فصل ۳ مدارهای مرتبه اول

مقدمه

تا امروز آن‌چه دیدیم عناصر بی‌حافظه بودند؛ یعنی مقاومت و منابع. از این جلسه به بعد قدری با کلاس‌تر می‌شویم؛ یعنی با عناصر جدیدی آشنا می‌شویم؛ به نام خازن و سلف و آنها را درون مدارها به‌کار می‌گیریم. تا قبل از این جلسه؛ روابط بین ولتاژ و جریان عناصر به صورت جبری بود، بنابراین معادلات ناشی از KCL و KVL و... همگی جبری می‌شدند؛ اما با ورود حضرات سلف و خازن به مدارات ما، روابط به صورت معادلات دیفرانسیلی و یا انتگرالی می‌شود. اگر معادله توجیه کننده یک مدار به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول باشد؛ به آن مدار، مرتبه اول می‌گوییم. این فصل مقدمهٔ بسیار مهمی برای مدارهای علمی می‌باشد و اگر مدارهای مرتبه اول را خوب بفهمیم کارمان در مدارهای مرتبه دوم و سوم و... خیلی روان خواهد بود.

۳ـ۱ خازن و سلف

ابتدا به معرفی این دو عنصر مهم الکترونیکی می‌پردازیم. فرق مهم این عناصر با مقاومت در آن است که این‌ها حافظه دارند، می‌دانید یعنی چه؟

یعنی مقدار ولتاژ (یا جریان) در آن‌ها به مقادیر گذشتهٔ جریان (یا ولتاژ) بستگی دارد.

اصلاً به همین دلیل است که برای خازن عبارت ولتاژ اولیه و برای سلف، کلمهٔ جریان اولیه معنی دارد. در مقاومت چنین چیزی نداشتیم.

بله، نداشتیم و نداریم.

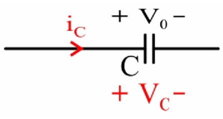
۳ـ۱ـ۱ روابط و اتصالات خازن‌ها

حال به بررسی روابط و فرمول‌های خازن می‌پردازیم. خازن را خوب یاد بگیرید؛ سلف هم خیلی به آن شبیه است. (به قول بزرگان! دوگان یکدیگرند.

(۳ـ۱) **رابطهٔ اساسی** $q = C \times V$

که در آن q (بار الکتریکی) برحسب کولن و C (ظرفیت خازن) برحسب فاراد و V (ولتاژ) برحسب ولت است. (قبول دارم این قسمت بسیار مبتدیانه و ساده بود!)

آنچه مهم است روابط ولتاژ و جریان است به شرح ذیل:



شکل (۳ـ۱) خازن

(۳ـ۲)
$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

(۳ـ۳)
$$V = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i.dt$$

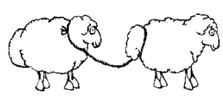
و در مورد انرژی:

(۳ـ۴)
$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}q.V$$

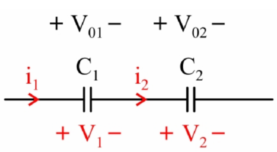
پس هر خازن با دو مشخصه، معرفی می‌شود؛ کدام‌ها؟

یکی ظرفیت خازن و دیگری ولتاژ اولیهٔ آن؛ اولی مربوط به ساختمان خازن و دومی مربوط به مداری است که خازن در آن شارژ شده است.

مبحث بعدی به‌هم‌بستن خازن‌هاست که حدس می‌زنم به خوبی بلد باشید جمع‌بندی آن را بیان کنید



ابتدا



شکل (۳ـ۲) به‌هم‌بستن سری خازن‌ها

$$\begin{cases} V_t = V_1 + V_2 + \cdots & (۳ـ۵) \\ I_t = i_1 = i_2 = \cdots & (۳ـ۶) \end{cases}$$

و در نتیجه با توجه به رابطهٔ اساسی:

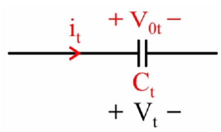
$$C_t = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \right)^{-1} \qquad (۳ـ۷)$$

قبل از آنکه سراغ موازی برویم، یک سؤال اساسی! این خازن معادل چه ولتاژ اولیه‌ای دارد؟

خیلی ساده است. چون خازن‌ها سری‌اند، شبیه رابطهٔ ۳ـ۵ خواهیم داشت:

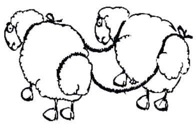
$$V_{0t} = V_{01} + V_{02} + \cdots \qquad (۳ـ۸)$$

و در یک نگاه:

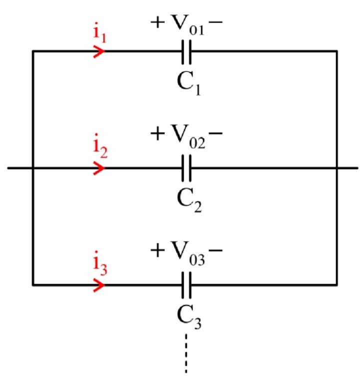


شکل (۳ـ۳) خازن معادل در حالت سری

و برای حالت



در این حالت داریم:



شکل (۳ـ۴) به هم بستن موازی خازن‌ها

$$\begin{cases} i_t = i_1 + i_2 + \cdots & (۳ـ۹) \\ V_t = V_1 = V_2 = \cdots & (۳ـ۱۰) \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$C_t = C_1 + C_2 + \cdots \tag{۳ـ۱۱}$$


باز همان سؤال قبلی، در اینجا ولتاژ اولیهٔ کل چقدر می‌شود؟


این شد یک سؤال اساسی! پس حالا نوبت من است. در اینجا از اصل بقای بار استفاده می‌کنیم:

$$q_{0t} = q_{01} + q_{02} + \cdots = C_1 V_{01} + C_2 V_{02} + \cdots \tag{۳ـ۱۲}$$

$$C_t = C_1 + C_2 + \cdots \tag{۳ـ۱۳}$$

پس طبق رابطهٔ اساسی خازن داریم:

$$V_{0t} = \frac{q_{0t}}{C_t} = \frac{\sum_i C_i V_{0i}}{\sum_i C_i} \tag{۳ـ۱۴}$$


بسیار عالی است و این ولتاژ V_{0t} ولتاژ اولیهٔ مشترک تک‌تک خازن‌هاست. فقط یادتان باشد که علامت جمع در رابطهٔ (۳ـ۱۲) جمع جبری است یعنی باید به پلاریته ولتاژها دقت داشت.


یک سؤال! یعنی اگر خازن‌های از قبل شارژشده را با هم موازی کنیم، برای هم‌پتانسیل شدن خازن‌ها بارها حرکت می‌کنند؟


قطعاً !


پس انرژی حرکت این بارها از کجا می‌آید؟


من شروع می‌کنم به توضیح، هرجا متوجه شدید، ادامه بدهید. به مجموع انرژی خازن‌ها، قبل و بعد از اتصال دقت کنید.

ادامه ندهید. من متوجه شدم، انرژی با توجه به شکل (۳ـ۴) قبل از اتصال خازن‌ها برابر است با:

$$W_{\text{قبل اتصال}} = \frac{1}{2}C_1V_{01}^2 + \frac{1}{2}C_2V_{02}^2 + \cdots \tag{۳ـ۱۵}$$

و انرژی پس از اتصال خازن‌ها برابر است با:

$$W_{\text{بعد از اتصال}} = \frac{1}{2}C_tV_{0t}^2 = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2 + \cdots\right)\left(\frac{C_1V_{01} + C_2V_{02} + \cdots}{C_1 + C_2 + \cdots}\right)^2 \tag{۳ـ۱۶}$$

به راحتی می‌توان دید که:

$$W_{\text{بعد اتصال}} < W_{\text{قبل اتصال}} \tag{۳ـ۱۷}$$

این اختلاف انرژی ΔW صرف حرکت بارها جهت هم‌پتانسیل شدن خازن‌ها می‌شود.

$$\Delta W = W_{\text{قبل اتصال}} - W_{\text{بعد اتصال}} \tag{۳ـ۱۸}$$

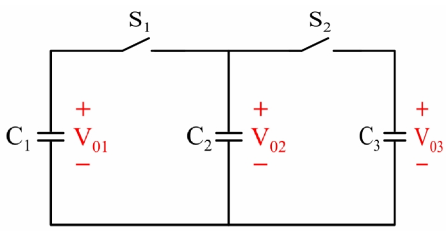
و به صورت گرما در سیم‌ها ظاهر می‌شود، که البته اگر دقت کنید می‌بینید که این جریان از جنس ضربه یا همان جرقه است.

فقط می‌ماند روابط تقسیم بار و تقسیم ولتاژ در خازن‌های موازی و سری:

$$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}q_t \quad \text{و} \quad q_2 = \cdots \quad \textbf{تقسیم بار در خازن‌های موازی} \tag{۳ـ۱۹}$$

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}V_t \quad \text{و} \quad V_2 = \cdots \quad \textbf{تقسیم ولتاژ در خازن‌های سری} \tag{۳ـ۲۰}$$

۱ـ در مدار زیر $C_1 = 2F$، $C_2 = 1F$ و $C_3 = 3F$ و ولتاژ اولیه آن‌ها برابر است با $V_{01} = 3V$، $V_{02} = 4V$ و $V_{03} = 2V$ (با پلاریته نشان‌داده‌شده روی شکل) کلیدهای S_1 و S_2 در لحظه $t = t_0$ همزمان بسته می‌شوند. انرژی ذخیره‌شده در مدار در t_0^- تا t_0^+ چه تغییری می‌کند؟



شکل (۳ـ۵) مدار تمرین ۱

با توجه به روابط (۳-۱۵)، (۳-۱۶) و (۳-۱۸) داریم:

$$t = t_0^- \;;\quad W = 9 + 8 + 6 = 23\ j$$

$$t = t_0^+ \;;\quad W = \frac{1}{2}(2+1+3)\times\left(\frac{6+4+6}{2+1+3}\right)^2 = \frac{64}{3}\ j$$

$$\Delta W = 23 - \frac{64}{3} = \frac{5}{3}\ j$$

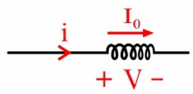
ملاحظه می‌کنید که این نوع مسئله‌ها بسیار ساده‌اند.

۳ـ۱ـ۲ روابط و اتصالات سلف‌ها

حال که روابط خازن را آموختید، در مورد سلف به اشاراتی اکتفا می‌کنیم:

رابطهٔ اساسی $\varphi = LI$ (۳ـ۲۱)

φ (شار) برحسب وبر و L (اندوکتانس) برحسب هانری و I (جریان) برحسب آمپر است.



شکل (۳ـ۶) سلف !

و برای روابط ولتاژ و جریان:

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = L\frac{di}{dt} \qquad (۳ـ۲۲)$$

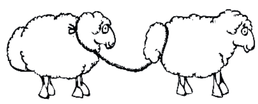
$$i = I_0 + \frac{1}{L}\int V.dt \qquad (۳ـ۲۳)$$

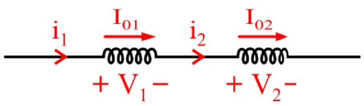
و برای انرژی:

$$W = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (۳ـ۲۴)$$

سلف هم دو عامل مشخص‌کننده دارد؛ اندوکتانس و جریان اولیه.

به هم بستن:





شکل (۳ـ۷) به هم بستن سری سلف‌ها

$$L_t = L_1 + L_2 + \cdots \qquad (۳ـ۲۵)$$

حالا بگویید جریان اولیه مشترک چه می‌شود؟

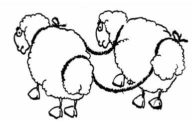
حتماً در اینجا با توجه به اصل بقای شار می‌گوییم:

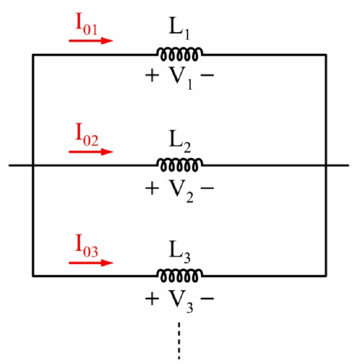
$$I_{0t} = \frac{\varphi_{0t}}{L_t} = \frac{L_1 I_{01} + L_2 I_{02} + \cdots}{L_1 + L_2 + \cdots} \qquad (۳\text{ـ}۲۶)$$

در صورت کسر رابطهٔ (۳ـ۲۶)، علامت + به معنی جمع جبری است. (یعنی باید به جهت جریان‌ها توجه داشت.) مثلاً اگر مخالف بودند، روی یکدیگر اثر تضعیفی دارند.

پس به دو اتفاق باید حساس بود. کدام اتفاق‌ها؟

سری شدن سلف‌های از قبل شارژشده با یکدیگر و موازی شدن خازن‌های از پیش شارژشده با هم، که من بارها دیده‌ام وقتی حواسم به آن‌ها نباشد، پس از حل مسئله دچار یأس فلسفی شده‌ام.

و بالاخره حالت  را بررسی می‌کنیم:



شکل (۳ـ۸) به هم بستن موازی سلف‌ها

$$L_t = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots\right)^{-1} \qquad (۳\text{ـ}۲۷)$$

و جریان اولیه سلف معادل برابر است با:

$$I_{0t} = I_{01} + I_{02} + \cdots \qquad (۳\text{ـ}۲۸)$$

در حالت سری در اینجا نیز یک انرژی تلفاتی داریم که به شرح زیر به دست می‌آید:

$$W_{\text{قبل اتصال}} = \frac{1}{2} L_1 I_{01}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{02}^2 + \cdots \qquad (۳\text{ـ}۲۹)$$

$$W_{\text{بعد اتصال}} = \frac{1}{2} L_t I_{0t}^2 = \frac{1}{2}\left(L_1 + L_2 + \cdots\right)\left(\frac{L_1 I_{01} + L_2 I_{02} + \cdots}{L_1 + L_2 + \cdots}\right)^2 \qquad (۳\text{ـ}۳۰)$$

$$\Delta W = \mathbf{W}_{\text{قبل اتصال}} - W_{\text{بعد اتصال}} \qquad (۳\text{ـ}۳۱)$$

در نهایت برای تقسیم شار و تقسیم جریان خواهیم داشت:

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}\varphi_t \quad , \quad \varphi_2 = \cdots$$ **تقسیم شار در سلف‌های سری** (۳ـ۳۲)

$$I_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I_t \quad \text{و} \quad I_2 = \cdots$$ **تقسیم جریان در سلف‌های موازی** (۳ـ۳۳)

حال به بررسی مدارهایی می‌پردازیم که شامل یک سلف یا یک خازن و سایر عناصر مقاومتی و منبع وابسته و مستقل باشند.

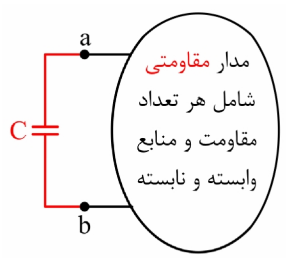
۳ـ۲ مدارهای مرتبه اول

مداری مرتبه اول است که معادله دیفرانسیل آن مرتبه اول شود؛ به عبارت دیگر شامل یک خازن مستقل یا یک سلف مستقل باشد و...

قبل از اینکه شروع کنید، سؤال دارم؛ اگر مداری شامل n تا سلف یا n تا خازن سری و یا موازی باشد، دیگر مرتبهٔ اول نیست؟

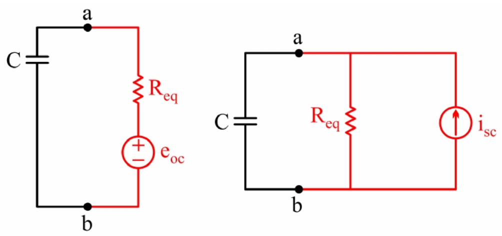
از نوع سؤال پیداست که پاسخ را می دانی؛اصلاً سؤال بسیار خوبی هم مطرح شد! گاهی در یک مسئله با شرایطی (خصوصاً با کلیدزنی) چند خازن یا سلف با هم سری یا موازی می‌شوند، در این حالت باز مدار مرتبه اول است و از قوانین مدارهای مرتبهٔ اول تبعیت می‌کند.

گفته شد که در این مدارها معادله دیفرانسیل، مرتبهٔ اول می‌شود. حالا مثلاً یک مدار مرتبهٔ اول خازنی در نظر بگیرید که خازن را از آن بیرون کشیده و پشت سرمان قرار داده‌ایم.



شکل (۳ـ۹)   یک مدار مرتبهٔ اول خازنی

می‌توان مدار شکل (۳ـ۹) را به هر یک از صورت‌های زیر ساده کرد:



شکل (۳ـ۱۰) مدارهای معادل شبکه شکل (۳ـ۹)

حال اگر تحلیل همین دو نوع مدار ساده را یاد بگیریم، مسئله حل است.

آیا معنی این اسم‌ها را می‌دانید؟ پاسخ ورودی صفر، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل

معنی آن‌ها در خود اسمشان مشخص است؛ یعنی به قول شما اسمشان سرخ‌پوستی است؛ پاسخ ورودی صفر یعنی پاسخ، وقتی ورودی صفر است، یعنی فقط ناشی از شرایط اولیه و پاسخ حالت صفر، یعنی زمانی که شرایط اولیه صفر است، به عبارت دیگر فقط ناشی از ورودی و پاسخ کامل هم معلوم است دیگرا!

روش کلی حل مدارهای شامل سلف و خازن (از هر مرتبه‌ای) در قدم اول نوشتن معادلهٔ دیفرانسیل و سپس حل آن است. من نیز قصد داشتم ابتدا یکی دو مثال را به این روش مرسوم حل کنم تا ببینید کارنسبتاً زمان‌بری است، ولی فرض می‌کنم که این روش را به یاد دارید وفوراً سراغ رابطه‌ای می‌روم که ما را سریع‌تر به پاسخ برساند. من نام این رابطه را رابطه طلایی گذاشته‌ام.

در مدارهای مرتبهٔ اول  خطی (تأکید می‌کنم خطی) و  با ورودی DC (باز تأکید می‌کنم با ورودی DC) پاسخ کامل از رابطهٔ طلایی زیر به دست می‌آید:

$$y(t)=\left(y(0)-y(\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+y(\infty) \qquad (۳ـ۳۴)$$

که y هر سیگنالی می‌تواند باشد، (ولتاژ یا جریان) قبل از آنکه جلوتر برویم، دو سه دقیقه به رابطهٔ بالا فکر کنید. اجزای این رابطه را خوبِ خوب بشناسید:

τ یا ثابت زمانی؛ در موردش چه می‌دانید؟

ثابت زمانی فقط مختص مدارهای مرتبهٔ اول است و طوری که هر مدار پس از مدت زمانی در حدود ۴ الی ۵ برابر آن به مقدار دایمی یا نهایی یا ماندگار خود می‌رسد و برابر است با:

$$\tau^{S} = \begin{cases} R_{eq}^{\Omega} \times C^{F} & \text{RC برای مدار} \\ L^{H} / R_{eq}^{\Omega} & \text{RL برای مدار} \end{cases} \qquad (۳۵\_۳)$$

که در آن R_{eq} مقاومت معادل دیده‌شده از دو سر خازن یا سلف است.

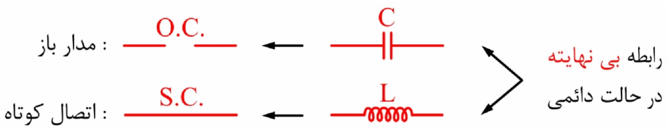
یک جمله می‌گویم، رویش حسابی فکر کنید؛بعداً به شدت به درد ما می‌خورد. حالا که این‌طور شد، از این به بعد به زمان‌های بزرگ‌تر از 5τ می‌گوییم بی‌نهایت! البته بی‌نهایت فیزیکی؛ یعنی ممکن است این بی‌نهایت کمتر از میلی‌ثانیه هم باشد!

پس به دست آوردن ثابت زمانی معادل است با:

یافتن مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن یا سلف و همان حرف‌های قدیمی ...

$y(0)$ و $y(\infty)$ را خودم باید بگویم، شما هم خوب دقت کنید.

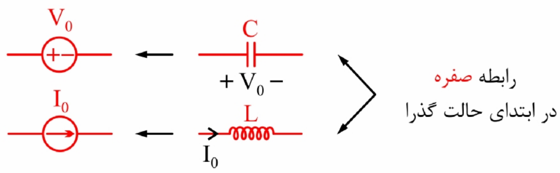
$y(\infty)$ یعنی مقدار ولتاژ یا جریان در حالت دایمی، برای به دست آوردن آن از رابطه بی‌نهایته! استفاده می‌کنیم:



اگر متوجه شدید یک‌بار توضیح دهید.

یعنی ابتدا به‌جای سلف، اتصال کوتاه و به‌جای خازن، مدار باز می‌گذاریم و پس از این تغییرات مدار را تحلیل می‌کنیم تا سیگنال مورد نظر در حالت دایمی به دست آید.

دقیقاً درست است و اما برای $y(0)$ از رابطهٔ صفره بهره می‌گیریم:

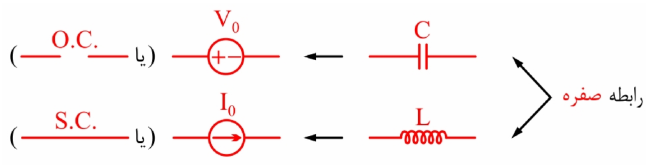


یعنی به‌جای خازن، یک منبع ولتاژ با مقدار V_0 و به‌جای سلف، یک منبع جریان با مقدار I_0 می‌گذاریم و با تحلیل مدار به $y(0)$ می‌رسیم. اما اگر خازن یا سلف بدون شرایط اولیه بود، چطور؟

خوب واضح است دیگر، یعنی منابع صفر می‌شوند؛ یعنی:

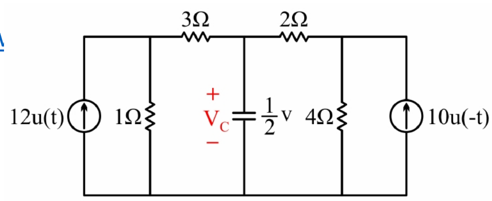
فهمیدم ! یعنی به‌جای خازن، اتصال کوتاه (منبع ولتاژ صفرشده) و به‌جای سلف، مدار باز (منبع جریان صفرشده) قرار می‌دهیم و ادامهٔ همان حرف‌ها.....

پس یک‌بار دیگر تکمیل می‌کنیم:



البته از حالا ذهنتان را آماده کنید؛ لحظهٔ صفر یعنی کلیدزنی. اما ما در اصل دو جور صفر داریم؛ یکی 0^- که بلافاصله قبل از کلیدزنی است و یکی 0^+ که بلافاصله پس از کلیدزنی است. روشن است که برای پیدا کردن $y(0^-)$ باید از رابطه بی‌نهایته استفاده کنیم و برای به دست آوردن $y(0^+)$ باید از رابطه صفره کمک بگیریم، یعنی جنس 0^- از نوع ∞ است؛ یعنی بی‌نهایت ثانیه پس از $-\infty$ اما 0^+ از جنس صفر است؛لطفاً این حرف‌ها را یکبار خودتان تکرار کنید.

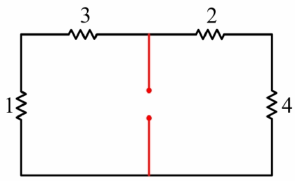
۲ــ معادلهٔ V_c را بیابید.



شکل (۳ـ۱۱) مدار تمرین ۲

ابتدا یافتن τ :

که بسیار هم ساده است؛ از دو سر خازن R_{eq} را پیدا می‌کنیم:



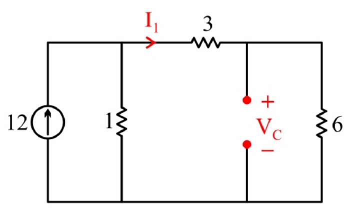
شکل (۳ـ۱۲) مقاومت دیده‌شده از دو سر خازن

$$R_{eq} = 4 \parallel 6 = 2.4\ \Omega$$

$$\tau = R_{eq}.C = 2.4 \times 0.5 = 1.2\ S$$

و سپس $y(\infty)$:

به کمک رابطهٔ بی‌نهایت و اینکه منبع $10u(-t)$ در آن زمان صفر است، مدار به این شکل شده:



شکل (۳ـ۱۳) یافتن V_C در حالت دایمی

$$I_1 = \frac{1}{9+1} \times 12 = 1.2\,A$$

$$V_C(\infty) = 6\ I_1 = 7.2\,V$$

و برای $y(0)$ ؛

خوب به کمک رابطه صفره و ...

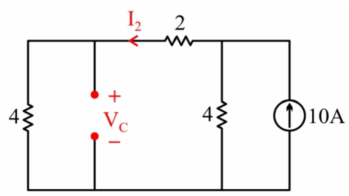
ادامه ندهید! خوب دقت کنید، در اینجا صفر به چه معنی است؟ در پاسخ به این سؤال، نکتهٔ خیلی مهمی نهفته است!

فهمیدم، خیلی جالب است! ابتدا $V_C\left(0^-\right)$ را پیدا می‌کنیم و با توجه به پیوستگی ولتاژ خازن $V_C\left(0^+\right)$ را هم داریم و برای پیدا کردن $y\left(0^-\right)$ از رابطه بی‌نهایته استفاده می‌کنیم، چراکه 0^- در اصل معنی بی‌نهایت را می‌دهد؛ یعنی گذشتن زمان بی‌نهایت از زمان $-\infty$

قبل از ادامه حل مسئله، این دو جمله را یک‌بار دیگر تکرار می‌کنیم:

یافتن $y\left(0^-\right)$ (سیگنال بلافاصله قبل از کلیدزنی) از رابطه بی‌نهایته است و به دست آوردن $y\left(0^+\right)$ (سیگنال بلافاصله پس از کلیدزنی) از رابطه صفره است.

ادامه می‌دهیم:



شکل (۳ـ۱۴) یافتن V_C در 0^-

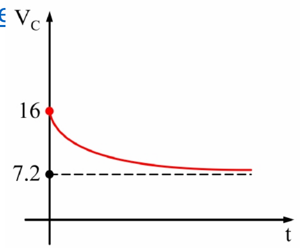
$$I_2 = \frac{4}{4+6} \times 10 = 4\,A$$

$$V_C\left(0^-\right) = 4I_2 = 16\,V \quad \Rightarrow \quad V_C\left(0^+\right) = 16\,V$$

حال که سه پارامتر لازم به دست آمد، با توجه به رابطه  داریم:

$$V_C(t) = (16-7.2)e^{-\frac{t}{1.2}} + 7.2 = 8.8e^{-\frac{t}{1.2}} + 7.2$$

و شکل این سیگنال تقریباً این‌جوری است:



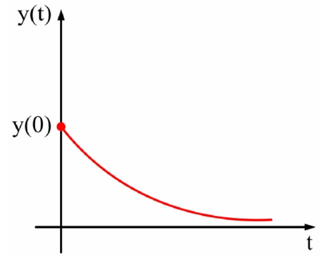
شکل (۳ـ۱۵) شکل موج ولتاژ خازن در مسئله ۲

درضمن معلوم است که هر پاسخی در مدارهای مرتبهٔ اول به صورت نمایی است و برای انواع پاسخ واضح است که داستان اینگونه می‌شود:

پاسخ ورودی صفر: چون منبع نداریم، $y(\infty)$ برابر صفر می‌شود، پس پاسخ برابر است با:

$$y(t)=y(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (۳ـ۳۶)$$

و شکل آن:

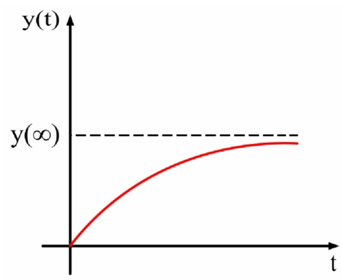


شکل (۳ـ۱۶) پاسخ ورودی صفر در مدار مرتبه اول

و در مورد **پاسخ حالت صفر:** $y(0)=0$ است پس:

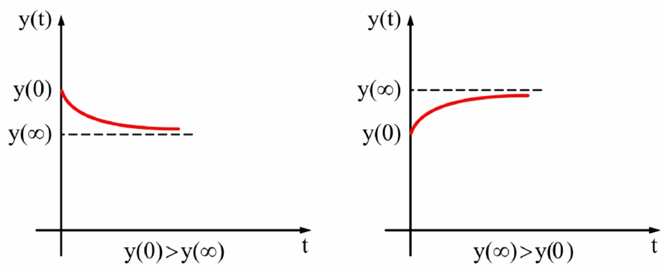
$$y(t)=y(\infty)\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \qquad (۳ـ۳۷)$$

و شکل آن:



شکل (۳ـ۱۷) پاسخ حالت صفر در مدار مرتبه اول

و شکل پاسخ کامل در مدار مرتبهٔ اول به این صورت است:



شکل (۳ـ۱۸) پاسخ کامل درمدار مرتبه اول

و اگر $y(0)=y(\infty)$ باشد، چطور؟

آن گاه‌اصلاً پاسخ گذرا معنی ندارد و داریم:

$$y(t)=y(\infty) \tag{۳ـ۳۸}$$

معنی دقیق پاسخ گذرا چیست؟

ببینید، از یک نگاه دیگر هم، پاسخ قابل تقسیم است:

پاسخ گذرا: آن قسمتی از پاسخ که وقتی $t \to \infty$ می‌رود، صفر می‌شود.

پاسخ ماندگار: حد پاسخ وقتی که $t \to \infty$.

پاسخ کامل: مجموع دو پاسخ بالا

درضمن باید توجه داشت که پاسخ گذرا ناشی از منبع و شرایط اولیه هر دو است و پاسخ ماندگار ناشی از منبع است و پاسخ کامل هم که معلوم است دیگر .....

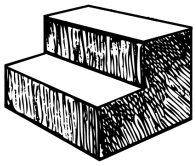
یک نکتهٔ جالب ! از رابطهٔ طلایی، پاسخ گذرا و ماندگار هم معلوم است.

(۳ـ۳۹) **پاسخ گذرا** $y(t)=\left(y(0)-y(\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

(۳ـ۴۰) **پاسخ ماندگار** $y(t)=y(\infty)$

اصلاً برای همین است که نام آن را GOLDEN گذاشته‌ایم !

۳ـ۳ پاسخ پله

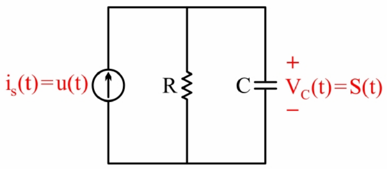


می‌دانید یعنی چه؟

واضح است دیگر، پاسخ به ورودی پله.

البته با قیدِ حالت صفر یعنی بدون حضور شرایط اولیه

حال اگر بخواهیم پاسخ به ورودی $u(t)$ را $s(t)$ بنامیم، هیچ حرف جدیدی نداریم؛ به عنوان نمونه در مدار شکل (۳ـ۱۹) برای خروجی ولتاژ خازن داریم:

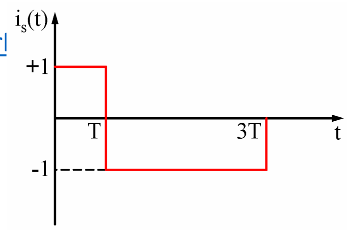


شکل (۳ـ۱۹) پاسخ پله در مدار RC

با توجه به رابطهٔ (۳ـ۳۷):

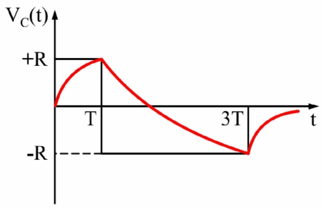
(۳ـ۴۱) $$s(t)=V_C(t)=R\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$$

حال اگر ورودی به صورت ترکیبی از توابع پله (به صورت پالسی) باشد، خروجی چگونه می‌شود؟ مثلاً با ورودیِ نشان‌داده‌شده در شکل (۳ـ۲۰) پاسخ مدار شکل (۳ـ۱۹) چگونه می‌شود؟



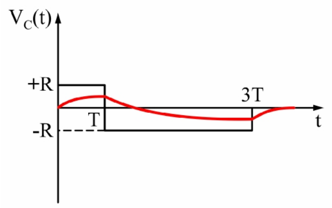
شکل (۳ـ۲۰) یک ورودی برای مدار شکل (۳ـ۱۹)

از قضیهٔ جمع آثار استفاده می‌کنیم؛ در T ثانیهٔ اول عمل شارژ خازن و بعد تغییر پلاریتهٔ ولتاژ از $+R$ به $-R$ و در نهایت پس از زمان $3T$ خازن دشارژ می‌شود، یعنی به شکل زیر:



شکل (۳ـ۲۱) پاسخ مدار شکل (۳ـ۱۹) به ورودی شکل (۳ـ۲۰)

اما این پاسخ، یک ایراد اساسی دارد. از کجا معلوم که زمان T برای شارژ کامل خازن، کافی باشد؛ یعنی‌اصلاً من ادعا می‌کنم که پاسخ به شکل (۳-۲۲) می‌شود:



شکل (۳ـ۲۲) پاسخ دیگری برای $V_C(t)$

پس در این‌گونه مواقع شکل پاسخ

بستگی دارد !

به مقایسهٔ عرض پالس‌ها (یعنی T) و ثابت زمانی (یعنی τ)؛ اگر عرض پالس‌ها از 5 برابر τ بیشتر بود، زمان کافی برای شارژ و دشارژ هست؛ وَالا این عمل ناقص انجام می‌شود.

توجه به این نکته در بعضی تست‌های مفهومی بسیار مهم است. حال به تمرین زیبای ۳ دقت کنید.

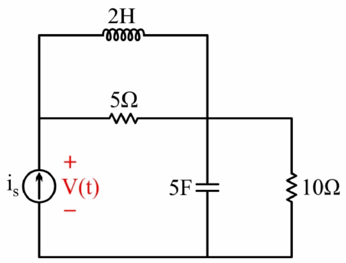
۳ـ در مدار شکل (۳ـ۲۳)، $i_s(t)=50u(-t)$ است. مقدار ولتاژ دو سر منبع جریان در $t=0^+$ $\left(V\left(0^+\right)\right)$ چقدر است؟

۱) $500\,V$

۲) $0\,V$

۳) $250\,V$

۴) $50\,V$

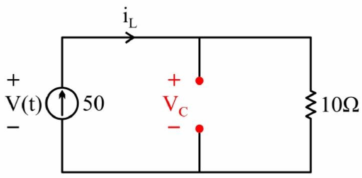


شکل (۳ـ۲۳) مدار تمرین ۳

استاد به نظرم این مدار مرتبه اول نیست؛ مگه نه؟!

هیس! به روی خودت نیاور؛ من‌عمداً این مدار را که مرتبه دوم است در اینجا آورده‌ام تا بفهمید که خیلی از حرف‌های کلاس امروز ـ غیر از خود رابطه طلایی ـ مال مدار مرتبه n ام است؛ یعنی حرف‌هایی مثل رابطه صفره و رابطه بی‌نهایته و... برای مدارهای مرتبه شصت و سوم هم جواب می‌دهد! حال بگذریم،...

چون ورودی مدار از $-\infty$ متولد شده است، برای بررسی در $t=0^-$ مدار از رابطه بی‌نهایته بهره می‌گیریم. (سلف، اتصال کوتاه و خازن مدار باز می‌گردد.)



شکل (۳ـ۲۴) مدار تمرین ۳ در $t=0^-$ به کمک رابطه بی‌نهایته

$$V_C\left(0^-\right)=V\left(0^-\right)=500\,V$$
$$i_L\left(0^-\right)=50\,A$$

پس گزینهٔ ۱ درست است.

گاهی آدم سر جلسهٔ کنکور از اینکه به پاسخی رسیده که در گزینه‌ها هست مشعوف! می‌شود، ولی بعد از جلسه می‌بیند که $-\frac{1}{3}$ نمره نصیبش شده است! خوب دقت کنید، پاسخ اشتباه است؛ البته اشتباه رایجی است[1].

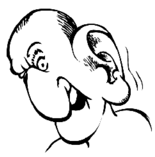
سیگنال‌های پیوسته جریان سلف و ولتاژ خازن هستند[2].

می‌دانید یعنی چه؟

یعنی در پیوستگی سیگنال‌های غیر از V_C و i_L شک کنید، ممکن است پیوسته نباشند.

پس چرا خود شما در حل تمرین ۳ همین اشتباه را مرتکب شدید؟

ببینید، خوب گوش کنید! مثل گوش شکل (۳ـ۲۵)!



شکل (۳ـ۲۵) تصویر یک‌گوشِ خوب باز شده!

هنگامی‌که سیگنالی را بلافاصله پس از کلیدزنی مثلاً در $t=0^+$ می‌خواهیم، در **قدم اول** مدار را در $t=0^-$ رسم می‌کنیم. (به کمک رابطه بی‌نهایته!) و مقادیر $V_C\left(0^-\right)$ و $I_L\left(0^-\right)$ را به دست می‌آوریم. آن‌گاه می‌گوییم:

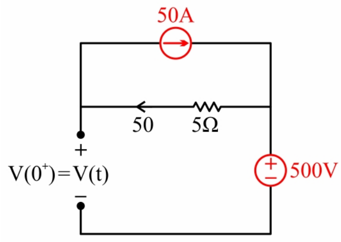
$$V_C\left(0^+\right)=V_C\left(0^-\right)$$
$$I_L\left(0^+\right)=I_L\left(0^-\right)$$

---

1. Common mistake

۲ـ تازه همین V_C و I_L هم همیشه هنگام کلیدزنی پیوسته نیستند؛ اگر ورودی ضربه باشد باید به پیوستگی این‌ها هم شک کرد؛ درضمن اگر هنگام کلیدزنی دو تا خازن غیر هم‌پتانسیل با هم موازی شوند، دیگر V_C پیوسته نیست و نیز اگر هنگام کلیدزنی دو تا سلف غیر هم‌جریان با هم سری شوند، دیگر I_L پیوسته نیست و چقدر دقت در این قصّه‌ها مهم‌تر از مهم است!

و سپس در **قدم آخر**، مدار را در $t=0^+$ می‌کشیم ! (به کمک رابطه صفره) و حالا با تحلیل مدار هر متغیری را در $t=0^+$ به دست می‌آوریم. پس در ادامهٔ تمرین ۳ داریم:



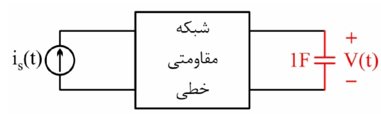
$$V\left(0^+\right)=-250+500=+250\,V$$

شکل (۳ـ۲۶) مدار تمرین ۳ در $t=0^+$ به کمک رابطه صفره

یعنی گزینهٔ ۳ درست است.

از این گونه مسایل که نیاز به ریزبینی دارد، در کنکور کارشناسی ارشد کم نبوده است.

۴ـ در شکل زیر ولتاژ اولیهٔ خازن صفر است و می‌دانیم:



$$V(t)=\frac{1}{4}\left(1-e^{-3t}\right)u(t)$$

شکل (۳ـ۲۷) مدار تمرین ۴

اگر به‌جای خازن، سلف $L=2H$ قرار دهیم، $V(t)$ برابر می‌شود با:

۱) $\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{6}}u(t)$ ۲) $\frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$ ۳) $\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{2}{3}t}\right)u(t)$ ۴) $\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right)u(t)$

با توجه به رابطهٔ داده‌شده در صورت تست داریم:

$$\tau_{\text{قدیم}}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad R_{eq}\times 1=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad R_{eq}=\frac{1}{3}\,\Omega$$

و بنابراین در حالت جدید:

$$\tau_{\text{جدید}}=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6\,S$$

یعنی یا گزینهٔ ۱ درست است یا ۴

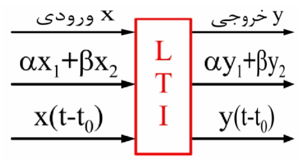
از طرفی طبق رابطه بی‌نهایته، سلف در بی‌نهایت $(t\to\infty)$ اتصال کوتاه است، یعنی ولتاژش صفر می‌شود، یعنی گزینهٔ ۱ درست است. (جالب بود؟!)

حالا یک نوع دیگر از مسایل که تا به حال شبیه آن، کم نبوده است.

۵ـ در یک مدار RC در حال سکون[1]، به ازای دریافت سیگنال پله واحد ولتاژ خازنی برابر $V_C(t) = 1 - e^{-2t}$ است. اگر خازن ولتاژ اولیه 1 ولت داشته باشد و سیگنال ورودی $2u(t)$ اعمال شود، پاسخ $V_C(t)$ چقدر می‌شود؟

این تمرین را خودم توضیح می‌دهم؛ چون دو سه کلمه حرف حساب می‌خواهم به بهانهٔ حل آن بگویم!

به شکل (۳ـ۲۸) توجه کنید و به آن فکر کنید و آن را با یکدیگر زمزمه کنید!



شکل (۳ـ۲۸) یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان

پس خروجی ناشی از $2u(t)$، ۲ برابر خروجی ناشی از $u(t)$ است، یعنی:

$$V_C(t) = 2 - 2e^{-2t} \quad \text{(ناشی از ورودی)}$$

و اما خروجی ناشی از شرایط اولیه $V_0 = 1\ V$ طبق رابطهٔ (۳-۳۶) برابر است با:

$$V_C(t) = 1e^{-2t} \quad \text{(ناشی از شرایط اولیه)}$$

و در نتیجه پاسخ کامل برابر است با:

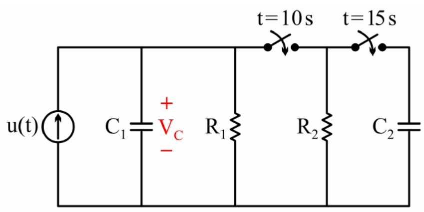
$$V_C(t) = 2 - e^{-2t}$$

۳ـ۴ مدار مرتبهٔ اول با چند ثابت زمانی

۶ـ در مدار شکل (۳ـ۲۹) پاسخ ولتاژ خازن را رسم کنید.

(به زمان قطع و وصل کلیدها دقت کنید.)

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 1\Omega \\ C_1 = C_2 = 1F \end{cases} \quad , \quad V_{C_1}(0^-) = V_{C_2}(0^-) = 0$$



شکل (۳ـ۲۹) مدار تمرین ۶

1.at first, at rest

در هر بازه، مسئله را جداگانه بررسی می‌کنیم؛ در هر قسمت مدار مرتبهٔ اول است، ولی ثابت زمانی تغییر می‌کند:

$$0 < t < 10^{S} \;;\; V_C(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{و} \quad \tau_1 = 1^{S}$$

و در نمودار چون $10s$ بزرگتر از $5\ \tau_1$ است، پس به مقدار نهایی‌اش می‌رسد: (اگر نبود، شارژ ناقص بود.)

در بازه بعدی:

$$10 < t < 15^{S} \quad ; \quad \begin{cases} R_{eq} = \frac{1}{2}\Omega \\ C = 1F \end{cases} \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2}\, s$$

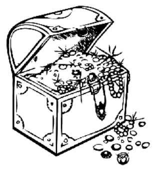
در این بازه پاسخ کامل است، مقدار اولیهٔ این بازه از مقدار نهایی بازهٔ قبلی به دست می‌آید.

ببخشید می‌پرم وسط حرف شما ! ولی برای آنکه یادتان بماند می‌گویم: مثل «دوی امدادی»

ادامه بدهید.

پس برای مقدار اولیهٔ بازه داریم:

$$V_C\left(10^{S}\right) = 1 - e^{-10} \simeq 1V$$

و طبق رابطهٔ  :

$$V_C(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t-10}{0.5}} + \frac{1}{2}$$

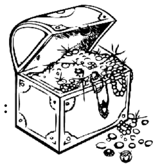
و یا:

$$V_C(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

در اینجا هم زمان $5s$ برای رسیدن به مقدار نهایی (یعنی $\frac{1}{2}$) کافی است و در نهایت در بازهٔ آخر $t>15s$ خازن C_2 هم وارد می‌شود و داریم:

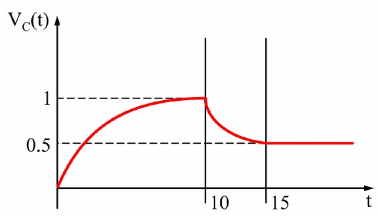
$$\begin{cases} R_{eq} = \frac{1}{2}\Omega \\ C_{eq} = 2F \end{cases} \rightarrow \tau_3 = 1s$$

$$V_C(15S) = \frac{1}{2} e^{-2\times 5} + \frac{1}{2} \simeq \frac{1}{2} V$$

و باز با رابطهٔ  :

$$V_C(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{-t}+\frac{1}{2}$$
$$V_C(t)=\frac{1}{2}$$

یعنی در حالت آخر بسیار جالب شد، چراکه پاسخ گذرا وجود ندارد و منحنی $V_C(t)$ به صورت ثابت روی $\frac{1}{2}$ می‌ماند. مطابق شکل (۳ـ۳۰):



شکل (۳ـ۳۰) پاسخ $V_C(t)$ در تمرین ۶

بسیار عالی است. البته بسیار عالی هم نیست، بهتر است بگویم اِی بَدَک نیست! اصلاً چرا تعارف می‌کنم، اواخرش خراب شد! چراکه در پاسخ شما اشکالاتی بود. آن‌ها را پیدا کنید.

اولاً در معادلات $V_c(t)$ بعد از کلیدزنی باید به‌جای t مقدار $t-t_0$ قرار دهیم. (t_0 همان لحظهٔ کلیدزنی است.) مثلاً $V_c(t)$ به صورت زیر می‌شود:

$$V_C(t)=\frac{1}{2}e^{-2(t-10)}+\frac{1}{2}$$

پس در معادلات پس از کلیدزنی در $t-t_0$ ، به‌جای t مقدار $t-t_0$ می‌گذاریم. به عبارت شیک‌تر! شیفت زمانی پاسخ! و اشکال بعدی؟!

اشکال بعدی، خیلی هم اساسی‌تر است. ببینید در $t=15S$ به دلیل کلیدزنی دو خازن با هم موازی می‌شوند. یادم هست که قرار بود به این موضوع حساس باشیم، اما دوست من هیچ حساسیتی نداشت. ابتدا باید ولتاژ خازن معادل را پیدا کنیم: (طبق رابطهٔ ۳ـ۱۴)

$$V_C=\frac{\frac{1}{2}\times 1+1\times 0}{1+1}=\frac{1}{4}$$

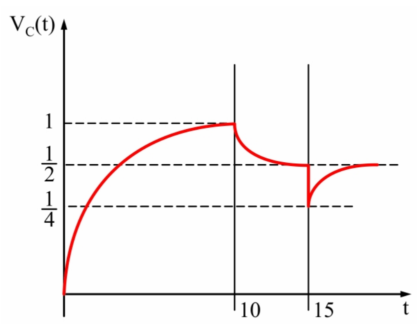
پس رابطهٔ $V_c(t)$ برای $t>15s$ به صورت زیر می‌شود:

$$V_C(t)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-(t-15)}+\frac{1}{2}$$

و یا:

$$V_C(t)=-\frac{1}{4}e^{-(t-15)}+\frac{1}{2}$$

پس شکل (۳ـ۳۰) به صورت زیر می‌شود:



شکل (۳ـ۳۱) جواب درست $V_C(t)$ در تمرین ۶

ملاحظه شد که در $t=15\ s$ در ولتاژ خازن پیوستگی نبود[1]. پس عبارتی را که چندی پیش گفتیم، اصلاح می‌کنم.

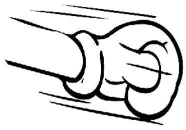
خود سیگنال‌های پیوسته که فقط ولتاژ سلف و جریان خازن بودند نیز در **دو** صورت ناپیوسته می‌شوند:
هنگام سری شدن سلف‌های از قبل شارژشده و موازی شدن خازن‌های از قبل شارژشده و

هنگامی که ورودی ضربه باشد.

احسنت ! اصلاً جواب شما بهانه‌ای شد تا راجع به «پاسخ ضربه» چند کلمه حرف بزنم، هرچند تا آخر درس مدار چندین و چندبار با پاسخ ضربه سروکار خواهیم داشت.

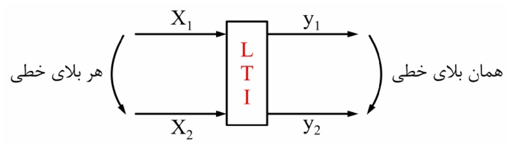
۱ـ در لحظه $t=15s$ در مقدار V_c یک پله دیده می‌شود؛ پس در مشتق ایشان! یعنی i_c یک ضربه قابل مشاهده خواهد بود. جریان ضربه به قول خودمانی یعنی جرقه و موجب اتلاف انرژی بین لحظات 15^- و 15^+ می‌شود که در اوایل این فصل راجع به آن حرف‌های خوبی زدیم.

۳ـ۵ پاسخ ضربه



یعنی پاسخ حالت صفر به ورودی ضربه، البته ضربه می‌آید و یک جهش در شرایط اولیه ایجاد می‌کند و سپس صفر می‌شود؛ یعنی‌ذاتاً پاسخ ضربه یک نوع پاسخ ورودی صفر است.

به این شکل نگاه کنید:



شکل (۳ـ۳۲) نتیجه‌ای از مفهوم خطی بودن

آیا منظورم را فهمیدید؟

یعنی هر بلای خطی بر سر ورودی بیاید،عیناً همان بلا بر سر خروجی می‌آید. بلایای خطی! همچون مشتق، انتگرال، لاپلاس، فوریه و...

پس نتیجه می‌گیریم که:

پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله است. پس با توجه به رابطهٔ (۳ـ۴۱) داریم:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t) \qquad (۳ـ۴۲)$$

رابطهٔ بالا می‌گوید که در اثر ورودی ضربه:

$$V_C(0^-)=0 \qquad (۳ـ۴۳)$$

$$V_C(0^+)=\frac{1}{C} \qquad (۳ـ۴۴)$$

یعنی در اثر ورودی ضربه در ولتاژ خازن به اندازهٔ $\frac{1}{C}$ جهش ایجاد شده است.

۳ـ۶ مدارهای غیرخطی یا تغییرپذیر با زمان

حل این‌گونه مدارها یک رمز دارد:

نوشتن معادلهٔ دیفرانسیل و حل آن به طریق جداسازی متغیرها... (یا به هر روش دیگری که دوست داشتید!)

۷ـ پاسخ $V_C(t)$ را بیابید، به‌طوری‌که $(V_C(0)=V_0 V)$ و $(C=1F)$

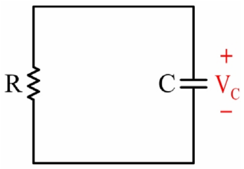
الف) R یک مقاومت خطی 1 اهمی است.

ب) R یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان است، به‌طوری‌که:

$$R(t)=\frac{1}{1+0.5\cos t}$$

ج) R یک مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان است، به‌طوری‌که:

$$i_R=V_R^2$$



شکل (۳ـ۳۳) **مدار تمرین ۷**

حل قسمت (الف) با من و قسمت‌های (ب) و (ج) با شما:

به کمک رابطهٔ طلایی:

$$V_C=V_0e^{-t} \quad \text{و} \quad \tau=RC=1$$

برای (ب) چون مقاومت **خطی** است، می‌توانیم از رابطه $i=\frac{V}{R}$ استفاده کنیم؛ پس داریم:

$$\frac{dV}{dt}+V(1+0.5\cos t)=0$$

$$\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V}=\int_0^t-(1+0.5\cos t)\,dt$$

$$\ln\frac{V}{V_0}=-(t+0.5\sin t)$$

$$V=V_0e^{-(t+0.5\sin t)}$$

نکته خیلی جالبی که دیده می‌شود این است که اگر V_0 را برابر کنیم، خروجی نیز برابر می‌شود و این منطبق بر **خطی** بودن مدار است.

حل این قسمت هم مثل قبلی است:

$$\frac{dV}{dt}+V^2=0$$

$$\int_{V_0}^{V}-\frac{dV}{V^2}=\int_0^t dt$$

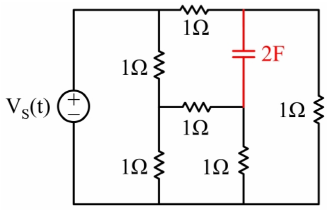
$$\frac{1}{V}-\frac{1}{V_0}=t$$

$$V=\frac{V_0}{1+V_0 t}$$

و در اینجا اگر V_0 را  برابر کنیم، خروجی  برابر می‌شود؛ تعجّبی هم ندارد، چراکه مدار غیرخطی بود.

و اما یک مسئله یا یک تمرین هدف‌دار:

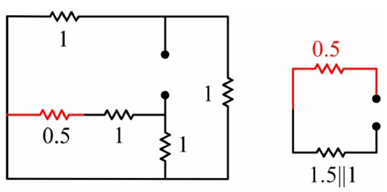
۸ـ ثابت زمانی مدار زیر را بیابید.



شکل (۳ـ۳۴) مدار تمرین ۸

خواهش می‌کنم، این مسئله را ابتدا خودتان حل کنید! (البته قرارمان در مورد همهٔ مسایل همین بود.) و حالا به حل نگاه کنید:

ترجمهٔ مسئله عبارت است از یافتن R_{eq} دیده‌شده از دو سر خازن که ابتدا منبع مستقل را صفر می‌کنیم داریم:



شکل (۳ـ۳۵) مراحل ساده‌سازی مدار تمرین ۸

پس:

$$R_{eq} = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10}\,\Omega$$

$$\tau = R_{eq} \times C = \frac{11}{10} \times 2 = 2.2\,s$$

حالا سؤالم این است: آیا جواب آخر را درست به دست آورده بودید؟

اگر نه، یعنی باید بیشتر و بیشتر مسئله حل کنید تا دستتان هم مثل مغزتان! گرم شود. بگذارید حالا که به آخر فصل رسیدیم، کمی برایتان حرف بزنم؛ ببینید بچه‌ها؛ بعضی دروس مبتنی بر **دانایی** هستند؛ مثلاً جغرافی! در آنجا هرچه بیشتر مطالعه کنید، بهتر نتیجه می‌گیرید اما برخی دروس مبتنی بر **توانایی**اند؛ مثل درس مدار یا رانندگی یا شنا! اگر شما n ساعت سر کلاس رانندگی بنشینید، ولی پشت ماشین نروید، هیچ فایده‌ای ندارد؛ اولین بار که ماشین را راه می‌برید، به هزار و یک‌جا می‌زنید! و این طبیعی است؛ همین‌طور اگر شما نویسنده یک کتاب شنا باشید ولی شنا نکرده باشید، در اولین تجربه غرق می‌شوید؛ پس به‌جای آن‌که «**مدار**» بخوانید، «**مداد**»تان را بردارید ومرتباً مسئله حل کنید؛ آن‌قدر مسئله حل کنید که دستتان و مغزتان (تأکید می‌کنم هر دو!) داغ شوند و آن‌گاه در مدار به درجه تبحّر می‌رسید!