



فصل ۱ روش‌های منظم تحلیل مدار - روش فضای حالت

مقدمه



از امروز می‌رویم سراغ درس مدارهای الکتریکی ۲ و با فهم کامل این درس، در مدارهای الکتریکی صاحب سبک می‌شویم و هر مداری که سر راهمان ببینیم، به سرعت تجزیه و تحلیل می‌کنیم؛ دیگر هیچ مداری از دست ما جان سالم به در نمی‌برد و این یعنی همان مرزهای دانایی و توانایی....

در این فصل به بررسی روش‌های منظم تحلیل مدار می‌پردازیم. در اینجا دیگر خبری از KCL بازی و KVL بازی و...ها نیست. هدف اصلی این روش‌ها در درس مدارهای الکتریکی ۲، تحلیل الگوریتمیک و به عبارتی تحلیل کامپیوتری مدار است^۱، اما قسمتی از روابط به صورت ذهنی نیز قابل تعمیم است که به دقت به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

دقت کنید؛ می‌خواهیم با داشتن (۱) گراف مدار (۲) معادلات شاخه‌ها (۳) شرایط اولیه و بالاخره (۴) ورودی‌ها، مدار را تحلیل کنیم. برای این کار چهار روش وجود دارد که به بررسی آن‌ها می‌پردازیم:



۱-۱ روش منظم



ابتدا به بررسی روش منظم گره می‌پردازیم. یادتان باشد وقتی شخصیت کم‌هوشی مثل کامپیوتر!! می‌خواهد یک مدار را تحلیل کند، از همین روش کمک می‌گیرد. نرم‌افزار «اسپایس» را که می‌شناسید، کارش همین است. یک مثال ساده می‌زنم تا قدر خودتان را بیشتر بدانید. شما در کمتر از یک ثانیه به کمک چشم‌هایتان گراف مدار را می‌بینید، ولی کامپیوتر که چشم ندارد؛ پس باید به گونه‌ای گراف مدار را در قدم اول به آن معرفی کرد، به همین منظور ابتدا **ماتریس تلاقی** A را معرفی می‌کنیم؛ اگر n

۱- که بحث کامپیوتری آن از موضوع کنکور کارشناسی ارشد خارج است.

www.PowerEn.ir

تعداد گره‌های مستقل مدار (منهای گره زمین) و b تعداد شاخه‌های مدار باشد، ماتریس تلاقی مختصر شده A از مرتبه $n \times b$ خواهد بود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{matrix} \text{شماره شاخه‌ها} \\ \downarrow \\ \left(a_{ij} \right)_{n \times b} \end{matrix} \quad (1-1)$$

تکرار می‌کنم: n ، تعداد گره‌های مستقل (یعنی تعداد کل گره‌ها منهای یک) و b ، تعداد کل شاخه‌های مدار است.

به طوری که:

اگر شاخه j ام به گره i ام وصل نباشد، $a_{ij} = 0$

اگر شاخه j ام به گره i ام وصل باشد و جریانش از گره خارج شود، $a_{ij} = +1$

اگر شاخه j ام به گره i ام وصل باشد و جریانش به گره وارد شود، $a_{ij} = -1$

در اینجا معادلات اساسی ماتریسی به صورت روابط زیر هستند:



$$AJ = 0$$

(۲-۱)

این رابطه، همان KCL است.

$$V = A' \times e$$

(۳-۱)

و این یکی همان KVL است.

در این روابط، $J_{b \times 1}$ = بردار جریان شاخه‌ها، $V_{b \times 1}$ = بردار ولتاژ شاخه‌ها، $e_{n \times 1}$ = بردار ولتاژ گره‌ها و $A'_{b \times n}$ = ترانپوز ماتریس تلاقی هستند.

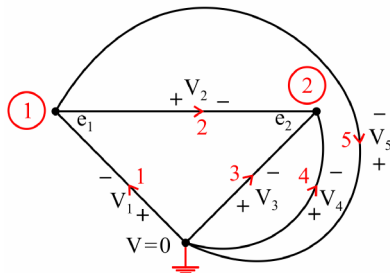


منظورتان این است که وقتی کامپیوتر می‌خواهد KCL و یا KVL بنزد، هیچ‌یک از ابتکارهای ما را نمی‌فهمد؛ اما این

شخصیت کم‌هوش! ضرب ماتریسی را خوب می‌فهمد! پس به جای KCL، رابطه (۲-۱) و به جای KVL، رابطه (۳-۱) را به کار می‌گیرد.



۱- در گراف شکل زیر ماتریس تلاقی A را معین کنید.



شکل (۱-۱) گراف تمرین ۱

۱- به دلیل گره مبنا یا زمین



با توجه به رابطه (۱-۱) و با در نظر گرفتن این نکته که این گراف دارای ۲ گره مستقل و ۵ شاخه است، داریم:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



یک نفر لطف کند و رابطه (۲-۱) را در اینجا چک کند.



چک کردن آن هم با خودم:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{pmatrix} = 0$$

و اگر مثلاً سطر اول را بسط دهیم:

$$-J_1 + J_2 + J_5 = 0$$



آفرین! این رابطه، همان **KCL** در گره $\textcircled{1}$ است که برای گره $\textcircled{2}$ هم قابل تعمیم است و به همین ترتیب برای

رابطه (۳-۱)...



حالا که گرم شدم، ادامه می‌دهم:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

و باز به عنوان نمونه با بسط سطرهای اول و دوم داریم:

$$V_1 = -e_1$$

$$V_2 = e_1 - e_2$$



که باز به وضوح، بر KVL در گراف شکل (۱-۱) منطبق است. به هر حال رابطه نهایی در روش گره به این صورت است؛

البته بگذارید قبل از اینکه به سراغ رابطه نهایی برویم، بگوییم که پس از یک سری محاسبات در روش منظم گره به رابطه‌ای می‌رسیم که از آن رابطه، ولتاژ گره‌ها به دست می‌آید. حالا به این رابطه خوب نگاه کنید:

$$Y_n \times e = I_s \quad (۴-۱)$$

در این رابطه: Y_n = ماتریس ادمیتانس گره $(n \times n)$ ، e = بردار ولتاژ گره‌ها $(n \times 1)$ و I_s = بردار منابع جریان گره‌ها $(n \times 1)$ است.

در روش ذهنی یا دستی، وصول به درایه‌های Y_n و I_s کار ساده‌ای است؛ کاری که اگر کامپیوتر بخواهد انجام دهد، برایش بسیار دشوار است.

$$\left. \begin{aligned} y_{ii} &= \text{عناصر قطری} = \text{مجموع ادمیتانس‌های وصل شده به گره } i \text{ ام} \\ y_{ij} &= \text{عناصر غیر قطری} = \text{منفی مجموع ادمیتانس‌های مشترک بین دو گره } i \text{ ام و } j \text{ ام} \end{aligned} \right\}$$

و عنصر k ام از بردار منابع جریان گره‌ها، به صورت زیر به سادگی تعریف می‌شود:

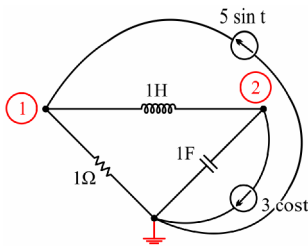
$$I_{sk} = \text{جمع جبری منبع جریان‌های ورودی به گره } k \text{ ام}$$

یعنی منبع جریان‌های ورودی با علامت مثبت و منابع جریان خروجی با علامت منفی منظور می‌شوند.



۲- معادلات ماتریسی گره را در مدار شکل زیر در حالت دایمی

سینوسی بنویسید.

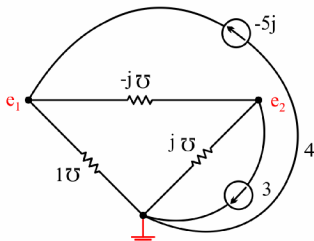


شکل (۲-۱) مدار تمرین ۲



خُب، مدار را با عینک نگاه می‌کنیم و مقادیر مقاومت‌ها را برحسب مهو \bar{U} می‌نویسیم، چون این‌طور که پیداست

در این روش به ادمیتانس‌ها علاقه‌مندتریم تا امپدانس؛ پس برو که رفتیم!



شکل (۳-۱) مدار تمرین ۲ با عینک

حال با توجه به رابطه (۴-۱) و توضیحات آن:

$$\begin{pmatrix} 1-j & j \\ j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5j \\ -3 \end{pmatrix}$$



که حل آن هم مثل نوشیدن آب (از نوع گوارا) است. مثلاً:

$$je_1 + 0e_2 = -3 \Rightarrow e_1 = 3j \Rightarrow e_1 = 3\cos(t + 90^\circ) = -3\sin t$$

و یا:

$$(1-j) \times 3j + je_2 = -5j$$

$$3j + 3 + je_2 = -5j \Rightarrow e_2 = -8 + 3j$$

$$e_2 = \sqrt{73} \cos\left(t + \pi - \tan^{-1} \frac{3}{8}\right)$$



قبول دارید که خیلی جالب و البته ساده است؟

راستی قبل از آنکه سراغ روش بعدی برویم، باید عرض کنم که در این روش هرگاه منبع ولتاژی موجود بود، آن را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم. (مدار معادل نورتن)؛ چراکه در این روش اصلاً منبع ولتاژ معنی ندارد. حالا به کمک شما روش دوم را که دوگان روش اول است، به سرعت مرور می‌کنیم.



۲-۱ روش منظم

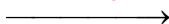
مشابه روش قبل که ماتریس تلاقی A داشتیم، اینجا ماتریس مش M داریم. اگر گفتید چطور؟



حتماً این جور دیگری: در اینجا ماتریس مش از مرتبه $\ell \times b$ است، به طوری که:



شماره شاخه‌ها



$$M = \begin{matrix} \text{شماره مش‌ها} \\ \downarrow \end{matrix} \left(m_{ij} \right)_{\ell \times b} \quad (5-1)$$

۱- قبل از شنیدن (و یا خواندن!) پاسخ دوستان، شما هم حتماً یک‌بار به طور کامل جواب بدهید.

که ℓ تعداد مش‌های مستقل و b باز هم تعداد شاخه‌هاست، به طوری که:

اگر شاخه j اصلاً در مش i نباشد، $m_{ij} = 0$

اگر شاخه j ام در مش i بوده و با آن هم‌جهت باشد، $m_{ij} = +1$

اگر شاخه j ام در مش i بوده ولی خلاف جهت آن باشد، $m_{ij} = -1$

معادلات اساسی ماتریسی در اینجا بدین گونه است:

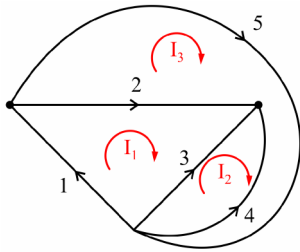
$$MV = 0 \quad (۶-۱)$$

که این رابطه همان KVL است. و این یکی نقش KCL را بازی می‌کند:

$$J = M' \times I \quad (۷-۱)$$

که $M'_{b \times \ell}$ = ترانهاد ماتریس مش و $I =$ بردار جریان مش‌هاست؛ پس I از مرتبه $\ell \times 1$ است.

۳- برای گراف شکل (۱-۱)، ماتریس اساسی مش M را بنویسید.



شکل (۴-۱) گراف تمرین ۳

این ماتریس 5×3 است و به راحتی مشخص می‌شود:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

و اگر باز معادلات (۶-۱) و (۷-۱) را بنویسیم، به راحتی KVL و KCL مشاهده می‌شود.^۱



ادامه می‌دهم؛ در این روش رابطه نهایی این گونه است:

$$Z_m \times I = E_s \quad (۸-۱)$$

که در آن:

Z_m = ماتریس امپدانس مش $(\ell \times \ell)$ ، $I =$ بردار جریان مش‌ها $(\ell \times 1)$ و $E_s =$ بردار منابع ولتاژ مش‌ها $(\ell \times 1)$ است.

حدس شما به کمک دوگانی از مقادیر آن‌ها به روش دستی یا ذهنی چیست؟

$$\left. \begin{aligned} \text{عناصر قطری} &= \text{مجموع امپدانس‌های موجود در مش } i \text{ ام} &= Z_{ii} \\ \text{عناصر غیر قطری} &= \text{منفی مجموع امپدانس‌های مشترک بین دو مش } i \text{ ام و } j \text{ ام} &= Z_{ij} \end{aligned} \right\}$$



و $E_{sk} =$ جمع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام.

جمع جبری به این صورت که:

اگر جریان مش از سر منفی ولتاژ وارد شد، آن را با علامت مثبت و اگر از سر مثبت منبع ولتاژ وارد شد، با علامت منفی منظور می‌کنیم.

۱- به دلیل سادگی بیش از حد، از این کار پرهیز می‌کنیم.



آفرین، عالی است! راستی در مورد حرف آخرتان؛ آیا خودتان دقت داشتید که علامت منبع ولتاژ دقیقاً قرینه آن

چیزی است که در ابتدای درس در روش مش گفتیم؟



بله دیگر، علتش هم واضح است؛ چون این عبارات به طرف دیگر تساوی (=) رفته‌اند، پس علامتشان قرینه می‌شود.



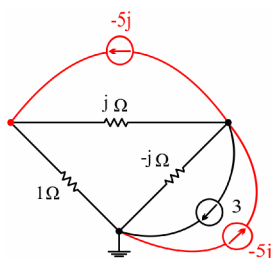
باز هم آفرین! ضمناً در اینجا هر منبع جریانی را به منبع ولتاژ می‌تبدیلیم!



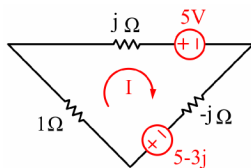
۴- برای مدار شکل (۲-۱) روابط ماتریسی مش را بنویسید.



باید منابع جریانی را به منابع ولتاژ تبدیل کنیم:



شکل (۵-۱) مدار حل تمرین ۴



شکل (۶-۱) مرحله بعدی حل تمرین ۴

و باز به صورت ساده‌تر:

با یک KVL ساده داریم:

$$(1 + j - j)I = 5 - 3j - 5$$

$$I = -3j \Rightarrow i(t) = 3 \sin t$$



آفرین! از همبستگی روابط گره و مش لذت ببرید:




$$e_1 = -1 \times I = -3 \sin t$$



حالا اگر مدارمان منابع وابسته داشت چه کنیم؟

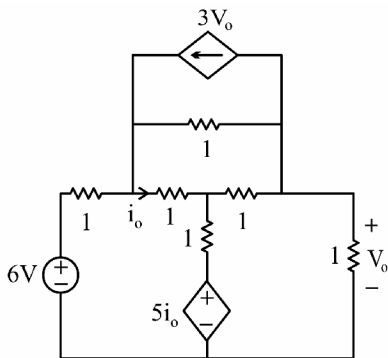


باز هم یک سؤال اساسی پرسیدی؛ همین درست است دیگر... و من به خاطر سؤال مناسب شما، یک جواب خیلی روان

و خوب می‌دهم: ببینید اگر منبع وابسته داشتید، ابتدا  هایتان آستیگمات شود؛ یعنی  را  ببینید و معادلات را عین قبل بنویسید، سپس متغیرهای منبع وابسته را برحسب ولتاژ گره‌ها یا جریان مش‌ها بنویسید و در آخر مقادیر مربوط را به سمت چپ ببرید. (یادتان باشد که فقط مربوط به همان سطر متناظرش است؛ فقط با تغییر علامت). لطفاً این حرف‌های آخر را یک‌بار دیگر بجوید؛ هضمش راحت‌تر می‌شود!



۵- برای مدار شکل زیر معادلات منظم مش و گره را بنویسید.



شکل (۷-۱) مدار تمرین ۵

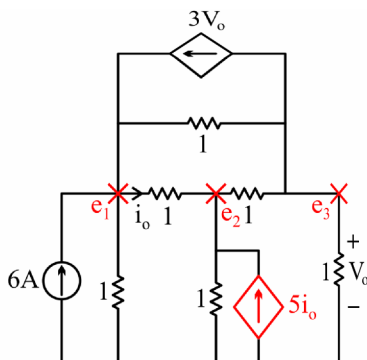


ابتدا روش گره:



در این روش از منبع ولتاژ خوشمان نمی‌آید، پس آن را به منبع

جریان تبدیل می‌کنیم:



شکل (۸-۱) مدار تمرین ۵ برای روش گره

ازطرفی حالا می‌دانیم:

$$V_0 = e_3$$

$$i_o = e_1 - e_2$$



و به کمک داستان‌های روش ذهنی:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3V_0 \\ 5i_0 \\ -3V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3e_3 \\ 5e_1-5e_2 \\ -3e_3 \end{pmatrix}$$

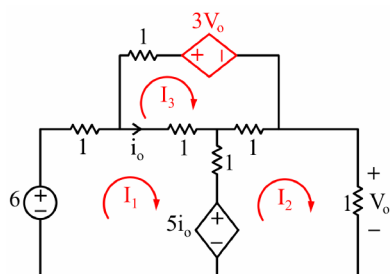
و پس از ساده کردن، یعنی بردن بعضی چیزها! (e_i ها) از راست به چپ، چنین به دست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -6 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



اکنون روش مش:

و برای روش مش، منابع را به صورت منبع ولتاژ قرار می‌دهیم:



شکل (۹-۱) مدار تمرین ۵ برای روش مش

و می‌دانیم:

$$V_0 = i_2$$

$$i_0 = i_1 - i_3$$

و با روش ذهنی مش:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5(i_1-i_3) \\ 5(i_1-i_3) \\ -3i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -6 \\ -6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

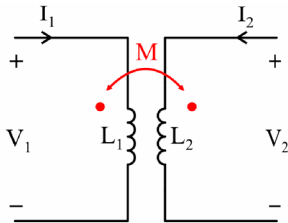
حالا اگر مدار شامل سلف‌های تزویج‌دار بود، چه باید بکنیم؟





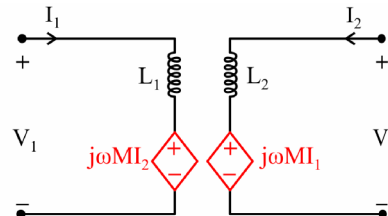
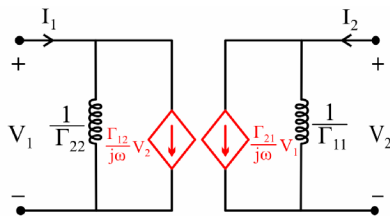
به نظرم در قدم اول باید مدار معادل‌های سلف تزویج را به دست آوریم و سپس همان حرف‌های قبلی در مورد

منابع وابسته ...



شکل (۱۰-۱) سلف‌های دارای تزویج

و حالا مدار معادل‌های آن را به دست می‌آوریم؛ یعنی هر جا خواستیم مسئله‌ای را از روش منظم تحلیل کنیم و در آن مدار، سلف‌ها دارای تزویج بود، بسته به نوع روش از مدل‌های زیر کمک می‌گیریم:

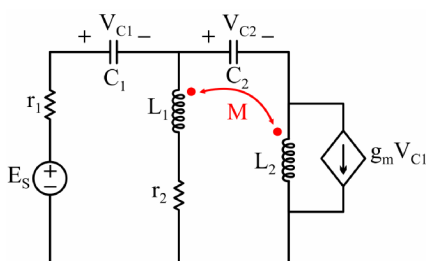


شکل (۱۱-۱) مدار معادل سلف‌های تزویج مفید در روش مش

آفرین! ضمناً به خاطر داشته باشید که به طور کلی منابع وابسته، تقارن ماتریس Y و Z را به هم می‌زنند ولی



سلف‌های تزویج نه. در فصل آخر، داستان مفصلی در این باب خواهیم داشت؛ نام آن داستان، قضیه «هم‌پاسخی» است که به موقع سراغش می‌رویم و



شکل (۱۳-۱) مدار تمرین ۶

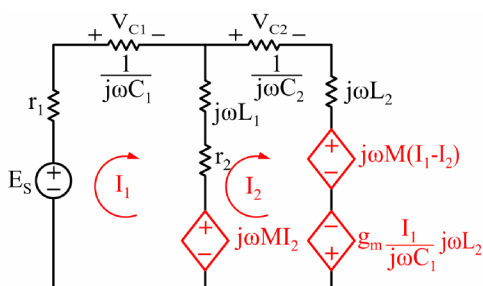
۶- معادلات ماتریسی مش را بنویسید.





توضیح بدهم:

اجازه بدهید خود من با روشی که عرض کردم،



شکل (۱۴-۱) مدار حل تمرین ۶

یعنی به کمک روش منظم، مش معادلات ماتریس 2×2 را می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} r_1 + r_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega c_1} & -r_2 - j\omega L_1 \\ -r_2 - j\omega L_1 & j\omega(L_1 + L_2) + r_2 + \frac{1}{j\omega c_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s - \cancel{j\omega M I_2}^0 \\ 2 \cancel{j\omega M I_2}^0 - \cancel{j\omega M I_1}^0 + \frac{g_m L_2}{c_1} I_1 \end{pmatrix}$$

و به عبارتی پس از انتقال جملات دارای I_1 و I_2 به سطرهای متناظر سمت راست، چنین به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} r_1 + r_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega c_1} & -r_2 - j\omega L_1 + j\omega M \\ -r_2 - j\omega L_1 + j\omega M - \frac{g_m L_2}{c_1} & j\omega(L_1 + L_2) + r_2 + \frac{1}{j\omega c_2} - 2j\omega M \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

۳-۱ درخت - کاتست - حلقه



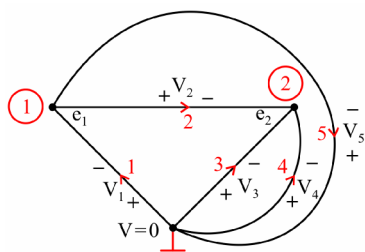
حال کمی به درس گسسته مراجعه می‌کنیم؛ در این بخش بیشتر با قیافه مدار (یا همان گراف) کار داریم.

به عنوان شروع، در مورد یک گراف، مثلاً شکل (۱-۱) کمی گپ می‌زنیم.



۷- این گراف دارای چندگره مستقل، چند مش، چند حلقه،

چند کاتست و چند شاخه است؟



شکل (۱۵-۱) گراف تمرین ۷



معلوم است دیگر؛ از شکل پیداست که 5 شاخه ($b=5$)، دو گره مستقل ($n=2$) و سه مش ($\ell=3$) دارد. تعداد

کاتست‌های مستقل و حلقه‌های مستقل را نمی‌دانم، ولی جالب شد که:

$$b = \ell + n$$

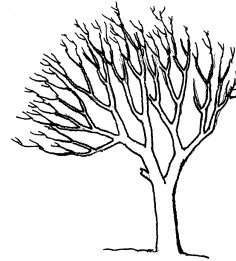
(۹-۱)

آیا همیشه همین‌طور است یا اینجا این‌طوری شد؟



سؤال خوبی پرسیدی! جالب است بدانی که همیشه همین‌طور است. جمع تعداد گره‌های مستقل و تعداد مش‌ها برابر

تعداد شاخه‌هاست و مجموع تعداد کاتست‌های مستقل و حلقه‌های مستقل هم برابر تعداد شاخه‌هاست. اصلاً تعداد کاتست‌های اساسی، برابر است با تعداد گره‌های مستقل (n) و تعداد حلقه‌های اساسی، برابر است با تعداد مش‌ها (ℓ). لطفاً یک کاغذ پیش‌نویس بردارید، چند گراف بکشید و این قضیه را در مورد آن گراف‌ها چک کنید و لذت ببرید!



۱-۳-۱ درخت



ببینید؛ هر گرافی تعداد زیادی زیرگراف دارد. از بین این زیرگراف‌ها، زیرگرافی را که دارای سه شرط زیر باشد، می‌توانیم

یک درخت در نظر بگیریم:



شاخه‌هایش به هم متصل باشد.



تمام گره‌های گراف اصلی را در بر بگیرد.



هیچ حلقه‌ای نداشته باشد. (به عبارت دیگر به هر گره‌ای فقط یک‌بار سر بزنند.)

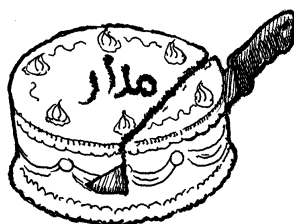


جالب شد، پس واضح است که تعداد شاخه درخت‌ها در هر گراف، برابر است با تعداد گره‌های مستقل یا n و تعداد

لینک‌ها (یعنی شاخه‌هایی از مدار که شاخه درخت نیستند)، برابر است با تعداد مش‌ها یا ℓ . راستی درست گفتم دیگر؟ به شاخه‌های یک گراف که در درخت باشند، «شاخه درخت» می‌گوییم و به آن‌هایی که در درخت نباشند، «لینک» می‌گوییم.



۲-۳-۱ کات‌ست و حلقه



هر برش از مدار را کات‌ست می‌گویند که معنایش از اسمش هم پیداست. در کات‌ست‌ها ما مجاز به KCL هستیم و



حلقه، هر مسیر بسته در مدار است که در آن علاقه‌مند به KVL باشیم.



لطفاً ببینید من درست می‌گویم؟ مثلاً در گراف شکل (۱-۱۵)، یک کات‌ست و ۱۲۴ یک حلقه است.



آفرین! البته چیز ساده‌ای است دیگر. حالا این دو جمله را خوب گوش کنید؛ می‌خواهیم حلقه اساسی و کات‌ست

اساسی را تعریف کنیم؛ می‌دانیم هر گرافی، تعداد زیادی کات‌ست و حلقه دارد؛ اما همه آن‌ها که اساسی نیستند. به عبارت باکلاس علمی! KCL در n کات‌ست اساسی، n معادله مستقل به ما می‌دهد که از حل آن‌ها، n ولتاژ مستقل کات‌ست‌ها معلوم می‌شود و به همین ترتیب KVL در ℓ حلقه اساسی، ℓ معادله مستقل به ما می‌دهد که از حل آن‌ها، ℓ جریان مستقل حلقه‌ها به دست می‌آید.

لطفاً زیر لب با من تکرار کنید:

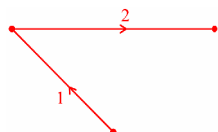
هر **یک لینک**، به همراه تعدادی شاخه درخت، تشکیل یک حلقه اساسی می‌دهد و جهت هر **حلقه اساسی**، همان جهت لینک متناظرش است.

هر **یک شاخه درخت**، به همراه تعدادی لینک، یک **کات‌ست اساسی** می‌سازد و جهت هر **کات‌ست اساسی**، همان جهت شاخه درخت متناظرش است.

راستی **یک لیم ساده**: برای یافتن کات‌ست اساسی (که گاهی مواقع کمی سخت است)، آن شاخه درخت مورد نظر را پاک می‌کنیم (در ذهنمان) و سپس تمام لینک‌هایی را که دو قسمت جداشده درخت را به هم وصل می‌کنند، لحاظ می‌کنیم.



۸- برای گراف شکل (۱-۱۵)، درخت بکشید و آن‌گاه کات‌ست‌های اساسی و حلقه‌های اساسی را مشخص کنید.

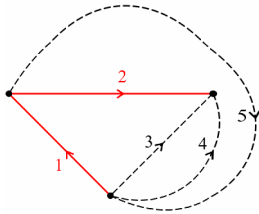


من می‌گویم؛ درخت به صورت شکل (۱-۱۶) می‌شود:



شکل (۱-۱۶) درخت متناظر با گراف تمرین ۸

پس اگر لینکها را هم با نقطه چین نشان دهیم، این گونه می شود:



شکل (۱۷-۱) گراف تمرین ۸

و حالا ۲ کاتست اساسی داریم و ۳ حلقه اساسی (که جمعشان می شود ۵؛

یعنی تعداد شاخه ها). این هم از چیزهای اساسی:

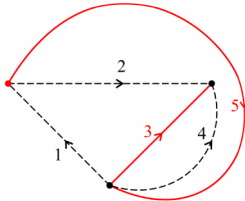
حلقه های اساسی: ۱۵ و ۱۲۳ و ۱۲۴

کاتست های اساسی: ۱۳۴۵ و ۲۳۴

پس این مسئله هم تمام شد.



نه، اشتباه نکنید، بیایید من هم یکبار جواب می دهیم؛ درخت که یکتا نیست، به درخت جدید من و در نتیجه



شکل (۱۸-۱) نگاهی دیگر به گراف تمرین ۸

لینکها و حلقه های اساسی و کاتست های اساسی نگاه کنید:

حلقه های اساسی: ۱۵ و ۲۳۵ و ۴۳

کاتست های اساسی: ۱۲۵ و ۲۳۴



باز هم درست است. باید بدانید برای هر گراف با ماتریس تلاقی A که قبلاً حرفش را زدیم، به اندازه $\det(AA')$

درخت مستقل داریم که اثبات این قضیه، خود داستانی مفصل در درس گسسته است و از حوصله بحث ما خارج است.

۴-۱ روش منظم کاتست



درحقیقت روش منظم کاتست، یه جورایی تعمیم روش منظم گره است؛ پس پُر حرفی نکنیم و قدم به قدم همان

مراحل را تکرار کنیم:

ابتدا معرفی ماتریس کاتست اساسی Q :

$$Q = \begin{matrix} \text{شماره} \\ \text{کاتست های اساسی} \end{matrix} \downarrow \begin{matrix} \text{شماره شاخه ها} \\ \rightarrow \end{matrix} \left(q_{ij} \right)_{n \times b} \quad (10-1)$$



n تعداد کاتست‌های اساسی و b تعداد شاخه‌هاست؛ به طوری که:

اگر شاخه j ام در کاتست i ام نباشد، $q_{ij} = 0$

اگر شاخه j ام در کاتست i ام بوده و با آن هم‌جهت باشد، $q_{ij} = +1$

اگر شاخه j ام در کاتست i ام بوده و خلاف جهت آن باشد، $q_{ij} = -1$

و حالا معادلات اساسی:

$$QJ=0 \quad (11-1)$$

این رابطه همان KCL است.

$$V=Q' \times E \quad (12-1)$$

و این یکی همان KVL است.

که در آن E بردار ولتاژ کاتست‌هاست و بقیه عین قبل است.

شکل نهایی معادلات به صورت زیر است:

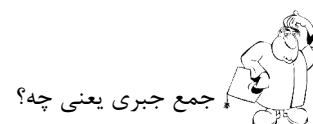
$$Y_q \times E = I_s \quad (13-1)$$

Y_q = ماتریس ادمیتانس کاتست $(n \times n)$ ، E = بردار ولتاژ کاتست‌ها $(n \times 1)$ و I_s = بردار منابع جریان کاتست‌ها $(n \times 1)$ است.

باز هم در روش ذهنی یا دستی، رسیدن به Y_q و I_s ساده است. به این جملات خوب کنید:

y_{ii} = عناصر قطری = مجموع ادمیتانس‌های موجود در کاتست i ام

y_{ij} = عناصر غیر قطری = جمع جبری ادمیتانس‌های مشترک بین کاتست‌های i ام و j ام



یعنی اگر در آن شاخه، جهت کاتست‌ها یکسان بود، آن ادمیتانس با علامت مثبت و اگر جهت کاتست‌ها متفاوت بود،

آن ادمیتانس با علامت منفی منظور می‌شود.

و بالاخره عنصر k ام از بردار منابع جریان کاتست به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{sk} = \text{جمع جبری جریان‌های عبوری از کاتست } k \text{ ام}$$

لطفاً نپرسید جبری یعنی چه! خودم می‌گویم:

اگر جهت منبع جریان خلاف جهت کاتست بود، با علامت مثبت و اگر هم‌جهت با کاتست بود، با علامت منفی منظور می‌شود.

۹- یکی از دوستان با درخت خودش! ماتریس Q گراف شکل (۱-۱) را مشخص کند.



شکل (۱۷-۱) نگاه کنید، چنین داریم:

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



و بالاخره روش آخر:



۵-۱ روش منظم حلقه



این روش نیز تعمیمی برای روش مش است. در روش مش تأکید داشتیم که نباید هیچ شاخه‌ای درون یک مش باشد، ولی در مورد حلقه اصلاً چنین شرطی نیست؛ یعنی یک مورچه را در یک نقطه از مدار بگذارید و به او بگویید که هر جایی که دوست داری برو و برگرد به همین نقطه اول؛ اسم جای پای آن مورچه، یک حلقه است. برویم سراغ کارمان: اول معرفی ماتریس حلقه اساسی B :

$$B = \begin{matrix} \text{شماره} \\ \text{حلقه‌های اساسی} \end{matrix} \downarrow \begin{matrix} \text{شماره شاخه‌ها} \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}_{\ell \times b} \quad (14-1)$$

که ℓ تعداد حلقه‌های اساسی و b تعداد شاخه‌هاست.

به طوری که:

اگر شاخه j ام در حلقه i ام نباشد، $b_{ij} = 0$

اگر شاخه j ام در حلقه i ام بوده و با آن هم جهت باشد، $b_{ij} = +1$

اگر شاخه j ام در حلقه i ام بوده و خلاف جهت آن باشد، $b_{ij} = -1$

و معادلات اساسی:

$$\begin{cases} B \cdot V = 0 \end{cases} \quad (15-1)$$

$$\begin{cases} J = B' \times I \end{cases} \quad (16-1)$$

که این روابط هم، همان KVL و KCL هستند.

همه فاکتورها مانند روابط قبلی است، فقط I بردار جریان حلقه‌های اساسی است. شکل نهایی معادلات به این فرم درمی‌آید:

$$Z_{\ell} \times I = E_s \quad (17-1)$$

که Z_{ℓ} = ماتریس امپدانس حلقه $(\ell \times \ell)$ ، I = بردار جریان حلقه‌ها $(\ell \times 1)$ و E_s = بردار منابع ولتاژ حلقه‌ها $(\ell \times 1)$ است.

و به روش ذهنی یا دستی این درایه‌ها چنین‌اند:

Z_{ii} = عناصر قطری = مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه i ام

Z_{ij} = عناصر غیر قطری = جمع جبری امپدانس‌های مشترک میان حلقه‌های i ام و j ام



این بار به جای سؤال، خودم می‌گویم:

جمع جبری یعنی اگر در آن شاخه، جهت هر دو حلقه همسایه یکسان بود، آن امپدانس با علامت مثبت و اگر نه، با علامت منفی لحاظ می‌شود.



و بالاخره E_{sk} یعنی عنصر k ام از بردار منابع ولتاژ حلقه اساسی؛ به طوری که:

$$E_{sk} = \text{جمع جبری منابع ولتاژ موجود در حلقه اساسی } i \text{ ام}$$

و تا شما سؤال نکرده‌اید یا جواب نداده‌اید (که البته هر دو کار بسیار خوبی هم هست!) بگویم در اینجا علامت عیناً مشابه علامت E_{sk} در روش مش است.



۱۰- همان صورت تمرین ۹ ولی برای ماتریس B :



به شکل (۱۸-۱) نگاه کنید و مثل آب خوردن بنویسید:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



۱۱- و حالا به عنوان آخرین تمرین از این بخش برای مدار شکل (۲-۱) و درخت شکل (۱۸-۱)، معادلات منظم کانتست را بنویسید.



به شکل (۳-۱) و (۱۸-۱) که نگاه کنیم، داریم:

$$Y_q \times E = I_s$$

$$\begin{pmatrix} 1-j & +j \\ +j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5j \\ -3 \end{pmatrix}$$



از بحث روش‌های منظم تجزیه و تحلیل مدار تا همین‌جا کافی است. سؤالاتی هم که از این بخش در کنکور

کارشناسی ارشد می‌آید، سؤالاتی بسیار روان است که شما با دو سه مرتبه خواندن این بخش از کتابی که هم‌اکنون پیش روی شماست، به راحتی از عهده آن بر خواهید آمد.



۶-۱ روش فضای حالت



توصیه می‌کنم این مبحث را خیلی عمیق بخوانید؛ چون بحث بسیار عمیق و قشنگی است...

یکی از مفیدترین و مرسوم‌ترین روش‌های تحلیل سیستم‌ها، مخصوصاً سیستم‌های غیر خطی، روش فضای حالت است که در دروس تخصصی کنترل کاملاً مورد بررسی قرار می‌گیرد. ما در اینجا، کلیاتی از این بحث را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

هدف: نوشتن معادلات مدار به صورت زیر است:

$$\dot{X} = A X + B W \quad (۱۸-۱)$$

آیا اجزای این رابطه را خوب می‌شناسید؟



X ، همان بردار حالت است که شامل عناصر مستقل ذخیره‌کننده انرژی می‌شود، مثلاً:

$$X = \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} \quad (۱۹-۱)$$

پس طبیعتاً \dot{X} هم مشتق زمانی این بردار است؛ یعنی:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{dI_L}{dt} \end{bmatrix} \quad (۲۰-۱)$$

A را ماتریس ضرایب حالت می‌گوییم، W بردار منابع (شامل ورودی‌ها) بوده و B را ماتریس ضرایب ورودی‌ها می‌نامیم.



آفرین! و در حالت ورودی صفر معادلات حالت به صورت رابطه زیر می‌شود:

$$\dot{X} = A X \quad (۲۱-۱)$$

که پاسخ آن این گونه می‌شود:

$$X(t) = e^{At} \times X_0 \quad (۲۲-۱)$$

در رابطه اخیر، X_0 بردار حالت **اولیه** است و e^{At} را **ماتریس** انتقال حالت می‌نامیم.

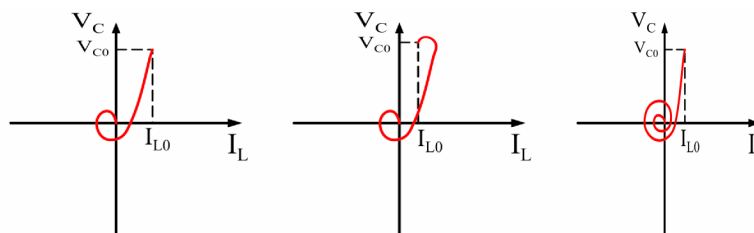


خیلی جالب است! یعنی با داشتن ماتریس ضرایب حالت A و در نتیجه معلوم بودن ماتریس انتقال حالت e^{At} ،

می‌توانیم از هر حالت اولیه‌ای « X_0 »، به بردار حالت در زمان t برسیم؛ یعنی پاسخ مدار معلوم می‌شود.



بله؛ بسیار زیباست. اصولاً روش فضای حالت، بسیار کارآمد است، مثلاً به نمودارهای شکل (۱۹-۱) توجه کنید:



شکل (۱۹-۱) نمودار فضای حالت در حالات مختلف

به نظر شما هر کدام بیانگر چه حالتی است؟

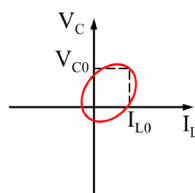


معلوم است دیگر؛ شکل (الف) حالت میرای شدید $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$ ، شکل (ب) حالت میرای بحرانی $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$ و شکل

(ج) حالت میرای نوسانی $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$.



و البته در حالت بدون تلف یا نوسانی $(Q \rightarrow \infty)$ ، به صورت



شکل (۲۰-۱) درمی‌آید:

شکل (۲۰-۱) فضای حالت در مدار نوسانی



راستی می‌دانید به منحنی‌های شکل‌های (۱۹-۱) و (۲۰-۱) چه می‌گویند؟

از سکوت شما پیداست که نمی‌دانید! بنده عرض می‌کنم؛ به آن‌ها «مسیر حالت» می‌گویند. مسیر حالت، بیانگر رابطه‌ای بین متغیرهای حالت (I_L, V_C) است به قسمی که در آن رابطه خبری از زمان t نباشد. برای رسیدن به مسیر حالت بین V_C و I_L رابطه‌ای باید پیدا شود؛ مثلاً اگر چنین داشته باشیم:

$$V_C = 5 \cos 2t \quad , \quad I_L = 3 \sin 2t - 1$$

آن‌گاه معادله مسیر حالت این‌گونه می‌شود:

$$\left(\frac{V_C}{5}\right)^2 + \left(\frac{I_L + 1}{3}\right)^2 = 1$$

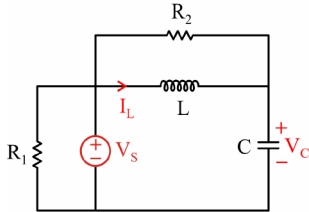
که نشان‌دهنده یک مسیر بیضوی است. در آخر فصل تمریناتی از این جنس حل خواهیم کرد.

www.PowerEn.ir

حالا برویم سراغ اصل مطلب؛ در این روش هدف رسیدن به معادلات به فرم (۱۸-۱) است؛ برای این کار چه خوب است که با KCL و KVL به معادلاتی برسیم که در آنها فقط مشتق اول یکی از متغیرهای حالت است و حضور یا عدم حضور سایر متغیرهای حالت یا ورودی‌ها اهمیتی ندارد. به این عبارت **کلیدی** توجه کنید:

برای این منظور، خوب است که برای سلف‌ها در مش‌ها یا حلقه‌ها، KVL بزنییم تا i_L ظاهر شود و برای **خازن‌ها** در گره‌ها یا کاتست‌ها KCL بزنییم تا \dot{V}_C پیدا شود.

و البته در مدارهای **غیر خطی**، استفاده از متغیرهای **شار سلف** (ϕ) و **بار خازن** (q) به جای I_L و V_C کار را بسیار ساده می‌کند. بگذارید این داستان‌ها را در دل چند مثال، بهتر درک کنیم.



شکل (۲۱-۱) مدار تمرین ۱۲

۱۲- در مدار شکل (۲۱-۱) اگر معادلات حالت را به فرم

$$\dot{X} = A X + B W \quad \text{بنویسیم که در آن } X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} \text{ و } W \text{ ورودی اسکالر باشد،}$$

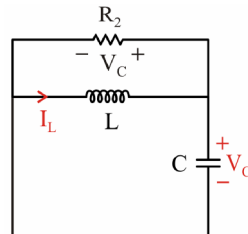
ماتریس A کدام است؟



اولاً چون فقط A را خواسته (یعنی به B کاری ندارد)، می‌توانیم برای سادگی، $W = 0$ یعنی ورودی‌ها را صفر



کنیم؛ پس مدار این‌طور می‌شود:



شکل (۲۲-۱) مدار تمرین ۱۲ در حالت ورودی صفر

حالا برای خازن، KCL و برای سلف، KVL می‌زنیم:

$$L \dot{I}_L + V_C = 0$$

$$-I_L + \frac{1}{R_2} V_C + C \dot{V}_C = 0$$

یعنی:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{R_2 C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_L \\ V_C \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = A X$$



شما دوستان با حل تعدادی مسئله نمونه در این زمینه، قدرتمند می‌شوید. حالا به بررسی **روش منظم** رسیدن به

معادلات حالت می‌پردازیم؛ خیلی ساده است، یکی دوبار به دقت این الگوریتم را بخوانید و پس از هر عبارت، معنی‌اش را با خودتان مرور کنید:



انتخاب متغیرهای حالت: ولتاژ خازن‌های مستقل و جریان سلف‌های مستقل در مدارهای خطی و بار خازن‌ها و شار سلف‌ها در مدارهای غیر خطی یا تغییرپذیر با زمان.



آخه چه فایده؟ در تست که این موضوع دست ما نیست، این انتخاب قبلاً توسط طراح انجام شده است.



انتخاب درخت مناسب: درخت شامل همه خازن‌ها و هیچ‌یک از سلف‌ها!

می‌دانید چرا؟



نپرسید دیگر! این همان مرحله سوم الگوریتم است، دیگر!!!



آخه من چه بگویم؟



برای **سلف‌ها**، معادله **حلقه اساسی** و برای **خازن‌ها**، معادله **کاتست اساسی** می‌نویسیم.



اگر مدار شامل حلقه‌های خازنی یا کاتست‌های سلفی باشد، دیگر درخت شامل همه خازن‌ها و هیچ‌یک از سلف‌ها

معنی ندارد؛ آن وقت چه کنیم؟



آنچه نمی‌خواستم بگویم را حالا براتون می‌گم؛ در یک کلاس n نفره، وقتی یک دانشجوی علاقه‌مند و ممتاز و خلاصه

دوست‌داشتنی باشد، استاد را فعال و سرحال و کلاس را مفید می‌کند و همین‌طور در زندگی، اگر آدم یک همسفر^۱ عالی پیدا کند، دیگر، همه چیز سفر خوشایند می‌شود.

۱- گاهی ف را می‌نویسند ولی ...!

www.PowerEn.ir

بله، می‌گفتم، اگر مدار شامل حلقه‌های خازنی و حتی منابع ولتاژ باشد و یا شامل کاتست‌های سلفی و حتی منابع جریان باشد، درخت مناسب شامل **حداکثر خازن‌ها و حداقل سلف‌ها** خواهد بود.

ضمناً پس از اجرای مرحله سوم، اگر متغیرهای اضافی ظاهر شد، این‌ها جریان و ولتاژ مقاومت‌ها هستند.

برای حذف متغیرهای غیر حالت، برای لینک‌های مقاومتی، معادله حلقه اساسی و برای شاخه‌های مقاومتی، معادله کاتست اساسی می‌نویسیم (این معادلات جبری‌اند).

یک سؤال اساسی داریم؛ اگر در حین این کارها به متغیری غیر از V_C و I_L و ورودی‌ها برخوردیم، چه کار کنیم؟

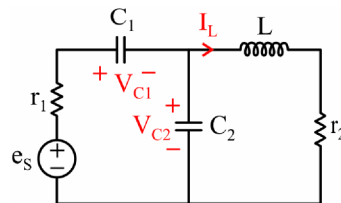
قبل از اینکه جواب شما را بگویم، یک قضیه مطرح می‌کنم:

قضیه: در یک مدار، هر سیگنالی به صورت یک ترکیب خطی از متغیرهای حالت و ورودی‌ها قابل بیان است.

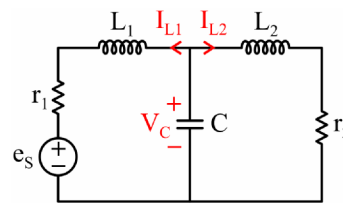
استاد، شما که جواب دوستم را دادید، پس با KCL و KVL خیالمان راحت است که همه چیز قابل تبدیل به

متغیرهای حالت و ورودی‌ها است؛ خیلی عالی شد!

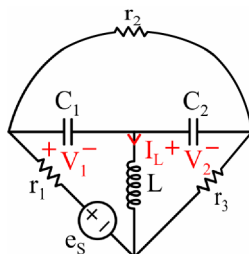
۱۳- در مدارهای نشان داده شده، معادلات حالت بنویسید. (چهار مسئله با یک بلیت!)



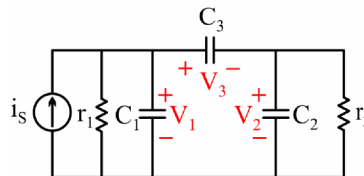
(ب)



(الف)

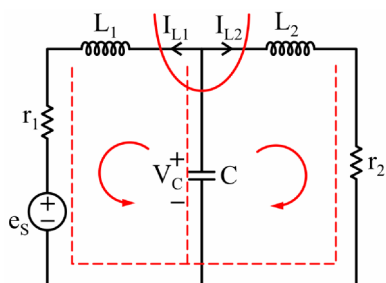


(د)



(ج)

شکل (۲۳-۱) مدارهای تمرین ۱۳- الف، ب، ج و د



شکل (۲۴-۱) درخت مناسب (خطوط نقطه‌چین) در مدار (الف)
به همراه حلقه‌ها و کاتست‌ها

اولی را خودم می‌گویم، خوب دقت کنید؛ با این



تمرین خیلی کارهای جالبی داریم. درخت مناسب روش فضای حالت، در مدار (الف) این‌گونه است:

حالا مطابق بند سوم الگوریتم منظم داریم:

$$\text{KVL} : L_1 \dot{I}_{L_1} + r_1 I_{L_1} + e_s - V_C = 0$$

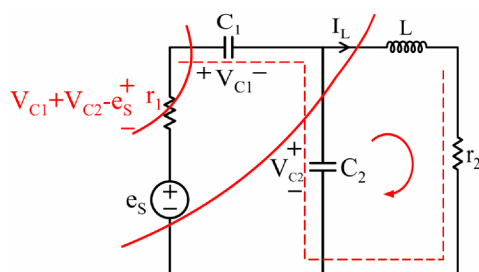
$$\text{KVL} : L_2 \dot{I}_{L_2} + r_2 I_{L_2} - V_C = 0$$

$$\text{KCL} : C \dot{V}_C + I_{L_1} + I_{L_2} = 0$$

و به عبارت دیگر:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_{L_1} \\ \dot{I}_{L_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{r_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

و حالا نوبت شماست.



شکل (۲۵-۱) درخت مناسب (خطوط نقطه‌چین) در مدار (ب)
به همراه حلقه‌ها و کاتست‌ها

در مدار (ب) هم درخت مناسب به صورت این



شکل است:

و باز با KCL برای خازن‌ها و KVL برای سلف‌ها داریم:

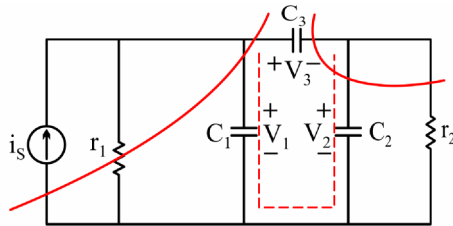
$$\text{KVL} : L \dot{I}_L + r_2 I_L - V_{C_2} = 0$$

$$\text{KCL} : C_1 \dot{V}_{C_1} + \frac{1}{r_1} V_{C_1} + \frac{1}{r_1} V_{C_2} - \frac{1}{r_1} e_s = 0$$

$$\text{KCL} : C_2 \dot{V}_{C_2} + I_L + \frac{1}{r_1} V_{C_1} + \frac{1}{r_1} V_{C_2} - \frac{1}{r_1} e_s = 0$$

یعنی:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{C_1} \\ \dot{V}_{C_2} \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r_1 C_1} & \frac{-1}{r_1 C_1} & 0 \\ \frac{-1}{r_1 C_2} & \frac{-1}{r_1 C_2} & \frac{-1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{-r_2}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1 C_1} \\ \frac{1}{r_1 C_2} \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$



باز نوبت یک مسئله قشنگ شد و...!


شکل (۱-۲۶) درخت مناسب (خطوط نقطه‌چین) در مدار (ج)

به همراه کاتست‌ها

در اینجا درخت مناسب شامل C_1 و C_2 است و دیگر نمی‌تواند شامل C_3 باشد؛ چراکه دیگر درخت نیست.

حالا می‌دانیم:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

با KCL در گره‌های چپی و راستی، دو معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{KCL} : C_3 \dot{V}_1 - C_3 \dot{V}_2 + C_1 \dot{V}_1 + \frac{1}{r_1} V_1 - i_s = 0$$

$$\text{KCL} : C_3 \dot{V}_2 - C_3 \dot{V}_1 + C_2 \dot{V}_2 + \frac{1}{r_2} V_2 = 0$$

حالا از این دو معادله می‌توانیم به معادلات فضای حالت برسیم که البته من حوصله‌اش را ندارم.



این بی‌حوصلگی هم گاهی خوب است. البته اگر نتیجه‌اش تنبلی باشد، نه. ولی اگر آدم را وادار کند که یک راه تستی

فوق‌العاده عالی برای مسایل فضای حالت پیدا کند، آن وقت خیلی خوب است.


لطفاً خوب توجه کنید، ببینید جواب (ج) مسئله درنهایت به صورت زیر می‌شود^۱:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} i_s$$

حال به شکل (۱-۲۶) دقت کنید، اگر در گره مرکب بالایی یک KCL بزنیم، داریم:

$$\text{KCL} : C_1 \dot{V}_1 + C_2 \dot{V}_2 = -\frac{1}{r_1} V_1 - \frac{1}{r_2} V_2 + i_s$$

^۱- این را بعداً در بخش مرتبه مدار می‌خوانیم که چرا این مدار با اینکه سه خازن داشت، از مرتبه ۲ شد.



این عبارت را ترجمه می‌کنیم:

$$C_1 \times (\text{سطر اول}) + C_2 \times (\text{سطر دوم}) = -\frac{1}{r_1} V_1 - \frac{1}{r_2} V_2 + i_s$$

و با توجه به رابطه اخیر، چنین تفسیر می‌کنیم:

$$C_1 a + C_2 c = -\frac{1}{r_1} = V_1 \quad \text{ضریب}$$

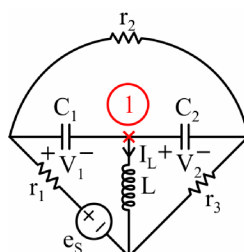
$$C_1 b + C_2 d = -\frac{1}{r_2} = V_2 \quad \text{ضریب}$$

$$C_1 e + C_2 f = 1 = i_s \quad \text{ضریب}$$

یعنی این راه فوق‌العاده ساده، قطعاً با ردّ گزینه، ما را به پاسخ درست می‌رساند و به ما چنین می‌گوید:
گزینه‌ای درست است که هر یک از سه رابطه اخیر در آن صدق کند.
حالا مسئله آخر به عهده شماست:



با این روش جالب در مدار (د) داریم:



شکل (۲۷-۱) نگاهی به مدار تمرین ۱۳ قسمت (د) با روش خاص تستی

مثلاً در گره (۱)، KCL می‌زنیم:

$$\text{KCL} : C_1 \dot{V}_1 - C_2 \dot{V}_2 = I_L$$

به عبارت دیگر:

$$C_1 \times (\text{سطر اول}) - C_2 \times (\text{سطر دوم}) = 0V_1 + 0V_2 + 1I_L + 0e_s$$



اجازه بدهید من کمی بیشتر بگویم تا آنهایی هم که مثل خود من هنوز خوب متوجه ماجرا نشده‌اند، شیرفهم شوند!

یعنی اگر قرار باشد جواب نهایی به صورت زیر باشد:

$$C_1 \times \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = -C_2 \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_L \end{pmatrix} + -C_2 \times \begin{pmatrix} j \\ k \\ \ell \end{pmatrix} e_s$$

www.PowerEn.ir

با توجه به رابطه آخر چنین خواهیم داشت:

$$C_1 a - C_2 d = 0$$

$$C_1 b - C_2 e = 0$$

$$C_1 c - C_2 f = 1$$

$$C_1 j - C_2 k = 0$$

که البته ممکن است به هر ۴ رابطه بالا نیازی نباشد و حتی یک یا دو تای آنها با رد گزینه، ما را به جواب برساند.



احسنت! کاملاً درست است. من در n تا تست این مورد را چک کرده‌ام^۱، معمولاً یکی از این روابط با رد گزینه، ما را

به جواب می‌رساند؛ مگر آنکه طراح تست، خود شما باشید و با علم به این مطلب، گزینه‌ها را بسازید! این روش آخر را جمع‌بندی می‌کنم:

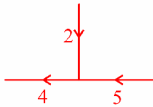
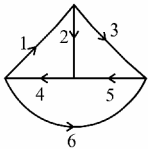
در یک جایی (هر جایی که خوشتان آمد!) برای خازن KCL و برای سلف KVL می‌زنیم؛ اگر نتیجه «یک معادله یک مشتق!» شد که مشکل حل است؛ این رابطه در اصل بیانگر یکی از سطرهای معادله حالت $\dot{X} = AX + BW$ است؛ اما اگر تعداد مشتق‌ها بیشتر از یکی شد، آن رابطه را مرتب می‌کنیم، به طوری که مشتق‌ها در سمت چپ تساوی و بقیه در سمت راست باشند؛ آن‌گاه این رابطه را به صورت ترکیب خطی از سطرهای رابطه $\dot{X} = AX + BW$ تعبیر کرده و با رد گزینه زندگی شیرین می‌شود!...

۱- شما هم حتماً این کار را انجام دهید. به این بهانه چندتا تست روش فضای حالت هم حل کرده اید؛ لطفاً همین الان (قبل از آنکه سراغ بحث لاپلاس بروید!).



مسایل تکمیلی فصل اول

۱- گراف یک شبکه و درخت مربوط به آن در شکل زیر داده شده است. حلقه‌ها و کات‌های اساسی آن کدام است؟ (مهندسی برق ۸۱)



(۱) کات‌های اساسی $\{4, 1, 6\}$, $\{1, 6, 3\}$, $\{2, 1, 3\}$
حلقه‌های اساسی $\{4, 5, 6\}$, $\{1, 5, 3\}$, $\{2, 4, 1\}$

(۲) کات‌های اساسی $\{4, 5, 2\}$, $\{5, 6, 4\}$, $\{3, 5, 6\}$
حلقه‌های اساسی $\{4, 5, 6\}$, $\{2, 5, 3\}$, $\{2, 4, 1\}$

(۳) کات‌های اساسی $\{4, 1, 6\}$, $\{5, 6, 3\}$, $\{2, 1, 3\}$
حلقه‌های اساسی $\{4, 5, 6\}$, $\{2, 5, 3\}$, $\{2, 4, 1\}$

(۴) کات‌های اساسی $\{3, 2, 4, 6\}$, $\{5, 6, 3\}$, $\{2, 1, 5, 6\}$
حلقه‌های اساسی $\{4, 5, 6\}$, $\{2, 5, 3\}$, $\{2, 4, 3\}$

۲- ماتریس تلاقی مختصر شده برای گراف جهت‌دار یک مدار به صورت زیر داده شده است:

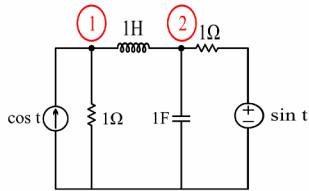
شماره شاخه‌ها \rightarrow 1 2 3 4 5 6 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ولتاژهای کدامیک از دسته شاخه‌های زیر را می‌توان به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب کرده و ولتاژ سایر شاخه‌ها را برحسب آن‌ها بیان کرد؟ (مهندسی برق ۷۸)

(۱) $\{2, 4, 7\}$ (۲) $\{2, 5, 6\}$ (۳) $\{3, 4, 6\}$ (۴) $\{3, 5, 7\}$

۳- ماتریس ادمیتانس گره $Y(j\omega)$ برای مدار شکل زیر کدام است؟



$$\begin{bmatrix} 1-j & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1+j & -j \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (4)$$

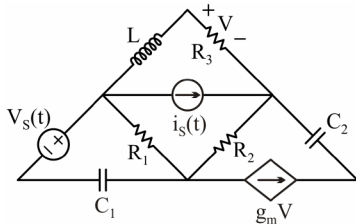
$$\begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1+j & j \\ j & j \end{bmatrix} \quad (3)$$

۴- در مدار شکل زیر کدام روش تحلیل به معادلاتی با کمترین تعداد متغیرهای مجهول می‌انجامد؟



(مهندسی برق ۷۷)



(۱) کاتست

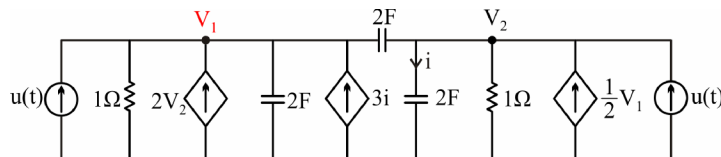
(۲) گره

(۳) مش

(۴) معادلات حالت

(مهندسی برق ۷۷)

۵- ولتاژ $V_1(t)$ در مدار شکل زیر برابر کدام است؟



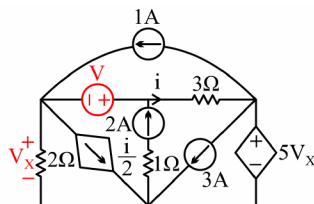
$$\left(1 - 2t - e^{-\frac{t}{4}}\right) u(t) \quad (1)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{4}}\right) u(t) \quad (2)$$

(۳) جواب‌های بی‌شماری برای $V_1(t)$ وجود دارد.

(۴) هیچ جوابی نمی‌توان در این مدار برای $V_1(t)$ به دست آورد.

۶- در مدار شکل زیر، V چقدر باشد تا $V_x = 0$ شود؟



(۱) 3

(۲) 6

(۳) 12

(۴) 18

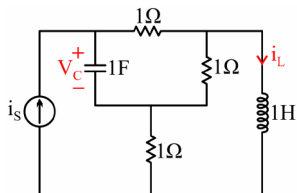


۷- در مدار زیر، بردار حالت $X = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}$ است. هرگاه معادلات حالت به صورت $\frac{dX}{dt} = AX + bi_s$ نمایش



(مهندسی برق (۸)

داده شود، ماتریس A کدام است؟



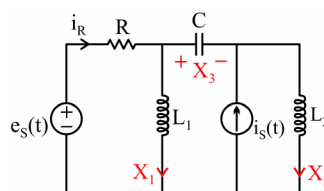
$$\begin{aligned} (1) \quad A &= \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \\ (2) \quad A &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ (3) \quad A &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \\ (4) \quad A &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۸- در مدار شکل زیر، بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ بردار حالت و $W = \begin{bmatrix} i_s \\ e_s \end{bmatrix}$ بردار ورودی است. اگر معادلات حالت



مدار به صورت $\dot{X} = AX + BW$ نوشته شود و ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



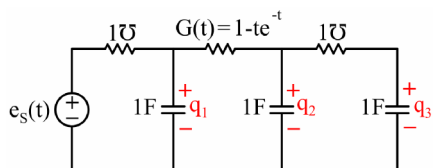
ماتریس B کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad B &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ (2) \quad B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ (3) \quad B &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (4) \quad B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۹- در شبکه خطی و تغییرپذیر با زمان شکل زیر، هرگاه بردار حالت $X = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ فرض شود، با توجه به نمایش معادلات حالت $\dot{X} = AX + BU$ ، ماتریس A عبارت است از:



(مقادیر مقاومت‌ها بر حسب «مهو» هستند).



$$\begin{aligned} (1) \quad A &= \begin{bmatrix} te^{-t} & 1-te^{-t} & 0 \\ 1-te^{-t} & te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ (2) \quad A &= \begin{bmatrix} -2+te^{-t} & 1-te^{-t} & 0 \\ 1-te^{-t} & -2+te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ (3) \quad A &= \begin{bmatrix} 2+te^{-t} & 1-te^{-t} & 0 \\ te^{-t} & -2+te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ (4) \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & -te^{-t} & 0 \\ te^{-t} & 2+te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

www.PowerEn.ir

۱۰- در یک مدار مشتمل بر تعدادی مقاومت و فقط یک سلف 1H و فقط یک خازن 1F، با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $[i_L, V_C]$ ، ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (ماتریس ضرایب معادلات حالت) معلوم است. اگر در این مدار، محل سلف و خازن با یکدیگر تعویض شود و متغیرهای حالت به صورت $[V_C, i_L]$ باشند، ماتریس A در مدار به چه صورت خواهد شد؟

(۱) تمامی عناصر ماتریس جدید A را نمی‌توان به دست آورد.

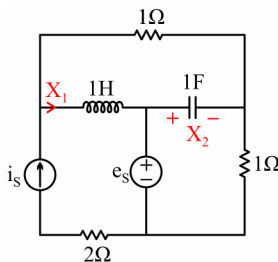
$$A_{\text{جدید}} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$A_{\text{جدید}} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$A_{\text{جدید}} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{22}} & \frac{-1}{a_{12}} \\ -\frac{1}{a_{21}} & \frac{1}{a_{11}} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

۱۱- در مدار شکل زیر x_1 جریان سلف و x_2 ولتاژ خازن است. اگر بردار حالت مدار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ باشد، در

رابطه $\dot{X} = AX + BW$ که در آن $W = \begin{bmatrix} i_s \\ e_s \end{bmatrix}$ است، ماتریس A و B کدام‌اند؟



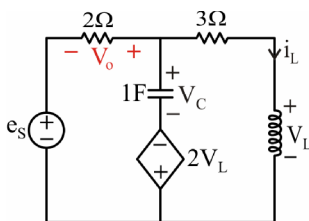
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

۱۲- در مدار شکل زیر V_C و I_L متغیرهای حالت هستند. ولتاژ خروجی مطلوب V_o برحسب متغیرهای حالت به کدام صورت نوشته می‌شود؟



$$I_L + \frac{1}{6} V_C - \frac{1}{2} e_s \quad (۱)$$

$$6I_L - V_C - e_s \quad (۲)$$

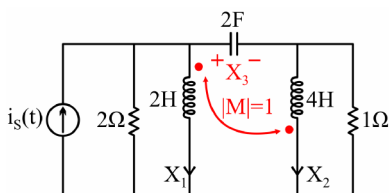
$$3I_L - \frac{1}{2} V_C - \frac{1}{2} e_s \quad (۳)$$

$$2I_L + \frac{1}{3} V_C - e_s \quad (۴)$$



۱۳- در مدار شکل زیر، معادله حالتی که $\frac{dx_3}{dt}$ را بر حسب بقیه متغیرهای حالت بیان می‌کند، کدام است؟

(مهندسی برق ۷۸)



$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{3}i_s \quad (۱)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}i_s \quad (۲)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}i_s \quad (۳)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{3}i_s \quad (۴)$$

۱۴- اگر ماتریس تلاقی A یک گراف مسطح را به دو ماتریس A_t و A_l متناظر با شاخه درخت‌ها و لینک‌ها

تفکیک کنیم $A = [A_l | A_t]$ ، کدام یک از خواص زیر همواره برقرار است؟ (مهندسی برق ۸۳)

(۱) A_t همواره یک ماتریس ناویژه است.

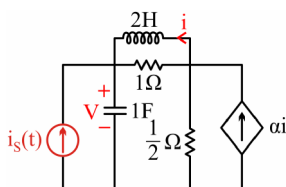
(۲) دترمینان A_t همواره برابر ± 1 است.

(۳) A_t همواره یک ماتریس مربع است.

(۴) هر سه خاصیت برقرار است.

۱۵- اگر معادلات حالت مدار شکل زیر بر حسب متغیرهای i و v به صورت $\dot{x} = Ax + bw(t)$ نوشته شود،

(مهندسی برق ۸۳)



$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۱۶- ماتریس تلاقی مختصرشده گرافی چنین است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(مهندسی برق ۸۴)

(۴) 2345

(۳) 1358

(۲) 1269

(۱) 1256

کدام شاخه‌ها، درختی از این گراف را تشکیل می‌دهند؟



www.PowerEn.ir

www.PowerEn.ir

PowerEn.ir

www.PowerEn.ir



حل تشریحی

۱. گزینه ۳ درست است.



به نظر من این مسئله خیلی ساده است. گفتیم کاتست اساسی یعنی یک شاخه درخت داشته باشد و باقی لینک

باشد و حلقه اساسی یعنی یک لینک باشد و باقی شاخه درخت باشد. پس کاتست‌ها و حلقه‌های اساسی را می‌نویسیم:

حلقه‌های اساسی: $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 2, 5\}$, $\{6, 4, 5\}$

کاتست‌های اساسی: $\{2, 1, 3\}$, $\{4, 1, 6\}$, $\{5, 3, 6\}$

۲. گزینه ۴ درست است.

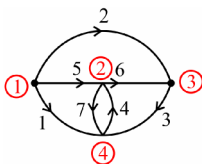


ولتاژ شاخه‌هایی را می‌توان به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفت که تشکیل حلقه ندهند و ازطرفی برای آنکه ولتاژ

همه شاخه‌ها برحسب آن‌ها قابل بیان باشد، باید به همه گره‌ها سر بزند؛ پس ترجمه صورت مسئله این گونه می‌شود: کدام شاخه‌ها تشکیل درخت می‌دهند؟

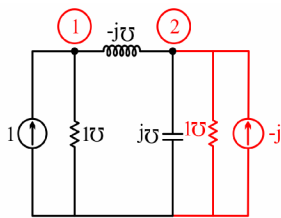


حالا نوبت منه. اول، گراف متناظر را می‌کشیم:



حالا باید ببینیم کدام گزینه، تشکیل درخت می‌دهد که فقط $\{3, 5, 7\}$ در بین گزینه‌ها این خاصیت را دارد.

۳. گزینه ۱ درست است.



اول منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم و سپس با عینک ادمیتانس بین



نگاه می‌کنیم:

$$Y = \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \text{ حالا داریم:}$$

۴. گزینه ۳ درست است.



مدار 6 گره دارد که اگر یکی را زمین بگیریم، می‌شود 5 مجهول که البته به خاطر وجود منبع ولتاژ، یک مجهول

دیگر هم کم می‌شود؛ پس در روش کاتست و گره 5 مجهول وجود دارد. در روش مش 4 حلقه داریم که به خاطر وجود یک منبع جریان مستقل، یک مجهول کم می‌شود و 3 مجهول خواهیم داشت. بالاخره در روش فضای حالت، چون 3 عنصر مستقل ذخیره‌کننده انرژی سلف‌ها و خازن‌ها وجود دارد، باز 3 مجهول خواهیم داشت!!!



دوستان یک بی‌دقتی کوچک کرد؛ در روش مش، اگر دقت کنیم، جریان مش بالایی $i_1 = \frac{1}{R_3} V$ است و از طرفی

جریان مش جنوب شرقی! هم $i_4 = -g_m V$ است؛ پس i_1 و i_4 از هم مستقل نیستند و بنابراین در روش مش، حل مسئله به دو معادله دو مجهول می‌رسد.

۵. گزینه ۴ درست است.



به روش گره، دستگاه معادلات را می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 4s+1 & -2s \\ -2s & 4s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + 2V_2 + 3I \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{2}V_1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4s+1 & -8s-2 \\ -2s & 4s+1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ 1 \\ s \end{bmatrix}}_B$$

از طرفی $I = 2sV_2$. پس با جایگذاری و انتقال ولتاژها به سمت چپ داریم:

$$\det A = (4s+1)^2 - (8s+2)\left(2s + \frac{1}{2}\right) = 0$$

در این حالت چون طرف دوم معادله ماتریسی غیر صفر است، هیچ جوابی برای V_1 و V_2 وجود ندارد و اگر طرف دوم برابر صفر بود، بی‌شمار جواب داشتیم.





۶. گزینه ۲ درست است.

ببخشید این مسئله چه ربطی به این بخش دارد؟



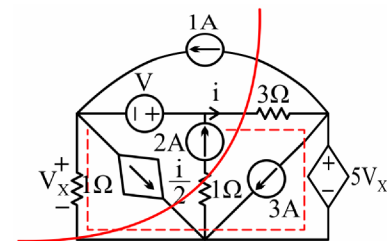
بله، قصد من از طرح این مسئله در این فصل، آن است که گاهی استفاده هوشمندانه از کاتست‌ها و حلقه‌های خاص



که با چشم‌های دقیق شما قابل رؤیت است، حل مسئله را خیلی کوتاه می‌کند.



من دیدم! یک کاتست خوب:



$$\text{KCL: } -1 + i - 2 + \frac{i}{2} + \frac{V_x}{1} = 0 \Rightarrow i = 2 \text{ A}$$

حالا در حلقه مستطیلی شکل KVL می‌زنیم:

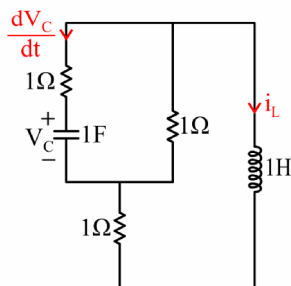
$$\text{KVL: } V = 3i + 5V_x - V_x = 6 \text{ V}$$

۷. گزینه ۳ درست است.

چون ماتریس b خواسته نشده است، برای ساده شدن مدار می‌توانیم اول



منبع را صفر کنیم.



حالا با آن روش باحال استاد! هر جای مدار که خواستیم KCL یا KVL می‌زنیم، مثلاً اگر در حلقه بیرونی KVL



بزنیم، داریم:

$$\frac{di_L}{dt} + i_L - V_C - \frac{dV_C}{dt} = 0$$

www.PowerEn.ir

$$\underbrace{\frac{dV_c}{dt}}_{\text{سطر اول}} - \underbrace{\frac{di_L}{dt}}_{\text{سطر دوم}} = -V_c + i_L$$

ضریب $a - c = -1 = V_c$

ضریب $b - d = +1 = i_L$

پس اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، باید:

بنابراین فقط گزینه ۳ درست است.

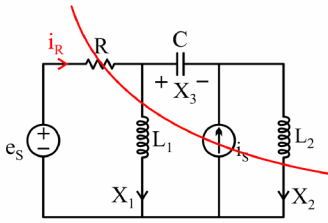


دیدید چقدر جالب بود؟

۸. گزینه ۴ درست است.



اول کاری به A نداریم، معادلات حالت را می‌نویسیم:



$$i_R = x_1 + x_2 - i_s$$

با KCL در کاتست مشخص شده:

و حالا با KVL در حلقه بیرونی داریم:

$$\text{KVL: } e_s = R x_1 + R x_2 - R i_s + x_3 + L_2 \dot{x}_2$$

و با KVL در حلقه چپی:

$$\text{KVL: } e_s = R x_1 + R x_2 - R i_s + L_1 \dot{x}_1$$

و نهایتاً با KCL در گره سمت راست خازن:

$$\text{KCL: } C \dot{x}_3 = x_2 - i_s$$

حالا اگر این معادلات را مرتب کنیم، این جوری می‌شود:



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} & 0 \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{R}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} i_s \\ e_s \end{pmatrix}$$



با مقایسه این معادلات با ماتریس A که در صورت مسئله داده شده، داریم:

$$\frac{R}{L_1} = 1, \quad \frac{R}{L_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{C} = 1, \quad L_1 = 1, \quad L_2 = 2$$

پس ماتریس B برابر است با:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

۹. گزینه ۲ درست است.



تغییرپذیر بودن مدار چه اثری بر روش فضای حالت دارد؟



هیچ اثری. فقط دقت کنید که در شبکه‌های غیر خطی یا تغییرپذیر با زمان، بهتر است به جای V_C و I_L از q و φ

استفاده کنیم؛ در این صورت معادلات اساسی این گونه است:

$$I_C = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \quad \text{و} \quad V_C = \frac{q}{C}$$

$$V_L = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \text{و} \quad I_L = \frac{\varphi}{L}$$



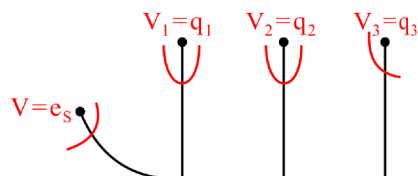
که البته انتخاب متغیرهای حالت، دست ما نیست و خود طراح این کار را انجام می‌دهد.

حالا به سبکی که شما در طول درس گفتید، درختی می‌گیریم شامل همه خازن‌ها به این شکل:

$$\dot{q}_1 + 1(q_1 - e_s) + (1 - te^{-t})(q_1 - q_2) = 0$$

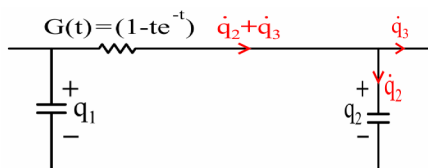
$$\dot{q}_2 + (1 - te^{-t})(q_2 - q_1) + 1(q_2 - q_3) = 0$$

$$\dot{q}_3 + 1(q_3 - q_2) = 0$$



که با مرتب کردن این معادله، به سادگی مشخص می‌شود که گزینه ۲ درست است.

با آنکه خودم مسئله را حل کردم، اما یک سؤال دارم؛ آیا در این مسئله نمی‌شود از آن بازی‌های تستی درآورد؟



چرا، اتفاقاً یک راه جالب به ذهن من رسید. به این شکل



نگاه کنید:

www.PowerEn.ir

حالا اگر یک KVL بنویسیم، داریم:

$$\frac{1}{1-te^{-t}} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + q_2 - q_1 = 0$$

یعنی:

$$\dot{q}_2 + \dot{q}_3 = (1-te^{-t})q_1 - (1-te^{-t})q_2 + 0q_3 + 0e_s$$

\uparrow \uparrow
 سطر سوم سطر دوم

با چک کردن گزینه‌ها پیداست که فقط گزینه ۲ می‌تواند درست باشد.

۱۰. گزینه ۲ درست است.

از کجا باید شروع کنیم؟



خیلی خب، من شروع می‌کنم؛ ابتدا باید معادلات حالت در مدار اولیه را بنویسیم:



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

حالا قرار است جای سلف ۱ هانری و خازن ۱ فارادی عوض شود؛ پس متغیری که قبلاً اسمش V_L بود، حالا V_C می‌شود و الی آخر.

فکر کنم گرفتیم!



در این صورت با عوض کردن اسم‌ها داریم:

$$\begin{aligned} I_L = V_L &\rightarrow V_C, & I_L &\rightarrow I_C = \dot{V}_C \\ \dot{V}_C = I_C &\rightarrow I_L, & V_C &\rightarrow V_L = \dot{I}_L \end{aligned}$$

پس معادله حالت مدار جدید این‌طور می‌شود:



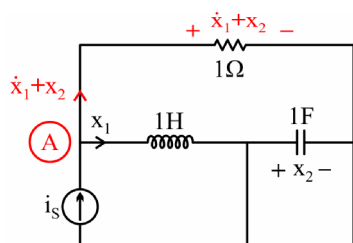
$$\begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix}$$

و اگر طرفین را در A^{-1} ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} \Rightarrow A_{\text{جدید}} = A^{-1}$$



۱۱. گزینه ۳ درست است.



به این مدار نگاه کنید. بعد از یک KVL بازی کوچک و KCL در



گره خوب داریم:

حالا در گره‌های (A)، KCL بنویسید:

$$\dot{X}_1 + X_2 + X_1 = i_s$$

$$\Rightarrow \dot{X}_1 = -1X_1 - 1X_2 + 1i_s + 0e_s$$

که این عبارت فقط با سطر اول گزینه (۳) می‌خواند و نیازی به حل کامل مسئله نیست.

۱۲. گزینه ۴ درست است.

با یک KVL در مش سمت چپ داریم:



$$V_o = V_C - 2V_L - e_s$$

ولی V_L باید از این معادله حذف شود، پس در مش سمت راست هم یک KVL می‌زنیم:

$$2V_L - V_C + 3I_L + V_L = 0 \Rightarrow V_L = \frac{1}{3}V_C - I_L$$

و حالا این V_L را در معادله اول جایگذاری می‌کنیم:

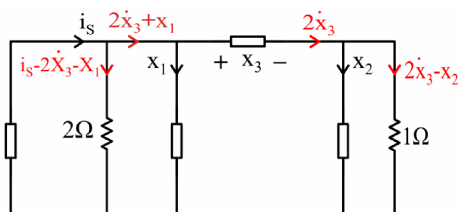
$$V_o = V_C - 2\left(\frac{1}{3}V_C - I_L\right) - e_s$$

$$V_o = \frac{1}{3}V_C + 2I_L - e_s$$

۱۳. گزینه ۳ درست است.

اگر قرار است در معادله \dot{X}_3 ، اسم مشتقات دیگر نیاید، فقط باید از جریان سلف‌ها استفاده کنیم، نه از ولتاژشان؛ پس

ابتدا روی مدار KCL بازی می‌کنیم:



www.PowerEn.ir

و حالا در حلقه شامل مقاومت‌های 2 اهمی و 1 اهمی، KVL می‌زنیم:

$$X_3 + 2\dot{X}_3 - X_2 - 2i_s + 4\dot{X}_3 + 2X_1 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{X}_3 = -\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 - \frac{1}{6}X_3 + \frac{1}{3}i_s$$

فوق‌العاده است! انصافاً با این روش‌های حل‌تان خستگی را از تن آدم درمی‌آورید.



۱۴. گزینه ۴ درست است.

در ماتریس A ستون‌های معرف شاخه‌ها و سطرها معرف گره‌ها است، پس در A_t که معرف شاخه درخت‌هاست، طبق

تعریف چون شاخه‌ها باید به همه گره‌ها سر بزنند و حلقه‌ای هم ایجاد نکنند، تعداد شاخه‌ها و گره‌ها برابر بوده و A_t مربعی است.



برای تحلیل دترمینان هم اگر A_t را برای سادگی 2×2 در نظر بگیریم، مطمئناً یک درایه غیر صفر باید داشته

باشد و گرنه حلقه درست می‌شود و در این حال دترمینان برابر ± 1 خواهد بود که ناویژه بودن ماتریس را هم سبب می‌شود. پس گزینه ۴ درست است.

۱۵. گزینه ۳ درست است.

برای حل تست‌ها، بعد از KCL و KVL بازی، هر جای مدار که خواستیم باید یک معادله بنویسیم، مثلاً با یک KCL



در گره سمت چپ داریم:



$$2\frac{di}{dt} - \frac{dv}{dt} = -i - i_s$$

پس اگر ماتریس b را به صورت $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:



$$2p - q = -1$$

که -1 ضریب $w(t) = i_s(t)$ است.

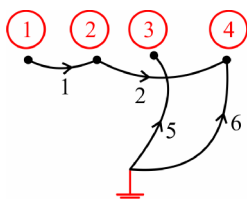


و این معادله تنها در گزینه ۳ صدق می‌کند.

۱۶. گزینه ۱ درست است.



از روی ماتریس تلافی، شکل گراف را رسم می‌کنیم، مثلاً برای گزینه ۱ داریم:



که این شاخه‌ها به همه گره‌ها سر زده‌اند و حلقه هم درست نکرده‌اند؛ پس تشکیل درخت می‌دهند.



بله، این راه مطمئن است. برای حذف گزینه هم راه‌های سریعی وجود دارد؛ مثلاً اگر به شاخه‌های گزینه ۲ نگاه

کنید، می‌بینید که هیچ‌کدام از گزینه‌ها به گره ۳ سر نده‌اند و به همین ترتیب برای گزینه ۳ به گره ۴ و برای گزینه ۴ به گره ۱؛ پس، این شاخه‌ها تشکیل درخت نمی‌دهند.



www.PowerEn.ir

www.PowerEn.ir

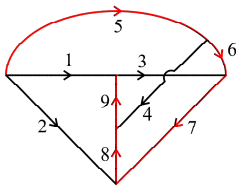
PowerEn.ir

www.PowerEn.ir



خودآزمایی فصل اول

۱. در گراف شکل مقابل، ماتریسی که ولتاژ شاخه‌های v_1, v_2, v_3, v_4 را برحسب ولتاژ شاخه‌های v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 بیان می‌کند به چه فرم است؟



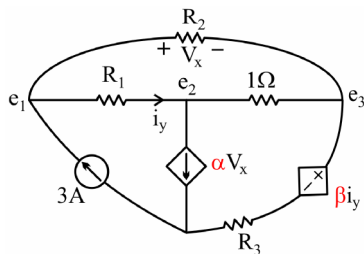
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

۲. اگر ماتریس ادمیتانس گره مدار شکل مقابل به فرم $Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ چقدر است؟



$$\begin{aligned} &2 \quad (1) \\ &-\frac{1}{2} \quad (2) \\ &3 \quad (3) \\ &-\frac{1}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

۳. اگر ماتریس تلاقی یک گراف به صورت $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، تعداد درختهای آن چند است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۸ (۱)

۴. ماتریس کات ست گرافی به صورت زیر است، دو حلقه اساسی متناظر با درخت این کات ست کدام گزینه است؟

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_2 = \{3, 4, 7\}$, $L_1 = \{2, 3, 8\}$ (۲)

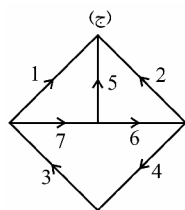
$L_2 = \{3, 4, 8\}$, $L_1 = \{2, 3, 7\}$ (۱)

$L_2 = \{3, 4, 8\}$, $L_1 = \{1, 2, 8\}$ (۴)

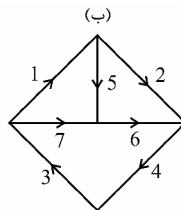
$L_2 = \{2, 3, 7\}$, $L_1 = \{1, 2, 7\}$ (۳)

۵. اگر ماتریس کات ست اساسی $Q = [EI]$ نوشته شود که در آن $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، شکل گراف به کدامیک از

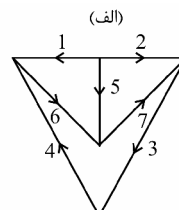
حالتهای زیر می تواند باشد؟



(۴) هر سه



(۳) ب و ج



(۲) الف و ج

(۱) الف و ب



۶. سه سلف L_3 و L_4 و L_5 به طور مغناطیسی تزویج شده و ماتریس اندوکتانس آنها به صورت روبرو است، معادله گره کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{-4}{3} \\ 1 & \frac{-4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

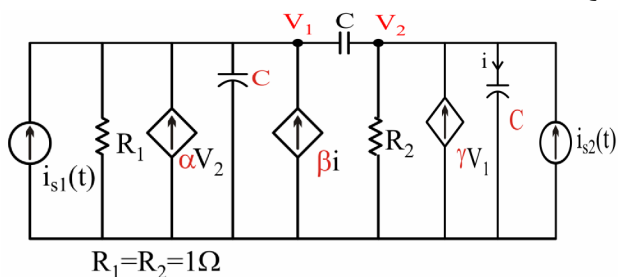
$$\begin{bmatrix} G_2 + j\omega c_1 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + \frac{5}{j\omega} & \frac{-2}{j\omega} \\ 0 & \frac{-2}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} G_2 + j\omega c_1 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + \frac{6}{j\omega} & \frac{-2}{j\omega} \\ 0 & \frac{-2}{j\omega} & \frac{4}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ g_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} j\omega c_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & \frac{-3}{j\omega} \\ g'_m & \frac{-3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} j\omega c_1 + G_2 & -G_2 & g'_m \\ -G_2 & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & \frac{-3}{j\omega} \\ g'_m & \frac{-3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ g_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

۷. تحت چه شرایطی، مدار شکل زیر، جواب یکتایی ندارد؟



$$\alpha = 2, \gamma = 1, \beta = 3, c = 4F \quad (۱)$$

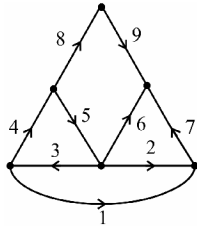
$$\alpha\gamma = 1, c\beta = 4 \quad (۲)$$

$$\alpha\gamma = 1, \beta = 3, \alpha = \frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\alpha\gamma = 1, \beta = 3, \gamma = \frac{1}{2} \quad (۴)$$

www.PowerEn.ir

۸. در گراف نشان داده شده، تعداد درخت‌هایی را که تمام حلقه‌های اساسی آن همان مش‌ها باشند و از طرفی تعداد درخت‌هایی را که تمام کاتست‌های اساسی آن متناظر با شاخه‌های وصل شده به گره‌ها باشند، به ترتیب چندتا است؟



تعداد درخت‌ها = $n_t = n_{tree}$

تعداد کاتست‌ها = $n_c = n_{cutset}$

(۱) $n_c = 2, n_t = 4$

(۲) $n_c = 0, n_t = 4$

(۳) $n_c = 2, n_t = 0$

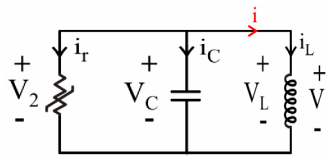
(۴) $n_c = 0, n_t = 2$

۹. در معادلات حالت مداری که به صورت $\dot{X} = AX$ می‌باشد، ماتریس انتقال حالت به صورت زیر است. ماتریس A در

معادلات حالت چگونه بوده است؟ $\phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix}$

(۱) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (۲) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (۳) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (۴) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

۱۰. اگر داشته باشیم $i_r = e^{-v_r}$ و $q_c = v_c^3 + v_c$ و $\phi_L = \text{tghi}_L$ مقدار $\frac{di}{dt}$ کدام است؟



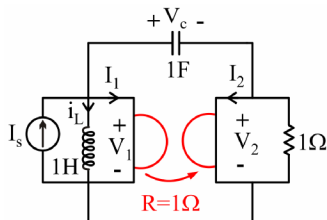
(۱) $\frac{di}{dt} = (1 + \text{tghi}_L)v$

(۲) $\frac{di}{dt} = \frac{v}{1 + \text{tgh}^2 i}$

(۳) $\frac{di}{dt} = \frac{1 + \text{tghi}}{v^2}$

(۴) هیچ کدام

۱۱. اگر ضریب چرخش ژیراتور برابر $R = 1\Omega$ باشد معادلات حالت مدار کدام است؟ ($C = 1F$, $L = 1H$, $R = 1\Omega$)



(۱) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \end{pmatrix} I_S$

(۲) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \end{pmatrix} I_S$

(۳) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix} I_S$

(۴) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix} I_S$