تمرین اول آمار و احتمال

۱) الف) فرض $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

حکم $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$

حکم $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$

$P(A') = 1 - P(A) \quad P(B') = 1 - P(B)$

$P(A')\,P(B') = [1 - P(A)][1 - P(B)] = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B))$

$P(A' \cap B')$ طبق فرض

$= 1 - P(A \cup B) = P((A \cup B)') = P(A' \cap B')$ ☑

ب) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$,

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

حکم: $P(A \cap (B \cup C)) = P(A)\,P(B \cup C)$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A) \cdot P(B \cup C) = P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B \cap C)$

$P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A)P(B)P(C) =$

$P(A \cap B \cap C)$ طبق فرض

$P((A \cap B) \cup P(B \cap C)) = P(A \cap (B \cup C))$ ☑

Subject :
Year : Month : Date :

۲) $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = 0$

$P(A_1 \cup A_2 \cdots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$

با به استقرا :

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

طبق فرض

فرض استقرا: $P(A_1 \cup A_2 \cdots A_k) = P(A_1) + P(A_2) \cdots + P(A_k)$

حکم

$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_{k+1}) \stackrel{?}{=} P(A_1) + \cdots P(A_{k+1})$

$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_{k+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cdots A_k) + P(A_{k+1}) -$

طبق فرض

$P([A_1 \cup A_2 \cdots A_k] \cap A_{k+1}) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$

$+ P(A_{k+1}) - P((A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots (A_k \cap A_{k+1})) =$

$\emptyset$: ازهم جدا هستند $\emptyset$ $\emptyset$

$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{k+1})$

الف) ۳

۲-۲ مستقلند

$1 - P((A \cup B \cup C)') = 1 - (1 - P(A \cup B \cup C)) =$

جمع سه دام

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$ ← $P(A)P(B)$

$P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$P(B)P(C)$ $P(A)P(C)$ $P(A).P(B).P(C)$ $=$

$0/4 + 0/6 + 0/2 - 0/4 \times 0/6 - 0/6 \times 0/2 -$

$0/4 \times 0/2 + 0/4 \times 0/6 \times 0/2 = 0/808$

(۳)

Subject:
Year: Month: Date:

$X_1 = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C)$

$P(A) + P(B) + P(C) - X_1 + P(A \cap B \cap C) = \%۹۸$

$۱/۲ \rightarrow ۰/۵۲$

$۱/۲ - ۰/۹۸ + P(A \cap B \cap C) = X_1$

$P(A \cap B \cap C) \geq ۰ \Rightarrow X_1 = ۰/۵۲ + P(A \cap B \cap C) \geq \%۵۲$

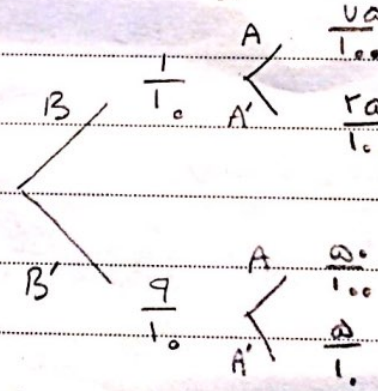
$X_1 \geq ۰/۵۲$

$$\frac{۵! - \binom{۵}{۱}۴! + \binom{۵}{۲}۳! - \binom{۵}{۳}۲! + \binom{۵}{۴}۱! - \binom{۵}{۵}۰!}{۵!} = ۰/۴$$

$۰/۳۹$

$P(B|A) = ? = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{۷۵}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰}}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} = \frac{۷۵ \times ۱۰^{-۴}}{\frac{۷۵}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۹}{۱۰}} = \frac{۷۵ \times ۱۰^{-۴}}{۷۵ \times ۱۰^{-۴} + ۵۰ \times ۹ \times ۱۰^{-۴}} = ۰/۱۴۲$

اسپرد یافتن A
مصرف دارو B



۴. ۳ مسیر A و B و C در نظر می‌گیریم که برای کار کردن راحتی یکی از آن‌ها باید سالم باشد - علاوه کلید آخر آن را D در نظر می‌گیریم)

YEKTA

$P(D) \cdot P(A \cup B \cup C) = ?$

Subject:
Year: Month: Date:

احتمال سالم بودن هرکدام

$1 - 0/2 = 0/8$
$1 - 0/4 = 0/6$
$1 - 0/3 = 0/7$
$1 - 0/1 = 0/9$

$P(D) = 0/1$ $\quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$0/8 + 0/6 \times 0/6 + 0/7 - 0/8 \times 0/6 \times 0/6 - 0/6 \times 0/6 \times 0/7 - 0/7 \times 0/8 + 0/8 \times 0/6 \times 0/6 \times 0/7 = 0/941$

$P(D) \cdot P(A \cup B \cup C) = 0/9 \times 0/94 = 0/846 \rightarrow$ احتمال کارکردن دستگاه

(۲,۴) (۳,۵) (۴,۴) (۵,۳) (۶,۲)

$$\frac{31}{36} \times \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{31}{36} \times \frac{31}{36} \times \frac{5}{36} + \dots = \frac{\frac{5}{36} \times \frac{31}{36}}{1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2} = 0/492$$

۸) A یک محصول خراب (راقل) ✓
B ۲ محصول خراب

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{1 \times \frac{2}{100}}{\frac{10}{100}} = \frac{1}{5}$$

۹) سخت، آسان، سخت

$q \times P + P \times q - q \times P \times q = P_1$ ↵

اوّلی و دوّمی صحیح — دوّمی و سوّمی صحیح — هرسه تا صحیح

آسان، سخت و آسان

$P \times q + q \times P - P \times q \times P = P_2$

YEKTA

$q < P \rightarrow q \times P \times q < P \times q \times P \rightarrow$

$P_1 > P_2 \longrightarrow$ احتمال سخت، آسان، سخت بیشتر است

Subject:

Year: Month: Date:

۱۰) x زنده ماندن نفر اول

y زنده ماندن نفر دوم

$P(y \mid x') = ?$

حالت های ممکن :

دهنده ی خون	نفر اول	نفر دوم
A	(B , O)	(AB , A)
B	(A , O)	(AB , B)
AB	(A , B , O)	AB

A , B , AB
A , B , A
} ٪۴۲ × ٪۱۰ × (٪۴ + ٪۴۲) ← ٪۴۶

A , O , AB
A , O , A
} ٪۴۲ × ٪۴۴ (٪۴ + ٪۴۲)

B , A , AB
B , A , B
} ٪۱۰ × ٪۴۲ (٪۴ + ٪۱۰) ← ۰/۱۴

B , O , AB
B , O , B
} ٪۱۰ × ٪۴۴ (٪۴ + ٪۱۰)

AB , A , AB
AB , B , AB
AB , O , AB
} ٪۴ × (٪۴۲ + ٪۱۰ + ٪۴۴) ٪۴

P(y∩x') = ۰/۴۲ × ۰/۸۲ (۰/۱۰ + ۰/۴۴) +
۰/۱۰ × ۰/۱۴ (۰/۴۲ + ۰/۴۴) + ۰/۰۴ × ۰/۰۴ × ۰/۹۶ = ۰/۱۱

Subject:

Year: Month: Date:

نفر اوّل	دهنده
(B, O)	A
(A, O)	B
(A, B, O)	AB

$$P(y|x') = \frac{P(y \wedge x')}{P(x')}$$

$$P(x') = 0/42(0/10 + 0/44) + 0/10(0/42 + 0/44) + 0/04(0/42 + 0/10 + 0/44) = 0/35$$

$$P(y|x') = \frac{P(y \wedge x')}{P(x')} = \frac{0/11}{0/35} = 0/31$$

Subject:

Year: Month: Date:

۱۱) نشان می دهد که هر چه تعداد آزمایش ها بیشتر باشد عدد به دست آمده به احتمال محاسبه شده نزدیک تر است

تعداد آزمایش: ۱۰ ، ۱۰۰ ، ۱۰۰۰

درصد پیروز در صورت تغییر: ۸۰٪ ، ۶۹٪ ، ۶۵٪ و احتمال محاسبه شده: ۶۶٪

۱۲) از طریق آزمایش ←

$P(A) = 0.50 \quad P(B) = 0.66 \quad P(AB) = 0.32$

محاسبه احتمال:

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.66$

$P(AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33 \qquad P(A)P(B) = \frac{1}{3} = P(AB)$

$AB = \{2, 3\}$

از هم مستقلند. ولی در آزمایش این رابطه برقرار نیست یعنی «دقیقاً»

$P(AB) \,!= P(A)P(B)$

البته به صورت تقریبی برابر هست اما «دقیقاً» نیست