۲۰												ره سؤال

لطفا از نوشتن اسامی متبرکه بر روی برگه های آزمون خودداری نمائید.

ناسازگاری: $A \cap B = \emptyset$

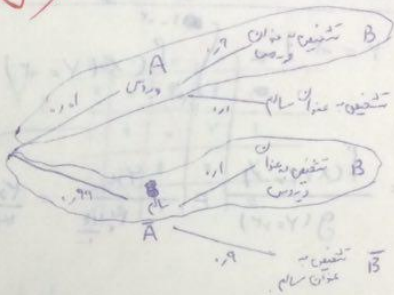
شرط مستقل بودن: $P(A \cap B) = P(A)P(B) \longrightarrow 0 = P(A)P(B) \longrightarrow P(A) = 0$ یا $P(B)$

۱

$P($ تشخیص ویروسی | ویروس بودن $) = 0.9 = P(B \mid A)$

$P($ تشخیص ویروسی | سالم بودن $) = 0.1 = P(B \mid \bar{A})$

$P($ ویروس بودن $) = 0.01 = P(A)$



~~P(تشخیص~~

$P($ ویروس بودن | تشخیص ویروسی $) = P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} = \dfrac{}{P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})}$

A: ویروس بودن

B: تشخیص ویروسی

$$= \frac{0.01 \times 0.9}{0.01 \times 0.9 + 0.99 \times 0.1} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} = \frac{9}{9 + 99}$$

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{9}{108}}$$

ب) مهمترین مسئله در استفاده از این آنتی ویروس این است که فایل های سالم را اشتباهاً پاک نکند پس باید $P(\bar{A} \mid B)$ در آن کوچک باشد. همچنین در الف دیدیم که در بسیاری از موارد که تشخیص ویروس می دهد فایل در واقع ویروس نداشته است (چون $P(A \mid B)$ کوچک است)

۲

$$P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = \frac{99}{108}$$

در $\frac{99}{108}$ موارد فایلی که پاک می کند در واقع سالم بوده

که واقعاً خوب نیست

۳) الف)

$$f(x,y)=\begin{cases}4x & 0<x<1,\ 0<y<1-x \\ 0 & \text{ow}\end{cases} \quad \begin{pmatrix}0<x<1-y \\ 0<y<1-x\end{pmatrix}$$

توزیع حاشیه‌ای

$$h(x)=\int_0^{1-x}4x\,dy=4x\int_0^{1-x}dy=4x\,(y)\Big|_0^{1-x}=4x(1-x)$$

$$g(y)=\int_0^{1-y}4x\,dx=\frac{4}{2}x^2\Big|_0^{1-y}=3(1-y)^2$$

$$h(x)\times g(y)=4x(1-x)\,3(1-y)^2\neq f(x,y)$$

~~$h(x)\times g(y)=18x(1-x)\neq f(x,y)$~~

بنابراین دو متغیر تصادفی X و Y مستقل نیستند

$$f(X|Y)=\frac{f(X,Y)}{g(Y)}=\frac{4x}{3(1-y)^2}=\frac{2x}{(1-y)^2}$$ بدون وابستگی [illegible]

ب)

$$P(X>0.4\mid Y=0.2)=\int_{0.4}^{1-0.2}f(x\mid Y=0.2)\,dx=\int_{0.4}^{0.8}\frac{x}{0.32}\,dx$$

$$=\frac{1}{0.32}\int_{0.4}^{0.8}x\,dx=\frac{1}{0.32}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0.4}^{0.8}$$

$$=\frac{100}{32\times2}\times\left(\frac{64}{100}-\frac{16}{100}\right)$$

$$=\frac{100}{64}\times\frac{48}{100}=\frac{24}{32}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

$$f(x\mid Y=0.2)=\frac{f(x,Y=0.2)}{g(Y=0.2)}=\frac{4x}{3\times\frac{64}{100}}=\frac{4x}{64}\times100=\frac{x}{0.32}$$

$$g(Y)=3(1-y)^2\longrightarrow g(0.2)=3(0.8)^2=3\left(\frac{64}{100}\right)$$

ج)

$$P(0<X<0.4\mid 0<Y<0.2)=\frac{P(0<X<0.4\ \cap\ 0<Y<0.2)}{P(0<Y<0.2)}$$

$$=\frac{\int_0^{0.2}\int_0^{0.4}4x\,dx\,dy}{\int_0^{0.2}\underset{3(1-y)^2}{g(y)}\,dy}=\frac{\int_0^{0.2}3x^2\Big|_0^{0.4}dy}{3\times-\frac{1}{3}(1-y)^3\Big|_0^{0.2}}=\frac{\int_0^{0.2}3\times\frac{16}{100}\,dy}{-(1-y)^3\Big|_0^{0.2}}$$

۴/۵

$$=\frac{3\times\frac{16}{100}\times0.2}{-\left((0.8)^3-1\right)}=\frac{0.6\times0.16}{1-(0.8)^3}=\frac{0.6\times0.16}{1-\frac{64}{100}\times\frac{8}{10}}=\frac{6\times16}{\underset{125\times8}{1000}-64\times8}=\frac{6\times2}{125-64}=\frac{12}{61}$$

۴

$X = a + b \bmod 3$

$Y = a - b \bmod 3$

X:

b \ a	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۰	۱	۲
۲	۰	۱	۲	۰
۳	۱	۲	۰	۱
۴	۲	۰	۱	۲

$f(x)$

Y:

b \ a	۱	۲	۳	۴
۱	۰	۲	۱	۰
۲	۱	۰	۲	۱
۳	۲	۱	۰	۲
۴	۰	۲	۱	۰

تابع توزیع توأم

Y \ X	۰	۱	۲			
۰	‖	|	||||			
۱	‖	‖	|			
۲	‖	‖	|			

الف)

$f(x,y) =$

y \ x	۰	۱	۲	g(y)
۰	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$
۱	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$
۲	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$
f(x) حاشیه‌ای	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{14}$	

ب)

$\mu_X = E[X] = \sum x_i f(x) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{5}{14} + 2 \times \frac{4}{14} = \frac{17}{14}$

$E[Y] = \sum y_i f(y) = \frac{5}{14} + \frac{10}{14} = \frac{15}{14}$

$E[XY] = \sum\sum xy f(x,y)$

$= (1 \times 1 \times \frac{2}{14}) + (1 \times 2 \times \frac{1}{14}) + (2 \times 1 \times \frac{2}{14}) + (2 \times 2 \times \frac{1}{14})$

$= \frac{2}{14} + \frac{2}{14} + \frac{4}{14} + \frac{4}{14} = \frac{12}{14}$

$cov(x,y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$= \frac{12}{14} - (\frac{15}{14} \times \frac{17}{14}) =$

ج)

$$Var(X|Y=1) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{۶}{۵} - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۳۰}{۲۵} - \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$= \frac{۱۴}{۲۵} \checkmark$$

روش کوچک کردن .
فضای نمونه‌ای استفاده می‌کنیم ←

X	۰	۱	۲
$f(x\|Y=1)$	۲/۵	۲/۵	۱/۵

$$E[X^2] = \sum x^2 f(x|Y=1) = ۱ \times \frac{۲}{۵} + ۴ \times \frac{۱}{۵} = \frac{۶}{۵}$$

$$E[X] = \sum x f(x|y=1) = ۱ \times \frac{۲}{۵} + ۲ \times \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

۴/۵

$E[x] = ۳$

$Var[x] = ۴$

$$E[Y] = E[x^۳ + ۷x^۲ + ۲e^x + ۳] = E[x^۳] + ۷E[x^۲] + ۲E[e^x] + ۳$$

$$E[x^۳] \xrightarrow[\mu_x = ۳,\ \sigma = ۴]{g(x) = x^۳} ۲۷ + ۶ \times ۳ \times \frac{۱۶}{۲} = ۲۷ + ۱۴۴ = ۱۷۱$$

$g'(x) = ۳x^۲$

$g''(x) = ۶x$

$$\boxed{E[g(x)] = g(\mu_x) + g''(\mu_x) \times \frac{\sigma^۲}{۲}}$$

$$E[x^۲] = ۹ + ۲ \times \frac{۱۶}{۲} = ۲۵$$

$g'(x) = ۲x$

$g''(x) = ۲$

$$E[e^x] = e^۳ + e^۳ \times \frac{۱۶}{۲} = ۹e^۳$$

$$E[Y] = E[x^۳] + ۷E[x^۲] + ۲E[e^x] + ۳ = ۱۷۱ + \overset{۱۷۵}{۷ \times ۲۵} + ۱۸e^۳ + ۳$$

$$= ۳۴۹ + ۱۸e^۳$$

$$Var[Y] = Var[x^۳] + ۴۹\,Var[x^۲] + ۴\,Var[e^x]$$

$$Var[x^۳] = (۳x^۲)^۲\big|_{x=۳} \times ۱۶ = (۲۷)^۲ \times ۱۶$$

$$\boxed{var[g(x)] = (g'(\mu_x))^۲\, \sigma^۲}$$

$$Var[x^۲] = (۲x)^۲\big|_{x=۳} \times ۱۶ = ۳۶ \times ۱۶$$

$$Var[e^x] = (e^۳)^۲ \times ۱۶ = ۱۶e^۶$$

$$Var[Y] = ۱۶\left((۲۷)^۲ + ۴۹ \times ۳۶ + ۴e^۶\right)$$

۳

$\sigma^2 = 400 \rightarrow \sigma = 20$

$\mu = 400$

۶) از نامساوی چبیشف استفاده می‌کنیم.

$$P(-k\sigma < X - \mu < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\xrightarrow{k=5} P(400-100 < X < 400+100) \geq 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

$$P(300 < X < 500) \geq \frac{24}{25}$$

پس $P(X < 300)$ در ماکزیمم حالت خود $\frac{1}{25} = ۴٪$ احتمال دارد.

یعنی از بین هر ۲۵ پردازه این پردازه کمترین زمان اجرا را دارد. چون قرار است ۲۵ پردازه را

و چون ۵۰۰ پردازه داریم پردازه‌ی با $\frac{500}{25} = 20$ بعد پردازه‌ی اول است

سبک انتخاب کنیم

۳

این پردازه سبک انتخاب می‌شود.

---

۷)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 - \frac{4}{x^2} & 2 \leq x < \infty \end{cases} \longrightarrow F'_X(x) = f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{8}{x^3} & 2 < x \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y^2 & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases} \longrightarrow F'_Y(y) = f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 2y & 0 < y < 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 2 \quad y < 0 \\ 0 & x < 2 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & x < 2 \quad y \geq 1 \\ 0 & x > 2 \quad y < 0 \\ \frac{16y}{x^3} & x > 2 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & x > 2 \quad y \geq 1 \end{cases}$$

$$E[XY] = \iint xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \iint \frac{16y}{x^3} \times xy\, dx\, dy = 16 \int_0^1 \int_2^\infty \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy$$

$$= 16 \int_0^1 y^2 \left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_2^\infty dy = 16 \int_0^1 y^2 \left(0 + \frac{1}{2}\right) dy = 8 \int_0^1 y^2\, dy$$

$$8 \times \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

ب)

$$P(۱<X<۳ \cap Y<۰٫۵) = P(۱<X<۳)\,P(Y<۰٫۵)$$

$$= \left(F_X(۳) - F_X(۱)\right)\left(F_Y(۰٫۵)\right)$$

$$= \left(\left(۱-\frac{۴}{۹}\right) - (\;)\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)$$

$$= \left(\frac{۵}{۹}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۵}{۳۶}$$

ج)

$$P(۱<X<۳ \mid Y=۰٫۵) = P(۱<X<۳) = \frac{۵}{۹}$$

۵