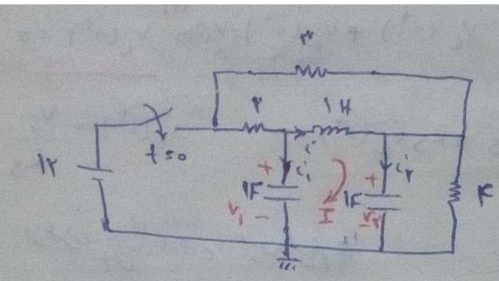
جواب تمرینات سری پنجم



۲-

$$\frac{d^2 i}{dt^2}(0^+) = ?$$

$$(KVL)_I \Rightarrow -V_1 + L\frac{di}{dt} + V_2 = 0$$

$$V_2 - V_1 + \frac{di}{dt} = 0 \quad (1)$$

از رابطه (۱) مشتق می‌گیریم:

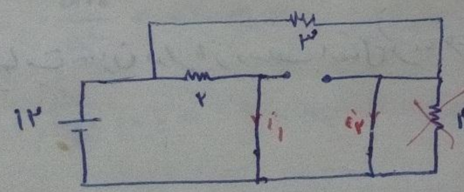
$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt}$$

وچون در $t=0^+$ خواسته $\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2}(0^+) = \frac{dv_1}{dt}(0^+) - \frac{dv_2}{dt}(0^+)$

از طرفی $i(0^+) = C\frac{dv}{dt}$ پس:

$$\frac{d^2 i}{dt^2}(0^+) = i_1(0^+) - i_2(0^+) \quad (2)$$

وچون قبل از صفر هیچ منبع مستقلی در مدار نبود پس $v_1(0^-) = v_2(0^-) = 0$ ، حال کافیست جریان‌ها را در صفر مثبت محاسبه کنیم:



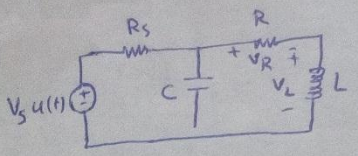
$$i_1 = \frac{12}{2} = 6$$

$$i_2 = \frac{12}{3} = 4$$

⇐ در صفر مثبت (۳)

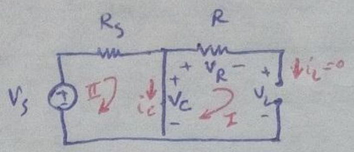
از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{d^2 i}{dt^2}(0^+) = 6 - 4 = 2$$



چون ورودی مدار بر حسب $u(t)$ است پس قبل از صفر هیچ منبع مستقلی در مدار نداریم پس $i_L(0)=v_C(0)=0$

در صفر مثبت مدار به صورت زیر در می آید:



$$V_R(0^+)=0 \checkmark$$

$$(KVL)_I \Rightarrow V_L(0^+)+V_R(0^+)=V_C(0^+) \Rightarrow V_L(0^+)=0 \quad (1) \checkmark$$

$$(KVL)_{II} \Rightarrow -V_s+R_s i_C(0^+)=0 \qquad i_C(0^+)=\frac{V_s}{R_s}$$

از طرفی $i_C=C\frac{dv_C}{dt}$ پس داریم:

$$C\frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{V_s}{R_s} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{V_s}{CR_s} \quad (2)$$

از رابطه ی (۱) داریم: (مشتق از طرفین):

$$\frac{dv_L}{dt}(0^+)+\frac{dv_R}{dt}(0^+)=\frac{dv_C}{dt}(0^+) \quad (5) \rightarrow \begin{cases} V_R=Ri_L \Rightarrow \frac{dv_R}{dt}(0^+)=R\frac{di_L}{dt}(0^+) \\ V_L(0^+)=0=L\frac{di_L}{dt}(0^+) \quad (3) \end{cases}$$

$$\frac{dv_R}{dt}(0^+)=0 \quad (4) \checkmark \Leftarrow$$ از (۲) و (۳)

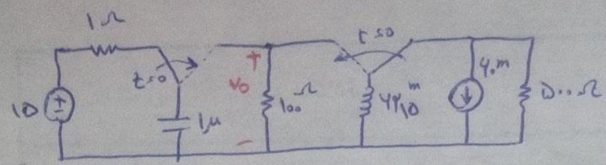
$$(2),(4),(5) \Rightarrow \frac{dv_L}{dt}(0^+)=\frac{V_s}{CR_s} \checkmark$$

در بینهایت خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می شود و داریم:

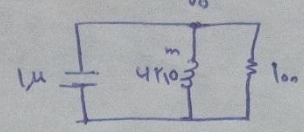
تقسیم ولتاژ $\Rightarrow V_R(\infty)=\frac{R}{R+R_s}V_s \checkmark$

$V_L(\infty)=0 \checkmark \longrightarrow$ چون سلف اتصال کوتاه شده

۱۴) $V_o(t) = ?$



مدار را در بینهایت رسم می‌کنیم :



$$(KCL)_{V_o} \Rightarrow \frac{V_o}{100} + 1\mu \frac{dV_o}{dt} + \frac{1}{62.5m}\int V_o\, dt + i_L(0) = 0$$

از طرفین مشتق می‌گیریم :

$$\frac{1}{100}\frac{dV_o}{dt} + 1\mu \frac{d^2V_o}{dt^2} + \frac{1}{62.5m}V_o = 0$$

$$\frac{d^2V_o}{dt^2} + 10^4 \frac{dV_o}{dt} + 16\times 10^6 V_o = 0 \Rightarrow S_1 = -2000,\quad S_2 = -8000$$

$$V_o(t) = k_1 e^{-2000t} + k_2 e^{-8000t} + k_3$$

$V_o(\infty) = k_3$ چون در بینهایت مدار منبع مستقل ندارد

$k_3 = 0$ پس $V_o(\infty) = 0$

$$V_o(0) = k_1 + k_2$$

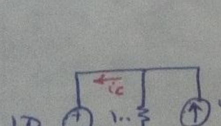
$V_C(0) = V_o(0)$ وقبل از کلید زنی ولتاژ خازن با ولتاژ منبع ۱۵ ولتی برابر است پس :

$k_1 + k_2 = 15 \quad (1)$

$$\frac{dV_o}{dt} = -2000 k_1 e^{-2000t} + (-8000) k_2 e^{-8000t}$$

$$\frac{dV_o}{dt}(0) = -2000 k_1 - 8000 k_2$$

حال جریان خازن را در 0^+ حساب می‌کنیم : $\frac{dV_o}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$



$$i_C - 60m + \frac{15}{100} = 0 \Rightarrow i_C = -90m$$

$$\frac{dV_o}{dt}(0^+) = \frac{-90m}{1\mu} = -90\times 10^3$$

$$-۲۰۰۰k_۱ - ۸۰۰۰k_۲ = -۹۰۰۰۰ \quad (۲)$$

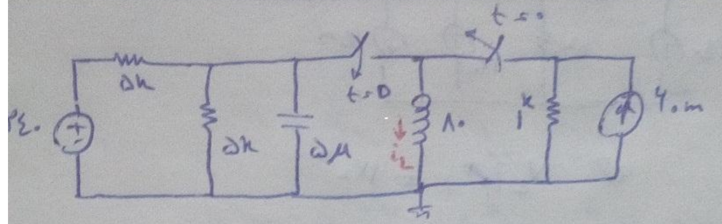
$$(۱,۲) \Rightarrow \begin{cases} k_۱ + k_۲ = ۱۵ \\ -۲k_۱ - ۸k_۲ = -۹۰ \end{cases}$$

$$k_۱ = ۵$$

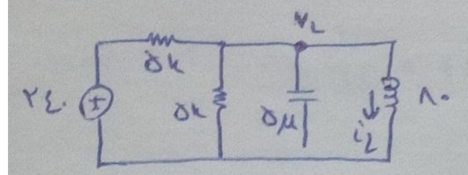
$$k_۲ = ۱۰$$

$$V_۰(t) = ۵e^{-۲۰۰۰t} + ۱۰e^{-۸۰۰۰t}$$

$i_L(t)=?$ (۵



در نهایت مدار به صورت زیر است:



$(kcl)_{V_L} \Rightarrow i_L + 5^{\mu}\frac{dv_L}{dt} + \frac{v_L}{5^k} + \frac{v_L-240}{5^k} = 0$ (۱

$v_L = 80\frac{di_L}{dt}$ (۲

$(1,2) \Rightarrow i_L + 400^{\mu}\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{v_L}{2.5^k} = 48^m$

$$i_L + 400^{\mu}\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 32^m\frac{di_L}{dt} = 48^m$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 80\frac{di_L}{dt} + 2500\, i_L = 120$$

این معادله هم جواب عمومی دارد و هم جواب خصوصی:

جواب عمومی $\Rightarrow s^2 + 80s + 2500 = 0 \qquad s_{1,2} = -40 \pm 1580j$

$$i_L(t) = e^{-40t}\left(A\cos 1580t + B\sin 1580t\right) + y_p$$

جواب خصوصی

$i_L(0) = A + y_p$ (۱

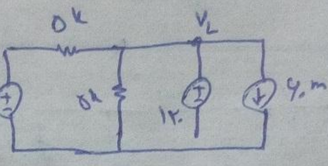
$i_L(\infty) = y_p = \frac{240}{5^k} = 48^m$

$i_L(0) = 60^m$ (۲ $\qquad (1,2) \Rightarrow A = 60^m$

$$\frac{di_L}{dt}(t) = -40\,e^{-40t}\left(A\cos 1580t + B\sin 1580t\right) + e^{-40t}\left(-1580\,A\sin 1580t + 1580\,B\cos 1580t\right)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = -40\,(1580\,A) + 1580\,B \quad (3)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{v_L(0^+)}{L}$$



$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{120}{80} = 1.5 \quad (4)$$

$$v_L(0^+) = 120\ \text{v}$$

$(3,4) \Rightarrow$

$$-40\,(1580)\,A + 1580\,B = 1.5$$

$$1580\,B = 3793.5$$

$$B = 2.4$$

$$i_L(t) = e^{-40t}\left(1.6\cos 1580t + 2.4\sin 1580t\right) + 0.048$$

از رابطه (۱) می‌توان i(0) را بدست آورد:

$$\cancel{0\times i'(0)} + i(0) + 3\cancel{\int_0^0 i\,dt} - 2 = 0$$

$$\boxed{i(0) = 2} \quad (3)$$

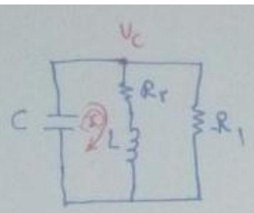
$$(3,2) \Rightarrow \int_2^i \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{4}{t+1}\,dt$$

$$\ln\frac{i}{2} = -4\ln(t+1)$$

$$\frac{i}{2} = \frac{1}{(t+1)^4} \Rightarrow i(t) = \frac{2}{(t+1)^4}$$

$t=1$ در $\Rightarrow i(1) = \frac{2}{(1+1)^4} = \frac{1}{8}$

۶-



$$(KCL) \Rightarrow i_C + i_L + \frac{v_C}{-R_1} = 0$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + i_L - \frac{v_C}{R_1} = 0 \qquad (1)$$

$$(KVL)_{I} \Rightarrow v_C = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt} \qquad (2)$$

$$(1,2) \Rightarrow R_2 C\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L - \frac{R_2}{R_1} i_L - \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(R_2 C - \frac{L}{R_1}\right)\frac{di_L}{dt} + \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) i_L = 0$$

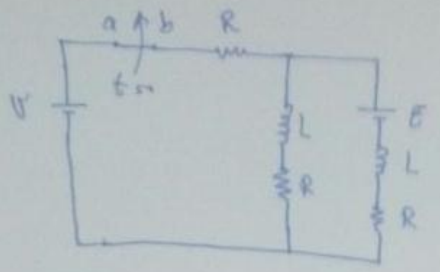
$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC}\left(R_2 C - \frac{L}{R_1}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) i_L = 0$$

شرط نوسانی بودن:

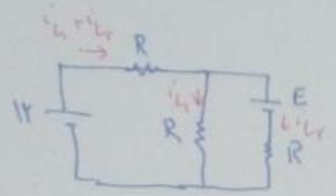
$$\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \omega_0^2 > 0 \end{cases}$$

$$2\alpha = \frac{1}{LC}\left(R_2 C - \frac{L}{R_1}\right) = 0 \qquad \underline{R_1 = \frac{L}{R_2 C}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) > 0 \qquad \underline{R_1 > R_2}$$



قبل از باز شدن کلید:



$$\begin{cases} ۱۲ = R\,(i_{L_1}+i_{L_2}) + R\,i_{L_1} \\ R\,i_{L_1} - R\,i_{L_2} - E = ۰ \end{cases}$$

$$i_{L_1} = \frac{۱}{۳R}\,(۱۲+E)$$

$$i_{L_2} = \frac{۱}{۳R}\,(۱۲-۲E)$$

برای اینکه در کلید جرقه ایجاد نشود داریم:

$$i_{L_1} = -\,i_{L_2} \Rightarrow \underline{\underline{E = ۲۴}}$$