

۱- دو نسخه از یک برنامه وجود دارد: نسخه ویروسی، و نسخه سالم. در هر بار اجرای نسخه سالم، زمان اجرا با احتمال ۸۰ درصد زیر یک دقیقه و با احتمال ۲۰ درصد بالای یک دقیقه است؛ در حالی که در نسخه ویروسی، زمان اجرا با احتمال ۷۰ درصد زیر یک دقیقه و با احتمال ۳۰ درصد بالای یک دقیقه است. شخصی میخواهد با چند بار اجرا سعی در تشخیص نسخه سالم از ویروسی کند.

الف) اگر این شخص یکی از نسخه‌های برنامه را اجرا کند و بیش از یک دقیقه طول بکشد، باور او بر اینکه این نسخه، نسخه ویروسی است چقدر تقویت می‌شود.

ب) اگر این شخص دوبار یکی از برنامه‌ها را اجرا کند و در هر دو بار، زمان اجرا بیش از یک دقیقه طول بکشد چطور؟

ج) اگر برای نسخه سالم بدانیم، زمان اجرای آن به طور متوسط ۶۰ ثانیه با انحراف معیار ۱۰ است. اگر برنامه یکبار اجرا شود و زمان اجرا ۱۱۰ ثانیه شود، چقدر احتمال دارد برنامه ویروسی باشد.

۲- تابع توزیع چگالی احتمال توام متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

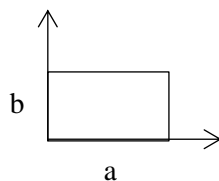
$$f(x, y) = \begin{cases} 24y(1-x) & x > 0, y > 0, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) $P(X + Y > 0.8 | X - Y < 0.2)$ را به دست آورید.

ب) $P(0.5 < X < 0.8 | Y = 0.3)$ را به دست آورید.

ج) تابع توزیع تجمعی X را بیابید.

۳- مستطیلی روی مبدا مختصات به طول a عرض b در نظر بگیرید یک نقطه به تصادف داخل این مستطیل انتخاب می‌شود. X و Y را به ترتیب طول و عرض نقطه تصادفی در نظر میگیریم. مطلوب است:



الف) محاسبه $E[(X + Y)^2]$.

ب) محاسبه $Var[XY]$.

۴- یک نقطه به تصادف درون دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ قرار میدهیم. تابع توزیع چگالی احتمال توام طول و عرض نقطه به صورت زیرخواهد شد.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) $Cov(X, Y)$ را به دست آورید؟

ب) آیا این دو متغیر از هم مستقل هستند؟ با دلیل پاسخ دهید.

۵- در جداول زیر، برای متغیرهای گسسته X و Y ، تابع توزیع احتمال شرطی $f_{X|Y}(x|y=2)$ ، و نیز توابع جرم

احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ مشخص شده‌اند.

الف) تابع توزیع تجمعی شرطی $F_{Y|X}(y|x=a)$ را به ازای $a=2$ و $a=3$ باید.

ب) $E[Y|X=2]$ را محاسبه نمایید.

X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$f_{X Y}(x y=2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

X	$y=1$	$y=2$
$f_Y(y)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$f_X(x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$

© از اینجا تقلب کنید

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot f(x)$$

$$E[X|Y] = \sum_x x \cdot f(x|y)$$

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$Var[x] = E[(x - \mu)^2]$$

$$E[g(X)] = \int g(x) \cdot f(x)$$

$$E[g(x)] = g(\mu_X) + \left[\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \right]_{x=\mu_X} \frac{\sigma_X^2}{2}$$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

$$P(-k\sigma < X - \mu < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$Var[g(x)] = \left[\frac{\partial g(x)}{\partial x} \right]_{x=\mu_X}^2 \sigma_X^2$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

