

سوال ۱: تستی

نویسندگان، پذیرفته شود

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{95}{100} \\ P(B) = \frac{75}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = P(A) = \frac{95}{100}$$

از هم مستقل اند

(۱)

نویسندگان، مورد پذیرش قرار ندارند

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A^c)P(B)}{P(B)} = P(A^c) = \frac{5}{100}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{a}{a+b+c} + \frac{1}{3} \times \frac{d}{d+e} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1}$$

کسر اول کسر دوم کسر سوم

(۲)

DISTRIBUTIONS $\Rightarrow \frac{13!}{(3!)(2!)(2!)}$

(۳)

تعداد راه ها انجام \Rightarrow احتمال : $\frac{(9!)(9!)}{18!}$

(۴)

الف) خیر زیرا طبق فرض سوال $P(A)$ و $P(B)$ مخالف صوابند.

ب) نیز طبق فرض سوال از $P(A)$ و $P(B)$ برابر صوابند.

ج) $A \subset B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow P(B) = 1 \Leftrightarrow$ امکان ندارد چون طبق فرض $P(B) < 1$ است.

دویشامد ناسازگار : $P(A \cap B) = 0$

دویشامد مستقل : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(۵)

و برابر ۱ نمی باشد.

$$P(ABC) = P(BC)P(A|BC) = P(C)P(B|C)P(A|BC)$$

قانون ضرب احتمال \rightarrow $P(A \cap (B \cap C))$

قانون ضرب احتمال \rightarrow

$$P(A|C) \geq P(B|C) \Rightarrow \frac{P(ANC)}{P(C)} \geq \frac{P(BNC)}{P(C)} \Rightarrow P(ANC) \geq P(BNC)$$

$$P(A|C^c) \geq P(B|C^c) \Rightarrow \frac{P(ANC^c)}{P(C^c)} \geq \frac{P(BNC^c)}{P(C^c)} \Rightarrow P(ANC^c) \geq P(BNC^c)$$

جمع عبارت $+$

$$\text{قانون احتمال} \Rightarrow P(A) \geq P(B)$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ سالم بودن} \\ A^c \text{ ویروسی بودن} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = P(A^c) = \frac{50}{100}$$

B زیر یک قسم طول کشیدن

$$P(B|A) = \frac{10}{100} \Rightarrow P(B^c|A) = \frac{20}{100}$$

B^c بالای یک قسم طول کشیدن

$$P(B|A^c) = \frac{30}{100} \Rightarrow P(B^c|A^c) = \frac{20}{100}$$

(الف)

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(B^c \cap A) + P(B^c \cap A^c)} = \frac{\frac{50}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{20}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{50}{100}} = \frac{40}{100}$$

احتمال ویروسی بودن $\frac{40}{100}$ \Leftarrow $\frac{10}{100}$ باور شخص نسبت به ویروسی بودن زیاد می شود

(ب)

$$P(A^c|B_1^c \cap B_2^c) = \frac{P(A^c \cap B_1^c \cap B_2^c)}{P(B_1^c \cap B_2^c)} = \frac{\frac{50}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{20}{100}}{P(B_1^c \cap B_2^c \cap A^c) + P(B_1^c \cap B_2^c \cap A)}$$

$$= \frac{\frac{50}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{50}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{20}{100}} = \frac{9}{13} = \frac{69}{100} \Rightarrow \frac{19}{100} \text{ باور بر ویروسی بودن افزایش می یابد}$$

(9)

A سبز بودن حرف اول
یک کارت

احتمال اینکه دو طرف یک کارت سبز باشند

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

B سبز بودن حرف
دوم یک کارت

(10)

الف) $P(B|A) = ?$

A حداقل ۳ فرزند چشم سبز
عمده چشم غیر سبز

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

B حداقل ۳ فرزند چشم سبز

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5}$$

$B \subset A$

C کوچکترین فرزند خانواد
چشم سبز است

$$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4} \left(\binom{4}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right)}{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow P(B|C) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

(11)

A برنده شدن تیردوم

$$\Rightarrow P(A) = \left(\frac{33}{39}\right) \left(\frac{3}{36}\right) + \left(\frac{33}{39}\right)^2 \left(\frac{3}{36}\right) + \left(\frac{33}{39}\right)^3 \left(\frac{3}{36}\right) + \dots$$

B مجموع ۱۰ آمدن

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{39}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{33}{39} \times \frac{3}{36}}{1 - \left(\frac{33}{39}\right)^4} = \frac{\frac{11}{13 \times 12}}{1 - \frac{11 \times 11}{12 \times 12}} = \frac{11}{144 - 121} = \frac{11}{23}$$

(12)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

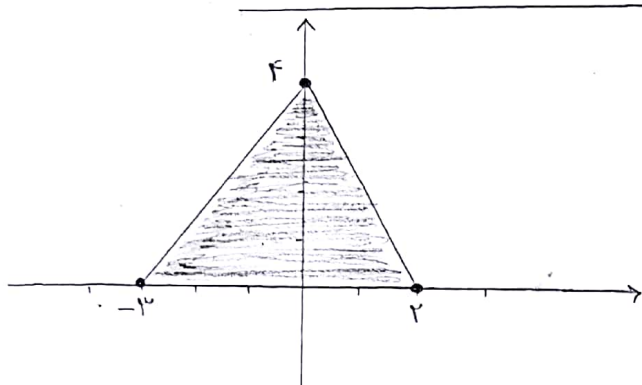
احتمال اینکه C یا B یا A باشد

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 c(x+y^2) dx dy = 1 \Rightarrow \left. \frac{cx}{y} \right|_0^1 + \left. \frac{cy^3}{3} \right|_0^1 = \frac{c}{y} C = 1 \Rightarrow C = \frac{9}{5}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^1 \frac{y}{\omega} (x+y^r) dx = \left(\frac{y}{\omega} y^r x + \frac{r}{\omega} x^r \right) \Big|_0^1 = \frac{y}{\omega} y^r + \frac{r}{\omega}$$

$$P\left(X < \frac{1}{r} \mid Y = \frac{1}{r}\right) = \int_{X|Y} \left(P\left(X < \frac{1}{r} \mid Y = \frac{1}{r}\right) \right) = \int_0^{\frac{1}{r}} \frac{\frac{y}{\omega} (x + (\frac{1}{r})^r)}{\frac{y}{\omega} (\frac{1}{r})^r + \frac{r}{\omega}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{r}} \frac{r}{r} \left(x + \frac{1}{r} \right) dx = \frac{r}{r} \left(\frac{x^r}{r} + \frac{1}{r} x \right) \Big|_0^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}$$



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -r \\ \frac{r(x+r)^r}{r^r} & -r \leq x \leq 0 \\ \frac{-(x-r)^r}{r^r} + \frac{r}{r^r} & 0 \leq x \leq r \\ 1 & r < x \end{cases}$$

$$F'_X(x) = f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -r \\ \frac{r}{r^r} (x+r)^{r-1} & -r \leq x \leq 0 \\ \frac{-(x-r)^{r-1}}{r^{r-1}} & 0 \leq x \leq r \\ 0 & r < x \end{cases}$$

$$P\left(X > \frac{r}{r}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{r}{r}\right) = 1 - F_X\left(\frac{r}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

$$P\left(\frac{1}{r} < X \leq \frac{r}{r}\right) = F_X\left(\frac{r}{r}\right) - F_X\left(\frac{1}{r}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{r}}{r}\right) - \left(\frac{1}{r^r}\right)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{1}{r} - r^{-\frac{r}{2}}$$

$$F_X\left(X < \left(\frac{1}{r}\right)^+\right) = \frac{1}{r}$$

$$F_X\left(X \leq \frac{1}{r}\right) = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{r}$$