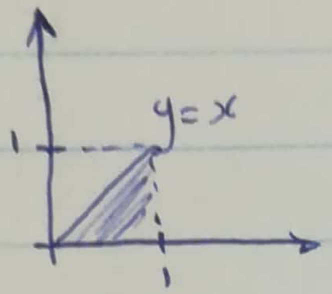
امیرحسین کاشانی

1



$$F(x \mid x>y)$$

$$= \frac{x^2/\cancel{2}}{1/\cancel{2}} = x^2 \longrightarrow f(x) = 2x$$

$$E[x] = \int x . f(x)\, dx = \int_0^1 2x^2 = 2 \times \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

2

$$\delta = E[xy] - E[x] \times E[y]$$

$$= E[Ax^2] - E[y] \times E[Ax]$$

$$= \left(0 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} E[x^2]\right) - E[x] \left(\frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} E[x]\right)$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \times e^{-x^2/4} = 0$$ تابع فرد است

$$\delta = \frac{1}{4} E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4}$$

Scanned by CamScanner

(۴)

A: 1 − CDF([illegible]) = ۱ − ۰/۸۴ = ۰/۱۹

B: CDF(۱) − CDF(۰) = ۰/۸۴ − ۰/۵ = ۰/۳۴

C: CDF(۰) − CDF(−۱) = ۰/۵ − ۰/۱۵ = ۰/۳۵

D: CDF(−۱) − CDF(−۲) = ۰/۱۵ − ۰/۰۲ = ۰/۱۳

F: CDF(−۲) = ۰/۰۲

الف) $\binom{900}{3} \times (0.198)^{597} \times (0.102)^{3}$

ب) $\binom{900}{x} \times (0.198)^{900-x} \times (0.102)^{x} \sum_{11}^{25}$

با استفاده از توزیع پواسون: $f(x,\lambda) = \dfrac{\lambda^{x} \times e^{-\lambda}}{x!}$

الف) با پواسون $f(3, 0.102) = \dfrac{0.102^{3} \times e^{-0.102}}{3!}$ غلط

$f(3, 0.102 \times 900) = \dfrac{12^{3} \times e^{-12}}{3!} = 0.117$

$\mu = np = 12 \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times 0.198} \simeq \sqrt{12} \simeq 3/5$

با توجه به اینکه p نزدیک به صفر می باشد تقریب زدن با نرمال کار خوبی

نیست. $CDF(3/5) - CDF(2/5) = CDF\left(\dfrac{3/5 - 12}{3/5}\right) - CDF$

$\left(\dfrac{2/5 - 12}{3/5}\right) = CDF(-2/48) - CDF(-2/71) =$

$= 0/0069 - 0/0035 = 0/0025$

ب) با پواسون :

$$\frac{۱۲^{۲۵} \times e^{-۱۲}}{۲۵} - \frac{۱۲^{۱۰} \times e^{-۱۲}}{۱۰!} =$$

$$\lambda = np = ۱۲$$

$$\sigma^{۲} = npq = ۳۱۵$$

$$۳۱۷۵$$

$$-۰/۵۷$$

$$CDF\left(\frac{۲۵-۱۲}{۳۱۵}\right) - CDF\left(\frac{۱۰-۱۲}{۳۱۵}\right)$$

$$= ۱ - ۰/۲۷ = \boxed{۰/۹۴۳}$$

(۹)

$CDF(۲۰) = ۰/۱۸$

$\rightarrow CDF\left(\frac{x-۱۰}{\sigma}\right) = ۰/۱۸ \rightarrow \frac{x-۱۰}{\sigma} \simeq ۰/۱۸۵$

$\rightarrow \frac{۱۰}{\sigma} \simeq ۰/۱۸۵ \rightarrow \frac{۱۰}{۰/۱۸۵} \simeq ۱۱/۷۹ = \sigma$

$\sigma^۲ = Var = \boxed{۱۳۸/۱۴}$

۷ الف)

$$1-\int_0^4 \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 1-\frac{1}{4}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$= 1 + e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_0^4 = 1 + e^{-1} - \overset{1}{e^{0}} = e^{-1} = 0/369$$

ب) با توجه به اینکه این تابع دارای حافظه نیست جواب آن معادل

$$1-\int_0^1 \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} = 1 + e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_0^1 = 1 + e^{-1/4} - 1 = 0/77$$

که احتمال اینکه بیش از ۱ ساعت طول بکشد

$$1 - 0/77 = \boxed{0/23} \longrightarrow$$ جواب نهایی

۸

$\lambda = \frac{1}{۸}$

الف) $\int_{۰}^{۸} \frac{1}{۸} e^{-\frac{1}{۸}t} = -e^{-\frac{1}{۸}t}\Big|_{۰}^{۸} = -e^{-۱} + e^{۰} = ۰/۶۳$

ب) همین مقدار ، ۰/۶۳

Scanned by CamScanner

۹-

ابتدا مقادیر را بدست می‌آوریم:

$$f(0) = \binom{3}{0} \times 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$f(1) = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times 2$$

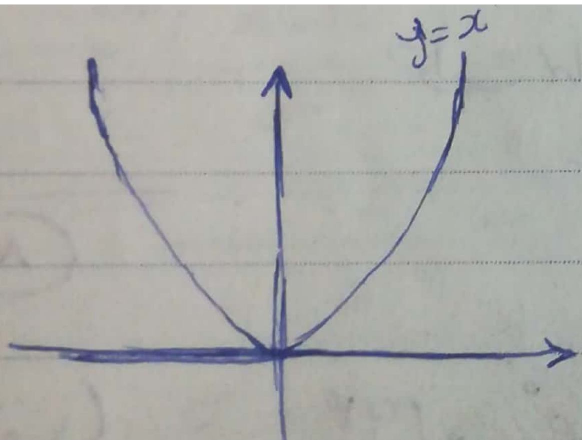
$$f(2) = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$$

$$f(3) = 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

یک به یک است

$$f_y(y) = f_x(\sqrt{y}) = \begin{cases} \binom{3}{\sqrt{y}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{y}} \left(\frac{3}{5}\right)^{3-\sqrt{y}} & y = 0, 1, 4, 9 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

۱۵- همیشه غیر یک به یک می باشد.



$$P(a<y<b) = P(-\sqrt{b}<x<\sqrt{a}) + P(\sqrt{a}<x<\sqrt{b})$$

$$= \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{y=x^2} \int_{+b}^{a} f(-\sqrt{y}) \times \frac{-dy}{2\sqrt{y}} + \int_{a}^{b} f(\sqrt{y}) \times \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$= \int_{a}^{b} \left(f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y}) \right) \times \frac{1}{2\sqrt{y}} \times dy$$

$$= \int_{0}^{t} \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\frac{1+\sqrt{y}}{2} + \frac{1-\sqrt{y}}{2} \right) dy$$

$$\longrightarrow \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

-۱۱

$v = n - 1 = ٤٩٩$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{۱۳۵۲ - ۱۴۰۰}{۲۷۷/\sqrt{۵۰۰}} = \frac{-۴۸ \times ۱۰ \times \overset{۲/۲}{\sqrt{۵}}}{۲۷۷} = -۳/۸$$

$\alpha = \frac{1}{100} \longrightarrow ۲/۳۹$ $\qquad ۳/۸ > ۲/۳۹$

پس ادعای ارائه شده <= نادرست است

۱۲

$ALG1 \rightarrow \mu = \frac{18}{7} = 2.51$ و $\sigma = 1.39$

$ALG2 \rightarrow \mu = 2.4 \,,\; \sigma = 1.34$

$$V = n_1 + n_2 - 2 = 7 + 5 - 2 = 10$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{\overbrace{2.51 - 2.4}^{0.11}}{\sqrt{\frac{1.59^2}{7} + \frac{1.34^2}{5}}} = \frac{0.11}{0.148} = 0.$$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

برای اینکه بتوانیم ادعا را رد کنیم $t = 1.812$ لازم است که با این مقدار خیلی فاصله داریم و H_0 رد نمی شود و این دو الگوریتم مثل یک دیگر کار می کنند

۱۳) الف) آزمون فرضیه‌ی دو طرفه

$H_0: \mu = 200$

$H_1: \mu \neq 200$

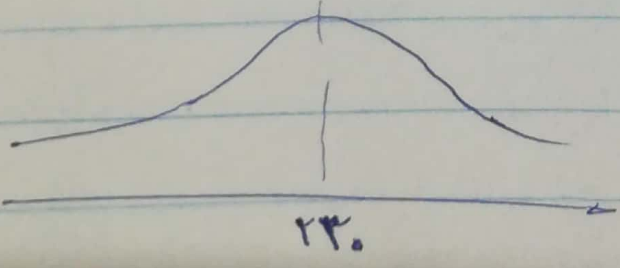
ب) خطای نوع اول می‌گوید چه قدر احتمال دارد که به یک شرکت استاندارد بدهید و غلط باشد.

خطای نوع دوم احتمال اینکه استاندارد اشتباهی بدهید را بیان می‌کند.

← با بزرگ کردن نمونه‌ی برداشته شده هر دو خطا کاهش می‌یابد

ج) صفر ← $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\overset{-20}{180-200}}{15/\sqrt{20}} = -5/96$

د)



۲۳۰

$\dfrac{220-230}{15/\sqrt{20}} = \dfrac{10\times\sqrt{20}}{15} = -2/98$

تقریب ← $CDF(-2/98) = 0/0014$ ← $B = 14\%$

۱۴) الف) فرضیه یک طرفه

ب) قبلاً نوشته شده در سؤال ۱۳

ج) $z = \frac{۸۷-۸۰}{۲۰/\sqrt{۴۶}} = \frac{۷\sqrt{۴۶}}{۲۰} = ۲/۰۷$

$۱ - CDF(۲/۰۷) = ۰/۰۲۲۸ \Rightarrow ۲/۲۸٪$

د) $\frac{۹۰-۸۰}{۲۰/\sqrt{۴۵}} = \frac{۱۰\sqrt{۴۵}}{۲۰} = ۰/۵\sqrt{۴۵} \Rightarrow ۲/۹۵$

$۱ - CDF(۲/۹۵) = ۰/۰۰۱۴ = ۰/۱۴٪$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad \nu = ۳۰ + ۴۲ - ۲ = ۷۰$

علط $z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$

$S_p^2 = \dfrac{۲۹ \times S_1^2 + ۳۱ \times ۴۸^2}{۷۰} = ۲۳۹۸ \longrightarrow S_p = ۴۸$

۵۰^2

$z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \cancel{d_0}}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \dfrac{۴۰}{۴۸ \sqrt{1/۴۰ + 1/۴۲}} = ۳/۶۲۷ \quad \urcorner$

اگر از ۱/۱۲۸ بیشتر باشد تساوی برقرار نیست

فرض H_0 رد می‌شود و الگوریتم دوم بهتر است $\Leftarrow$

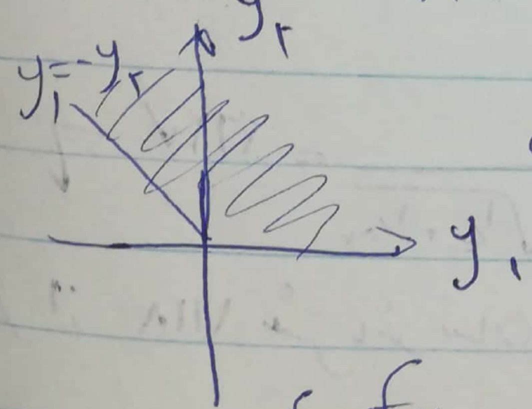
(14)

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = X_1 - X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1 = Y_1 + Y_2 \\ X_2 = +Y_2 \end{array}\right.$$

$$f(x_1, x_2) = \lambda e^{-\lambda x_1} \times \lambda e^{-\lambda x_2}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} y_1 + y_2 > 0 \to y_1 > -y_2 \\ y_2 > 0 \end{array}$$



$$\xrightarrow{\text{تغییر در تابع}} f(y_1, y_2) = \lambda^2 \times e^{-\lambda(y_1 + 2y_2)} \times 111$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} f_{y_1} = \int_{-y_1}^{\infty} \lambda^2 \times e^{-\lambda(y_1 + 2y_2)} \, dy_2 & -\infty < y_1 < 0 \\ f_{y_2} = \int_{0}^{\infty} \lambda^2 \times e^{-\lambda(y_1 + 2y_2)} \, dy_2 & 0 < y_1 < \infty \end{array}\right.$$