

۱- الف) فرض کنید احتمال خراب شدن یک نوع کامپیوتر در هر روز ۰/۰۰۲ باشد. اگر اطلاعات یک موتور جستجو روی ۵۰۰۰ کامپیوتر ذخیره شده باشد، با چه احتمالی در هر روز ممکن است بیش از ۴ کامپیوتر خراب شوند؟ (هم رابطه دقیق را بنویسید و هم آن را با استفاده از توزیع پواسون نرمال تقریب بزنید).

ب) در چه شرایطی می توان توزیع فوق هندسی را با توزیع دو جمله ای تقریب زد؟ چرا؟

۲- اگر در نظر بگیریم که تعداد پیام های دریافتی تلگرام فردی در واحد زمان دارای توزیع پواسون است و به طور متوسط در هر ۲ دقیقه، ۵ پیام تلگرام به او می رسد. با چه احتمالی فاصله زمانی بین رسیدن پیام دوم و پیام سوم بیشتر از ۳۰ ثانیه است؟

۳- اگر دو متغیر تصادفی  $X_1$  و  $X_2$  دارای تابع توزیع توام زیر باشد، الف) تابع توزیع احتمال توام دو متغیر تصادفی  $Y_1 = \frac{X_2}{X_1}$  و  $Y_2 = X_1$  را بیابید؟ ب) آیا دو متغیر  $Y_1$  و  $Y_2$  از یکدیگر مستقل هستند؟ (با دلیل پاسخ دهید).

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & 0 < x_2 < x_1 < 2 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

۴) اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\beta = 2$  باشد تابع توزیع متغیر تصادفی  $Y = X^2 - 8X + 15$  را بیابید.

۶) طراح یک الگوریتم رمز نگاری ادعا دارد به ازای پیام های ۱۰۰۰ کاراکتری میانگین زمان رمز کردن پیام برابر با ۸۰ نانو ثانیه و انحراف معیار ۲۰ نانو ثانیه است. طراح یک سیستم ارسال ایمیل این الگوریتم را برای رمز نمودن ایمیل های سیستم خود در صورتی انتخاب می کند، که اگر برای یک نمونه ۳۵ تایی از پیام های ۱۰۰۰ کاراکتری میانگین زمان رمز کردن پیام کمتر از ۸۷ نانو ثانیه باشد.

الف) این شیوه ارزیابی عملاً معادل چه آزمون فرضیه ای است. (فرضیه های آن را بنویسید)

ب) خطای نوع اول و دوم را تعریف نمایید و بیان نمایید چگونه همزمان می توانید خطای نوع اول و دوم را کاهش دهید؟

ج) خطای نوع اول در این آزمون برابر با چه مقداری است؟

د) خطای نوع دوم را درحالتی که اگر میانگین زمان رمز کردن الگوریتم ۹۰ نانو ثانیه غیر قابل قبول باشد، به دست آورید.

۶- عملیات جستجو توسط موتور جستجوی A برای یک نمونه ۳۰ تایی از سوالات دارای میانگین ۳۴۰ میلی ثانیه و انحراف معیار ۵۰ میلی ثانیه و برای موتور جستجوی B برای یک نمونه ۳۲ تایی از سوالات دارای میانگین ۳۸۰ میلی ثانیه و و انحراف معیار ۴۸ میلی ثانیه است. آیا می توان با استفاده از آزمون فرضیه دو طرفه بیان نمود که موتور جستجوی A به طور متوسط سریعتر از موتور جستجوی B است. سطح معناداری آزمون را ۰/۱ در نظر بگیرید.

توزیع	تابع چگالی	$\mu$	$\sigma^2$
پواسون	$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$	$\lambda t$	$\lambda t$
دوجمله ای	$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$np$	$np(1-p)$
فوق هندسی	$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nk}{N}$	$\frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{N})$
توزیع نمایی	$f(x; \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta} x}$	$\beta$	$\beta^2$

$H_0$	Value of Test Statistic	$H_1$	Critical Region
$\mu = \mu_0$	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}; \sigma \text{ known}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2} \text{ or } z > z_{\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}; v = n - 1, \sigma \text{ unknown}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2} \text{ or } t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}; \sigma_1 \text{ and } \sigma_2 \text{ known}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2} \text{ or } z > z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}; v = n_1 + n_2 - 2, \sigma_1 = \sigma_2 \text{ but unknown, } s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2} \text{ or } t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}}}; v = \frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}, \sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ and unknown}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t' < -t_\alpha$ $t' > t_\alpha$ $t' < -t_{\alpha/2} \text{ or } t' > t_{\alpha/2}$