



3 فصل مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی مدار

مقدمه



اگر از من بپرسند که مفهومی‌ترین مبحث درس مدار کدام است، بنده بدون مکث جواب می‌دهم: مبحث

مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی. نگاه ما به مدار در این فصل فوق‌العاده عمیق است، به رفتار مدار توجه خاصی داریم؛ اینکه مدار از چه مرتبه‌ای است و اینکه فرکانس‌های طبیعی، حقیقی موهومی و مختلط هر یک چه معنایی دارند و... راستش را بخواهید در سایر رشته‌های مهندسی و غیر مهندسی و حتی علوم انسانی هم فرکانس‌های طبیعی از اهمیت خاصی برخوردارند. اینکه یک صدف دریایی دارای چه فرکانس‌های طبیعی است و اینکه چرا آن نسیم ملایم، آن پل عظیم را خراب کرد؟ اصلاً مکانیزم کار گوش ما چگونه است و در چه فرکانس‌هایی کار می‌کند؟ اینکه چرا شما احساس می‌کنید که «ذات»تان با آن دیگری این‌قدر منطبق است؟ و چرا این‌قدر فرکانس‌های طبیعی‌تان مثل هم است؟ و اینکه اصلاً «هم‌نوایی» دو آدم یعنی همین یکسان بودن مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی و...

۱-۳ فرکانس‌های طبیعی

از عنوان این تیتر پیداست که به **ذات مدار** بستگی دارد؛ یعنی به ورودی بستگی ندارد. تابع گراف مدار، نوع عناصر و مقادیرشان و **شرایط اولیه** است؛ یعنی فرکانس‌های طبیعی به ورودی و روش تحلیل بستگی ندارند، اما به شرایط اولیه وابسته‌اند.



مگر شرایط اولیه از مختصات ذات مدار است؟



بله، حالا خواهید دید که چطور شرایط اولیه روی ذات مدار یعنی فرکانس‌های طبیعی مؤثر است.



خُب برویم سراغ کارمان:

معادلهٔ دیفرانسیل مینی مال شبکه، معادله دیفرانسیل همگن با کمترین درجه است که تمام پاسخ‌های ورودی صفر متناظر با هر حالت اولیه را پیش‌بینی می‌کند، یعنی:

$$Q(D).X=0 \quad (1-3)$$

و در آن X یک متغیر شبکه و $Q(D)$ یک چندجمله‌ای به شکل معادله دیفرانسیل است که در آن:

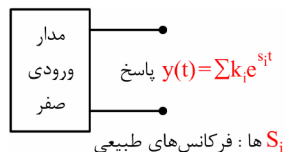
$$D = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2-3)$$

حالا فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، ریشه‌های معادله مشخصه مینی مال متغیر مربوط هستند، به طوری که:

$$Q(D).X=0 \rightarrow Q(s)=0 \Rightarrow S_i = \text{فرکانس‌های طبیعی} \quad (3-3)$$

این فرکانس‌های طبیعی یا مدهای طبیعی در پاسخ ورودی صفر ظاهر می‌شوند. آیا مفهوم شکل (1-3) را متوجه می‌شوید؟



شکل (۱-۳) مدار با ورودی صفر به همراه یک پاسخ از آن

یعنی آنکه اگر مدار هیچ ورودی نداشته باشد و تنها در اثر شرایط اولیه تحریک شود، در خروجی فلان متغیر شبکه، آن فرکانس‌های طبیعی S_i به صورت $k_i e^{S_i t}$ ظاهر می‌شوند. حال اگر S_i ها حقیقی منفی باشند، یعنی آن خروجی، میرای شدید (یا بحرانی) است و اگر S_i ها مختلط با مقدار حقیقی منفی باشند، یعنی پاسخ، میرای ضعیف است و اگر S_i ها موهومی محض باشند، پاسخ، به صورت نوسانی است و بالاخره چنانچه جزء حقیقی S_i ها مثبت باشند، خروجی، ناپایدار است.

حالا **فرکانس‌های طبیعی یک شبکه** را تعریف می‌کنیم؛ اجتماع یا مجموعه همهٔ فرکانس‌های طبیعی تمامی متغیرهای شبکه را فرکانس‌های طبیعی می‌گوییم. به عبارت دیگر فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، زیرمجموعه‌ای از فرکانس‌های طبیعی شبکه هستند.



لطفاً یک لحظه صبر فرمایید، یعنی ممکن است بعضی از فرکانس‌های طبیعی یک شبکه در برخی از متغیرهای شبکه

ظاهر نشوند؟



دقیقاً!



به عبارت دیگر، یعنی می‌فرمایید که ممکن است جنس پاسخ یکی از متغیرهای شبکه مثلاً در یک مدار مرتبهٔ 2،

از جنس $k e^{s_1 t}$ (یعنی مرتبهٔ اول) باشد؟



باز هم می‌گوییم، دقیقاً!



پس بحث خیلی جالب شد؛ اگر ممکن است در این باره کمی بیشتر توضیح بدهید.



این چند نکته را لطفاً خوب بفهمید:



ریشه‌های غیرصفر هر دترمینان ماتریس شبکه مانند Z_1, Z_m, Y_n, Y_q یا حتی $(SI - A)$ ، برابر فرکانس‌های طبیعی

شبکه هستند.

و این خود یک روش ساده و مفید برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک شبکه است. یعنی در قدم اول به مدار نگاه می‌کنیم؛ اگر دوحلقه‌ای بود Z_m را به راحتی به دست می‌آوریم و اگر دوگره‌ای بود، Y_n را مثل آب خوردن پیدا می‌کنیم و بعد ریشه‌های دترمینان را که پیدا کردیم کارمان تمام است. اگر هم تعداد گره‌ها یا حلقه‌ها بیشتر از 2 بود، باز دوباره Z_m یا Y_n را پیدا می‌کنیم (درحقیقت اون‌ی که مرتبه کمتری است) و دوباره ریشه‌های دترمینان و... راستی دلیل تأکیدم را روی مدارهای دوگره‌ای و دوحلقه‌ای در فصل دوقطبی‌ها متوجه خواهید شد.



و اگر در مسئله‌ای به جای فرکانس‌های طبیعی کل شبکه، فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را می‌خواستند، این

روش مفید است؟



نه دیگر نشد! این همه گفتیم که ممکن است بعضی فرکانس‌های طبیعی شبکه در برخی از متغیرها ظاهر نشوند،

یعنی همین دیگر؛ پس برای فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، باید معادله دیفرانسیل آن متغیر را نوشت و از ریشه‌های معادله مشخصه، به فرکانس‌های طبیعی آن متغیر دست یافت. البته یک روش دیگر هم هست و آن اینکه ابتدا عینک لاپلاسی زده و بعد به کمک KCL و KVL، معادله مشخصه متناظر آن متغیر را پیدا کنیم و...

هر قطب تابع شبکه هر متغیر مدار، یک فرکانس طبیعی متغیر مربوطه است:

$$H(s) = \sum_i \frac{K_i}{(s - P_i)^n} \Rightarrow P_i = \text{فرکانس طبیعی مرتبه } n \text{ ام} \quad (4-3)$$

راستی یک مطلب ساده و مهم:

در حوزه زمان در فرم $k_i e^{s_i t}$ ، S_i فرکانس طبیعی ساده (مرتبه اول) و در حالت $k_i t e^{s_i t}$ ، S_i فرکانس طبیعی مضاعف (مرتبه دوم) بوده و به طور کلی در فرم $k_i t^n e^{s_i t}$ ، S_i فرکانس طبیعی مرتبه $n + 1$ ام است، ولی در حوزه فرکانس قطب مرتبه n ام، فرکانس طبیعی مرتبه n ام است. روشن است دیگر؛ نه؟



اگر $S_i \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ یک شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه نیز است و برعکس. در مورد بار و شار نیز همین طور است.



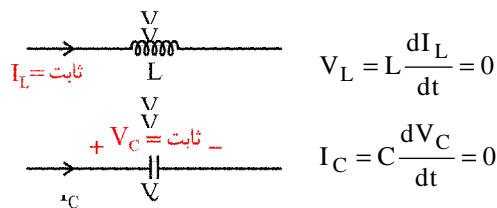
چرا $S_i \neq 0$ ؟ مگر مخالف صفر بودن مهم است؟



بله، ممکن است ولتاژ یک شاخه، فرکانس صفر (مقدار DC) داشته باشد، اما جریان شاخه دارای فرکانس صفر نباشد

و برعکس؛ پس باید در فرکانس صفر یا مقدار DC دقت بیشتری کرد.

مثلاً به شکل (2-3) دقت کنید:



شکل (۲-۳) دقت در فرکانس صفر (DC) در سلف و خازن

دیدیم که در سلف ممکن است جریان دارای فرکانس صفر باشد (DC یا ثابت I_L) ولی ولتاژ صفر شود ($V_L = 0$)، یعنی اصلاً دارای مؤلفه‌ای در $S = 0$ نباشد و اتفاق مشابه برای خازن ...



حالا یک نکته بسیار موشکافانه:

چون فرکانس‌های طبیعی مربوط به حالت ورودی صفر هستند، هنگام بررسی تابع تبدیل:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}} \quad (۵-۳)$$

و در نظر گرفتن قطب‌های آن به عنوان فرکانس‌های طبیعی شبکه، مدار متناظر شبکه‌ای است که منبع از آن خارج شده باشد^۱.

۱- منبع جریان ← O.C. و منبع ولتاژ ← S.C.



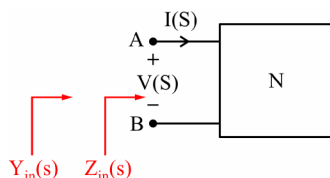
پس منبع یا ورودی مستقل تنها یک واسطه است برای به دست آوردن تابع تبدیل و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی شبکه، آن هم شبکه‌ای که منبع در آن صفر شده باشد. به عبارت دیگر تابع تبدیل، مستقل از «مقدار ورودی» است ولی به «جنس ورودی» بستگی دارد؛ یعنی اینکه ورودی، منبع ولتاژ باشد یا منبع جریان در گراف شبکه مورد بررسی متفاوت است.



من که درست منظورتان را نفهمیدم. تا امروز ما فکر می‌کردیم که تابع تبدیل هیچ ربطی به ورودی ندارد، ولی شما می‌فرمایید که به «جنس ورودی» بستگی دارد.



پس تمرین 1 را n بار مرور کنید، چون در فهم این مطلب خیلی مؤثر و مفید است.



1- در شبکه شکل (3-3) در مورد قطب‌های امپدانس ورودی و ادmittانس ورودی بحث کنید.

شکل (3-3) شبکه تمرین 1

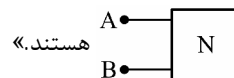


ببینید $Z_{in}(s)$ اصلاً یعنی چه؟

$$Z_{in}(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

(3-6)

یعنی یک نوع تابع تبدیل است که در آن **ورودی** از جنس **منبع جریان** است. پس قطب‌های امپدانس ورودی $(Z_{in}(s))$ ، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده باشد؛ یعنی دو سر AB مدار باز باشد. به طور خلاصه:



«قطب‌های $Z_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی هستند»

حالا اگر دوست دارید خودتان در مورد ادmittانس بحث کنید:



امیدوارم دقیق باشد. سعی می‌کنم دوگان عبارت‌های شما را بگویم؛ اولاً می‌گوییم تعریف ادmittانس این گونه است:

$$Y_{in}(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$$

(3-7)

یعنی یک نوع تابع تبدیل است که در آن، ورودی از جنس منبع ولتاژ است. پس قطب‌های ادمیتانس ورودی $(Y_{in}(s))$ ، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده باشد؛ یعنی دو سر AB اتصال کوتاه باشد، به طور خلاصه:

«قطب‌های $Y_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی شبکه هستند.»



کاملاً درست است. حال می‌پرسم، آیا می‌دانید بین فرکانس‌های طبیعی شبکه



شباهتی هست؟

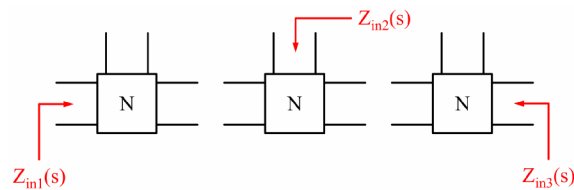


الف ب پ ت ث ج چ خ د ذ ر ز س ش ص ض ط ظ ع غ ف ق ک گ ل م ن و ه ی^۱

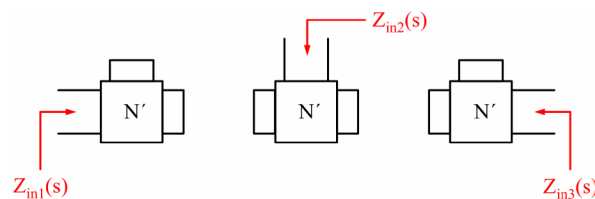
نخیر درست نیست، بین آن دو شبکه هیچ ارتباطی وجود ندارد.



2- در هریک از دو شبکه زیر چه ارتباطی میان $Z_{in1}(s)$ و $Z_{in2}(s)$ و $Z_{in3}(s)$ وجود دارد؟



(الف)



(ب)

شکل (۳-۴) شبکه‌های مورد نظر برای تمرین 2

1- جناب در پاسخ به این سؤال حرف‌هایی زد که به جهت نگرانی از آنکه ذهن شما را پراکنده کند، از بازگو کردن آن‌ها پرهیز

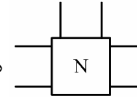


می‌کنم! فقط یک خاطره واقعی می‌گویم؛ در دوران معلمی دو تا شاگرد دو قلو داشتم که از هرچه فکرش را بکنید، به هم شبیه‌تر بودند. خیلی وقت‌ها در تشخیص اینکه کدام یک علیرضاست و کدام یک امیررضا مشکل اساسی داشتم؛ یکی‌شان ابروهایش از هم جدا بود (یعنی همان $U.L.$ خودمان!) و دیگری ابروهایش به هم پیوسته بود. (یا همان $S.L.$ خودمان!) ولی این دو به شدت از لحاظ ظاهری به هم شبیه بودند، جالب آنکه این دو نفر از لحاظ مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی فوق‌العاده با هم متفاوت بودند! حالا نتیجه‌گیری با خودتان!

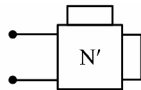


طبق گفته‌های تمرین 1 در قسمت (الف) می‌توان گفت که قطب‌های $Z_{in_1}(s)$ و $Z_{in_2}(s)$ و $Z_{in_3}(s)$

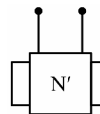
فرکانس‌های طبیعی شبکه¹ هستند؛ یعنی با هم برابرند.



اما در مورد قسمت (ب) نمی‌دانم؛ چون قطب‌های $Z_{in_1}(s)$ فرکانس‌های طبیعی هستند؛

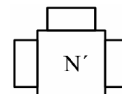


قطب‌های $Z_{in_2}(s)$ فرکانس‌های طبیعی و قطب‌های $Z_{in_3}(s)$ فرکانس‌های شبکه به قول شما هیچ ربطی به هم ندارند؛ به قول شما مثل همان دوقلوهای به ظاهر شبیه و در باطن بسی متفاوت‌اند.



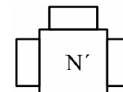
اولاً این 3 تا، دوقلو نیستند، بلکه سه‌قلویند! اما خُب اشکالی ندارد، سراغ ادمیتانس‌ها می‌رویم. قطب‌های $Y_{in_1}(s)$

$Y_{in_2}(s)$ و $Y_{in_3}(s)$ فرکانس‌های طبیعی هستند؛ یعنی ادمیتانس‌ها دارای قطب‌های یکسانی‌اند؛ به عبارت



دیگر در پاسخ به این پرسش می‌گوییم، صفرهای $Y_{in_1}(s)$ و $Y_{in_2}(s)$ و $Y_{in_3}(s)$ با هم یکسان بوده و برابر فرکانس‌های

طبیعی شبکه هستند.



خیلی خوب شد، برویم سراغ داستان بعدی...



حذف فرکانس‌های طبیعی برای یک متغیر شبکه:

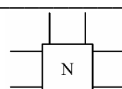


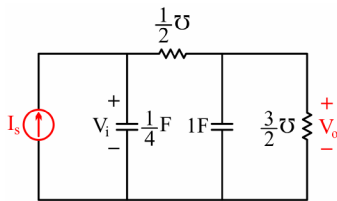
گاهی می‌توان شرایط اولیه را طوری تعیین کرد که یکی از فرکانس‌های طبیعی حذف شود (به کمک تبدیل لاپلاس تابع شبکه).

گاهی می‌توان ورودی از جنس توابع ضربه را طوری تعیین کرد که یکی از فرکانس‌های طبیعی حذف شود.

برای درک بهتر این جملات پر بار لازم است که یک مثال جانانه با هم حل کنیم تا خیلی خوب مفهوم این دو گزاره آخر را درک کنیم.

1- به عبارت دقیق‌تر، قطب‌های آن‌ها، همگی زیرمجموعه فرکانس‌های طبیعی شبکه هستند.





شکل (۵-۳) مدار تمرین 3

3- ابتدا فرکانس‌های طبیعی شبکه را به دست آورید. سپس در حالت ورودی صفر، شرایط اولیه را طوری تعیین کنید که خروجی V_o فقط شامل فرکانس 1- باشد و در نهایت در شرایط حالت صفر، ورودی (از جنس توابع ضربه) را طوری پیدا کنید که باز خروجی V_o فقط شامل فرکانس 1- باشد.



ابتدا عینک لاپلاسی زده و سپس با حل مدار به روش منظم گره، داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ V_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} V_i(0) \\ V_o(0) \end{pmatrix}$$

ورودی شرایط اولیه

با حل این معادلات به روش کرامر چنین داریم:

$$V_o = \frac{2}{(s+1)(s+3)} I(s) + \frac{(s+2)V_o(0) + \frac{1}{2}V_i(0)}{(s+1)(s+3)}$$

و برای فرکانس‌های طبیعی:

$$\det Y_n = 0 \rightarrow s = -1, -3$$

در حالت ورودی صفر برای حذف فرکانس طبیعی $s = -3$ ، باید صورت ضربی از $(s+3)$ شود؛ یعنی باید چنین داشته باشیم:

$$(s+2)V_o(0) + \frac{1}{2}V_i(0) = K(s+3)$$

$$K = V_o(0)$$

$$3V_o(0) = 2V_o(0) + \frac{1}{2}V_i(0) \Rightarrow V_i(0) = 2V_o(0)$$



بسیار عالی شد؛ یعنی هرگاه ولتاژ اولیه خازن سمت چپی دو برابر ولتاژ اولیه خازن سمت راستی باشد، در خروجی

$V_o(t)$ عبارت e^{-3t} ظاهر نمی‌شود و فقط شامل e^{-t} است. (خیلی جالب است!)

1- سال‌ها در درس کنترل می‌خواندید که می‌توان یک قطب را به وسیله یک صفر حذف کرد، اما مفهوم فیزیکی آن را خوب درک نمی‌کردید؛

یکی از خوبی‌های این مثال آخر این است که به صورت فیزیکی، مفهوم حذف قطب با اضافه کردن صفر را درک می‌کنید.



و در نهایت برای قسمت آخر:

$$I(s) = K(s+3)$$

$$i_s(t) = k\delta'(t) + 3k\delta(t)$$

و همان‌طور که انتظار می‌رفت، از جنس توابع ضربه شد.



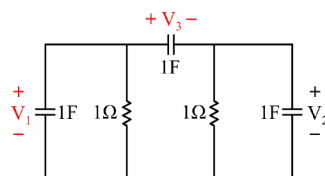
حالا یک مسئله برای ممارست بیشتر:



4- الف) مرتبه مدار را به دست آورید.

ب) فرکانس‌های طبیعی متغیرهای V_1 و V_3 را بیابید.

ج) شرایط اولیه را طوری تعیین کنید تا فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر شود.



شکل (۶-۳) مدار تمرین 4



برای مرتبه مدار، تعداد فرکانس‌های طبیعی شبکه لازم است. مثلاً با روش منظم ماتریس ادمیتانس گره داریم:




$$Y_n = \begin{pmatrix} 2s+1 & -s \\ -s & 2s+1 \end{pmatrix}$$

$$4s^2 + 4s + 1 - s^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{1}{3}$$

جالب شد! مدار سه تا خازن دارد، ولی مرتبه دوم شد.



دوستان، در این مورد به زودی با هم بحث خیلی ساده‌ای خواهیم داشت که در آن برای یافتن مرتبه مدار، دیگر

نیازی به  و  برای تحلیل و محاسبات نیست، بلکه تنها یک  تیزبین لازم است!



ادامه می‌دهم:

$$\text{KCL} \quad \begin{cases} V_1' + V_1 + V_3' = 0 \\ V_2' + V_2 - V_3' = 0 \end{cases}$$

با تفاضل این دو معادله و توجه به:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

چنین داریم:

$$3V_3' + V_3 = 0$$

$$3s+1=0 \rightarrow s=-\frac{1}{3}$$

چقدر جالب‌تر! پس به خودی خود در متغیر $V_3(t)$ ، فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر می‌شود.

در قسمت (ج) مسئله، از ما خواسته شده که در متغیر V_1 هم فقط $-\frac{1}{3}$ ظاهر شود. با لاپلاس‌گیری از روابط و استفاده از روش آقای کرامر داریم:

$$\begin{cases} (2s+1)V_1 - sV_2 = 2V_{01} - V_{02} \\ -sV_1 + (2s+1)V_2 = -V_{01} + 2V_{02} \end{cases}$$

$$V_1(s) = \frac{(3s+2)V_{01} - V_{02}}{(3s+1)(s+1)}$$

حالا برای حذف $s = -1$ داریم:

$$(3s+2)V_{01} - V_{02} = K(s+1)$$

$$V_{01} = -V_{02}$$


یعنی اگر ولتاژ اولیه دو خازن چپی و راستی قرینه باشند، به خواسته‌مان می‌رسیم.


۲-۳ مرتبه مدار یا تعداد فرکانس‌های طبیعی یک شبکه




قبل از شروع این مبحث، یک تست nگزینه‌ای مطرح می‌کنم:


مرتبه مدار برابر کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

(1) تعداد خازن‌ها و سلف‌های مدار! 

(2) تعداد فرکانس‌های غیر صفر و شبکه! 

(3) تعداد متغیرهای حالت مدار

(4) تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه! 

(5) تعداد قطب‌های تابع تبدیل یک متغیر شبکه! 



من فکر می‌کنم گزینه 3 درست است.



درست است ولی اگر چنین فرض کنیم، گزینه‌های 1 و 2 و 4 و 5 هم درست می‌شوند:

$$\text{مستقل،} = \text{صفر و} = \text{حداکثر}$$

حالا برویم سراغ اصل بحث خودمان:

مرتبه مدار برابر است با تعداد عناصر **مستقل** ذخیره‌کننده انرژی یا به عبارت دیگر مجموع تعداد سلف‌ها و خازن‌های مستقل. در قدم صفرم¹، به جای هر تعداد سلف یا خازن سری و یا موازی، یک المان (یک سلف یا یک خازن) قرار می‌دهیم (معادل با کل آن‌ها). حال در قدم اول، با اطلاعات پیش‌دستانی، تعداد سلف‌ها و خازن‌ها را می‌شمریم. در قدم دوم، به ازای هریک از شرایط زیر در مدار، یک واحد از مرتبه مدار کم می‌کنیم:

(الف) اگر در مدار، **حلقه خازنی** (و احياناً همراه منابع ولتاژ) موجود بود.

(ب) اگر در مدار، **کاتست سلفی** (و احياناً همراه منابع جریان) موجود بود.

(ج) اگر ولتاژ دو سر خازن یا جریان عبوری از سلف از طریقی (مثلاً **یک منبع وابسته**)، به یک یا تعدادی از سایر متغیرهای حالت وابسته بود.



آیا ممکن است، علت بندهای (الف)، (ب) و (ج) را به طور مختصر بگویید؟



حتماً؛ ببینید، هرگونه وابستگی در مدار بین متغیرهای حالت، یک واحد از فرکانس‌های طبیعی کم می‌کند.

مثلاً به شکل (6-3) نگاه کنید، آیا موافقید که:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

معنی این حرف می‌دانید چیست؟

یعنی با داشتن V_1 و V_2 ، مقدار V_3 دیگر معلوم است؛ یعنی بیچاره خازن C_3 از خودش اختیاری ندارد، یعنی مستقل نیست، یعنی وابسته است. حالا اگر در آن حلقه یک منبع ولتاژ هم اضافه شود، رابطه اخیر مثلاً این‌جوری می‌شود:

$$V_3 = V_1 - V_2 + 5$$

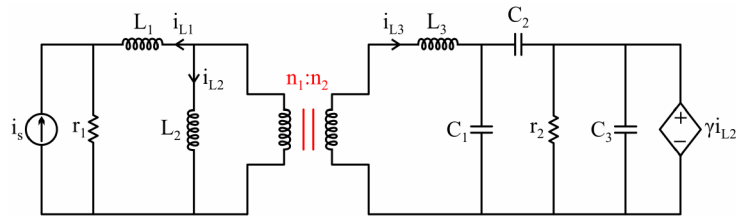
و این حرف‌ها باز هم صادق است.

توضیح بندهای (ب) و (ج) نیز عیناً همین‌گونه است، اما در یک عبارت هوشمندانه می‌توان عبارتهای (الف) و (ب) و (ج) را در یک جمله خلاصه کرد: «به ازای هرگونه ترکیب خطی بین متغیرهای حالت (V_C ها و I_L ها) و مقادیر معلوم (مثل منابع)، یک واحد از مرتبه مدار کم می‌شود.» فکر کنم تاکنون علتش را خوب فهمیده‌اید که به خاطر وابستگی این متغیرها به یکدیگر است.

1- یعنی قبل از هر اقدامی



5- تعداد متغیرهای حالت را در مدار شکل زیر تعیین کنید.



شکل (۷-۳) مدار تمرین 5



در اینجا قدم صفرم مفهومی ندارد. مجموع تعداد سلف‌ها و خازن‌ها برابر $3 + 3 = 6$ است و در قدم دوم یک کاتست

سلفی داریم و یک حلقه خازنی و یک وابستگی؛ پس:

$$\begin{array}{c} \text{کاتست سلفی} \\ \uparrow \\ 6 - 1 - 1 - 1 = 3 \\ \downarrow \\ \text{حلقه خازنی} \quad \text{اثر وابستگی} \end{array}$$

چرا و منظور از حلقه خازنی، حلقه‌ای شامل فقط

خازن‌هاست.



مگر منظور از کاتست سلفی، کاتستی فقط شامل

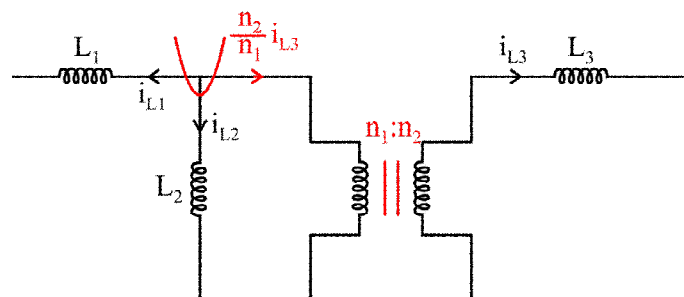
سلف‌ها نیست؟



پس اینجا کاتست سلفی خالص نداریم که؟



خودم عرض می‌کنم؛ به شکل (8-3) نگاه کنید:



شکل (۸-۳) توضیح دقیق‌تر کاتست سلفی



با یک KCL ساده داریم:

$$i_{L_1} + i_{L_2} + \frac{n_2}{n_1} i_{L_3} = 0$$

خُب این یعنی وابستگی دیگر؛ مثلاً با معلوم بودن i_{L_1} ، i_{L_2} و i_{L_3} دیگر نامش می‌شود جریان بی‌اختیار یا همان وابسته خودمان!

اصلاً استاد اجازه بدهید من یکی از کشفیات اخیرم را بازگو کنم؛ من در اثر حل مسایل متعدد فهمیده‌ام که ترانسفورماتور در مقدار فرکانس‌های طبیعی مؤثر است، اما در تعداد فرکانس‌های طبیعی یا همان مرتبه مدار هیچ نقشی ندارد.



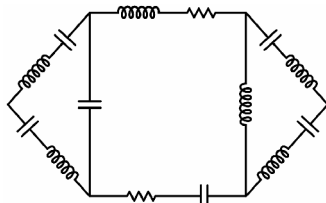
جناب کاشف، اجازه بده من به راحتی کشف شما را اثبات کنم! در فصل هفتم دیدیم که می‌توان اجزای مدار را از

ترانسفورماتور انتقال داد. با این انتقال مقدار عناصر عوض می‌شود ولی شکل گراف مدار تغییری نمی‌کند؛ پس مقادیر فرکانس‌های طبیعی تغییر می‌کنند اما تعداد آن‌ها نه. پس خواهشاً اسم مرا هم در این اکتشافات طلایی!! ثبت کن!



6- در مدار شکل زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر مدار

چند تا است؟



شکل (۹-۳) مدار تمرین 6



قبل از حل این مسئله قدری درباره فرکانس‌های طبیعی صفر حرف بزنیم.

در هر شبکه تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر برابر است با تعداد حلقه‌های سلفی به علاوه تعداد کاتست‌های خازنی؛ چراکه هریک از این‌ها یک سیگنال DC ایجاد می‌کنند.

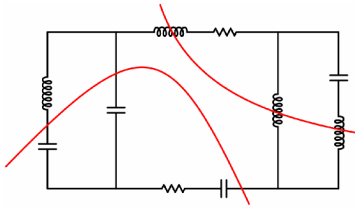
مثلاً یک حلقه سلفی در نظر بگیرید (حلقه‌ای فقط شامل سلف). یک جریان DC برای هریک از سلف‌ها فرض کنید. حالا با این فرض یک KVL در تان بزنید؛ حاصل چنین است:

$$0 + 0 + 0 + 0 + L = 0$$

چراکه وقتی جریان سلف DC (ثابت) باشد، ولتاژش صفر است. حالا می‌پرسم که آیا این KVL صادق است؟ شما هم با لبخندی ملیح می‌گویید معلوم است که صادق است؛ پس فرض جریان DC و به عبارت دیگر «فرکانس صفر» برای حلقه سلفی درست است و به طور مشابه برای کاتست خازنی.

پس تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر معلوم است دیگر؛ تعداد کل فرکانس‌های طبیعی یا مرتبه مدار منهای تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر.

حالا برویم سراغ حل تمرین 6 :



شکل (۳-۱۰) مدار ساده شده در تمرین 6 و کاتست‌ها

قدم صفرم در این مسئله خیلی مهم است؛ در طرفین مدار

به جای خازن‌های سری و سلف‌های سری یک دانه از هر کدام می‌گذاریم و به شکل (3-10) می‌رسیم:



پس دیگر مسئله حل است و چنین می‌گوییم:

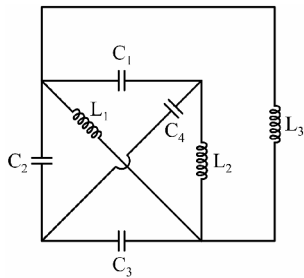
$$6 = 4 - 1 - 1 + 4 = \text{تعداد فرکانس‌های غیر صفر}$$

\uparrow کاتست خازنی \downarrow تعداد سلف
 \downarrow تعداد سلفی \uparrow کاتست خازنی

7- کدام عبارت درباره مدار شکل زیر درست است؟



- (1) سه فرکانس طبیعی صفر دارد.
- (2) یک فرکانس طبیعی صفر دارد.
- (3) فرکانس طبیعی صفر ندارد.
- (4) هیچ کدام



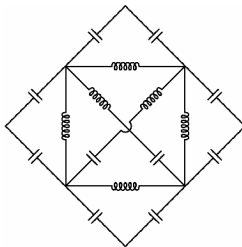
شکل (۳-۱۱) مدار تمرین 7

قدم صفرم آن است که به جای دو سلف موازی L_1 و L_3 ، یک سلف بگذاریم. پس L_1 را حذف می‌کنیم و حالا

فقط یک کاتست خازنی داریم و حلقه سلفی موجود نیست؛ یعنی گزینه 2 درست است.



8- تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار زیر چند تا است؟



شکل (۳-۱۲) مدار تمرین 8



باز قدم صفرم؛ به جای هر یک از جفت خازن‌های چهار طرف، یک خازن می‌گذاریم و سپس داریم:

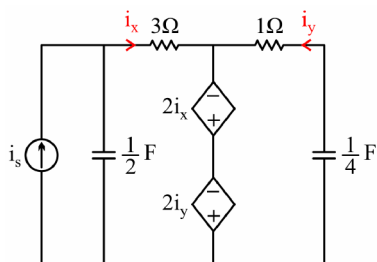
تعداد حلقه‌های خازنی - تعداد کات‌ست‌های سلفی - جمع خازن‌ها + جمع سلف‌ها = مرتبه مدار

$$6 + 6 - 0 - 1 = 11$$

مرتبه مدار = 11

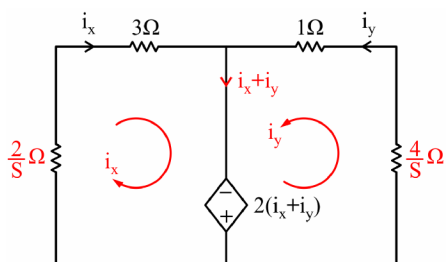


و آن یک حلقه خازنی هم، حلقه بیرونی است.



شکل (۳-۱۳) مدار تمرین ۹

۹- فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟



شکل (۳-۱۴) مدار ساده‌شده و با عینک لاپلاس تمرین ۹

از آنجاکه استاد گفتند منابع مستقل، تأثیری در

فرکانس طبیعی ندارند، برای سادگی آن را حذف می‌کنیم و پس از حذف، شکل مدار این‌گونه می‌شود:



حالا از روش منظم مش می‌رویم:

$$Z_m I = E_s$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{s} + 3 - 2 & 0 - 2 \\ 0 - 2 & \frac{4}{s} + 1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cancel{i_x}^0 + 2\cancel{i_y}^0 \\ 2\cancel{i_x}^0 + 2\cancel{i_y}^0 \end{pmatrix}$$

$$Z_m = \begin{pmatrix} \frac{2}{s} + 1 & -2 \\ -2 & \frac{4}{s} - 1 \end{pmatrix}$$

و برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، ریشه‌های دترمینان Z_m را پیدا می‌کنیم:

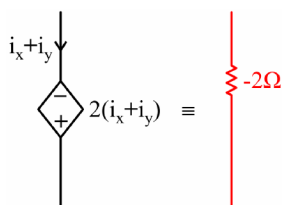
$$\det Z_m = 0$$

$$5s^2 - 2s - 8 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{5}$$



www.PowerEn.ir



من عرض مختصری دارم. به وسط شکل (14-3) نگاه کنید؛ آیا



با حرفِ شکل (15-3) موافقید؟

شکل (۱۵-۳) ساده کردن مدار تمرین 9

به نظرم ادامه‌اش معلوم است دیگر...

آفرین بر هر دو دوست بزرگواریم! جالب اینکه من می‌خواستم در جلسه بعدی درس یک نکته جالب به شما بگویم،



ولی حالا می‌بینم که خودتان به طور فطری آن را بلدید! ان شاء... همان موقع به آن اشاره خواهم کرد.

آخه استاد این جواری که دل توی دلمون نمی‌مونه! حالا که گفتید، تمامش کنید لطفاً، وِالا تا هفته آینده فکر و ذکر و

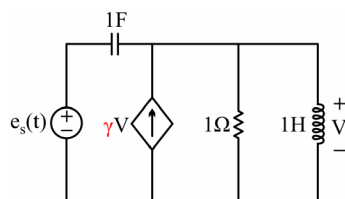


دل و... ما مشغول همین قصه می‌شود!

امان از فکر و ذکر و دل و... شما! فقط اشاره می‌کنم؛ وقتی یک مدار دوگره‌ای است، بهترین کار برای شروع تحلیل



آن، نوشتن ماتریس ادمیتانس گره است (چراکه 2×2 می‌شود) و زمانی که مدار دو حلقه‌ای است، عاقلانه‌ترین کار برای شروع تحلیل، به دست آوردن ماتریس امپدانس حلقه است (چراکه 2×2 می‌شود) و شما خوب‌تر از من می‌دانید که کار کردن با ماتریس 2×2 ، چقدر لذیذتر و ساده‌تر از کار کردن با ماتریس 3×3 و یا مرتبه بالاتر است! اما اصل داستان بماند برای جلسه بعد.



شکل (۱۶-۳) مدار تمرین 10

10- در مدار شکل زیر، مقدار γ چقدر باشد تا تمام فرکانس‌های



طبیعی مدار، روی محور موهومی قرار بگیرند؟

حالا که استاد این نکته را در مورد مدارهای پر کاربرد دوگره‌ای و دو حلقه‌ای فرمودند، من هم یک قصه در مورد



مدارهای یک‌گره‌ای و تک‌حلقه‌ای بگویم و آن هم اینکه کلید حل مدارهای یک‌گره‌ای، KCL در آن گره و رمز تحلیل مدارهای یک‌حلقه‌ای، KVL در آن تک‌حلقه است. می‌دانم که در دلتان می‌گویید چه نکته ساده‌ای؛ بنده هم عرض می‌کنم که خُب فرق من و استاد همین است دیگر!




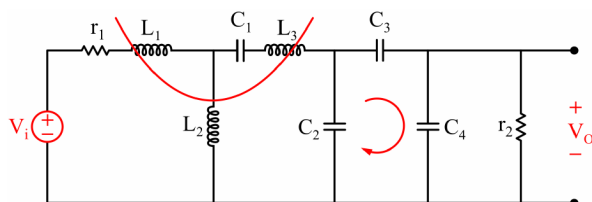
حالا بگذریم و برویم سراغ حل این مسئله تک‌گره‌ای:

در گره بالایی مدار، KCL می‌زنیم، منبع ولتاژ مستقل را هم صفر می‌کنیم؛ چنین می‌شود:

$$\text{KCL} : \left(s + \frac{1}{s} + 1 - \gamma \right) V = 0 \Rightarrow s^2 + (1 - \gamma)s + 1 = 0$$

$$\text{ریشه‌ها موهومی محض‌اند} \Rightarrow 1 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 1$$

11- تابع تبدیل $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ حداکثر چند قطب دارد؟ 



شکل (۱۷-۳) مدار تمرین 11

این مسئله کمی دشوار است؛ چراکه باید تعداد قطب‌های یک متغیر شبکه یعنی V_o را پیدا کنیم، پس از آن شروع



کنیم به یافتن تابع تبدیل $\frac{V_o}{V_i}$.

دوست خوبم، یک‌بار دیگر صورت مسئله را خوب بخوان¹. چند لحظه همه صبر می‌کنیم تا خود شما کلید را



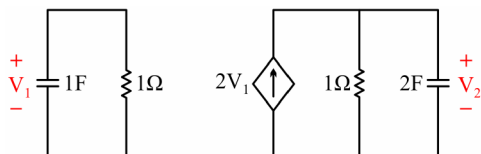
پیدا کنید...

آهان فهمیدم! کلمه «حداکثر» را می‌گویید. حداکثر تعداد قطب‌های هر متغیر شبکه، برابر همان مرتبه مدار است؛ پس



ساده شد دیگر:

$$\text{مرتبه مدار} = 7 - 1 - 1 = 5$$



شکل (۱۸-۳) مدار تمرین 12

12- برای مدار شکل زیر، معادلات فضای حالت را



بنویسید.

1- چقدر خوب خواندن صورت مسئله مهم است؛ آدم موفق، یک صورت مسئله خوب‌خوان است! نه فقط مسئله‌های مدار، بلکه همه مسئله‌های زندگی!

ببخشید، جسارته ها! ولی موضوع تمرین 12 چه ارتباط خاصی با بحث مشخصه‌های ذاتی دارد؟



حالا که جواب ندادید، خودم حل می‌کنم؛ 2 تا KCL چنین می‌دهد:



$$\dot{V}_1 = -V_1$$

$$2\dot{V}_2 = 2V_1 - V_2$$

پس ماتریس ضرایب حالت برابر می‌شود با:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

13- در مدار تمرین قبلی، فرکانس‌های طبیعی کدام‌اند؟



(4) -3 و -1

(3) -4 و -1

(2) -2 و -1

(1) -1 و $-\frac{1}{2}$

تازه (۲) ام‌افتاد! می‌خواستید کاربرد یک نکته جالب را در حین حل مسئله بفهمیم و آن اینکه «مقادیر ویژه



ماتریس A»، همان «فرکانس‌های طبیعی شبکه» هستند. این موضوع را در درس کنترل هم خوانده بودیم. این ماتریس ضرایب حالت A، چه اطلاعاتی که درون خود ندارد! پس می‌رویم و ریشه‌های دترمینان $SI - A$ را به دست می‌آوریم:

$$\det(SI - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+0.5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s = -0.5, -1$$





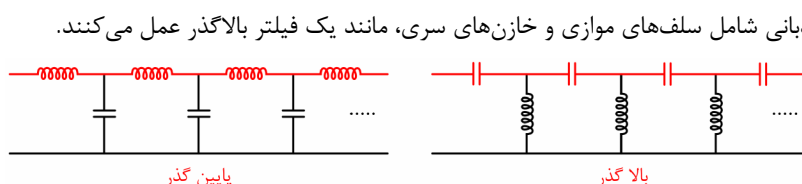
۳-۳ نگاه فیلتری به شبکه‌ها



اگر به یک مدار به چشم یک فیلتر نگاه کنیم، چیزهای جالبی عایدمان می‌شود؛ مثل این‌ها:

واضح است که اگر در شاخه‌های سری (یا افقی!) مدار باز (یا O.C.) ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی (یا عمودی!) اتصال کوتاه (یا S.C.) قرار بگیرد، سیگنالی از ورودی به خروجی نمی‌رسد؛ پس در تابع تبدیل یک صفر ایجاد می‌شود. به طور مشابه چنانچه در شاخه‌های سری (یا افقی!) اتصال کوتاه (یا S.C.) ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی (یا عمودی!) مدار باز (یا O.C.) واقع شود، ماکزیمم سیگنال از ورودی به خروجی می‌رسد؛ پس در تابع تبدیل یک قطب ایجاد می‌کند. به این گزاره‌های خبری خوب توجه کنید:

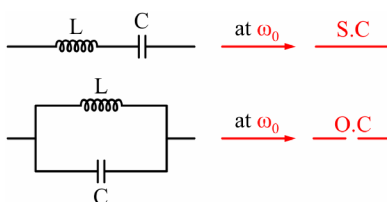
شبکه‌های نردبانی شامل سلف‌های سری و خازن‌های موازی، مانند یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کنند.



شکل (۱۹-۳) شبکه‌های نردبانی بالاگذر و پایین‌گذر

باز چند جمله دیگر:

آیا یادتان هست که گفتیم مدارهای تشدید LC سری در فرکانس تشدید، در حکم اتصال کوتاه بوده و مدارهای تشدید LC موازی در فرکانس تشدید، در حکم مدار بازند؟




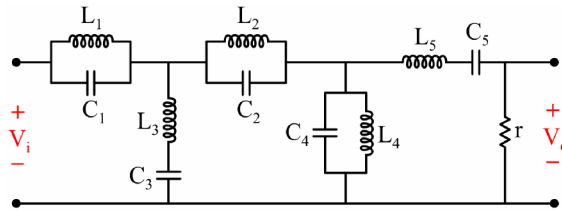
شکل (۲۰-۳) مدارهای تشدید LC سری و موازی در فرکانس تشدید

حال با توجه به عبارت‌های شکل (20-3) دو نکته می‌گوییم:

در توابع شبکه، صفرهای پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های عمودی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های افقی، به وجود می‌آید (در فرکانس تشدید).

در توابع شبکه، قطب‌های پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های افقی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های عمودی، به وجود می‌آید (در فرکانس تشدید).

14- در مدار شکل زیر، کدام یک از مقادیر، صفرها و قطب‌های تابع تبدیل $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ می‌تواند باشد؟ 



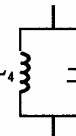
شکل (۳-۲۱) مدار تمرین ۱۴

- | | |
|--|--|
| (1) یک قطب پایان‌دار است. $\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}$ | (2) یک قطب پایان‌دار است. $\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ |
| (3) یک قطب پایان‌دار است. $\frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}$ | (4) یک صفر پایان‌دار است. $\frac{1}{\sqrt{L_5 C_5}}$ |

با توجه به آنچه گفته شد، دیگر نیازی به حل نیست؛ واضح است که گزینه (۱) درست است. با توجه به نکته (۴)



یعنی مدار L_4 در شاخه عمودی در فرکانس تشدید $\left(\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}} \right)$ قطب پایان‌دار می‌سازد.



قبل از خداحافظی از این بحث، عرض کنم که گاه‌گاهی در درس مدار، سؤال‌های درس کنترل^۱ هم می‌آید؛ پس یکی



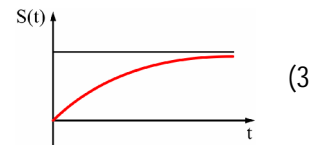
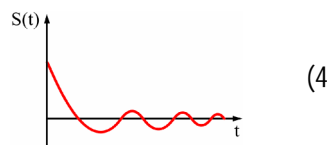
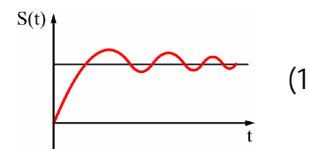
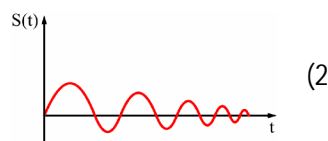
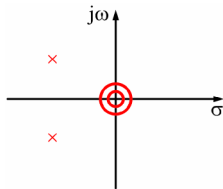
دو تا سؤال از درس کنترل خطی در اینجا می‌آوریم تا به قول بازاری‌ها، جنسمان جور باشد!

۱- البته از یک نظر می‌توان به درس مدار، نگاه شبکه‌ای و کنترلی هم داشت؛ برای همین باید اصول کلی درس کنترل خطی را خوب بلد باشید.



15- اگر نمودار قطب و صفر شکل زیر مربوط به تابع تبدیل یک سیستم باشد، پاسخ پله شبیه کدام یک از

گزینه‌هاست؟



شکل (۳-۲۲) نمودار صفر و قطب تمرین 15



من کنترلرلم خوبه! پس اجازه بدهید من بگویم؛ با توجه به شکل صفر و قطب‌ها، تابع تبدیل این گونه است:

$$H(s) = K \frac{s^2}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

پس پاسخ پله بدین صورت است:

$$S(s) = \frac{1}{s} \times H(s) = K \frac{s}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

حالا با قضیه مقدار اولیه و نهایی در مورد پاسخ پله داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sS(s) = K$$

یعنی $s(t)$ از یک عدد (غیر صفر و غیر بی‌نهایت) شروع می‌شود؛ یعنی گزینه 4 درست است.

البته در بعضی مسایل ممکن است مقدار نهایی کمک کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) = 0$$

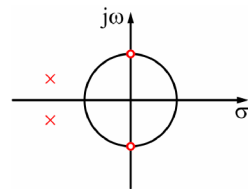
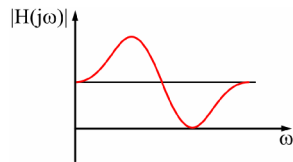
یعنی $s(t)$ به صفر ختم می‌شود.



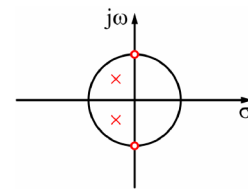
چقدر کامل و قشنگ گفتید! حیف که اینجا کلاس کنترل نیست و آلا یک عالمه حرف داشتم برای گفتن!



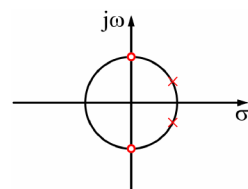
16- اگر تابع $|H(j\omega)|$ به صورت شکل زیر باشد، آرایش صفر و قطب تابع تبدیل شبکه به کدام صورت است؟



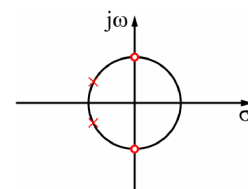
(2)



(1)



(4)



(3)

شکل (۳-۲۳) منحنی $|H(j\omega)|$ در تمرین 16



باز بنده عرض می‌کنم؛ از روی شکل معلوم است که:

$$H(s) = K \frac{(s^2 + a^2)}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

مطابق شکل (23-3)، مقدار اولیه و نهایی $|H(j\omega)|$ یکسان است؛ پس:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)|$$

$$K \frac{a^2}{\alpha^2 + \omega_d^2} = K \Rightarrow \alpha^2 + \omega_d^2 = a^2$$

رابطهٔ اخیر معادلهٔ یک دایره است، پس یا گزینه 3 درست است یا گزینه 4 که واضح است گزینه 4 به علت ناپایداری غلط است؛ در نتیجه گزینه 3 درست است.



به نظرم برای کلاس درس، همین مقدار چاشنی «کنترل» کافی است ولی حتماً تمرینات آخر فصل را به دقت حل

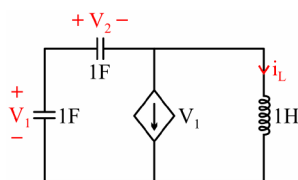
کنید؛ آنجا سؤالات قشنگی از ترکیب درس‌های مدار و کنترل خطی مشاهده می‌کنید... خیلی خوب بود! خسته نباشید؛ برای این جلسه کافی است.

مسائل تکمیلی فصل سوم

1- در مدار زیر شرایط اولیه $(V_1(0), V_2(0), i_L(0))$ را به نحوی تعیین کنید که هیچ متغیر شبکه



(مهندسی برق 82)



تحریک نشود؟

(1) $(1, 1, -1)$

(2) $(1, 0, -1)$

(3) $(1, -1, 1)$

(4) $(1, 0, 0)$

2- ماتریس ادمیتانس یک شبکه LTI به صورت زیر داده شده است. اگر گره‌های 2, 3 به یکدیگر اتصال کوتاه



(مهندسی برق 82)

شوند، فرکانس‌های طبیعی سیستم جدید چقدر خواهند بود؟

$$Y_n = \begin{bmatrix} S+1 & 0 & 0 \\ 0 & S+3 & -1 \\ 0 & -1 & S+4 \end{bmatrix}$$

(2) $\frac{-7+\sqrt{5}}{2}, \frac{-7-\sqrt{5}}{2}$

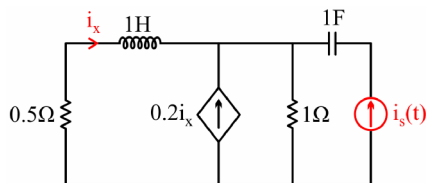
(1) $-1, -2.5$

(4) $3, -2.5$

(3) $-1, -3$

(مهندسی برق 82)

3- فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟



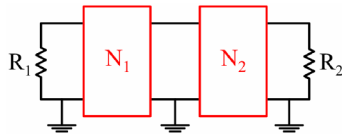
(1) -0.5

(2) -1.5

(3) -1.7 و صفر

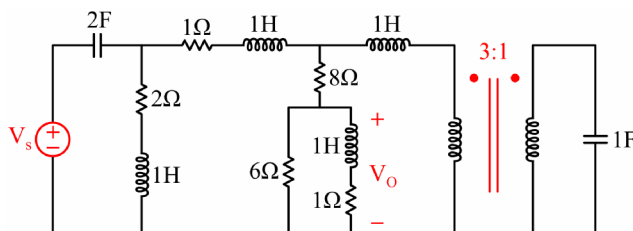
(4) $+j, -j$

4- در شکل زیر، N_1 منحصرأ از خازنهای مثبت و N_2 منحصرأ از سلفهای مثبت خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل یافته‌اند. حداکثر تعداد فرکانسهای طبیعی غیر صفر شبکه چند است؟ (مهندسی برق 80)



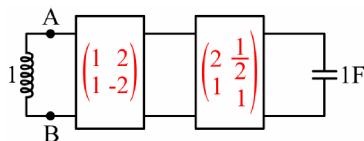
- 2 (1)
- 4 (2)
- 6 (3)
- 5 (4)

5- صفرهای انتقال تابع شبکه $H(s) = \frac{V_o}{V_s}$ کدام است؟



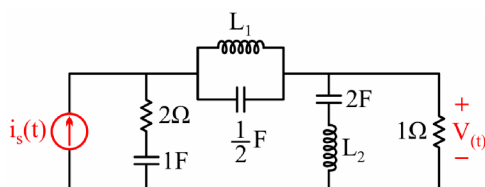
- 0, -1, -7, ±j (1)
- 0, -1, -2, ±j (2)
- 0, -1, -7, ±3j (3)
- 0, -1, -2, ±3j (4)

6- در مدار شکل زیر، دوقطبی‌ها با پارامترهای انتقال توصیف شده‌اند. فرکانسهای طبیعی کل شبکه کدام است؟ (مهندسی برق 80)



- 1, 2 (1)
- $-\frac{5}{3}, 2$ (2)
- 1, -2 (3)
- $\frac{5}{3}, -2$ (4)

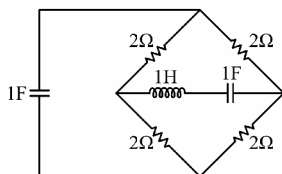
7- در مدار شکل زیر، L_1 و L_2 را چنان انتخاب کنید که برای ورودی $i_s(t) = 2\sin t + 3\cos 2t$ ، ولتاژ خروجی $V(t)$ ، جمله سینوسی با فرکانس 1 یا 2 نداشته باشد. (مهندسی برق 79)



- $L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = \frac{1}{4}$ (1)
- $L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = \frac{1}{2}$ (2)
- $L_1 = \frac{1}{4}, L_2 = \frac{1}{2}$ (3)
- $L_1 = \frac{1}{4}, L_2 = \frac{1}{4}$ (4)



(مهندسی برق 79)



8- فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



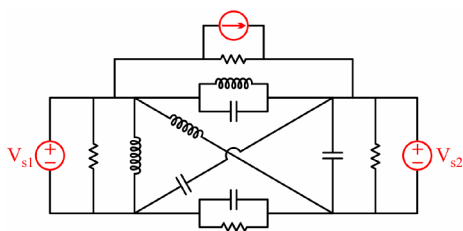
(1) $-1, -1$

(2) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(3) $-2, -1, -1$

(4) $-\frac{1}{2}, -1, -1$

9- فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان شکل زیر کدام‌اند؟ (تمامی مقادیر عناصر برابر واحدند)



(1) $-\frac{1}{3}(1 \pm j\sqrt{5})$

(2) $(-1 \pm j\sqrt{5}), \pm j$

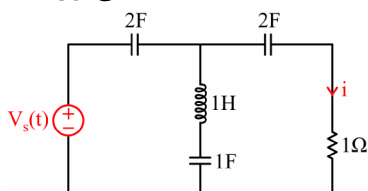
(3) $(-1 \pm j\sqrt{5}), -1$

(4) $-\frac{1}{3}(1 \pm j\sqrt{5}), \pm j, -1$

10- در تابع شبکه $H(S) = \frac{I(S)}{V_s(S)}$ مدار شکل زیر، تعداد قطب‌های تابع شبکه



(مهندسی برق 76)



(1) 3 است که یکی از آن‌ها صفر است.

(2) 4 است و هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.

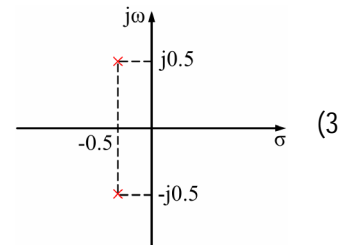
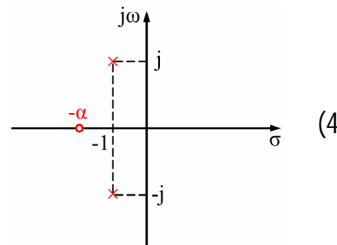
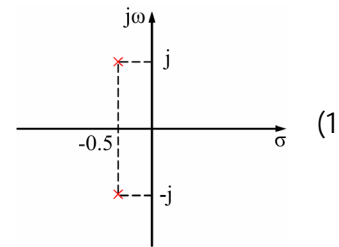
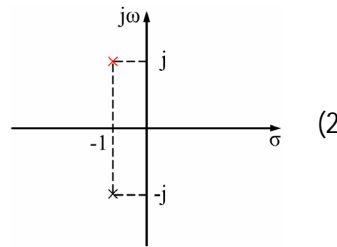
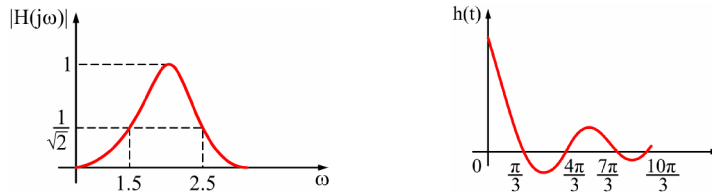
(3) 3 است و هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.

(4) 4 است که یکی از آن‌ها صفر است.

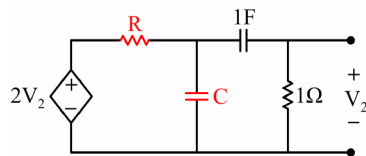


11- منحنی اندازه تابع شبکه و پاسخ ضربه یک مدار، در شکل زیر نشان داده شده است. نمایش صفرها و

قطبهای تابع شبکه این مدار کدام است؟



12- در شبکه زیر، مقادیر R و C چقدر باشد تا شبکه با فرکانس $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ نوسان کند؟



$$\frac{1}{100} \text{ F}, \frac{99}{100} \Omega \quad (2)$$

$$\frac{1}{100} \text{ F}, \frac{9}{10} \Omega \quad (1)$$

$$\frac{1}{99} \text{ F}, \frac{99}{100} \Omega \quad (4)$$

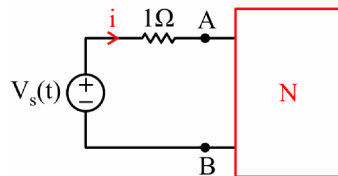
$$\frac{1}{99} \text{ F}, \frac{9}{10} \Omega \quad (3)$$



13- شبکه N، خطی و تغییرناپذیر با زمان است. نتیجه حاصل از آزمایش زیر به صورت

$$i(t) = \left(2 - \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \right) u(t)$$

است. در مورد پایداری شبکه N چه می‌توانید بگویید؟



(1) به هر دو صورت اتصال کوتاه و مدار باز پایدار است.

(2) به هر دو صورت اتصال کوتاه و مدار باز ناپایدار است.

(3) به صورت اتصال کوتاه، پایدار و به صورت مدار باز ناپایدار است.

(4) به صورت مدار باز، پایدار و به صورت اتصال کوتاه، ناپایدار است.



14- اگر پاسخ ضربه واحد یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر باشد:

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

و معادلات حالت این مدار به صورت $\dot{x} = Ax + Bw$ باشد، ماتریس A کدام یک از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟
(مهندسی برق 84)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} (1)$$



15- ماتریس امپدانس مش یک مدار LTI متشکل از عناصر RLC و منابع مستقل در حالت دایمی سینوسی به صورت $Z_{in} = \begin{pmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 2-j \end{pmatrix}$ است. کدام یک از ماتریس‌های زیر نمی‌تواند ماتریس ادمیتانس گره این مدار باشد؟
(مهندسی برق 84)

$$\begin{pmatrix} 2-j & -1+j \\ -1+j & 1 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1+j \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 2-j & j \\ j & 1 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 2-j & -1 \\ -1 & 1+j \end{pmatrix} (1)$$



16- معادلات حالت یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر داده شده است. پاسخ ضربه واحد $v_C(t)$ کدام است؟

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e(t)$$

$e(t)$ ورودی مدار است و v_C و i_L متغیرهای حالت مدار هستند. (مهندسی برق 86)

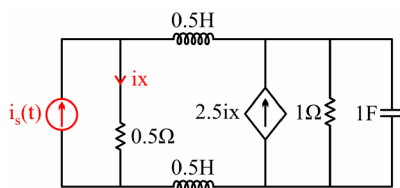
$$v_C(t) = ke^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right) u(t) (2) \quad v_C(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\frac{t}{2}} u(t) (1)$$

$$v_C(t) = kt \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right) u(t) (4) \quad v_C(t) = \left(k_1 e^{-\frac{t}{2}} + k_2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \right) u(t) (3)$$



17- فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟

(مهندسی برق 83)



- 0.5, 2 (1)
- 0.5, -2 (2)
- 0.75 + j, -0.75 - j (3)
- 1.5 + 2j, -1.5 - j2 (4)

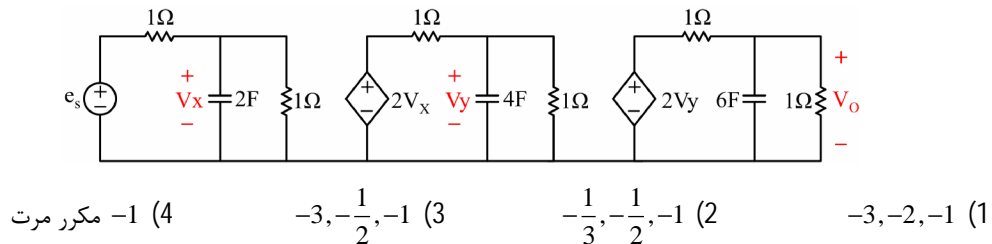


18- فرکانس‌های طبیعی کل یک مدار عبارت است از فرکانس‌های طبیعی: (مهندسی برق 84)

- (1) جریان‌های مستقل مدار
- (2) ولتاژهای مستقل مدار
- (3) ولتاژها و جریان‌های مستقل مدار
- (4) موارد 1 و 2 درست است.



19- فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق 87 و 85)



20- معادلات حالت دایمی سینوسی یک مدار به صورت زیر است (ω فرکانس منبع)، I_1 فازور i_1 و I_2 فازور i_2 :

$$\begin{cases} \left(j\omega - j\frac{2}{\omega} \right) I_1 + \left(1 - j\frac{1}{\omega} \right) I_2 = 0 \\ \left(-j\omega + j\frac{2}{\omega} \right) I_1 + \left(1 + j\omega - j\frac{3}{\omega} \right) I_2 = 1 \end{cases}$$

(مهندسی برق 86)

این مدار:

- (1) $\omega = \sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی دارد.
- (2) با $\omega \neq \sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی با فرکانس ω دارد.
- (3) با $\omega \neq \sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی با فرکانس‌های $\sqrt{2}$ و ω دارد.
- (4) به ازای هر ω حالت دایمی سینوسی دارد.



21- در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، تابع تبدیل $H(s) = \frac{V_o}{I_s}$ ، قطب‌های $s = \pm j2$ را دارد. تمام فرکانس‌های طبیعی مدار به جز $\pm j2$ در نیمه چپ صفحه مختلط است. کدام بیان در این مدار درست است؟ (مهندسی برق 85)

فرکانس‌های طبیعی مدار به جز $\pm j2$ در نیمه چپ صفحه مختلط است. کدام بیان در این مدار درست است؟

(مهندسی برق 85)

- (1) مدار به ازای هیچ ورودی، پاسخ حالت دایمی سینوسی ندارد.
- (2) مدار به ازای i_s با فرکانس‌های $\omega = 2$ ، پاسخ حالت دایمی سینوسی دارد.
- (3) مدار به ازای $i_s = \cos t$ به شرط $H(\pm j) = 0$ ، پاسخ حالت دایمی سینوسی با فرکانس $\omega = 2$ دارد.
- (4) مدار به ازای $i_s = \cos t$ به شرط $H(\pm j) = 0$ ، پاسخ حالت دایمی سینوسی با فرکانس $\omega = 1$ دارد.



22- در مداری از مرتبه 6 (یعنی با شش فرکانس طبیعی) توابع انتقال $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و

$H_2(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+3)}$ و پاسخ ورودی صفر $v = Ae^{-\frac{1}{2}t}$ معلوم است. کدام دسته از اعداد زیر فرکانس‌های

(مهندسی برق 86)

طبیعی معلوم مدار را نشان می‌دهند؟

$$-1, -1, -3, -2, -\frac{1}{2} \quad (2)$$

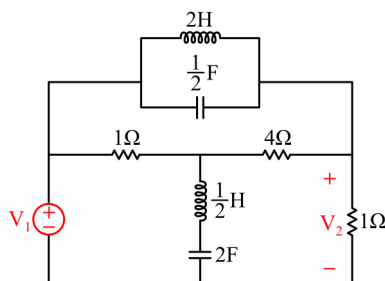
$$-1, -1, -1, -3, -2, -\frac{1}{2} \quad (1)$$

(4) موارد 1 یا 2

$$-1, -3, -2, -\frac{1}{2} \quad (3)$$



23- در مدار شکل زیر تابع تبدیل ورودی - خروجی $H(s) = \frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟ (مهندسی برق 87)



$$\frac{s^2+1}{(s+2)^2} \quad (2)$$

$$2 \frac{s^2+1}{(s+1)^2} \quad (1)$$

$$\frac{s^2+1}{(s+1)^2} \quad (4)$$

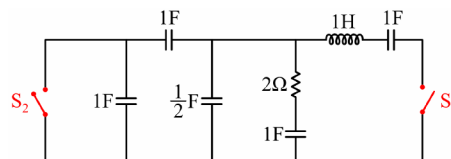
$$\frac{s^2+1}{s^2+s+1} \quad (3)$$



24- در مدار شکل زیر دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها را در نظر بگیرید. کدام ادعا درست

(مهندسی برق 87)

است؟



(1) تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت 5 است.

(2) تنها فرکانس طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر -1 است.

(3) تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در حالت دیگر است.

(4) موارد 2 و 3 درست است.





حل تشریحی

1. گزینه 1 درست است.



به نظر من، اگر قرار باشد این متغیرها در شبکه تحریک نشوند، باید مقادیر اولیه خود را حفظ کنند و بدون تغییر

باقی بمانند؛ چون هرگونه تغییری به معنای تحریک شدن در شبکه است.



استدلال جالبی بود، آفرین! ادامه بدید.



خب اگر قرار است مقدارشان تغییر نکند، مشتقشان صفر می‌شود؛ پس داریم:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 = V_L(t) = -V_2 + V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = V_2$$

که رابطه بالا تنها در گزینه 1 صدق می‌کند.

و اگر بخواهیم خیالمان راحت شود، می‌توانیم حل را ادامه بدهیم:

$$\frac{dV_1}{dt} = 0 = i_C(t) \Rightarrow V_1 = -i_L$$

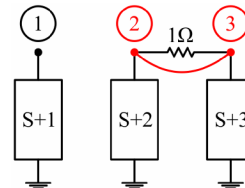
2. گزینه 1 درست است.



ماتریس Y به صورت 2×2 درمی‌آید و ادمیتانس‌های موجود در دو گره اتصال کوتاه‌شده با هم جمع می‌شوند،

البته به استثنای ادمیتانس مشترک بین آن دو که اتصال کوتاه می‌شود و از بین می‌رود. پس:

$$Y_n = \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ 0 & 2S+5 \end{bmatrix}$$



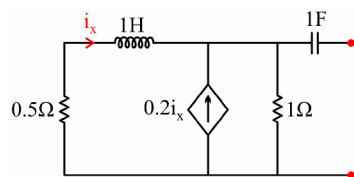
و با محاسبه ریشه‌های دترمینان ماتریس Y جدید، فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید:

$$\Delta(S) = (S+1)(2S+5) = 0 \Rightarrow S = -1, S = -2.5$$

3. گزینه 3 درست است.



اول باید منابع مستقل را صفر کنیم:



و حالا می‌توانیم برای متغیر i_x یک معادله بنویسیم که یک KVL ساده در حلقه است:

$$(0.5+S)i_x + 1.2i_x = (S+1.7)i_x = 0$$

و چون ورودی را صفر کرده‌ایم، پراوتزی که در این خروجی ضرب شده است، درواقع مخرج تابع تبدیل یا همان معادله مشخصه بوده و ریشه‌هایش فرکانس‌های طبیعی این خروجی را می‌دهد.

$$S+1.7=0 \Rightarrow S=-1.7$$



پس گزینه 3 درست است، ولی چرا فرکانس طبیعی صفر را به دست نیاوردیم؟



فرکانس طبیعی صفر مربوط به ولتاژ خازن است و اگر از روشی که دوستان سؤال را حل کردند خواستید استفاده

کنید، حواستان به فرکانس‌های طبیعی صفر هم که سلف‌ها و خازن‌ها تولید می‌کنند باشد.

$$\frac{V_C(S)}{I_S(S)} = \frac{1}{CS} \Rightarrow S=0$$

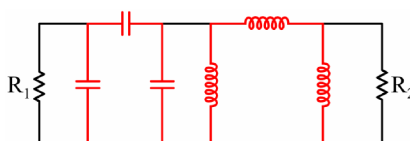
4. گزینه 2 درست است.



چون شبکه‌ها، زمین‌های مشترک دارند، به جای دوقطبی‌ها می‌توانیم معادل T یا π آن‌ها را جایگزین کنیم.



پس به صورت زیر می‌شود:



6 عنصر ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد و به علت وجود یک حلقه خازنی، باید یکی از این تعداد کم کنیم که مدار درجه 5 می‌شود؛ بنابراین 5 فرکانس طبیعی داریم.



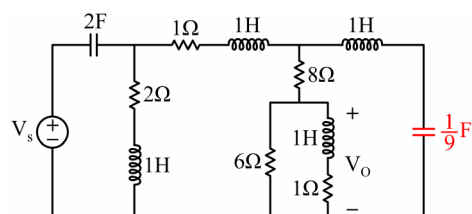
و به علت وجود یک حلقه سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر هم وجود دارد؛ پس 4 فرکانس طبیعی غیر صفر داریم.



بله و بسته به اینکه برای هر کدام از شبکه‌ها از چه مدار معادلی استفاده کرده باشید، ممکن است درجه مدار و تعداد

فرکانس‌های طبیعی صفر عوض شود، ولی تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر ثابت می‌ماند.

5. گزینه 4 درست است.



اول خازن 1 فاراد را منتقل کنیم:





شاخه عمودی سلف 1 H و خازن $\frac{1}{9}\text{ F}$ سری، یک صفر در $S = \pm j3$ می‌دهد که 3 فرکانس تشدید این LC

موجب اتصال کوتاه شدنش است و شاخه سری سلف 1 H و مقاومت 1Ω ، یک صفر در $S = -1$ و شاخه سری سلف 1 H و مقاومت 2Ω ، یک صفر در $S = -2$ و خازن 2 F سری با منبع هم یک صفر در $S = 0$ تشکیل می‌دهند؛ پس صفرهای انتقال عبارتند از:

$$S = 0, -1, -2, \pm j3$$

6. گزینه 4 درست است.



دوقطبی‌ها به دنبال یکدیگر بسته شده‌اند؛ پس برای تابع انتقال کل داریم:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

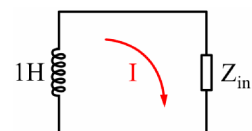


و می‌دانیم اگر $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه $Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$ ؛ پس اگر خازن 1 F را Z_L در نظر بگیریم:

$$Z_{in} = \frac{\frac{5}{S} + \frac{5}{2}}{-\frac{3}{S} - \frac{3}{2}} = \frac{5S + 10}{-3S - 6}$$



آفرین! پس مدار به صورت زیر درمی‌آید:



$$\text{KVL: } SI + Z_{in} I = 0 \Rightarrow S + Z_{in} = 0$$

$$\Rightarrow S + \frac{5S + 10}{-3S - 6} = 0 \Rightarrow \frac{-3S^2 - S + 10}{-3S - 6} = 0$$

$$\Rightarrow -3S^2 - S + 10 = 0 \Rightarrow S = -2, +\frac{5}{3}$$

7. گزینه 2 درست است.



برای اینکه فرکانس‌های مورد نظر که فرکانس ورودی مدار هم هستند، در خروجی نباشند، این فرکانس‌ها باید

صفرهای تابع انتقال این خروجی باشند. صفرهای این خروجی یکی فرکانس تشدید شاخه LC موازی است که آن را مدار باز



می‌کند و دیگری فرکانس تشدید شاخه LC سری است که آن را اتصال کوتاه می‌کند؛ پس:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \frac{1}{2}}} \Rightarrow L_1 = 2$$

$$2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \frac{1}{2}}} \Rightarrow L_1 = \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2L_2}} \Rightarrow L_2 = \frac{1}{2}$$

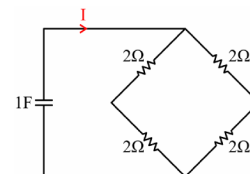
که در گزینه‌ها وجود ندارد، پس:

8. گزینه 4 درست است.



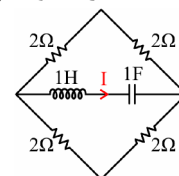
پل وتستون است؛ پس می‌توانیم برای جریان خازن، شاخه وسطی را که LC سری است، حذف کنیم:

$$\left(\frac{1}{S} + R \right) I = 0 \Rightarrow S = -\frac{1}{R} = -\frac{1}{2}$$



و این بار خروجی را جریان شاخه LC می‌گیریم و به دلیل وجود پل وتستون خازن 1F را حذف می‌کنیم و مطابق

شکل یک RLC سری خواهیم داشت:



$$2\alpha = \frac{R}{L} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow S^2 + 2S + 1 = 0$$

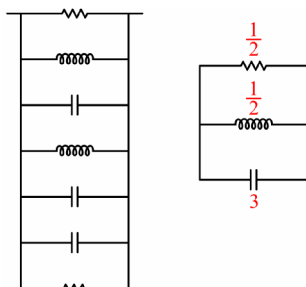
$$S = -1, -1$$

9. گزینه 1 درست است.



چون فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خواسته شده است،

می‌توانیم با خیال راحت منابع را صفر کنیم:





و برای مدار RLC موازی داریم:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \frac{1}{RC} = \frac{2}{3} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} = \frac{2}{3} \\ S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow S^2 + \frac{2}{3}S + \frac{2}{3} &= 0 \\ S &= -\frac{1}{3}(1 \pm j\sqrt{5}) \end{aligned}$$

که همان فرکانس‌های طبیعی مدار است.



البته نیازی نبود مقدار فرکانس‌ها را به دست بیاوریم؛ چون RLC موازی، یک مدار درجه دوم است و تنها گزینه 1

است که دو فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد.

10. گزینه 3 درست است.



مدار، 4 سلف و خازن مستقل دارد و به دلیل وجود کاتست خازنی، یکی از آن‌ها صفر است.



ولی در فرکانس 0، خازن‌ها مدار باز هستند و I برابر صفر می‌شود؛ پس این فرکانس، صفر این متغیر است نه قطب

آن. از این رو در نهایت 3 فرکانس داریم که هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.

11. گزینه 1 درست است.



پاسخ ضربه به صورت نوسانی میراثونده است، بنابراین قطب‌های تابع شبکه به صورت $S = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

هستند که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ، فرکانس پاسخ ضربه است. بخش حقیقی منفی سبب میرایی و بخش موهومی نوسان را در پاسخ به وجود می‌آورند.



پس چون دوره تناوب ضربه 2π است، داریم:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = 1$$

یعنی فاصله ریشه‌ها تا محور حقیقی برابر 1 است.



α هم از پهنای باند 3dB به دست می‌آید:

$$3\text{dB} = 2\alpha = 2.5 - 1.5 = 1 \Rightarrow \alpha = 0.5$$

12. گزینه 4 درست است.



یکی از ماتریس‌ها و سپس دترمینانش را به دست می‌آوریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. در معادلات مش با I_1 , I_2

ساعتگرد داریم:

$$\begin{bmatrix} R + \frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{jC\omega} \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{j\omega} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و $V_2 = I_2$ پس:

$$\begin{bmatrix} R + \frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{j\omega C} - 2 \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{j\omega} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\omega=10} \Delta = \left(R + \frac{1}{j10C} \right) \left(\frac{1}{j10C} + \frac{1}{j10} + 1 \right) - \left(\frac{1}{j10C} + 2 \right) \left(\frac{1}{j10C} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = \left[R - \frac{1}{100C} \right] - j \left[\frac{R}{10} + \frac{R}{10C} - \frac{1}{10C} \right] = 0$$



حالا قسمت موهومی و حقیقی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} R - \frac{1}{100C} = 0 \\ R \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10C} \right) - \frac{1}{10C} = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{99}{100} \Omega, C = \frac{1}{99} F$$

13. گزینه 4 درست است.



Z_{in} مدار را می‌توانیم به دست آوریم:

$$Z(S) = \frac{V(S)}{I(S)} = \frac{\frac{1}{S}}{\frac{2}{S} - \frac{3}{2} \frac{1}{S + \frac{1}{2}}} = \frac{2S+1}{S+2}$$

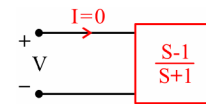
$$\Rightarrow Z_{in}(S) = \frac{2S+1}{S+2} - 1 = \frac{S-1}{S+2}$$



پس برای مدار باز داریم:

$$I = \frac{V}{Z} = V \frac{S+2}{S-1} = 0$$

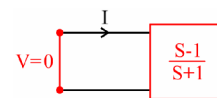
$$\Rightarrow S+2=0 \Rightarrow S=-2$$



که سمت چپ محور $j\omega$ است و پایدار است.
و برای اتصال کوتاه:

$$V = ZI = \frac{S-1}{S+2} I = 0$$

$$\Rightarrow S-1=0 \Rightarrow S=1$$



که این فرکانس طبیعی سمت راست محور $j\omega$ است و ناپایدار است.

14. گزینه 2 درست است.



از پاسخ ضربه مشخص است که مدار دارای فرکانسهای طبیعی 1- و 2- است و ریشههای $|SI-A|=0$

فرکانسهای طبیعی را می‌دهد. گزینههای 1 و 3 که واضح است اشتباه هستند؛ پس گزینههای 2 و 4 را چک کنیم.



من گزینه 2 را چک می‌کنم:

$$|SI-A| = \begin{vmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{vmatrix} = S^2 + 3S + 2 = 0$$

$$(S+2)(S+1) = 0 \Rightarrow S = -1, -2$$

پس گزینه 2 درست است.

15. گزینه 2 درست است.



می‌توانیم از روی ماتریس امپدانس مش، شکل مدار را رسم کنیم و از روی آن، ماتریس ادمیتانس گره را بنویسیم.



بله و بسته به اینکه زمین را کجا در نظر می‌گیریم، ماتریسهای مختلفی به دست می‌آوریم. البته یک راه دیگر هم

وجود دارد؛ دترمینان ماتریس امپدانس مش و ماتریس ادمیتانس گره، هر دو معادله مشخصه مدار را می‌دهند؛ پس دترمینان این دو ماتریس باید با هم برابر باشد، بنابراین داریم:

$$|Z_m| = \begin{vmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 2-j \end{vmatrix} = 2+j$$

و تنها دترمینان ماتریس گزینه 2 برابر این مقدار نیست.



16. گزینه 2 درست است.



از فرمول $|SI - A| = 0$ معادله مشخصه سیستم را به دست می‌آوریم:

$$|SI - A| = \begin{vmatrix} S & -1 \\ 1 & S+1 \end{vmatrix} = S^2 + S + 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$



بخش حقیقی فرکانس طبیعی، پاسخ نمایی $e^{-\frac{1}{2}t}$ و بخش موهومی، پاسخ سینوسی با فرکانس $\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌دهد که

این نوع پاسخ در گزینه 2 دیده می‌شود.

17. گزینه 2 درست است.



منبع مستقل را صفر می‌کنیم و برای i_x یک معادله می‌نویسیم:

$$\text{KVL: } (0.5 + 0.5)SI_x + 0.5I_x = \frac{1}{1 + \frac{1}{S}} 1.5I_x \Rightarrow \left(S + 0.5 - \frac{1.5}{S+1} \right) I_x = 0$$

و این پراپرتی فرکانس‌های طبیعی مربوط به I_x را می‌دهد:

$$S^2 + 1.5S - 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-1.5 \pm \sqrt{(1.5)^2 + 4}}{2} = \frac{-1.5 \pm 2.5}{2} = -2, 0.5$$

18. گزینه 3 درست است.



من که قاطی کردم. اولاً مگر فرق می‌کند متغیری که در نظر می‌گیریم ولتاژ باشد یا جریان؟ ثانیاً گزینه 3 و 4 که

یکسان‌اند.



جواب اولاً را نمی‌دانم، ولی سؤال دومی که پرسیدید به دستور زبان فارسی مربوط می‌شود، نه مدار الکتریکی! گزینه

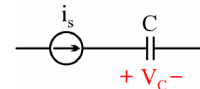
3 می‌گوید که ولتاژها و جریان‌های مستقل هر دو برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار باید در نظر گرفته شوند، ولی گزینه 4 می‌گوید که گزینه 1 و 2 هر دو درست‌اند؛ یعنی می‌توانیم فقط جریان‌های مستقل یا فقط ولتاژهای مستقل را در نظر بگیریم. به هر حال من هم با اولاً شما موافقم و به نظرم جریان و ولتاژ تفاوتی ندارند؛ بنابراین گزینه‌های 1 و 2 درست نیستند. حالا دو گزینه دیگر باقی می‌ماند.



حق دارید، انتخاب مشکل است. این سؤال به یکی از موارد استثنا در فرکانس‌های طبیعی اشاره دارد که البته قبلاً در

حین درس هم به آن اشاره کرده بودم. حالا به این مثال ساده نگاه کنید:

$$\frac{V_C}{I_S} = \frac{1}{CS}$$



V_C دارای فرکانس طبیعی صفر است، ولی I_C این فرکانس را نداشت؛ بنابراین برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی صفر و در نتیجه کل فرکانس‌های طبیعی مدار، باید جریان‌ها و ولتاژهای مستقل مدار هر دو در نظر گرفته شوند.

19. گزینه 2 درست است.



چون منبع ولتاژ داریم، خیلی راحت با سه تا KCL در سه مدار می‌توانیم به سه فرکانس طبیعی برسیم:

$$V_x(2+2S) = E_S \Rightarrow \frac{V_x}{E_x} = \frac{1}{2(S+1)} \Rightarrow S = -1$$

$$V_y(2+4S) = 2V_x \Rightarrow \frac{V_y}{V_x} = \frac{1}{(1+2S)} \Rightarrow S = -\frac{1}{2}$$

$$V_o(2+6S) = 2V_y \Rightarrow \frac{V_o}{V_y} = \frac{1}{(1+3S)} \Rightarrow S = -\frac{1}{3}$$

20. گزینه 3 درست است.

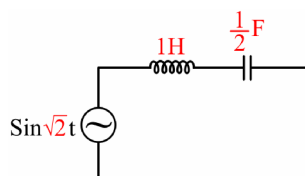


ضریب ماتریس I را می‌توانیم ماتریس Z در نظر بگیریم و $|Z|=0$ فرکانس‌های طبیعی سیستم را می‌دهد و

$\omega = \sqrt{2}$ که در گزینه‌ها ذکر شده، در این معادله صدق می‌کند.



سؤال مفهومی و قشنگی است. بیا بید در یک مدار ساده شرایط مشابهی را



برقرار کنیم، مثلاً:

فرکانس طبیعی مدار $\omega = \sqrt{2}$ و فرکانس ورودی مدار هم $\omega = \sqrt{2}$ است. حالا ببینیم چه اتفاقی می‌افتد؟

$$V_L(S) = \frac{S}{S + \frac{2}{S}} \times \frac{\sqrt{2}}{S^2 + 2} = \frac{S^2 \sqrt{2}}{(S^2 + 2)^2}$$



فهمیدم، عکس لاپلاس تابع با مخرج $(S^2 + 2)^2$ باعث می‌شود در حوزه زمان $t \cos \sqrt{2} t$ داشته باشیم که

ناپایدار است.



پس گزینه 2 درست خواهد بود.



نشد دیگه، همین معادله‌ای که استاد نوشتند را نگاه کنید؛ اگر فرکانس ورودی غیر از $\sqrt{2}$ (مثلاً 2) باشد، در

مخرج $V_L(S)$ ، $(S^2 + 4)$ و $(S^2 + 2)$ هر دو دیده می‌شوند؛ یعنی فرکانس طبیعی مدار و فرکانس ورودی، که باید مخالف آن باشد، هر دو در خروجی دیده می‌شوند.

21. گزینه 3 درست است.



مدار دارای فرکانس تشدید $\omega = 2$ است؛ بنابراین اگر فرکانس ورودی مدار هم 2 باشد، پاسخ حالت دایمی سینوسی

وجود نخواهد داشت و پاسخ ناپایدار خواهد شد. پس گزینه 2 نادرست است، ولی مدار با باقی فرکانس‌ها مشکلی ندارد؛ بنابراین گزینه 1 هم نادرست است.



موافقم، برویم سراغ گزینه 3. خب فرکانس ورودی مدار برابر یک است و این فرکانس صفر تابع تبدیل هم بوده

است؛ پس مطمئناً در خروجی ظاهر نمی‌شود و فقط $\omega = 2$ که فرکانس طبیعی مدار است در خروجی وجود خواهد داشت و گزینه 3 کاملاً درست است.



گزینه 4 هم مزاح کرده است! از یک طرف می‌گوید $\omega = 1$ «صفر تابع تبدیل» است و از طرف دیگر می‌گوید $\omega = 1$

در پاسخ وجود دارد.



22. گزینه 2 درست است.



سؤال سختی نباید باشد. از قطب‌های توابع انتقال و فرم خروجی می‌توانیم فرکانس‌های طبیعی را به دست آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} H_1(s) \rightarrow s = -1, -2 \\ H_2(s) \rightarrow s = -1, -1, -3 \\ V(t) \rightarrow s = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow s = -1, -1, -1, -2, -3, -\frac{1}{2}$$

پس گزینه 1 درست است.



به یک مطلب که صورت سؤال هم به آن اشاره کرده بود، دقت نکردید؛ فرکانس‌های طبیعی «معلوم» مدار کدام‌اند؟

یعنی مطمئن باشیم که جزء فرکانس‌های طبیعی است ولی شما از کجا مطمئن‌اید که $s = -1$ که در $H_1(s)$ وجود دارد، جدا از $s = -1, -1$ است که در $H_2(s)$ وجود دارد، شاید قطب موجود در $H_1(s)$ یکی از دو قطب مضاعف $H_2(s)$ باشد؛ پس با اطمینان گزینه 2 را انتخاب می‌کنیم و فرکانس ششم این مدار مرتبه 6 معلوم نیست.

23. گزینه 4 درست است.



به ازای $s = 0$ که سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار بازند، $V_1 = V_2$ است و در نتیجه گزینه 3 یا 4 درست است

که هر دو به ازای $s \rightarrow \infty$ برابر 1 هستند.



صورتشان هم یکی است، مگر مخرج را به دست آوریم. برای به دست آوردن معادله مشخصه که مخرج تابع تبدیل

می‌شود، ورودی V_1 را می‌توانیم صفر کنیم و گره پایین را زمین بگیریم؛ در این صورت دو گره باقی می‌ماند که می‌توانیم ماتریس گره را بنویسیم و از مساوی صفر قرار دادن دترمینانش معادله مشخصه به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2s}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}s \end{vmatrix} = 0$$

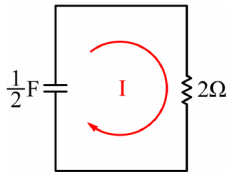
اگر ریشه مخرج گزینه 4 را که $s = -1$ است در ماتریس قرار دهیم، به راحتی مشخص است که دترمینانش صفر می‌شود؛ پس گزینه 4 درست است.



24. گزینه 4 درست است.



وقتی کلیدها بازند، بعد از سری و موازی کردن خازن‌ها داریم:



پس گزینه 1 غلط است. اینجا یک فرکانس طبیعی داریم که آن هم غیر صفر است.

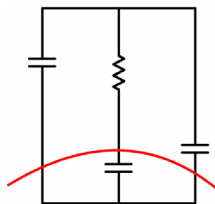
حالا این فرکانس را به دست بیاوریم، شاید -1 شد و گزینه 2 درست بود.

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}s} + 2 \right) I = 0 \Rightarrow \frac{2}{s} + 2 = 0 \Rightarrow s = -1$$



پس گزینه 2 که درست است، برای بررسی گزینه 3 هم باید تعداد فرکانس‌های صفر در حالت بسته بودن کلیدها را

به دست آوریم که پس از ساده کردن، یک کاتست خازنی داریم؛ پس یک فرکانس طبیعی صفر وجود دارد و گزینه 3 هم درست است.



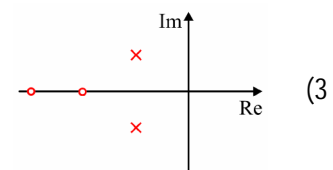
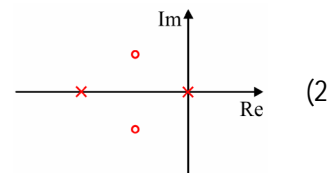
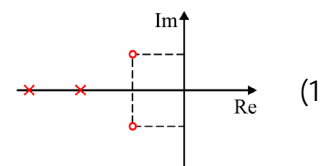
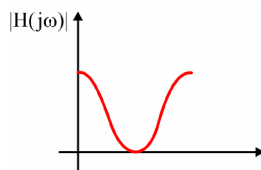
بنابراین گزینه 4 درست خواهد بود.





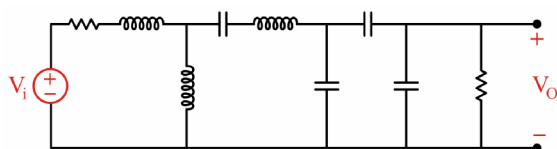
خودآزمایی فصل سوم

1. با توجه به $|H(j\omega)|$ زیر کدام یک از مکان‌های صفر و قطب می‌توانند مربوط به این سیستم باشند؟



هیچکدام (4)

2. در تابع تبدیل $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ در مدار زیر حداکثر چند قطب وجود دارد؟



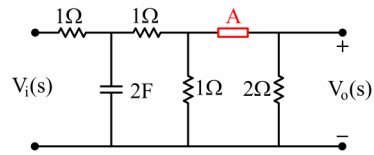
4 (1)

5 (2)

7 (3)

6 (4)

3. در صورتی که تابع تبدیل مدار داده شده، یک صفر مزدوج روی محور موهومی داشته باشد، در این صورت عنصر A:



(1) یک خازن است.

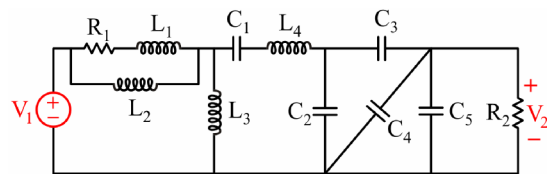
(2) یک سلف است.

(3) یک مقاومت است.

(4) هر سه گزینه و هر ترکیبی از آن‌ها می‌تواند صحیح باشد. چرا که

به مکان بقیه صفرها و قطبها اشاره نشده است.

4. در تابع تبدیل $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ در مدار داده شده حداکثر چند قطب وجود دارد؟



(1) 5

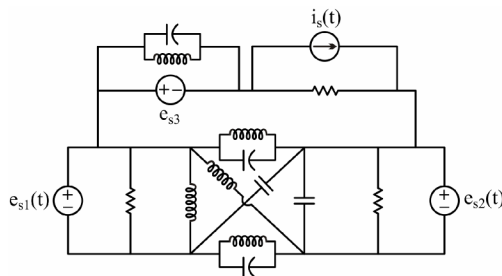
(2) 7

(3) 9

(4) 6

5. در مدار شکل زیر، تحت چه شرایطی فرکانس‌های طبیعی غیر صفر این مدار با $S = \frac{-1 \pm j2}{2}$ برابر می‌شود؟

(تمامی L_i ها برابر با L و تمامی C_i ها برابر با C و تمامی R_i ها برابر با R می‌باشند)



$$(1) L=4, R=\frac{5}{3}, C=0.2$$

$$(2) C=4, L=0.2, R=\frac{5}{3}$$

$$(3) R=\frac{5}{3}, C=5, L=0.25$$

$$(4) R=\frac{5}{3}, C=0.25, L=5$$

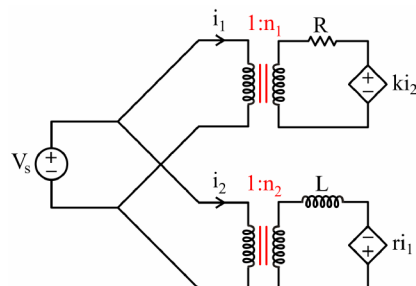
6. فرکانس طبیعی شبکه کدام است؟

$$(1) \frac{-r L n_1 n_2}{kR}$$

$$(2) \frac{-RL n_1 n_2}{kr}$$

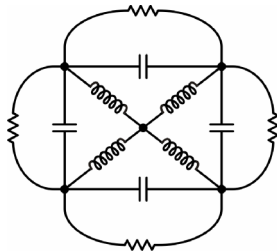
$$(3) \frac{-kr n_1}{RL n_2}$$

$$(4) \frac{-kr n_1 n_2}{RL}$$





7. مدار داده شده را در نظر بگیرید. در این حالت فرکانسهای طبیعی غیر صفر مدار را A می‌نامیم. چنانچه تمام خازنها به سلف و تمام سلفها به خازن تبدیل شود، فرکانسها طبیعی غیر صفر مدار برابر با B در نظر گرفته می‌شود. حاصل $|A - B|$ کدام است؟



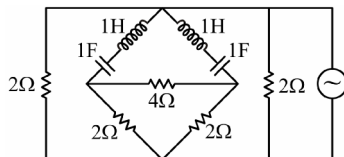
0 (1)

1 (2)

2 (3)

3 (4)

8. کدام گزینه فرکانسهای طبیعی مدار داده شده را به درستی نشان می‌دهد؟

 $s_{1,2} = -1, -1$ (1) $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ (2)

گزینه‌های 1 و 2 (3)

هیچ کدام (4)

