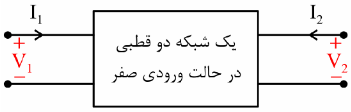
فصل 4 دوقطبی‌ها

مقدمه

در دنیای مدارهای الکتریکی به هر دو سر (دو سیم) که به یک شبکه متصل شده‌اند، یک قطب می‌گوییم. به هر قطب یک ولتاژ و یک جریان می‌توان نسبت داد؛ بنابراین عناصر معروف یک‌قطبی‌ها مثل مقاومت و سلف و خازن و منابع مستقل، فقط یک ولتاژ (V) دارند و یک جریان (I)؛ درنتیجه برای معرفی آن‌ها فقط یک عدد کافی است؛مثلاً امپدانس، گویای نسبت $\frac{V}{I}$ است و یا ادمیتانس گویای نسبت $\frac{I}{V}$ بوده و یا مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان معرف دقیق یک «تک‌قطبی» است. اما در کلاس امروز به بررسی شبکه‌هایی می‌پردازیم که هر یک دو قطب دارند؛ پس دو ولتاژ (V_1, V_2) داریم و دو جریان (I_1, I_2). بنابراین برای معرفی دوقطبی‌ها نیاز به چهار عدد داریم و برای سه‌قطبی‌ها به 9 کمیت محتاجیم و ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج، ژیراتور، خطوط انتقال و... همگی نمونه‌هایی از یک شبکه دوقطبی هستند.



شکل (4ـ1) یک دوقطبی با ولتاژ و جریان استاندارد

توصیف دوقطبی‌ها، یکی از مهم‌ترین و متداول‌ترین روش‌های تحلیل مدارها و شبکه‌هاست و موضوع و سرفصل بسیار خوش سؤالی هم هست!

٤ـ١ پارامترهای امپدانس مدار باز Z

رابطهٔ اساسی به این صورت است:

$$V = Z \times I \qquad (۱ـ۴)$$

در اینجا روابط عین قبل است، منتها به صورت ماتریسی. فرم ماتریسی رابطهٔ (1ـ4) برای یک دوقطبی این‌گونه است:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad (۲ـ۴)$$

و با بسط آن:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \qquad (۳ـ۴)$$

و درنتیجه تعریف تک‌تک پارامترها این‌گونه می‌شود:

امپدانس ورودی سر اول، وقتی سر دوم مدار باز است:

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{\underset{\text{سر دوم مدار باز است.}}{I_2 = 0 \downarrow}} \qquad (۴ـ۴)$$

امپدانس ورودی سر دوم، وقتی سر اول مدار باز است:

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{\underset{\text{سر اول مدار باز است.}}{I_1 = 0 \downarrow}} \qquad (۵ـ۴)$$

امپدانس انتقالی معکوس:

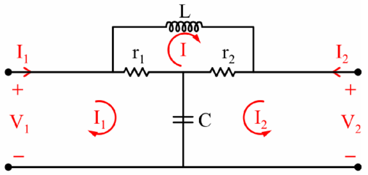
$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1 = 0} \qquad (۶ـ۴)$$

امپدانس انتقالی مستقیم:

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2 = 0} \qquad (۷ـ۴)$$

یک نکته ساده‌کننده و جالب اگر در سرهای 1 و 2 منابع V_{s_1} و V_{s_2} بگذاریم و روابط ذهنی ماتریسی حلقه $(V = Z \cdot I)$ را به دست آوریم، در **مدارهای دوحلقه‌ای**، پارامترهای امپدانس مدار باز دوقطبی برابر با همان ماتریس امپدانس حلقه خواهد بود.[1] و اگر مدار دارای بیش از دو حلقه بود، باید جریان متغیر آن حلقه را به‌گونه‌ای حذف کرد و برحسب جریان‌های I_1 و I_2 نوشت.

1ـ در مدار شکل زیر پارامترهای Z را بیابید.



شکل (2ـ4) مدار تمرین 1

1ـ و چقدر این نکته در مدارهای دو حلقه‌ای مهم و کارآمد است. چراکه ماتریس امپدانس حلقه (که در فصل هشتم مطرح شد)، به روش ذهنی بسیار راحت به دست می‌آید و با این قضیه‌ای که گفته شد با داشتن آن، انگار ماتریس امپدانس دوقطبی را داریم و این خاصیت جذاب و راه‌گشا مخصوص مدارهای دوحلقه‌ای است.

احساس می‌کنم چون این از آن نوع تمریناتی است که استاد، درس آن را می‌گویند و بلافاصله از همان مبحث تمرین را مطرح می‌کنند؛ پس حل آن کار ساده‌ای است! مدار 3 مش دارد، جریان مش بالایی اضافی است و باید I را برحسب I_1 و I_2 بنویسیم:

KVL در مش بالایی : $LSI+r_2\left(I_2+I\right)+r_1\left(I-I_1\right)=0$

$$I=\frac{r_1 I_1-r_2 I_2}{Ls+r_1+r_2}$$

و با دو KVL در حلقه‌های چپی و راستی داریم:

$$V_1=r_1\left(I_1-I\right)+\frac{1}{CS}\left(I_1+I_2\right)$$

$$V_2=r_2\left(I_2+I\right)+\frac{1}{CS}\left(I_1+I_2\right)$$

و با توجه به I به‌دست‌آمده داریم:

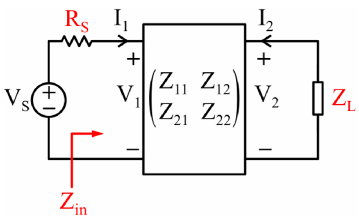
$$V_1=\overbrace{\boxed{\left(r_1+\frac{1}{CS}-\frac{r_1^2}{LS+r_1+r_2}\right)}}^{Z_{11}}I_1+\overbrace{\boxed{\left(\frac{1}{CS}+\frac{r_1 r_2}{LS+r_1+r_2}\right)}}^{Z_{12}}I_2$$

$$V_2=\underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{CS}+\frac{r_1 r_2}{LS+r_1+r_2}\right)}}_{Z_{21}}I_1+\underbrace{\boxed{\left(r_2+\frac{1}{CS}-\frac{r_2^2}{LS+r_1+r_2}\right)}}_{Z_{22}}I_2$$

به نظر من، حل دوستم خیلی جامع بود، ولی اگر فقط‌مثلاً Z_{11} را می‌خواستیم، نیاز به این همه داستان نبود! ابتدا سر دوم را مدار باز می‌کردیم و سپس می‌گفتیم:

$$Z_{11}=Z_{in_1}=\left[\left(r_2+LS\right)\quad r_1\right]+\frac{1}{CS}$$

2ـ در مدار شکل زیر مقدار Z_{in} را برحسب R_s و Z_L و پارامترهای امپدانس Z به دست آورید.



شکل (4ـ3) مدار تمرین 2

درواقع ما در جستجوی $\frac{V_1}{I_1}$ هستیم. به حرکات من دقت کنید:

$KVL \quad : \quad V_2 = -Z_L I_2$ در حلقهٔ راستی

ازطرفی:

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = -Z_L I_2$$

پس:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

و حالا:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$V_1 = \left(Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \right) I_1$$

و درنهایت:

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

آفرین! ضمناً بد نیست این فرمول را حفظ کنید؛ البته اگر Z_{in}، از سمت چپ R_s باشد طبیعتاً برابر می‌شود با:

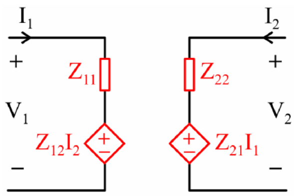
$$Z_{in} = R_s + Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \qquad (۸\_۴)$$

و همین‌طور برای Z_{out}، مشابه رابطهٔ Z_{in} خواهیم داشت:

$$Z_{out} = Z_{22} - \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{11} + R_s} \qquad (۹\_۴)$$

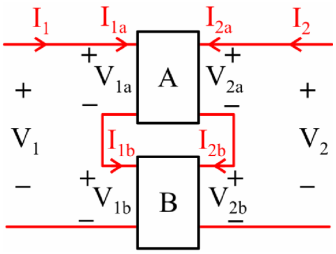
حالا بحث پارامترهای امپدانس را ادامه می‌دهیم.

شکل (4_4) یک **مدار معادل** برای شبکهٔ دوقطبی برحسب پارامترهای Z است. برای تأیید این مطلب در حلقه‌های ورودی و خروجی KVL بزنید.



شکل (4_4) مدار معادل دوقطبی برحسب پارامترهای Z

به این نوع **به هم بستن دوقطبی‌ها** (شکل (4ـ5)) سری می‌گویند؛ به دقت به این شکل نگاه کنید:



شکل (4ـ5) به هم بستن سری دوقطبی‌ها

در این حالت داریم:

$$[I]=[I_a]=[I_b] \qquad (۴ـ۱۰)$$

$$[V]=[V_a]+[V_b] \qquad (۴ـ۱۱)$$

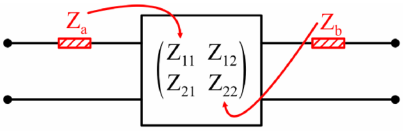
و درنتیجه:

$$[Z_{\text{کل}}]=[Z_a]+[Z_b] \qquad (۴ـ۱۲)$$

یعنی تک‌تک درایه‌های ماتریس‌های امپدانس، نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند.

یک نکتهٔ جالب‌انگیزناک[1]:

می‌توان امپدانس‌های Z_a و Z_b موجود در بازوهای سری (1) و (2) را حذف کرد و مقادیر آن‌ها را به عناصر قطر اصلی ماتریس Z اضافه کرد؛ به این ترتیب ماتریس امپدانس معادل دوقطبی جدید به صورت $\begin{pmatrix} Z_{11}+Z_a & Z_b \\ Z_{21} & Z_{22}+Z_b \end{pmatrix}$ درمی‌آید.



شکل (4ـ6) شبکهٔ دوقطبی با امپدانس‌های سری در بازوها

۴ـ۲ پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه Y

خدا پدر این ماجرای «دوآلیتی» را بیامرزد؛ به کمک آن زندگی خیلی شیرین‌تر می‌شود! حالا با توجه به دوگانی بین Z و Y، خودتان قدم به قدم جلو بروید و تمام قصه‌های ماتریس امپدانس Z را برای ماتریس ادمیتانس Y تکرار کنید.

1ـ اگر از این عبارت خوشتان نیامد، خودتان یک عبارت سنگین و باکلاس جایگزین آن کنید !


رابطهٔ اساسی به این صورت است:

$$I = Y \times V \qquad (۱۳\_۴)$$

و در فرم ماتریسی:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \qquad (۱۴\_۴)$$

و تعریف تک‌تک پارامترها هم مثل نوشیدن 

این‌گونه می‌شود:

ادمیتانس ورودی سر اول وقتی سر دوم اتصال کوتاه است:

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2 = 0} \qquad (۱۵\_۴)$$

سر دوم اتصال کوتاه است.

ادمیتانس ورودی سر دوم وقتی سر اول اتصال کوتاه است:

$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1 = 0} \qquad (۱۶\_۴)$$

سر اول اتصال کوتاه است.

ادمیتانس انتقالی معکوس:

$$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \qquad (۱۷\_۴)$$

ادمیتانس انتقالی مستقیم:

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad (۱۸\_۴)$$

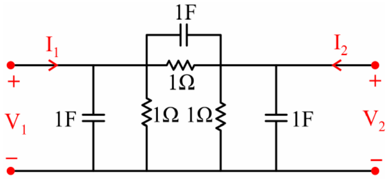
یک نکتهٔ ساده کننده و جالب[1] آن که اگر در سرهای (1) و (2)، منبع I_{s_1} و I_{s_2} بگذاریم و روابط ذهنی ماتریس گره $I = Y \cdot V$ را به دست آوریم، در **مدارهای دوگره‌ای**[2]، پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه دوقطبی برابر همان ماتریس ادمیتانس گره می‌شود.[3]

1ـ این نکته نیز، فوق‌العاده در مدارهای دوگره‌ای، کارآمد است.

2ـ  در مدارهای دوگره‌ای، در قدم اول فوراً به سراغ ماتریس ادمیتانس گره می‌رویم که به روش ذهنی خیلی سریع با چشم به دست می‌آید؛ یعنی اگر مدار دوگره‌ای بود و حتی ماتریس امپدانس Z را می‌خواستیم، باز هم عاقلانه‌ترین و کوتاه‌ترین راه آن است که اول ماتریس Y را پیدا کنیم و بعد...

3ـ روابط‌شدیداً دوگان پارامترهای Z است. من سعی می‌کنم جمله‌بندی‌ها را نیز عوض نکنم.

3ـ ماتریس ادمیتانس دوقطبی شکل زیر کدام است؟

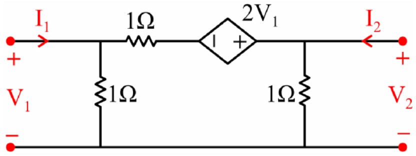


شکل (4ـ7) مدار تمرین 3

مدار دوحلقه‌ای است، با کمک نکتهٔ قبل و عینک لاپلاس، جواب معلوم است دیگر:

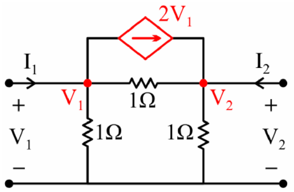
$$Y = \begin{pmatrix} 2s+2 & -s-1 \\ -s-1 & 2s+2 \end{pmatrix}$$

4ـ ماتریس ادمیتانس Y دوقطبی شکل زیر را بیابید.



شکل (4ـ8) مدار تمرین 4

ابتدا منبع وابسته را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم (معادل نورتن) تا مدارمان دوگره‌ای شود:



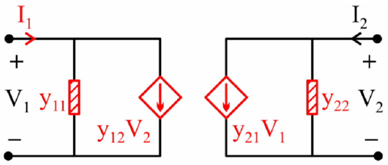
شکل (4ـ9) مدار سادهشدهٔ تمرین 4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2V_1 \\ 2V_1 \end{pmatrix}$$

و جواب به این صورت می‌شود:

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

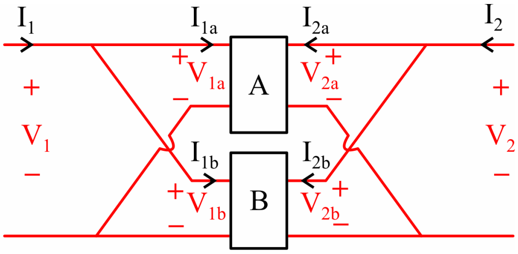
برای ماتریس Y **مدار معادل** دوقطبی این‌گونه می‌شود:



شکل (4ـ10) مدار معادل دوقطبی برحسب پارامترهای Y

اینجا هم اثباتی دارد ساده‌تر از ساده! دو تا KCL در گره‌های چپ و راست حلاّل ماجراست!

به این نوع **به هم بستن دوقطبی‌ها** (شکل (4ـ8)) موازی می‌گویند:



شکل (4ـ11) به هم بستن موازی دوقطبی‌ها

در این حالت داریم:

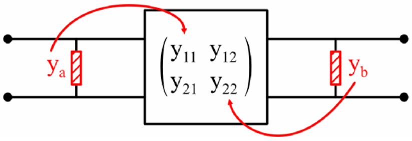
$$[V]=[V_a]=[V_b] \qquad (۱۹\text{ـ}۴)$$

$$[I]=[I_a]+[I_b] \qquad (۲۰\text{ـ}۴)$$

و درنتیجه:

$$[Y_{\text{کل}}]=[Y_a]+[Y_b] \qquad (۲۱\text{ـ}۴)$$

یک نکته مفید آن که در شکل (4ـ12) می‌توان ادمیتانس‌های y_a و y_b موجود در بازوهای موازی (1) و (2) را حذف کرد و مقادیر آن‌ها را به عناصر قطر اصلی ماتریس Y اضافه کرد؛ یعنی ماتریس ادمیتانس دوقطبی کُنده جدید برابر $\begin{bmatrix} y_{11}+y_a & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}+y_b \end{bmatrix}$ می‌شود.



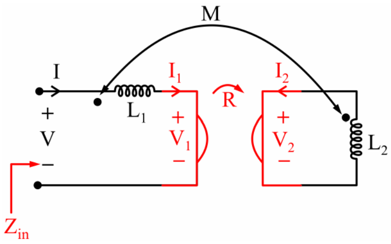
شکل (4ـ12) شبکهٔ دوقطبی با ادمیتانس‌های موازی در بازوها

به عنوان جملهٔ آخر عرض می‌کنم که ماتریس‌های Y و Z معکوس یکدیگرند؛ یعنی:

$$Y = Z^{-1} \tag{۲۲-۴}$$

$$Y = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} \tag{۲۳-۴}$$

5ـ در مدار شکل زیر امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ را بیابید.



شکل (4ـ13) مدار تمرین 5

آن شکل وسطی ژیراتور است. درست می‌گویم؟

بله درست می‌فرمایید، روابط آن هم به شرح زیر است:

$$\begin{cases} V_1 = R \times I_2 \\ V_2 = -R \times I_1 \end{cases} \tag{۲۴-۴}$$

ژیراتور هم یک‌جور مبدل است، شبیه ترانسفورماتور؛ با این تفاوت که در ترانسفورماتور، ولتاژ به ولتاژ و جریان به جریان تبدیل می‌شود ولی در ژیراتور جریان به ولتاژ و یا ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند. البته یک فرق اساسی دیگر هم دارند؛ ترانسفورماتور یک عنصر دوطرفه (متقابل) است اما ژیراتور دوطرفه یا متقابل نیست. در فصل آخر ارزش این حرف را به طور کامل درک خواهید کرد.

حال خود شما مسئله را حل کنید:

ابتدا در حلقهٔ راستی KVL می‌زنیم:

$$V_2 = -SL_2 I_2 + SMI_1$$
$$SL_2 I_2 = SMI_1 + RI_1$$

و سپس با KVL زدن در حلقهٔ ورودی:

$$V = SL_1 I_1 - SMI_2 + RI_2 = SL_1 I + (R - MS)\, I_2$$
$$V = SL_1 I + (R - SM)\frac{1}{SL_2}(SM + R)\, I$$

و درنهایت زندگی شیرین می‌شود:

$$Z_{in}=\frac{V}{I}=SL_1+\frac{R^2-(SM)^2}{SL_2}$$

۳ـ٤ پارامترهای هایبرید H

ترجمهٔ خودمانی هایبرید یعنی قاطی؛ در اینجا یعنی در سر اول مانند Z و در سر دوم مانند Y است.

این امر به راحتی از روابط و شکل‌ها معلوم است؛ یعنی در سر اول V_1 برحسب I_1 نوشته می‌شود و در سر دوم I_2 برحسب V_2 نوشته می‌شود.

به این روابط نگاه کنید:

$$\begin{array}{c}\text{سر اول مثل Z}\\ \uparrow\\ \begin{pmatrix}V_1\\ I_2\end{pmatrix}\\ \downarrow\\ \text{سر دوم مثل Y}\end{array}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\ V_2\end{pmatrix} \qquad (۲۵\text{ـ}۴)$$

و پس از بسط روابط:

$$\begin{cases}V_1=h_{11}I_1+h_{12}V_2\\ I_2=h_{21}I_1+h_{22}V_2\end{cases} \qquad (۲۶\text{ـ}۴)$$

و درنتیجه برای تک‌تک درایه‌ها چنین داریم:

امپدانس ورودی سر اول وقتی سر دوم اتصال کوتاه است:

$$h_{11}(\Omega)=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2:0} \qquad (۲۷\text{ـ}۴)$$

ادمیتانس ورودی سر دوم وقتی سر اول مدار باز است:

$$h_{22}(\ )=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1:0} \qquad (۲۸\text{ـ}۴)$$

بهره ولتاژ معکوس مدار باز:

$$h_{12}=\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1:0}=H_V \qquad (۲۹\text{ـ}۴)$$

بهره جریان مستقیم اتصال کوتاه:

$$h_{21}=\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2:0}=H_I \qquad (۳۰\text{ـ}۴)$$

از مقایسهٔ روابط (4ـ5) و (4ـ27) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مشخص است دیگر:

$$h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} \tag{۳۱_۴}$$

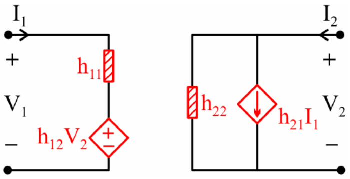
و به همین ترتیب از مقایسهٔ روابط (15_4) و (26_4) معلوم می‌شود که:

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}} \tag{۳۲_۴}$$

راستی یک سؤال، آیا مشابه روابط بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که $y_{11} = \frac{1}{Z_{11}}$ و یا $y_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$ یا این حرف‌ها غلط است؟

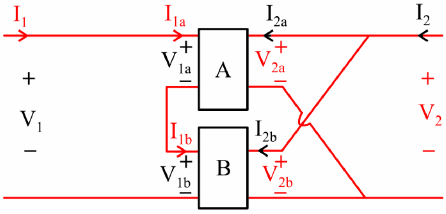
به دو دلیل این حرف‌ها نه تنها غلط بلکه «فحش‌های علمی»اند؛ دلیل اول آنکه Z_{11} در حالی به دست می‌آید که سر دوم مدار باز است، درصورتی‌که برای به دست آوردن y_{11}، سر دوم اتصال کوتاه است و دلیل دوم اینکه مگر نگفتیم $Y = Z^{-1}$، پس Y_{22} برابر با $\frac{Z_{11}}{\det Z}$ می‌شود، مگر نه؟

مدار معادل آن هم نیازی به توضیح ندارد، سر ورودی مثل Z و سر خروجی مثل Y است؛ یعنی:



شکل (14_4) **مدار معادل دوقطبی برحسب پارامترهای H**

به این نوع **به هم بستن دوقطبی‌ها** هم موازی ـ سری می‌گوییم، می‌بینید چقدر جالب است؟ باز سر چپی مثل Z و سر راستی مثل Y است:



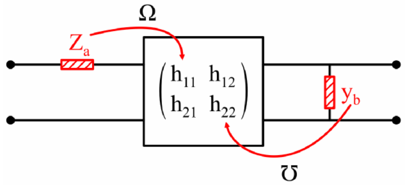
شکل (15_4) **به هم بستن موازی ـ سری دوقطبی‌ها**

و در این حالت:

(۴ـ۳۳)

$$[H_{کل}]=\left[H_a\right]+\left[H_b\right]$$

و بالاخره همان یک نکتهٔ ساده کننده و جالب آن که مشابه حالت قبل می‌توان مقادیر Z_a و y_b را حذف کرد و مقادیر آن‌ها را (به ترتیب با واحدهای Ω و) به عناصر قطر اصلی ماتریس H اضافه کرد. از لحاظ دیمانسیون هم فراموش نمی‌کنیم که h_{11} از جنس Ω و h_{22} از جنس است.



شکل (4ـ16) شبکهٔ دوقطبی با امپدانس سری و ادمیتانس موازی

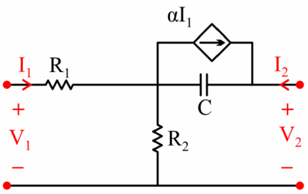
6ـ در مدار شکل زیر پارامتر h_{21} از کدام گزینه به دست می‌آید؟

1) $-\dfrac{\alpha+j\omega R_2C}{1+j\omega R_2C}$

2) $\dfrac{\alpha+j\omega R_2}{1+j\omega R_2}$

3) $\dfrac{1+j\omega R_2C}{1+j\omega}$

4) هیچ‌کدام

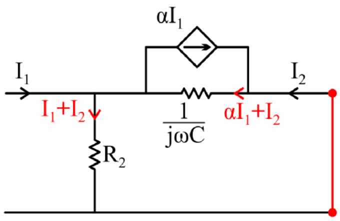


شکل (4ـ17) مدار تمرین 6

طبق تعریف داریم:

$$h_{21}=\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$$

حالا با اتصال کوتاه کردن سمت راست $(V_2=0)$ و عینک فازوری، قیافهٔ مدار به شکل زیر درمی‌آید:



شکل (4ـ18) ساده‌شدهٔ مدار تمرین 6

و حالا با KVL چنین داریم:

$$\frac{1}{j\omega C}\left(\alpha I_1+I_2\right)+R_2\left(I_1+I_2\right)=0$$

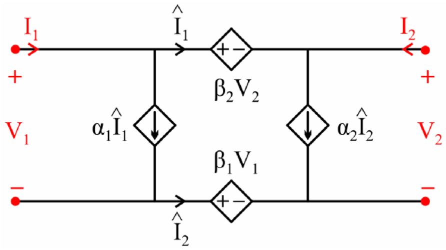
$$\left(\frac{1}{j\omega C}+R_2\right)I_2=-\left(\frac{\alpha}{j\omega C}+R_2\right)I_1$$

$$\frac{I_2}{I_1}=-\frac{\alpha+j\omega R_2 C}{1+j\omega R_2 C}$$

ضمناً اگر در این مسئله گزینهٔ هیچ‌کدام[1] نبود، می‌توانستیم در حالتی خاص،مثلاً $\omega = 0$، گزینه‌ها را چک کنیم و با رد گزینه به پاسخ برسیم.[2]

پس گزینه 1 درست است.

7ـ پارامترهای h دوقطبی شکل زیر را تعیین کنید.



شکل (4ـ19) مدار تمرین 7

(1 $\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1-\beta_1}{1+\beta_2} \\ -\dfrac{1+\alpha_1}{1+\alpha_2} & 0 \end{bmatrix}$

(2 $\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1+\beta_2}{1+\beta_1} \\ -\dfrac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1} & 0 \end{bmatrix}$

(3 $\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1-\alpha_1}{1+\alpha_2} \\ -\dfrac{1+\beta_1}{1+\beta_2} & 0 \end{bmatrix}$

(4 $\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1-\alpha_2}{1+\alpha_1} \\ -\dfrac{1+\beta_2}{1+\beta_1} & 0 \end{bmatrix}$

فکر کنم این سؤال، یکی از تست‌های کنکور ارشد سراسری باشد؛ درسته؟

بله، همین‌طور است. اکثر مسایلی که تاکنون حل کرده‌ایم نیز از همین دست بوده‌اند.

1ـ گاهی قیافهٔ عبارت «هیچ‌کدام»، اعصاب تست‌زن را خرد می‌کند!

2 ـلطفاً بین گزینه‌های 1، 2 و 3 با این روش گزینه درست را پیدا کنید؛ یعنی تست را به بن‌بست ببرید، مثلاً مدار را با $\omega = 0$ رسم کنید؛ می‌بینید که خازن، مدار باز می‌شود؛ پس $\frac{I_2}{I_1}=-\alpha$ به دست می‌آید و می‌گوییم گزینه‌ای درست است که به ازای $\omega = 0$ بدهد $-\alpha$ و… (اکیداً پیشنهاد می‌کنم از این‌گونه بازی‌ها هنگام حل تست کمک بگیرید البته اگر با من موافقید. باید از هم‌اکنون دست‌به‌کار «بازی» شوید!)

در حلقهٔ بیرونی یک KVL می‌زنیم و به راحتی به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$KVL:\ V_1+\beta_1 V_1=V_2+\beta_2 V_2$$

$$V_1=\underbrace{0}_{h_{11}}\ I_1+\underbrace{\left(\frac{1+\beta_2}{1+\beta_1}\right)}_{h_{12}}V_2$$

از مقایسهٔ سطر اول ماتریس H و رابطهٔ بالا درمی‌یابیم که فقط گزینهٔ 2 می‌تواند درست باشد.

۴ـ۴ پارامترهای هایبرید G

عیناً دوگان پارامترهای H است، به طوری که:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad (۳۴ـ۴)$$

یعنی در اینجا سر اول مثل Y و سر دوم مثل Z است؛ پس پارامتر H و G وارون یکدیگرند:

$$G=H^{-1} \qquad (۳۵ـ۴)$$

و به نظرم توضیح بیشتر در این باب، اتلاف وقت است[1]؛ یعنی برای یادگیری ماتریس هایبرید G، قسمت ماتریس هایبرید H را از اول مرور کنید، فقط کتاب را $180°$ بچرخانید!!!

8ـ اگر برای دوقطبی شکل زیر روابط ماتریس G را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} I_1=g_{11}V_1+g_{12}I_2+I_s \\ V_2=g_{21}V_1+g_{22}I_2+V_s \end{cases}$$

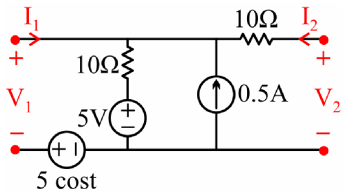
مقادیر I_S و V_S برابر با کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

1) $V_s=5\cos t$ ، $I_s=0.5\cos t-1$

2) $V_s=5\cos t+1$ ، $I_s=0.5\cos t$

3) $V_s=5\cos t-1$ ، $I_s=0.5\cos t+1$

4) $V_s=5\cos t-2$ ، $I_s=0.5\cos t+1$



شکل (20ـ4) مدار تمرین 8

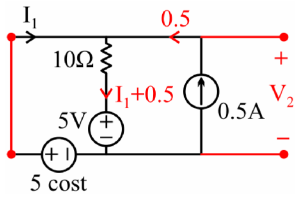
1ـ در خانه اگر کس است، یک حرف بس است!

این مسئله بسیار زیباست! برای یافتن V_s و I_s این‌طور می‌گوییم:

$$V_s = V_2\Big|_{V_1=0\ ,\ I_2=0}$$

$$I_s = I_1\Big|_{V_1=0\ ,\ I_2=0}$$

قدم اول اعمال آن شرط‌هاست؛ پس در مدار، سر ورودی را اتصال کوتاه می‌کنیم و در خروجی مدار باز قرار می‌دهیم؛ در این صورت مدار به شکل زیر درمی‌آید:



شکل (4ـ21) مدار ساده‌شدهٔ تمرین 8

با KVL در حلقهٔ خروجی:

$$V_s = V_2 = 5\cos t$$

پس از همین‌جا درستی گزینهٔ (1) روشن است و چقدر این‌جوری مسئله حل کردن لذیذ! است.

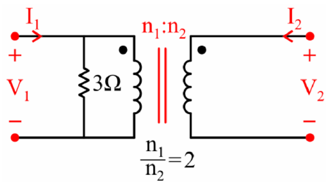
البته می‌توانیم برای تمرین، I_s را هم پیدا کنیم:

$$10I_1 + 5 + 5 - 5\cos t = 0$$

$$I_s = I_1 = 0.5\cos t - 1$$

پس گزینه 1 درست است.

9ـ ماتریس هایبر H دوقطبی شکل زیر چیست؟



شکل (4ـ22) مدار تمرین 9

به راحتی پاسخ معلوم است؛ با دانستن تعاریف درایه‌های ماتریس هایبرید و سرِ سوزنی مدار، قصه تمام است:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{V_2=0} = 0$$

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_1=0} = 2$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = -2$$

و به کمک قضیهٔ انتقال در ترانسفورماتور:

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

و اما آخرین پارامترهای دوقطبی:

۵ـ۴ پارامترهای انتقال T (ماتریس ABCD)

در چهار ماتریس قبلی، یا ولتاژ برحسب جریان بود یا برعکس و یا ترکیبی از آن‌ها؛ اما در ماتریس انتقال، کاری به این حرف‌ها نداریم و ورودی را برحسب خروجی می‌نویسیم، البته منظور از ورودی $\overset{+}{\underset{-}{V_1}} \to i_1$ و منظور از خروجی $\overset{+}{\underset{-}{V_2}} \to i_2$ است.

(لطفاً به جهت جریان i_2 بیشتر دقت کنید.) حال با این توصیفات ماتریس انتقال T یا همان $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ به شرح زیر می‌شود:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \tag{۳۶ـ۴}$$

و با بسط آن چنین حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases} \tag{۳۷ـ۴}$$

و تعریف آن‌ها این‌گونه می‌شود:

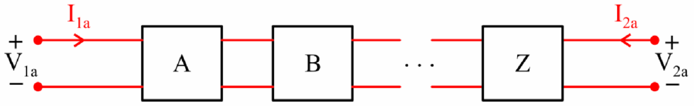
$$A^{(1)} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \tag{۳۸ـ۴}$$

$$B^{(\Omega)} = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \tag{۳۹ـ۴}$$

$$C^{(\ )} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \tag{۴۰ـ۴}$$

$$D^{(1)} = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \tag{۴۱ـ۴}$$

اگر **دوقطبی‌ها را پشت سر هم**، مانند شکل زیر ببندیم:



شکل (4ـ23) به هم بستن پشت سر هم دوقطبی‌ها

در این صورت طبق تعریف ماتریس T داریم:

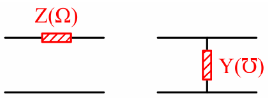
$$T_{\text{کل}} = T_1 \times T_2 \times \mathbf{L} \times T_N \qquad (۴۲\text{ـ}۴)$$

یعنی ماتریس‌های T در هم ضرب می‌شوند. حالا فلسفهٔ علامت منفی پشت I_2 را فهمیدید؟

به خاطر آنکه جریان خروجی هر دوقطبی، برابر جریان ورودی دوقطبی بعدی باشد.

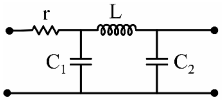
اصلاً اسم ماتریس انتقال، این‌جوری اسم بامسمّاتری می‌شود؛ ورودی دوقطبی n ام را به خروجی‌اش مربوط می‌سازد، پس اگر nتا دوقطبی پشت سر هم (مثل لوله‌کشی!) به همدیگر متصل شوند، $T_{\text{کل}}$ از ضرب تک‌تک Tها معلوم می‌شود.

ماتریس T این دوتا دوقطبیِ خیلی ساده را به خاطر بسپارید؛ چراکه خیلی وقت‌ها می‌توان دوقطبی‌های پیچیده را به صورت اتصال پشت سر همِ این دوقطبی‌های ساده در نظر گرفت.



شکل (4ـ24) دوقطبی‌های بسیار ساده به همراه ماتریس T آن‌ها

10ـ ماتریس انتقال T را در دوقطبی شکل زیر بیابید.

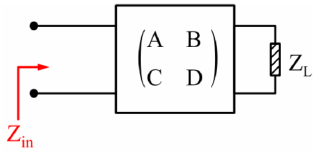


شکل (4ـ25) دوقطبی تمرین 10

این دوقطبی را به صورت 4 دوقطبی ساده پشت سر هم لحاظ می‌کنیم و با توجه به رابطهٔ (4ـ41)، جواب معلوم است دیگر:

$$T_{\text{کل}} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & LS \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_2 s & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L}$$

11ـ در مدار شکل زیر، Z_{in} را برحسب عناصر ماتریس انتقال T پیدا کنید.



شکل (4ـ26) دوقطبی تمرین 12

طبق تعریف امپدانس ورودی و ماتریس T داریم:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2}$$

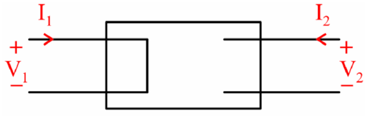
و با توجه به KVL در حلقهٔ راستی:

$$V_2 = -Z_L I_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{in} = \frac{-AZ_L I_2 - B_2 I_2}{-CZ_L I_2 - DI_2}$$

درنهایت امپدانس ورودی معلوم می‌شود:

$$Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \qquad (۴۳\text{ـ}۴)$$

12ـ دوقطبی زیر کدام توصیف را دارد؟ آن را بیابید.



شکل (4ـ27) دوقطبی تمرین 12

من دوست دارم مسئله را حل کنم. ظاهراً هم ساده است، ولی نمی‌دانم از کجا شروع کنم.

اشکالی ندارد، این جملات را به آرامی و به دقت بخوانید و زیر لب زمزمه کنید:

وقتی یک دوقطبی، ماتریس Z دارد که بتوان V_1 و V_2 را برحسب I_1 و I_2 نوشت.
وقتی یک دوقطبی، ماتریس Y دارد که بتوان I_1 و I_2 را برحسب V_1 و V_2 نوشت.
وقتی یک دوقطبی، ماتریس H دارد که بتوان V_1 و I_1 را برحسب I_1 و V_2 نوشت.
وقتی یک دوقطبی، ماتریس G دارد که بتوان I_1 و V_2 را برحسب V_1 و I_2 نوشت.
و بالاخره وقتی یک دوقطبی، ماتریس T دارد که بتوان V_1 و I_1 را برحسب V_2 و I_2 نوشت.
ازطرفی فکر کنم این را هم در پیش‌دبستانی برق! خوانده‌اید که:

$$V_{S.C.} = 0 \quad \text{و} \quad I_{O.C.} = 0$$

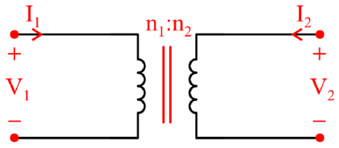
پس در دوقطبی شکل (4ـ27) داریم:

$$V_1 = 0 = 0I_1 + 0V_2$$
$$I_2 = 0 = 0I_1 + 0V_2$$

یعنی فقط ماتریس H را دارد و آن هم برابر است با:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13ـ ترانسفورماتور زیر کدام توصیف‌ها را دارد؟ آن‌ها را بنویسید.



شکل (4ـ28) ترانسفورماتور

برطبق توضیحاتی که گفته شد و بر اساس روابط ترانسفورماتور:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow V_1 = 0I_1 + \frac{n_1}{n_2}V_2$$
$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{n_2}{n_1} \Rightarrow I_2 = \frac{-n_1}{n_2}I_1 + 0V_2$$

پس ماتریس هایبرید این‌چنین است:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n_1}{n_2} \\ -\frac{n_1}{n_2} & 0 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب G هم پیداست، برای T هم داریم:

$$V_1 = \frac{n_1}{n_2}V_2 + 0(-I_2)$$
$$I_1 = 0V_2 + \frac{n_2}{n_1}(-I_2)$$

پس:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix}$$

آفرین! نکته مهم آنکه ترانسفورماتور، توصیف‌های Z و Y را ندارد؛ چراکه نمی‌توان V_1 یا V_2 را برحسب I_1 و I_2 نوشت و همچنین نمی‌توان I_1 یا I_2 را برحسب V_1 و V_2 نوشت. حالا به این جمله دقت کنید:

شرط آنکه یک دوقطبی ماتریس Z نداشته باشد آن است که:

$$\det Y = 0 \tag{۴۴-۴}$$

و برعکس. (گاهی این موضوع در حل تست‌ها مفید است.[1])

۴-۶ روابط بین پارامترهای دوقطبی

هدف اصلی آن است که از روی پارامترهایی به پارامترهای دیگر برسیم. به نظرم به خاطر سادگی، فقط به روابط! نگاه کنید. من ساکت می‌شوم و چیزی نمی‌گویم:

$$Y = Z^{-1} \tag{۴۵-۴}$$

$$y_{11} = \frac{Z_{22}}{\det Z} \tag{۴۶-۴}$$

$$y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\det Z} \tag{۴۷-۴}$$

$$y_{21} = \frac{-Z_{21}}{\det Z} \tag{۴۸-۴}$$

$$y_{22} = \frac{Z_{11}}{\det Z} \tag{۴۹-۴}$$

و

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{1}{\left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}} = \frac{1}{y_{11}} \tag{۵۰-۴}$$

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}} = \frac{1}{Z_{22}} \tag{۵۱-۴}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \left.\frac{\frac{I_2}{V_1}}{\frac{I_1}{V_1}}\right|_{V_2=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \tag{۵۲-۴}$$

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{\frac{V_1}{I_2}}{\frac{V_2}{I_2}}\right|_{I_1=0} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} \tag{۵۳-۴}$$

1 ـ مثلاً می‌گویند ظرفیت فلان خازن را طوری تعیین کنید که فلان دوقطبی، توصیف Z نداشته باشد؛ در آن صورت ماتریس Y آن را پیدا می‌کنیم و $\det Y = 0$ قرار می‌دهیم؛ آن‌گاه تا حل مسئله دیگر قدمی باقی نیست!

در چهار خط بالا، از روشی استفاده کردم که اسمش را «تقسیم صورت و مخرج به اون یکیِ اونی که صفره!» گذاشتم؛ یعنی وقتی $V_2 = 0$ بود، V_1 را به مخرج می‌بردیم و وقتی $I_1 = 0$ بود، I_2 را به مخرج می‌بردیم، تا هم‌فُرم با تعریف پارامترهای Z یا Y شود و یا حرف‌هایی از این جنس:

$$V_1 = A V_2 - B I_2 = \frac{A}{C}\left(I_1 + D I_2\right) - B I_2$$

$$V_1 = \frac{A}{C} I_1 + \frac{AD - BC}{C} I_2$$

یعنی:

$$Z_{11} = \frac{A}{C} \quad , \quad Z_{12} = \frac{\det T}{C} \tag{۵۴-۴}$$

و برای تمامی تبدیلات می‌توان از روش‌هایی مشابه آنچه ملاحظه فرمودید، بهره گرفت. در پیوست، جدول تبدیل پارامترهای مختلف دوقطبی‌ها را ملاحظه می‌فرمایید.

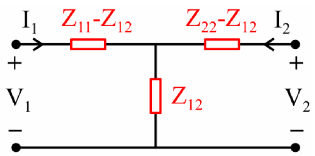
z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\Delta Y}$	$\frac{-y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta T}{C}$	$\frac{D'}{C'}$	$\frac{1}{C'}$	$\frac{\Delta H}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$\frac{-g_{12}}{g_{11}}$
z_{21}	z_{22}	$\frac{-y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta Y}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta T'}{C'}$	$\frac{A'}{C'}$	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{11}}$
$\frac{z_{22}}{\Delta Z}$	$\frac{-z_{12}}{\Delta Z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{D}{B}$	$\frac{\Delta T}{B}$	$\frac{A'}{B'}$	$\frac{-1}{B'}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$
$\frac{-z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta Z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{-1}{B}$	$\frac{D}{B}$	$\frac{-\Delta T'}{B'}$	$\frac{D'}{B'}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta H}{h_{11}}$	$\frac{-g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$
$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{21}}$	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	A	B	$\frac{D'}{\Delta T'}$	$\frac{B'}{\Delta T'}$	$\frac{-\Delta H}{h_{21}}$	$\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$
$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{-\Delta Y}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	C	D	$\frac{C'}{\Delta T'}$	$\frac{A'}{\Delta T'}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta G}{g_{21}}$
$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta Z}{z_{12}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{12}}$	$\frac{-1}{y_{12}}$	$\frac{D}{\Delta T}$	$\frac{B}{\Delta T}$	A'	B'	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$\frac{-\Delta G}{g_{12}}$	$\frac{-g_{22}}{g_{12}}$
$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{12}}$	$\frac{-y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{C}{\Delta T}$	$\frac{A}{\Delta T}$	C'	D'	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta H}{h_{12}}$	$\frac{-g_{11}}{g_{12}}$	$\frac{-1}{g_{12}}$
$\frac{\Delta Z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta T}{D}$	$\frac{B'}{A'}$	$\frac{1}{A'}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta G}$	$\frac{-g_{12}}{\Delta G}$
$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{11}}$	$\frac{-1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{-\Delta T'}{A'}$	$\frac{C'}{A'}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-g_{21}}{\Delta G}$	$\frac{g_{11}}{\Delta G}$
$\frac{1}{z_{11}}$	$\frac{-z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{C}{A}$	$\frac{-\Delta T}{A}$	$\frac{C'}{D'}$	$\frac{-1}{D'}$	$\frac{h_{22}}{\Delta H}$	$\frac{-h_{12}}{\Delta H}$	g_{11}	g_{12}
$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{z_{11}}$	$\frac{-y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta T'}{D'}$	$\frac{B'}{D'}$	$\frac{-h_{21}}{\Delta H}$	$\frac{h_{11}}{\Delta H}$	g_{21}	g_{22}
$z_{12} = z_{21}$		$y_{12} = y_{21}$		$\Delta T = 1$		$\Delta T' = 1$		$h_{12} = -h_{21}$		$g_{12} = -g_{21}$	

شکل (4-29) جدول تبدیل عناصر ماتریس‌های دوقطبی‌ها و شرط هم‌پاسخی

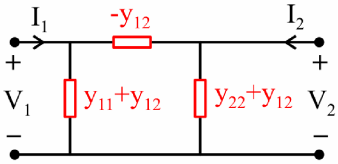
در این جدول، درایه‌های متناظر ماتریس‌های هم‌ردیف برابرند و سطر آخر نیز، بیانگر شرط هم‌پاسخی است.

۷ـ٤ مدار معادل T و Π

هر دوقطبی را می‌توان به صورت‌های T و Π مدل کرد و در دوقطبی‌های متقابل[1] ($Z_{12} = Z_{21}$ یا $y_{12} = y_{21}$)، این مدارهای معادل این‌گونه‌اند:



شکل (4ـ30) مدار معادل T برای یک دوقطبی هم‌پاسخ



شکل (4ـ31) مدار معادل π برای یک دوقطبی هم‌پاسخ

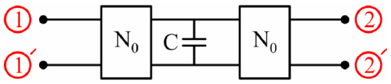
در تعیین مرتبه مدار، آن‌گاه که به دوقطبی برسیم، گاهی تبدیلات مدار معادل T و Π خیلی راهگشاست. برای همین است که سلف‌های تزویج را در حکم 3 تا سلف در نظر می‌گیریم و یا یک دوقطبی پُر از فقط خازن را در حکم فقط 3 خازن لحاظ می‌کنیم.

و اکنون آخرین تمرین از این مبحث:

14ـ در شکل (4ـ32) اگر مشخصهٔ شبکه N_0 با روابط زیر مشخص شود:

$$V_{in} = R\,I_{out} \quad , \quad V_{out} = -R\,I_{in}$$

دوقطبی کل معادل بین ترمینال‌های 1 1′ و 2 2′ معادل چیست؟



شکل (4ـ32) دوقطبی (شبکه) مدار تمرین 14

1) تنها یک عنصر سری به صورت خازنی خالص برابر R^2C است.

2) تنها یک عنصر سری به صورت سلفی خالص برابر R^2C است.

3) تنها یک عنصر سری به صورت خازنی خالص برابر $\frac{1}{R^2C}$ است.

4) تنها یک عنصر سری به صورت سلفی خالص برابر $\frac{1}{R^2C}$ است.

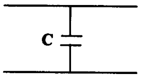
با توجه به روابط داده‌شده در صورت سؤال (که مخصوص جناب ژیراتور است!)، ماتریس T دوقطبی N_0 مشخص می‌شود.

$$V_{in} = 0\,V_{out} - R\left(-I_{out}\right)$$

$$I_{in} = -\frac{1}{R}V_{out} + 0\left(-I_{out}\right)$$

1ـ در فصل آخر درباره شبکه‌های متقابل یا هم‌پاسخ به طور مفصل بحث خواهیم کرد.

$$T=\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}$$

و ازطرفی ماتریس T دوقطبی فسقلی  هم که این‌گونه است:

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ cs & 1\end{pmatrix}$$

پس $T_{\text{کل}}$ برابر است با:

$$T_{\text{کل}}=\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ cs & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}$$

$$T_{\text{کل}}=\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -R\\ -\frac{1}{R} & -RCS\end{pmatrix}$$

$$T_{\text{کل}}=\begin{pmatrix}1 & R^2CS\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

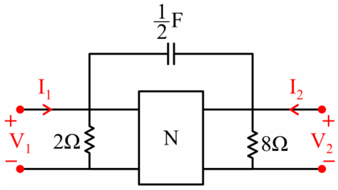
یعنی معادل با یک عنصر سری به صورت سلفی خالص برابر R^2C است.

بنابراین گزینه 2 درست است.

حالا که فصل دوقطبی تمام شد، این را می‌گویم که فصل بیش از حد ساده‌ای بود! و برخلاف فصل قبلی که لبریز از مفاهیم زیبا و عمیق بود، در این فصل فقط تعدادی تعریف و قرارداد وجود داشت؛ بنابراین اگر کسی در KCL و KVL قدرتمند باشد، در حل مسایل این فصل مشکلی نخواهد داشت. البته این را هم بگویم که در مهندسی برق، توصیف دوقطبی‌ها بسیار مهم است؛ در تبدیل خطوط انتقال به دوقطبی‌ها، در تحلیل آنتن‌های مایکرو استریپ، در بررسی سیستم‌های چندلایه و... پس با اینکه فصل خیلی عمیقی نیست ولی درعوض فوق‌العاده پُرکاربرد است.

مسایل تکمیلی فصل چهارم

1ـ ماتریس پارامترهای امپدانس دوقطبی N به صورت زیر است:



$$Z=\begin{bmatrix} \frac{3}{S+1} & \frac{2}{S+1} \\ \frac{2}{S+1} & \frac{4}{S+1} \end{bmatrix}$$

دوقطبی N را مطابق شکل بالا توسعه می‌دهیم. ماتریس پارامترهای ادمیتانس دوقطبی توسعه‌یافته کدام است؟

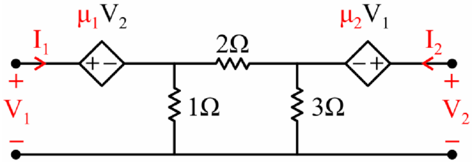
1) $\begin{bmatrix} S+1 & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{7}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} S+1 & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{2} & \frac{7}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}S+1 & -\frac{1}{4}S-\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} S+\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2ـ در مدار شکل زیر چه رابطه‌ای میان μ_1 و μ_2 برقرار باشد تا این مدار متقابل باشد؟ (مهندسی برق 68)



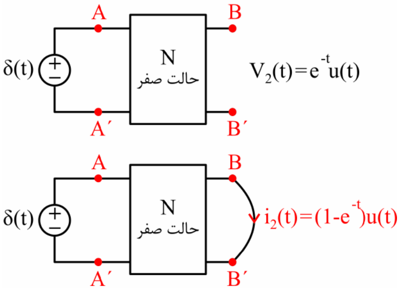
1) $\mu_1=1.8\mu_2$

2) $\mu_2=1.8\mu_1$

3) $\mu_2=2.4\mu_1$

4) $\mu_1=2.4\mu_2$

3ـ دوقطبی N فقط از اجزای RLC پسیو خطی تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده و متقارن است. برای این دوقطبی، نتایج دو آزمایش داده شده است. پارامتر y_{11} این دوقطبی کدام است؟



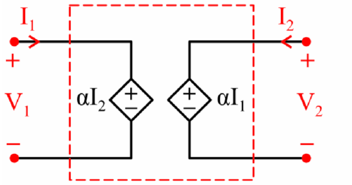
1) $\frac{1}{S+1}$

2) $\frac{1}{S}$

3) $\frac{1}{S(S+1)}$

4) $-\frac{1}{S(S+1)}$

4ـ شبکه دوقطبی N به صورت زیر را در نظر می‌گیریم. دو عدد از این شبکه‌ها به صورت پشت سر هم بسته شده‌اند. در مورد شبکه دوقطبی مجموعه کدام‌یک از عبارات زیر برای ماتریس Z و Y و H درست است؟



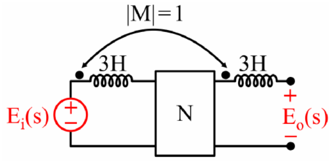
1) هر سه ماتریس وجود دارد.

2) ماتریس پارامترهای Z و H وجود ندارد و Y وجود دارد.

3) فقط پارامترهای Z وجود دارد.

4) ماتریس پارامتر Z و Y وجود ندارد و H وجود دارد.

5ـ ماتریس امپدانس دوقطبی N شکل زیر به صورت $Z=\begin{bmatrix} S & 4S \\ 3S & 2S \end{bmatrix}$ معلوم است. نسبت $\frac{E_o(S)}{E_i(S)}$ را تعیین کنید.



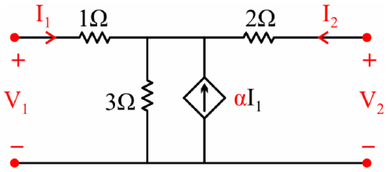
1) صفر

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{2}$

4) 3

6ـ به ازای چه مقدار از α، دوقطبی زیر دارای پارامترهای ادمیتانس نیست؟



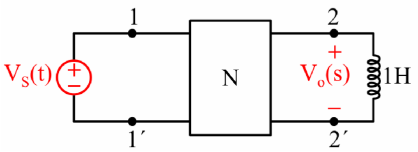
1) $\frac{11}{6}$

2) $-\frac{11}{6}$

3) $\frac{6}{11}$

4) $-\frac{6}{11}$

7ـ پارامترهای C و D از ماتریس انتقال $T=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ برای یک دوقطبی متقارن و متقابل N به صورت $D=2S^2+1$ و $C=4S$ داده شده است. اگر از این دوقطبی در ترکیبی به صورت زیر استفاده شود، در این صورت تابع شبکه $H(S)=\dfrac{V_o(S)}{V_s(S)}$ برابر است با:



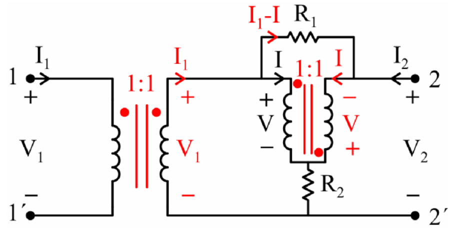
1) $\dfrac{2S^2+1}{2S^6+3S^4+7S^2+1}$

2) $\dfrac{2S^2+1}{2S^4+19S^2+2}$

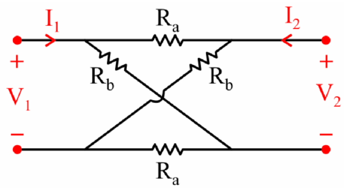
3) $\dfrac{1}{S^4+3S^2+1}$

4) $\dfrac{1}{3S^2+2}$

8ـ شرط اینکه دوقطبی شکل (ب) معادل دوقطبی شکل (الف) باشد، آن است که: (مهندسی برق 76)



(ب)



(الف)

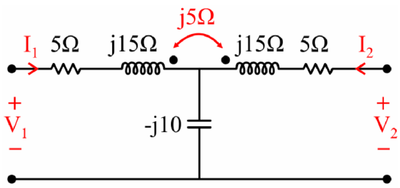
1) $R_1=\frac{1}{2}R_a$, $R_2=2R_b$

2) $R_1=2R_a$, $R_2=\frac{1}{2}R_b$

3) $R_1=\frac{1}{2}R_b$, $R_2=2R_a$

4) $R_1=2R_b$, $R_2=\frac{1}{2}R_a$

9ـ پارامترهای ماتریس انتقال T دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق 77)



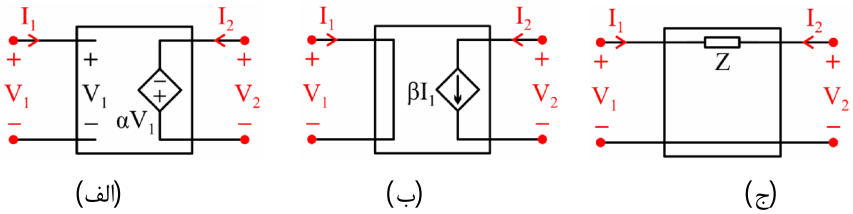
1) $\begin{bmatrix} 1-j1 & 10-j5 \\ -j-j0.2 & 1-j1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1+j1 & -10-j5 \\ j0.2 & 1-j1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1+j1 & -10+j5 \\ j0.2 & -1+j1 \end{bmatrix}$

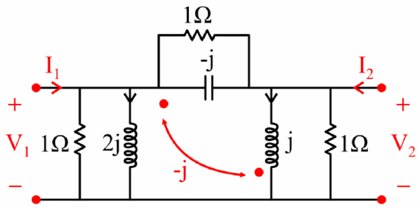
4) $\begin{bmatrix} 1-j1 & -10+j5 \\ -j0.2 & -1+j1 \end{bmatrix}$

10ـ کدام دوقطبی دارای پارامترهای H نیست؟ (مهندسی برق 77)



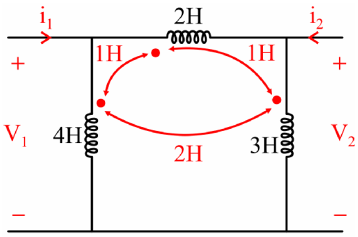
1) الف 2) ب 3) الف و ج 4) ج و ب

11ـ در دوقطبی شکل زیر، پارامتر ادمیتانس y_{12} در حالت دایمی سینوسی کدام است؟ (مهندسی برق 82)



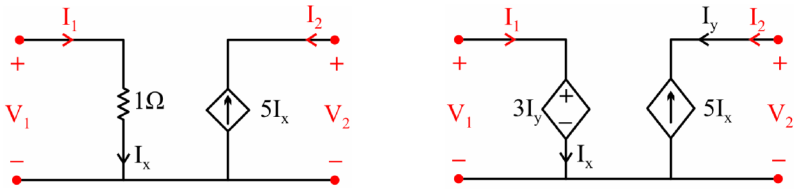
1) 2
2) $-(1+2j)$
3) $1-2j$
4) $2-j$

12ـ ماتریس پارامترهای z دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (تمام کمیت‌ها برحسب هانری) (مهندسی برق 83)



1) $\begin{bmatrix} 3.8s & 2.4s \\ 2.4s & 2.2s \end{bmatrix}$
2) $\begin{bmatrix} 3.2s & 2.2s \\ 2.2s & 3.8s \end{bmatrix}$
3) $\begin{bmatrix} 3.8s & 2.4s \\ 2.4s & 3.2s \end{bmatrix}$
4) $\begin{bmatrix} 3.2s & 2.4s \\ 2.4s & 2.2s \end{bmatrix}$

13ـ برای دو مدار دوقطبی شکل زیر کدام‌یک از عبارات داده‌شده درست است؟ (مهندسی برق 84)

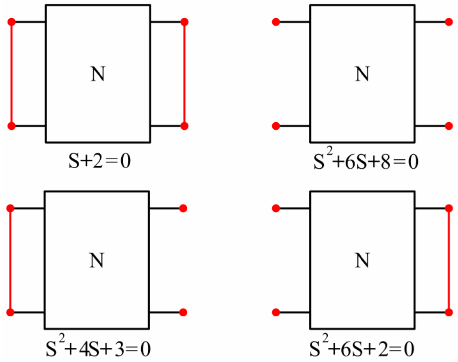


شکل (1) شکل (2)

1) برای هر دو شکل، مدل امپدانسی وجود دارد ولی مدل ادمیتانسی وجود ندارد.
2) برای هر دو شکل، مدل ادمیتانسی وجود دارد ولی مدل امپدانسی وجود ندارد.
3) مدار شکل (2) مدل ادمیتانس و امپدانسی ندارد ولی مدار (1) مدل امپدانسی دارد.
4) مدار شکل (1) مدل امپدانسی ندارد ولی مدل ادمیتانسی دارد و مدار شکل (2) مدل امپدانسی و امپتانسی ندارد.

14ـ معادله مشخصه یک دوقطبی در حالت‌های زیر مشخص شده است. $Z_{11}(s)$ کدام گزینه است؟

(مهندسی برق 84)



1) $\dfrac{s+2}{s^2+4s+3}$

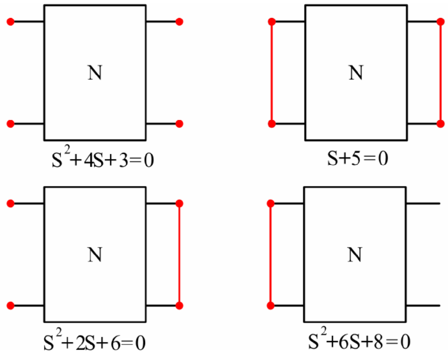
2) $\dfrac{s^2+6s+2}{s+2}$

3) $\dfrac{s^2+6s+2}{s^2+6s+8}$

4) $\dfrac{s^2+4s+3}{s^2+6s+8}$

15ـ معادله مشخصه یک دوقطبی در حالت‌های زیر مشخص شده است. ادمیتانس y_{22} کدام است؟

(مهندسی برق 85)



1) $\dfrac{s^2+4s+3}{s+5}$

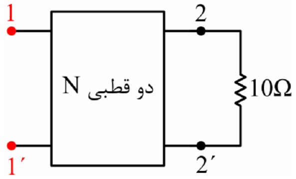
2) $\dfrac{s+5}{s^2+6s+8}$

3) $\dfrac{s+5}{s^2+2s+6}$

4) $\dfrac{s^2+6s+8}{s+5}$

16ـ دوقطبی N دارای ماتریس پارامترهای امپدانس $Z=\dfrac{10s}{s^2+25}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ است. این دوقطبی را به مقاومت 10 اهمی ختم می‌کنیم. Q مدار را تعیین کنید.

(مهندسی برق 85)



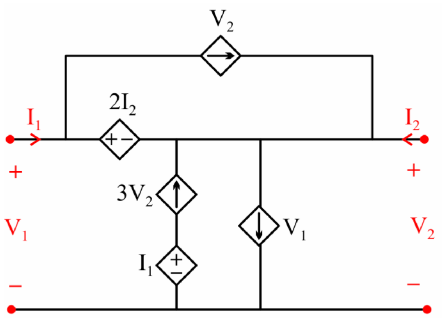
1) 1

2) 5

3) 10

4) $\dfrac{1}{5}$

17ـ ماتریس پارامترهای هایبرید H دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق 85)



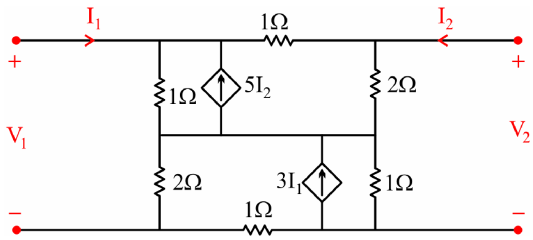
1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

18ـ ماتریس پارامترهای z دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق 85)



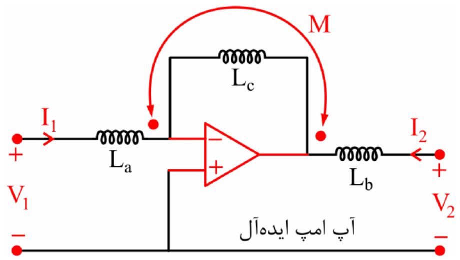
1) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & 19 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$

2) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & 19 \\ 17 & 13 \end{pmatrix}$

3) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}$

4) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}$

19ـ ماتریس اندوکتانس دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق 86)



1) $\begin{bmatrix} L_a & -M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} L_a & -M \\ L_c - M & L_b \end{bmatrix}$

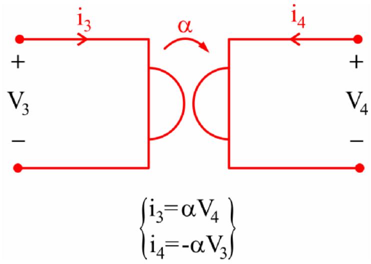
3) $\begin{bmatrix} L_a & M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix}$

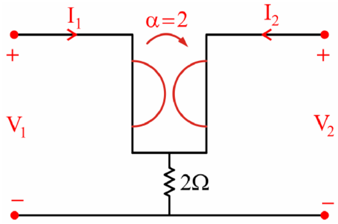
4) $\begin{bmatrix} L_b & -M \\ -L_c - M & L_a \end{bmatrix}$

20ـ در دوقطبی شکل زیر، ماتریس انتقال T کدام است؟ (تعریف ژیراتور در شکل داده شده است)

(مهندسی برق 86)

تعریف ژیراتور





1) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$

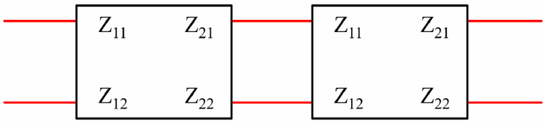
2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

21ـ دو شبکه دوقطبی مشابه (با پارامترهای Z) به طور متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. پارامترهای Z_{12} شبکه معادل کدام است؟

(مهندسی برق 87)



1) $\dfrac{Z_{12}}{Z_{11}+Z_{22}+Z_{12}}$

2) $\dfrac{Z_{11}Z_{12}}{Z_{11}+Z_{22}}$

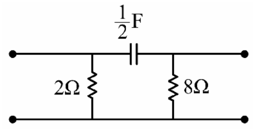
3) $\dfrac{Z_{22}}{Z_{11}+Z_{22}}$

4) $\dfrac{(Z_{12})^2}{Z_{11}+Z_{22}}$

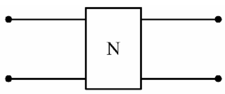
حل تشریحی

1. **گزینه 1 درست است.**

مدار را می‌توان به صورت دو مدار موازی در نظر گرفت، Y هر کدام را به دست آورد و درنهایت با هم جمع کرد. دو مدار عبارت‌اند از:



مدار (2)



مدار (1)

ماتریس ادمیتانس مدار (1) که از معکوس کردن ماتریس امپدانس آن به دست می‌آید:

$$Y_1=\frac{(S+1)^2}{8}\begin{bmatrix}\frac{4}{S+1} & -\frac{2}{S+1}\\ -\frac{2}{S+1} & \frac{3}{S+1}\end{bmatrix}$$

و ماتریس ادمیتانس مدار (2) را با توجه به ادمیتانس‌هایی که به گره‌های 1 و 2 آن رسیده‌اند، می‌نویسیم:

$$Y_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S & -\frac{1}{2}S\\ -\frac{1}{2}S & \frac{1}{8}+\frac{1}{2}S\end{bmatrix}$$

ادمیتانس کل مدار هم عبارت است از:

$$Y=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix} S+1 & -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}S-\frac{1}{4} & \frac{7}{8}S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. گزینه 2 درست است.

باید یکی از ماتریس‌ها را که راحت‌تر است بنویسیم و شرایط تقابل را برقرار کنیم.

فکر کنم به دلیل گره کمتر، نوشتن ماتریس ادمیتانس ساده‌تر باشد. با نوشتن دو KCL در گره‌ها داریم:

$$\begin{cases} -I_1+\dfrac{V_1-\mu_1 V_2}{1}+\dfrac{V_1-\mu_1 V_2-\left(V_2-\mu_2 V_1\right)}{2}=0 \\ -I_2+\dfrac{V_2-\mu_2 V_1}{3}+\dfrac{V_2-\mu_2 V_1-\left(V_1-\mu_1 V_2\right)}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} I_1&=\left(\frac{3}{2}+\frac{\mu_2}{2}\right)V_1+\left(-\frac{3}{2}\mu_1-\frac{1}{2}\right)V_2 \\ I_2&=\left(-\frac{5}{6}\mu_2-\frac{1}{2}\right)V_1+\left(\frac{5}{6}+\frac{\mu_1}{2}\right)V_2 \end{aligned} \Rightarrow Y=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\frac{\mu_2}{2} & -\frac{3}{2}\mu_1-\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6}\mu_2-\frac{1}{2} & \frac{5}{6}+\frac{\mu_1}{2} \end{bmatrix}$$

و برای متقابل بودن باید $Y_{12}=Y_{21}$ باشد؛ پس:

$$-\frac{3}{2}\mu_1-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}\mu_2-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \mu_2=1.8\mu_1$$

3. گزینه 2 درست است.

ماتریس ادمیتانس را می‌نویسیم و اطلاعاتی را که داریم جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

در آزمایش اول داریم:

$$V_2(t)=e^{-t}u(t) \quad \Rightarrow \quad V_2(S)=\frac{1}{S+1}$$
$$V_1(t)=\delta(t) \quad \Rightarrow \quad V_1(S)=1$$

$$i_2(t)=0 \quad \Rightarrow \quad I_2(S)=0$$

پس باید این مقادیر را در سطر دوم قرار دهیم:

$$I_2=Y_{21}V_1+Y_{22}V_2$$

$$0=Y_{21}\times 1+Y_{22}\times\frac{1}{S+1} \quad \Rightarrow \quad Y_{22}=-Y_{21}(S+1)$$

و از آزمایش دوم داریم:

$$i_2(t)=-\left(1-e^{-t}\right)u(t) \quad \Rightarrow \quad I_2(S)=-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}=-\frac{1}{S(S+1)}$$

دوباره باید نتایج را در سطر دوم جایگذاری کنیم:

$$\frac{-1}{S(S+1)}=Y_{21}\times 1+Y_{22}\times 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{21}=\frac{-1}{S(S+1)} \quad \Rightarrow \quad Y_{22}=+\frac{1}{S}$$

و چون مدار متقارن است، $Y_{11}=Y_{22}=+\frac{1}{S}$ خواهد بود.

4. گزینه 4 درست است.

به نظرم چون دو شبکه پشت سر هم قرار می‌گیرند، بهتر است از ماتریس انتقال T استفاده کنیم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

و زمانی که دو شبکه پشت سر هم قرار می‌گیرند، داریم:

$$T=T_1.T_2=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$$

و درنهایت برای کل شبکه داریم:

$$V_1=+V_2 \quad , \quad I_1=-I_2$$

با توجه به روابط بالا متوجه می‌شویم که ماتریس Z و Y وجود ندارد، ولی ماتریس H موجود است.

5. گزینه 3 درست است.

با توجه به ماتریس امپدانس داده‌شده، برای دوقطبی N داریم:

$$V_1=SI_1+4SI_2$$
$$V_2=3SI_1+2SI_2$$

و برای E_i و E_o هم با دو KVL خواهیم داشت:

$$E_i = 3SI_1 - SI_2 + V_1$$
$$E_o = 3SI_2 - SI_1 + V_2$$

و V_1 و V_2 را هم در روابط E_i , E_o قرار می‌دهیم. قبل از قرار دادن، باید توجه داشته باشیم که I_2 برابر صفر است؛ پس:

$$\begin{aligned} E_i &= 3SI_1 + SI_1 = 4SI_1 \\ E_o &= -SI_1 + 3SI_1 = 2SI_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{2}$$

6. گزینه 2 درست است.

خُب، دترمینان ماتریس امپدانس، باید صفر باشد تا ماتریس ادمیتانس نداشته باشیم.

برای رسیدن به ماتریس امپدانس هم باید بعد از KCL بازی، دو KVL درحلقه‌ها بزنیم:

$$V_1 = I_1 + 3(I_1 + \alpha I_1 + I_2)$$
$$V_2 = 2I_2 + 3(I_1 + \alpha I_1 + I_2)$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha+4 & 3 \\ 3\alpha+3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad |Z| = 5(3\alpha+4) - 3(3\alpha+3) = 6\alpha + 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-11}{6}$$

7. گزینه 4 درست است.

چون دوقطبی متقارن است، پس:

$$A = D = 2S^2 + 1$$

و چون متقابل است، داریم:

$$AD - BC = 1$$
$$\Rightarrow \left(2S^2+1\right)^2 - B4S = 1 \quad \Rightarrow \quad B = S^3 + S$$

پس ماتریس انتقال به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2S^2+1 & S^3+S \\ 4S & 2S^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o \\ -I_o \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad V_s = \left(2S^2+1\right)V_o - \left(S^3+S\right)I_o$$

و درضمن می‌دانیم که $V_o = -SI_o$ ، پس:

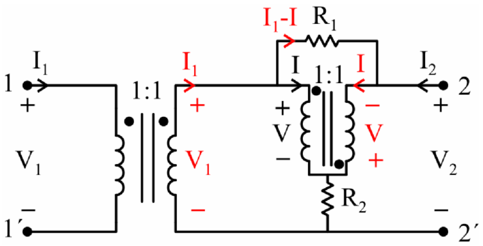
$$V_s = \left(2S^2+1\right)V_o - \left(S^3+S\right)\frac{V_o}{-S} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{3S^2+2}$$

8. گزینه 2 درست است.

باید یکی از ماتریس‌ها را که راحت‌تر است، برای دو مدار بنویسیم و معادل قرار دهیم. مثلاً برای مدار (الف) داریم:

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{R_a+R_b}{2} & \frac{R_b-R_a}{2} \\ \frac{R_b-R_a}{2} & \frac{R_a+R_b}{2} \end{bmatrix}$$

و برای مدار (ب) بعد از KCL و KVL بازی داریم:



$$I_1 - I + I_2 = I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_1+I_2}{2}$$

حالا کافی است V را هم برحسب I_1 و I_2 به دست آوریم. با نوشتن KVL در حلقه وسطی داریم:

$$V + V = R_1\left(I_1 - I\right) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{R_1\left(I_1-I\right)}{2} = \frac{R_1}{2}\left(\frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{2}\right)$$

با نوشتن KVL در حلقهٔ 1، سطر اول ماتریس Z به دست می‌آید:

$$V_1 = V + R_2 2I = \frac{R_1}{2}\left(\frac{I_1}{2} - \frac{I_2}{2}\right) + R_2 I_1 + R_2 I_2 = \left(\frac{R_1}{4} + R_2\right)I_1 + \left(R_2 - \frac{R_1}{4}\right)I_2$$

حالا می‌توانیم پارامترهای دو ماتریس را برابر قرار دهیم:

$$\begin{cases}\dfrac{R_a+R_b}{2}=\dfrac{R_1}{4}+R_2\\[2mm]\dfrac{R_b-R_a}{2}=R_2-\dfrac{R_1}{4}\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{cases}R_2=\dfrac{R_b}{2}\\[2mm]R_1=2R_a\end{cases}$$

9. گزینه 3 درست است.

با KVL زدن در حلقه‌ها داریم:

$$V_1=(5+j15)I_1+j5I_2-j10(I_1+I_2)$$
$$V_2=(5+j15)I_2+j5I_1-j10(I_1+I_2)$$

پس، از رابطه دوم داریم:

$$I_1=j0.2V_2+(1-j)I_2$$

که تنها در گزینه 3 صدق می‌کند و برای حل کامل...

باید رابطه اخیر را در رابطه اول جایگزین کنیم.

10. گزینه 1 درست است.

برای ماتریس H داریم:

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}$$

پس برای مدار (ب) داریم:

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\\beta&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}$$

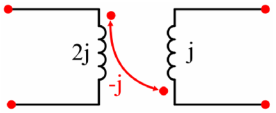
و برای مدار (ج) داریم:

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}$$

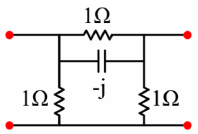
پس مدار (الف)، پارامتر H ندارد و این هم از ابتدا مشخص بود. چون $I_1 = 0$ است، ضرایب I_1 که h_{11} و h_{21} هستند، نامشخص خواهند بود.

11. گزینه 2 درست است.

مشابه تمرینی که‌قبلاً حل کردیم، دو دوقطبی زیر را موازی یکدیگر در نظر می‌گیریم:



(1)



(2)

برای مدار 1 داریم:

$$Y=\begin{bmatrix} 2+j & -(1+j) \\ -(1+j) & 2+j \end{bmatrix}$$

و برای مدار 2، نوشتن ماتریس Z آسان‌تر است:

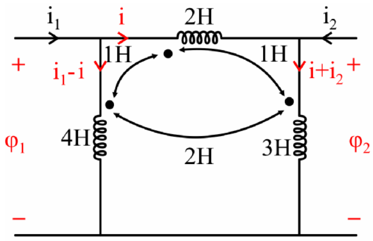
$$Z=\begin{bmatrix} 2j & -j \\ -j & j \end{bmatrix} \Rightarrow Y=Z^{-1}=\begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & -2j \end{bmatrix}$$

و حالا دو ماتریس را با یکدیگر جمع کنیم:

$$Y=Y_1+Y_2=\begin{bmatrix} 2 & -1-2j \\ -1-2j & 2-j \end{bmatrix} \Rightarrow Y_{12}=-(1+2j)$$

12. گزینه 1 درست است.

با i_1 و i_2 نمی‌توانیم KCL بازی را شروع کنیم، پس یک متغیر i اضافه کرده و برای پرهیز از تکرار s ، از KφL به‌جای KVL استفاده می‌کنیم. اگر یک KφL در کل حلقه بزنیم، i برحسب i_1 و i_2 به دست می‌آید و مسئله حل است.



$$4\left(i_1-i\right)+i+2\left(i+i_2\right)=\left[2i+\left(i_1-i\right)+\left(i+i_2\right)\right]+\left[3\left(i+i_2\right)+2\left(i_1-i\right)+i\right]$$

$$\Rightarrow \quad 4i_1+2i_2-i=\left[i_1+i_2+2i\right]+\left[2i_1+3i_2+2i\right]$$

$$\Rightarrow \quad i=\frac{i_1}{5}-\frac{2}{5}i_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{11}=\frac{V_1}{I_1}\bigg|_{I_2=0}=\frac{S\left(4I_1-\frac{1}{5}I_1\right)}{I_1}=3.8s$$

حالا برویم دنبال Z_{22} :

$$Z_{22}=\frac{V_2}{I_2}\bigg|_{I_1=0}=\frac{S\left(3I_2-\frac{4}{5}I_2\right)}{I_2}=2.2s$$

13. گزینه 2 درست است.

برای مدار شکل (1) داریم:

$$\begin{aligned}V_1&=I_1\\ I_2&=-5I_1\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -5 & 0\end{bmatrix}$$

ولی چون رابطه‌ای برای V_2 نداریم، ماتریس Z وجود ندارد.

مدار شکل (2) هم وضعیت مشابهی دارد و باز رابطه‌ای برای V_2 نداریم و ماتریس Z وجود ندارد:

$$\begin{aligned}V_1&=3I_2\\ I_2&=-5I_1\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Y=\begin{bmatrix}-\frac{1}{15} & 0\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

14. گزینه 4 درست است.

باید ببینیم برای Z_{11} از کدام‌یک از این حالت‌ها باید استفاده کنیم:

دو تا از حالت‌ها $I_2=0$ صفر دارند.

$$Z_{11}=\frac{V_1}{I_1}\bigg|_{I_2=0}=\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}$$

حالا اگر مخرج Z_{11} را بخواهیم، باید I_1 را به عنوان ورودی صفر کنیم و بعد معادله مشخصه آن حالت، ضریب خروجی V_1 یا همان مخرج Z_{11} می‌شود که در اینجا $\left(S^2+6s+8\right)$ است. برای صورت هم باید V_1 را صفر کنیم و معادله مشخصه حاصل، صورت Z_{11} و ضریب I_1 است که برابر $\left(S^2+4S+3\right)$ است.

15. گزینه 4 درست است.

صورت و مخرج را جداگانه با استفاده از این چهار حالت باید به دست آوریم:

$$Y_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}=\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}$$

برای مخرج علاوه بر V_1، V_2 را هم صفر می‌کنیم و $(s+5)$ ضریب I_2 می‌شود.

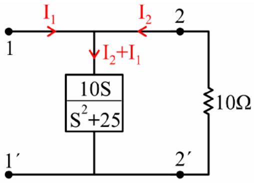
و برای صورت هم برعکس علاوه بر V_1 باید I_2 را هم صفر کنیم که $\left(s^2+6s+8\right)$ ضریب V_2 خواهد بود.

16. گزینه 2 درست است.

استاد یک فرمولی ضمن درس گفته بودند که از روی ماتریس Z دوقطبی و Z_L، می‌توانستیم Z_{in} را به دست آوریم. صبر کنید، الان پیدایش می‌کنم...، آها اینجاست:

$$Z_{in}=Z_{11}-\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}+Z_L}$$

بله. خوبه یادآوری شد که حتماً حفظش کنیم ولی به نظرم ماتریس Z این سؤال خیلی سر راست داده شده و مشخص است. معلومه که داخل شبکهٔ N چه خبره:



جالب بود، پس ادمیتانس ورودی راحت به دست می‌آید:

$$Y_{in}=\frac{s^2+25}{10s}+\frac{1}{10}=\frac{s^2+25+s}{10s}$$

حالا می‌توانیم بگوییم $I = VY = 0$ یعنی صورت Y، معادله مشخصه سیستم است؛ پس داریم:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{25}}{1} = 5$$

17. گزینه 4 درست است.

معادله ماتریس هایبرید به این شکل است:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

حالا شروع می‌کنیم هرچقدر می‌توانیم رابطه بنویسیم،مثلاً KVL در کل حلقه و KCL در گره پایینی:

$$\left.\begin{array}{l} KVL: V_1 = 2I_2 + V_2 \\ KCL: I_1 + 3V_2 - V_1 + I_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 + 3V_2 - (2I_2 + V_2) + I_2 = 0$$

حالا سطر دوم ماتریس هایبرید را به دست می‌آوریم:

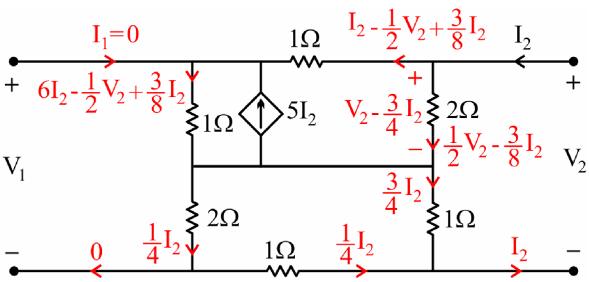
$$I_2 = I_1 + 2V_2$$

البته این همه دردسر لازم نبود، همان KVL که نوشتید کافی بود تا رابطهٔ زیر را بین گزینه‌ها چک کنید:

$$V_1 - 2I_2 = V_2 \quad \Rightarrow \begin{cases} h_{11} - 2h_{21} = 0 \\ h_{12} - 2h_{22} = 1 \end{cases}$$

18. گزینه 1 درست است.

مثلاً می‌توانیم I_1 را صفر بگیریم و بعد Z_{22} و اگر لازم باشد Z_{12} را پیدا کنیم که شکل مدار بعد از KCL و KVL بازی این‌طور می‌شود:

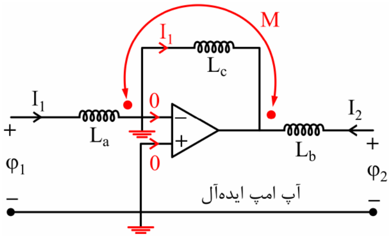


$$V_2 = 1\left(I_2 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{3}{8}I_2\right) + 1\left(6I_2 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{3}{8}I_2\right) + (2+1)\frac{1}{4}I_2$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = \frac{17}{4}I_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{17}{4}$$

19.گزینه 1 درست است.

با زمین در نظر گرفتن سرهای ورودی آپ‌امپ و دو $K\varphi L$ در طرفین داریم:



$$\varphi_1 = L_a I_1 - MI_2$$
$$\varphi_2 = L_b I_2 - MI_1 - L_c I_1$$

آخرش جریان L_c را چطور نوشتید؟

در مورد آپ‌امپ دو نکته اساسی داشتیم، یکی اینکه ولتاژ سرهای ورودی با هم برابرند و دوم اینکه جریان سرهای ورودی صفر است؛ پس کل I_1 وارد L_c می‌شود.

20. گزینه 1 درست است.

در این مدار هم نوشتن معادلات ماتریس Z کار راحتی است؛ پس باز باید سطر دوم را بنویسیم و با مرتب کردن سطر دوم، ماتریس T را بیابیم.

یادم آمد، من ادامه می‌دهم:

$$V_2 = V_4 + 2(I_1 + I_2) = \frac{I_1}{2} + 2(I_1 + I_2)$$

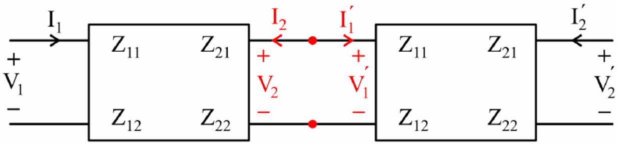
$$V_2 = \frac{5}{2}I_1 + 2I_2$$

$$\left.\begin{aligned} & V_2 = \frac{5}{2}I_1 + 2I_2 \\ & \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I_1 = \frac{2}{5}V_2 - \frac{4}{5}I_2$$

پس با توجه به سطر دوم به دست آمده گزینه 1 درست است.

21.گزینه 4 درست است.

اگر سرهای دوقطبی‌ها را مانند شکل زیر نامگذاری کنیم، داریم:



$$Z_{12t} = \left.\frac{V_1}{I'_2}\right|_{I_1=0}$$

برای V_1 یک رابطه بیشتر نمی‌توانیم بنویسیم و آن هم $V_1 = Z_{21}I_2$ است. پس باید به دنبال یافتن I_2 برحسب I'_2 باشیم.

و رابطه دیگری که I_2 در آن وارد می‌شود، به دست آوردن V_2 است:

$$V_2 = Z_{22}I_2$$

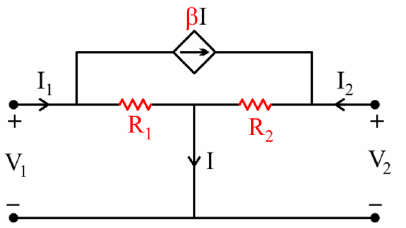
و از طرف دیگر $V_2 = V'_1$ است، پس:

$$Z_{22}I_2 = Z_{11}I'_1 + Z_{21}I'_2 = Z_{11}\left(-I_2\right) + Z_{21}I'_2$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{Z_{21}I'_2}{Z_{11}+Z_{22}} \quad \Rightarrow \quad Z_{12t} = \left.\frac{V_1}{I'_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\left(Z_{21}\right)^2}{Z_{11}+Z_{22}}$$

خودآزمایی فصل چهارم

1. بین β و R_1 و R_2 چه رابطه‌ای باید وجود داشته باشد تا برای شبکه دوقطبی زیر داشته باشیم: $h_{12}h_{21}=1$



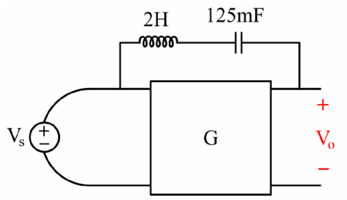
1) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{1+\beta}{\beta}$

2) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{-\beta}{1+\beta}$

3) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{\beta^2}{1+\beta}$

4) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}$

2. خروجی V_o، به ورودی داده شده کدام است؟ $V_s=10\cos(2t+30^\circ)$ (G ماتریس هایبرید است)



$$G=\begin{pmatrix}12 & 5\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

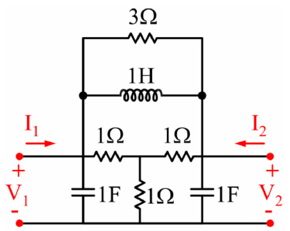
1) $1+10e^{-2t}+\cos 2t$

2) $10e^{-2t}\cos t$

3) $\cos(2t-60^\circ)$

4) هیچ‌کدام

3. ماتریس ادمیتانس دو قطبی داده شده عبارت است از:



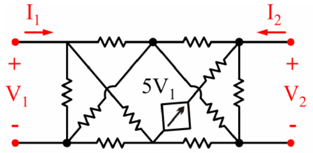
1) $\begin{pmatrix} s^2+s+1 & -1 \\ -1 & s^2 s+1 \end{pmatrix}$

2) $\frac{1}{s}\begin{pmatrix} s^2+s+1 & -1-\frac{2}{3}s \\ -1-\frac{2}{3}s & s^2+s+1 \end{pmatrix}$

3) $\frac{1}{s^2+s+1}\begin{pmatrix} 1 & -(s+1) \\ -(s+1) & 1 \end{pmatrix}$

4) $\frac{1}{s^2+s+1}\begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}$

4. در شبکه نشان داده شده، با فرض اینکه همهٔ مقاومت‌ها 1Ω باشند، y_{22} برابر است با:



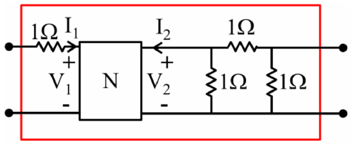
1) $\frac{8}{5}$

2) $\frac{5}{8}$

3) $\frac{3}{5}$

4) $\frac{5}{3}$

5. چنانچه دو قطبی N دارای ماتریس امپدانس $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس انتقال دو قطبی N_1 کدام است؟



N_1

1) $\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4.5 & 2.5 \\ 5.5 & 3.5 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5.5 & 3 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

6. چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

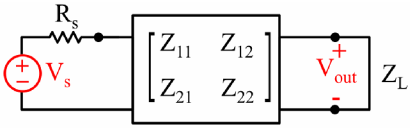
الف) اگر قطب دوم یک دو قطبی با امپدانس Z_L بار شود (شکل الف) آنگاه داریم:

$$\frac{V_{out}}{V_s}=\frac{Z_{12}.R_L}{(Z_{11}+R_S)(Z_{22}+R_L)-Z_{12}.Z_{21}}$$

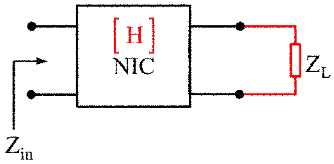
ب) پارامترهای ماتریس **H** برای یک NIC، به بار Z_L وابسته است.

ج) اگر دو شبکه **A** و **B** را به صورت متوالی به دنبال هم ببندیم (شکل ج) آنگاه $y_{12}=\frac{-y_{12}^{a}.y_{12}^{b}}{y_{11}^{b}+y_{22}^{b}}$

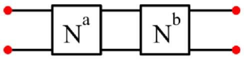
1) 0
2) 1
3) 2
4) 3



الف



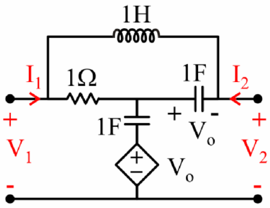
ب



ج

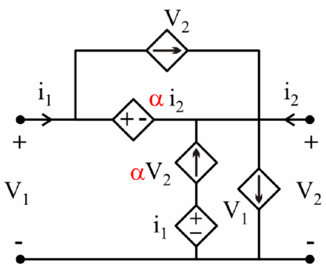
7. پارامتر y_{21} برای دوقطبی شکل زیر برابر است با:

1) $-\frac{S^2-S-1}{S(S+1)}$
2) $-\frac{S^2+S+1}{S(S+1)}$
3) $-\frac{S^2+3S+1}{S(3S+1)}$
4) $-\frac{S^2-3S-1}{S(3S+1)}$

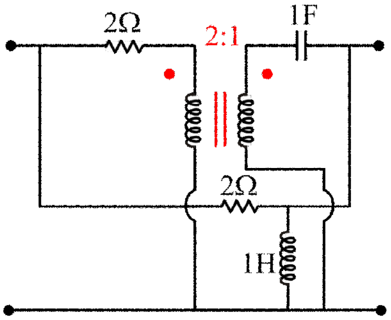


8. α را به‌گونه‌ای تعیین کنید که در دوقطبی نشان داده شده، داشته باشیم: $h_{12}=3h_{21}$

1) +2
2) −2
3) هر دو
4) هیچ‌کدام



9. ماتریس ادمیتانس دو قطبی داده شده کدام است؟



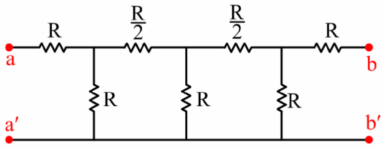
1) $\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} \\ \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} & \frac{5s^2+4s+4}{2s(s+2)} \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} \frac{s^2+4s+4}{2s(s+2)} & \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} \\ \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{2-s}{2(s+2)} \\ \frac{2-s}{2(s+2)} & \frac{5s^2+4s+4}{2s(s+2)} \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} \frac{s^2+4s+4}{2s(s+2)} & \frac{2-s}{2(s+2)} \\ \frac{2-s}{2(s+2)} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$

10. ماتریس انتقال دو قطبی داده شده کدام است؟



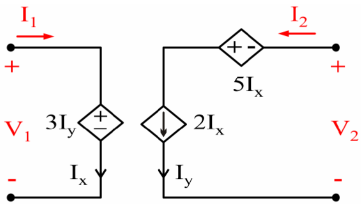
1) $\begin{pmatrix} 12R & \frac{21}{4} \\ 8 & 12R \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 8 & 12R \\ \frac{21}{4R} & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 12R & 8 \\ 14 & \frac{21}{4R} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{21}{4} & 8R \\ \frac{12}{R} & \frac{21}{4} \end{pmatrix}$

11. ماتریس هایبرید (H) و ماتریس T (پارامترهای انتقالی) برای دو قطبی داده شده کدام است؟



1) $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

2) $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، $T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3) $H = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

4) $H = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$