روش های یافتن انتگرال

۱) تغییر متغیر $\longrightarrow$ $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_A^B f(u)\, du$

$\int \sec \xrightarrow[\div]{\times} \tan x + \sec x$

۲) تغییر متغیر وارون

عبارات $\sqrt{a^2 - x^2}$:

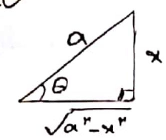
$x = a \sin\theta$

$y = \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$

$dx = a\cos\theta\, d\theta$

$x \in [-a, a]$

$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



عبارات $\sqrt{a^2 + x^2}$ یا $\frac{1}{a^2 + x^2}$:

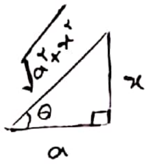
$x = a\tan\theta$

$x \in \mathbb{R}$

$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y = \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos\theta}$

$dx = \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta = a(1 + \tan^2\theta)\, d\theta$



عبارات $\sqrt{x^2 - a^2}$:

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$

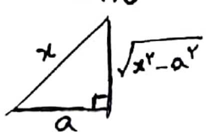
$x = a\sec\theta$

$y = \sqrt{x^2 - a^2} = a\,|\tan\theta|$

$x \leq -a \longrightarrow \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow y = -a\tan\theta$

$x \geq a \longrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow y = a\tan\theta$

$dx = a\sec\theta \tan\theta\, d\theta$



تغییر متغیر $\tan\frac{x}{2}$

زمانی که در عبارت مورد نظر $\sin$, $\cos$ موجود باشد:

$u = \tan\frac{x}{2}$

$du = \frac{1 + \tan^2\frac{x}{2}}{2}\, dx = \frac{1 + u^2}{2}\, dx$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{1 + u^2}\, du$

$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$

$\cos x = \frac{2}{1 + u^2} - 1 = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$

$\sin x = 2\tan\frac{x}{2} \cdot \cos^2\frac{x}{2} = \frac{2u}{1 + u^2}$

ادامه روش های یافتن انتگرال

۳) جزء به جزء

نامعین:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) + C - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

معین:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

$u \leftarrow$ مشتقش راحت تره

$v \leftarrow$ انتگرالش راحت تره

۴) تجزیه کسر — سه دسته

$$\begin{cases} Q(x) \rightarrow \text{مخرج} \\ P(x) \rightarrow \text{صورت} \end{cases}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

الف) درجه P < درجه Q

Q قابل تجزیه به عوامل خطی با تکرار یک

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{x^2+2x-1}{x(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x-1}$$

ب) درجه P < درجه Q

Q قابل تجزیه به عوامل خطی ولی نه لزوماً تکرار یک

$$\frac{x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

ج) درجه P < درجه Q

در تجزیه Q، عوامل درجه ۲ با تکرار یک موجوده

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

د) درجه P < درجه Q

در تجزیه Q، عوامل درجه یک یا دو با هر چند تکراری موجوده

$$\frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x} = \frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2}$$

انتگرال ناسره یا حجی:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $[a,b]$ کراندار باشد $\Leftarrow$ قضیه اکسترمم $\Leftarrow$ $f(x)$ بر این بازه کراندار است پس حاصل انتگرال حقیقی $\Leftarrow$ انتگرال سره

انواع ناسره $\longleftarrow$ ناسره نوع اول $\longleftarrow$ $a=-\infty$ یا $b=\infty$ یا هر دو

ناسره نوع دوم $\longleftarrow$ زمانی که در $x\to a$ یا $x\to b$، $f(x)$ کراندار نباشد.

قضیه

اگر تابع $f(x)$ بر $[a,+\infty)$ پیوسته باشد:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{r\to\infty}\int_a^r f(x)\,dx$$

اگر $f(x)$ بر $(-\infty,b]$ پیوسته باشد:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{r\to-\infty}\int_r^b f(x)\,dx$$

حالا اگر این حدها موجود باشند می‌گوییم $\longleftarrow$ ناسره همگرا

در غیر اینصورت ناسره واگرا

اگر مقدار حد $\pm\infty$ شد $\longleftarrow$ واگرا به بی نهایت

قضیه

اگر $f(x)$ بر $(a,b]$ پیوسته باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f(x)\,dx$$

اگر $f(x)$ بر $[a,b)$ پیوسته باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f(x)\,dx$$

تقسیم p ـ انتگرال ها $(0<a<\infty)$:

$$\int_a^{\infty} x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{a^{-p+1}}{-p+1} & p>1 \text{ همگرا} \\ \infty & p\leq 1 \text{ واگرا} \end{cases}$$

$$\int_0^{a} x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{a^{-p+1}}{-p+1} & p<1 \text{ همگرا} \\ \infty & p\geq 1 \text{ واگرا} \end{cases}$$

~~x~~ اگر پیدا کردن تابع اولیه ی انتگرال، مشکل باشد، می توانیم از ۲ آزمون برای برآورد همگرایی یا واگرایی انتگرال نا سره داریم:

ـ آزمون مقایسه:

$$\left.\begin{array}{l} -\infty\leq a<b\leq\infty \\ f \text{ و } g \text{ بر } (a,b) \text{ پیوسته اند} \end{array}\right\} \xrightarrow{\forall x\in(a,b)} f(x)\leq g(x)$$

$$\begin{cases} \text{if } \int_a^b f(x)dx \xrightarrow[\text{واگرا}]{} \int_a^b g(x)\,dx \text{ واگرا} \\ \text{if } \int_a^b g(x)dx \xrightarrow[\text{همگرا}]{} \int_a^b f(x)\,dx \text{ همگرا} \end{cases}$$

$(x\geq 0)\ \sin x\leq x$

$(x>0)\ \ln x\leq x-1$

ـ آزمون مقایسه حدی برای انتگرال نا سره نوع اول:

$$\forall x\geq a \longrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \text{ و } f \text{ پیوسته} \\ g(x)\geq 0 \text{ و } g \text{ پیوسته} \end{cases} \overset{\text{اگر}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

هم رفتار اند $\Leftarrow$ $\text{if } (c\neq 0,\infty) \Longrightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx,\ \int_a^{\infty} g(x)dx \longrightarrow$ هردو یا همگرا یا واگرا

همگرایی مشابه $\Leftarrow$ $\text{if } (c==0) \Longrightarrow \text{if}(\int_a^{\infty} g(x)dx \text{ همگرا}) \Longrightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا

واگرایی مشابه $\Leftarrow$ $\text{if}(c==\infty) \Rightarrow \text{if}(\int_a^{\infty} g(x)dx \text{ واگرا}) \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx$ واگرا

- آزمون مقایسه حدی برای انتگرال ناسره نوع دوم :

f و g بر بازه $(a , b]$ پیوسته و مثبت

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$

اگر $\Rightarrow \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$

- $C \neq 0 , \infty \xrightarrow{\text{هم رفتار}}$ هر دو همگرا اند یا واگرا اند
- $C = 0 \xrightarrow[\text{همگرا}]{\text{اگر } \int_a^b g(x)dx} \int_a^b f(x)dx$ همگرا
- $C = \infty \xrightarrow[\text{واگرا}]{\text{اگر } \int_a^b g(x)dx} \int_a^b f(x)dx$ واگرا

کاربرد انتگرال :

طول قوس خم C : $L = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1+(f'(c_i))^2} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

اگر $f(x)$ هموار باشد یعنی دارای مشتق پیوسته باشد $\Leftarrow$ مجموع ریمان همگراست و می‌توان به صورت انتگرال آن را نوشت

مساحت رویه دوار حاصل از دوران خم $f(x)$ حول محور x : $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

مساحت رویه دوار حاصل از دوران خم $f(x)$ حول محور y : $S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

حجم حاصل از دوران حول x : $V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$

$dV \approx$ مساحت سطح مقطع $\times dx$

حجم از روش پوسته استوانه‌ای : $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$

(حجم حاصل از دوران حول محور y)

جرم → ماده همگن (سطح)، چگالی ثابت → جرم × چگالی = جرم

else → تابع چگالی $\delta = \delta(P) \Rightarrow \Delta m \approx \delta(P)\Delta V$

$$\Rightarrow \text{جرم جسم} = m = \int dm = \int \delta(P)\, dV$$

به طور مشابه برای ۱ بعدی و ۲ بعدی هم می‌توانیم جرم را محاسبه کنیم

گشتاور و مرکز جرم

گشتاور → ۱ جرم حول x_0: $m(x-x_0)$

چند جرم: $M_{x_0} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_0)$

گشتاور حول مرکز جرم صفر است ⇐ $\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{x}) = 0$

$$\Rightarrow \bar{x}\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \Longrightarrow \bar{x} = \frac{\text{گشتاور جرم حول نقطه}}{\text{جرم جسم}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

چگالی پیوسته $\Longrightarrow$ $\bar{x} = \dfrac{\int_a^b x(\delta(x)\,dx)}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$ (Σ به $\int$ تبدیل می‌شود)

نقطه تعادل

اگر ابعاد جسم تغییر کند چه؟ dx → مشابه dS یا dV :
(۲ بعدی: dS، ۳ بعدی: dV)

دنباله

دنباله → نمایش: جمله عمومی، رابطه بازگشتی

چند تعریف:

- از بالا کراندار: $\exists M \ \forall n \quad a_n \leq M$
- از پایین کراندار: $\exists K \ \forall n \quad a_n \geq K$
- کراندار ← هرگاه هم از پایین و هم از بالا کراندار باشد
- مثبت: $a_n \geq 0$ ، منفی: $a_n \leq 0$
- صعودی: $a_{n+1} \geq a_n$ ، متناوب: $a_n a_{n+1} < 0$
- همگرا است هرگاه: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad |a_n - L| < \varepsilon$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0 \quad (|p|<1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (\forall p > 0)$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$

تابع f حقیقی‌مقدار و در $x = L$ پیوسته است.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

ادامه دنباله

- اگر $\{a_n\}$ همگرا ⇐ دنباله کرانداره.
- دنباله صعودی + از بالا کراندار ⇐ همگرا
- دنباله نزولی + از پایین کراندار ⇐ همگرا

تیپ سوال ⇐ دنباله بازگشتی می‌دهند می‌گویند که آیا همگرا است؟ به چه عددی؟

⇓

استقرایی ثابت می‌کنیم صعودی/نزولی و از پایین یا بالا کراندار (بالک حدی) است.

سری

سری ⇐ مجموع تعداد نامتناهی عدد ⇐ شبیه S_n به آن نگاه می‌کنیم

if: $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

سری هندسی: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (x\in\mathbb{R}) \Leftarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \Leftarrow$

- $\frac{x}{1-x} \Leftarrow |x|<1$
- یا در غیر اینصورت واگرا است.

سری ادغامی ⇐ مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

سری هارمونیک: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ⇐ واگرا به ∞

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد $\Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $N\in\mathbb{N}$ سری $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

یعنی اگر تعداد متناهی جمله از سری حذف کنیم، در همگرایی و واگرایی آن بی‌تأثیره!

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ ⇐

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$
- $C\in\mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA$
- $a_n \leq b_n \Rightarrow A \leq B$
- قانونی برای ضرب ۲ سری نداریم

اگر $\{a_n\}$ نهایتاً مثبت باشد

یعنی $\exists k \ \forall n\geq k \ \ a_n \geq 0$

- پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یا همگرا (وقتی دنباله مجموع جزئی آن از بالا کراندار باشد)
- یا واگرا به ∞ (وقتی دنباله مجموع جزئی آن از بالا کراندار نباشد)

توانی

↓ ۲ صفحه جلوتر

آزمون های سری های عادی مثبت

برای همگرایی

وقتی $\{a_n\}$ دنباله‌ای است که از نهایت مثبت است و ما نمی‌توانیم جمله عمومی $\{S_n\}$ را بیابیم، با استفاده از این آزمون می‌توانیم همگرایی یا واگرایی را تشخیص دهیم.

آزمون انتگرال:

$a_n = f(n)$ که $f(x)$ بر بازه $[N, \infty)$ تابعی حقیقی مقدار، مثبت، پیوسته و نزولی باشد

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و انتگرال ناسره $\int_N^{\infty} f(x)dx$ هم رفتارند.

$\Leftarrow$ طبق این آزمون، می‌توانیم از قضیه p-سری همانند p انتگرال کمک بگیریم

آزمون مقایسه:

$\exists N \quad \forall n \geq N \quad 0 \leq a_n \leq k b_n$

$\rightarrow$ if ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا

$\rightarrow$ if ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا

آزمون مقایسه حدی:

$b_n > 0$ ، $\{a_n\}, \{b_n\}$ نهایتاً مثبت اند

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

- $\rightarrow L \neq 0, \infty \rightarrow a_n, b_n$ هم رفتار اند
- $\rightarrow L = 0 \xrightarrow[\text{همگرا}]{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ اگر}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا
- $\rightarrow L = \infty \xrightarrow[\text{واگرا}]{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ اگر}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا

آزمون نسبت:

$\exists N \quad \forall n \geq N \quad a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- $\rightarrow L \in [0, 1) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا
- $\rightarrow L \in (1, \infty) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا به ∞
- $\rightarrow L = 1 \rightarrow$ نتیجه خاصی نداره $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$

آزمون ریشه:

$\exists N \quad \forall n \geq N \quad a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- $\rightarrow L \in [0, 1) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا
- $\rightarrow L \in (1, \infty) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا به ∞
- $\rightarrow L = 1 \rightarrow$ نتیجه خاصی نمی‌دهد

همگرایی در سری‌های با جملات مثبت و منفی

برای سری‌های متناوب آزمونی وجود دارد

آزمون سری‌های متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. $\forall n > N \quad a_n a_{n+1} < 0$
2. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
3. $\forall n > N \quad |a_n| > |a_{n+1}|$

اگر این ۳ شرط موجود باشد $\Leftarrow$ همگرا است.

انواع همگرایی

سری همگرای مطلق

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست

سری همگرای مشروط

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد

یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا نباشد ولی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد $\longrightarrow$ برای بررسی آن معمولاً از آزمون سری متناوب استفاده می‌شود

سری توانی

سری توانی $\longrightarrow$ یک چند جمله‌ای از درجه نامتناهی

سری به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ را سری توانی حول نقطه c می‌نامند

- a_n ضرایب سری
- c مرکز همگرایی سری
- در $x = c \longrightarrow$ همگرا به a_0

برای هر سری توانی، ۳ حالت می‌تواند موجود باشد

- سری فقط در $x = c$ همگراست
- سری در $\mathbb{R}$ همگراست
- عدد حقیقی و مثبت R موجود است بطوریکه به ازای هر x که $|x-c| < R$ همگرای مطلق و به ازای هر x که $|x-c| > R$ واگراست (نقاط $|x-c| = R$ باید جداگانه بررسی شوند)

از طریق آزمون نسبت بدست میاد

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

شعاع همگرایی $R = \dfrac{1}{L}$

$|x-c| < R \longrightarrow$ بازه همگرایی $= (c-R, c+R)$

عملیات سری های توانی

قضیه ۱

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow$ شعاع همگرایی R_1 و همگرا به $f(x)$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \rightarrow$ شعاع همگرایی R_2 و همگرا به $g(x)$

$C \neq 0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c\,a_n x^n \rightarrow$ شعاع همگرایی R_1 و همگرا به $cf(x)$

سری $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n \rightarrow$ شعاع همگرایی $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ و همگرا به $f(x)+g(x)$

حاصلضرب کوشی ۲ سری:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \longrightarrow c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

شعاع همگرایی $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ و همگرا به $f(x).g(x)$

ادامه عملیات سری های توانی

قضیه ۲

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow$ شعاع همگرایی R و همگرا به $f(x)$

$$\forall x \in (-R, R) \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = f'(x)$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt$$

سری حاصل از ← مشتق گیری: بازه همگرایی، همان بازه همگرایی سری اولیه ← اگر در سری اولیه نقاط انتهایی بازه یعنی R و $-R$ همگرا باشند، باید برای این سری جدید هم آنها را بررسی کنیم در غیر اینصورت خیر.

انتگرال گیری: بازه همگرایی، همان بازه همگرایی سری اولیه ← در هر صورت باید نقاط انتهایی بازه چک شوند.

قضیه آبل

اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ همگرا باشد ← $\lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$

اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ همگرا باشد ← $\lim_{x \to (-R)^+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$

سری تیلور

سری تیلور تابع f حول نقطه c ← $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \xrightarrow[c=0]{if}$ سری مکلورن

دلیلی ندارد سری تیلور یک تابع در بازه‌ای همگرا به خود آن تابع باشد (میتونه باشه یا نباشه دیگه)

یادآوری چند جمله‌ای تیلور:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$

* **تعریف**: تابع $f(x)$ را حول c، تحلیلی می‌گویند هرگاه تابع $f(x)$ در یک بازه به شعاع مثبت، تابع مجموع یک سری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ باشد.

قضیه مهم * : * فرض کنید سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ بر بازه $(C-R, C+R)$ به تابع $f(x)$ همگراست، بطوریکه $R>0$. در اینصورت:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

یعنی اگر تابع $f(x)$ حول نقطه‌ای تحلیلی باشد، آنگاه سری یافته شده همان سری تیلور تابع است!

اگر پیدا کردن مشتقات مرتبه nام تابع $f(x)$ در نقطه c، امکان‌پذیر نباشد از قضیه بالا کمک می‌گیریم.