightarrow\; \tan\frac{\sqrt{3}}{2}t=-\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{3}}{2}t=\frac{2\pi}{3} \;\Rightarrow\; t=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

30. گزینه 3 درست است.

به ازای $S=0$ که خازن‌های مدار باز می‌شوند، داریم:

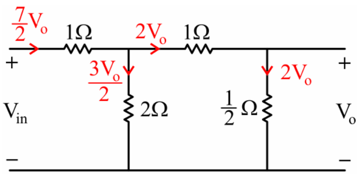
$$\frac{V_o}{V_{in}}(S=0)=\frac{1}{C}=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; C=3$$

پس جواب درست را بین گزینه 1 یا 3 باید انتخاب کنیم که در آن گزینه‌ها A متفاوت است، ولی از $S\to\infty$ هم نمی‌توانیم استفاده کنیم؛ چون R_1 و R_2 را نداریم.

صورت تابع تبدیل داده شده است؛ پس صفرهای خروجی V_o مشخص است که معادل اتصال کوتاه شدن شاخه‌های RC سری هستند:

$$S=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=-1,-\frac{1}{2} \quad ; \quad R_i+\frac{1}{C_iS_i}=0 \;\Rightarrow\; S_i=-\frac{1}{R_iC_i} \;\Rightarrow\; R_iC_i=1,2$$

حالامثلاً برای سادگی فرض می‌کنیم:



$$R_1=2 \quad , \quad R_2=1 \quad , \quad C_i=1$$

و در $S\to\infty$ داریم:

$$KVL: V_{in}=\frac{7}{2}V_o+3V_o=\frac{13}{2}V_o \;\Rightarrow\; \frac{V_o}{V_{in}}(S\to\infty)=\frac{2}{A}=\frac{2}{13} \;\Rightarrow\; A=13$$

31. گزینه 4 درست است.

هر سه مجهول مربوط به صورت تابع تبدیل هستند؛ بنابراین باید به دنبال صفرهای V_2 بگردیم.

که آن هم ناشی از فرکانس‌های تشدید LC سری و موازی می‌شود.

$$S = \pm j1 \quad , \quad S = \pm j\frac{1}{\sqrt{L\frac{1}{2}}}$$

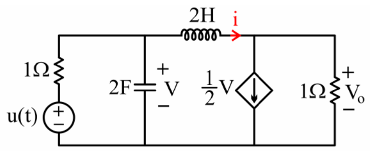
جالب شد! پس صورت تابع تبدیل را باید با عبارت زیر متحد قرار دهیم:

$$\left(S^2+1\right)\left(S^2+\frac{1}{L\frac{1}{2}}\right)$$

و ضرایب S^{2n+1}، صفر خواهند بود؛ بنابراین $a=b=0$ است که تنها در گزینه 4 صدق می‌کند.

خودآزمایی فصل دوم

1. در مدار شکل زیر $i(t)$ برای $t > 0$ کدام است؟



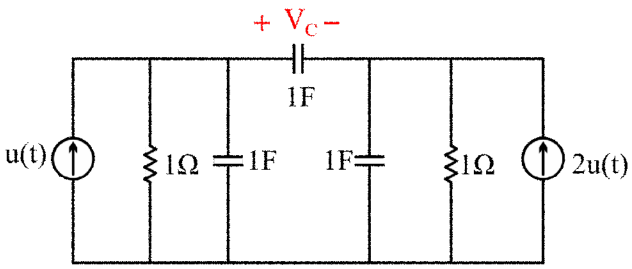
1) $-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$

2) $-\frac{3}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)$

3) $-\frac{1}{2}e^{-t}\sin t$

4) $-\frac{1}{2}e^{-t}\cos t$

2. پاسخ حالت صفر V_C کدام است؟



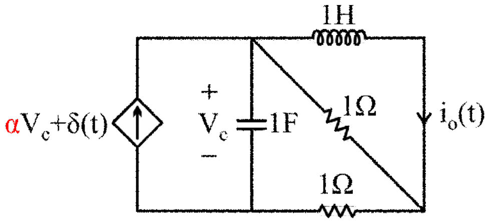
1) $e^{-t}u(t)$

2) $\left(e^{-\frac{t}{3}} - 1\right)u(t)$

3) $\left(1 - e^{-t}\right)u(t)$

4) $\left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}}\right)u(t)$

3. اگر مدار در استراحت اولیه باشد مقدار α را طوری تعیین کنید که جریان سلف به شکل خطی تغییر کند؟



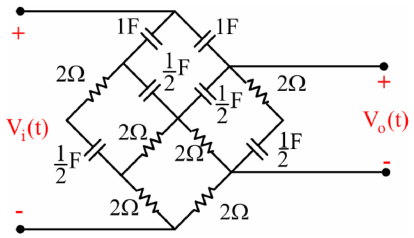
1) $\alpha = 1$

2) $\alpha = -1$

3) $\alpha = \frac{2}{3}$

4) $\alpha = \frac{5}{6}$

4. تابع تبدیل مدار داده شده $\left(\frac{V_o(s)}{V_i(s)}\right)$ برابر است با:



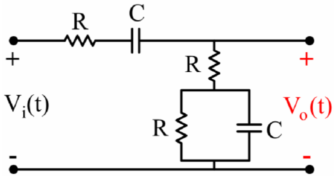
1) $\frac{s+4}{2s+\frac{3}{4}}$

2) $\frac{s(s+1)}{s+3}$

3) $\frac{s+1}{3s+2}$

4) $\frac{s(s+1)}{4s+3}$

5. به ازای ورودی پلهٔ واحد، کدام یک از گزینه‌های داده شده مقدار خروجی را در حوزهٔ لاپلاس نشان می‌دهد؟



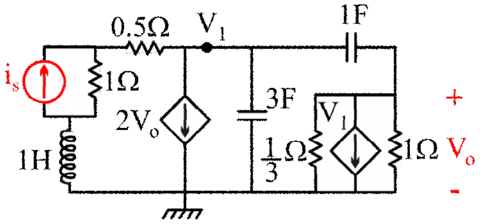
1) $\frac{s+\frac{2}{RC}}{2s^2+\frac{4}{RC}s+\frac{1}{2R^2C^2}}$

2) $\frac{s\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{RC}\right)}{s^2+\frac{2}{RC}s+\frac{1}{2R^2C^2}}$

3) $\frac{s+\frac{1}{RC}}{2s^2+\frac{4}{RC}s+\frac{1}{2R^2C^2}}$

4) $\frac{\frac{s}{2}+\frac{1}{RC}}{s^2+\frac{2}{RC}s+\frac{1}{2R^2C^2}}$

6. مدار شکل زیر یک مدار پایدار نمایی است، تابع شبکه $H=\frac{V_o}{I_s}$ را در نظر بگیرید، به ازای کدام ورودی $V_o(\infty)=0$ می‌گردد؟



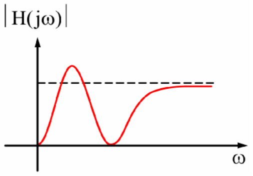
1) $e^{3t}u(t)$

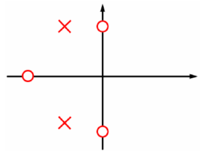
2) $e^{2t}u(t)$

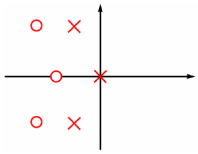
3) $e^{t}u(t)$

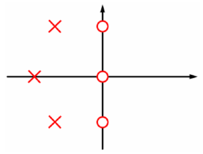
4) $e^{\frac{1}{2}t}u(t)$

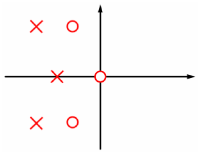
7. اندازه تابع تبدیل مداری نشان داده شده است، در این‌صورت کدام‌یک از گزینه‌ها می‌تواند نشان‌دهنده دیاگرام صفر و قطب آن باشد:



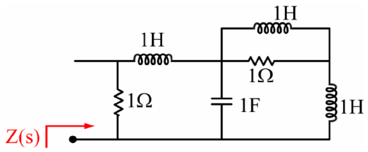
(1


(2


(3


(4


8. در مدار داده شده امپدانس ورودی در حوزه‌ی لاپلاس کدام است؟



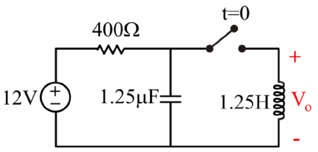
(1 $\dfrac{s^4+2s^3+3s^2+2s}{s^4+4s^3+s^2+2s+2}$

(2 $\dfrac{s^4+2s^3+2s^2+3s}{s^4+3s^3+4s^2+4s+1}$

(3 $\dfrac{s^4+3s^3+2s^2+s}{s^4+4s^3+3s^2+4s+1}$

(4 $\dfrac{s^4+4s^3+3s^2+2s}{s^4+3s^3+2s^2+s+2}$

9. برای مدار داده شده کلید در $t=0$ بسته می‌شود. براین اساس $V_o(t)$ برای $t>0$ کدام است؟



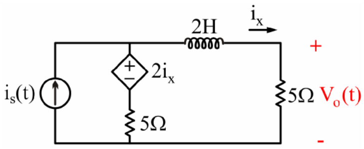
(1 $-4e^{-400t}+16e^{-1600t}$

(2 $4e^{-400t}+12e^{-1600t}$

(3 $-4e^{-1600t}+16e^{-400t}$

(4 $4e^{-1600t}+12e^{-400t}$

10. بافرض اینکه در زمان‌های $t<0$ هیچ‌گونه انرژی در مدار زیر ذخیره نشده باشد به ازای $i_s=10u(t)$ ، $V_o(t)$ در حوزه‌ی لاپلاس کدام است؟



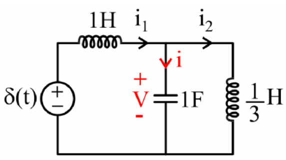
(1 $\dfrac{125}{2S(S+2)}$

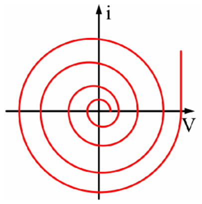
(2 $\dfrac{62.5}{S(S+2)}$

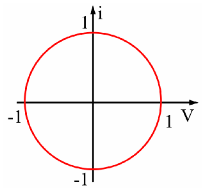
(3 $\dfrac{125}{S(S+4)}$

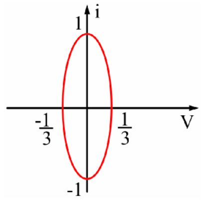
(4 $\dfrac{31.25}{S(S+1)}$

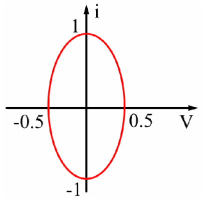
11. شرایط اولیه، همگی صفر می‌باشند. مسیر حالت در صفحه $i-V$ کدام است؟



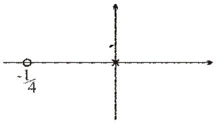
(1


(2


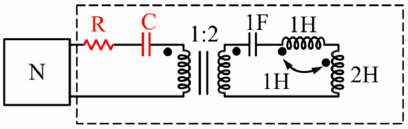
(3


(4


12. نمودار صفر و قطب شبکه N به‌صورت



می‌باشد. بهره‌ی dc تابع شبکه $H(s)=\frac{V(s)}{I(s)}$ (مربوط به شبکه N) برابر 4 می‌باشد. اگر بدانیم شبکه N در حالت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega=1$ کار می‌کند. مقادیر R و C را چنان تعیین کنید که ضریب توان N_1 برابر یک شده و از طرفی بیشترین توان از N به N_1 برسد؟



N_1

(1 $\begin{cases} R = 4\Omega \\ C = 1F \end{cases}$

(2 $\begin{cases} R = \sqrt{17}\,\Omega \\ C = 1F \end{cases}$

(3 $\begin{cases} R = \sqrt{17}\,\Omega \\ C = \frac{1}{4}F \end{cases}$

(4 $\begin{cases} R = 4\Omega \\ C = 4F \end{cases}$