لطفا در این قسمت چیزی ننویسید.

شماره سؤال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	نمره نهایی
نمره سؤال											۱۹/۷۵

لطفا از نوشتن اسامی متبرکه بر روی برگه های آزمون خودداری نمائید.

۱- الف) ۲۰٪ بالای یک دقیقه ۸۰٪ زیر ۱ دقیقه سالم →

۳۰٪ بالای یک دقیقه ۷۰٪ زیر ۱ دقیقه ویروس →

انتخاب نسخه ویروسی $P(B)$ احتمال بیشتر از ۱ دقیقه طول کشیدن ← $P(A)$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A\cap B')}=\frac{P(A|B).P(B)}{P(A|B).P(B)+P(A|B')P(B')}$$

$$=\frac{0/3\times\frac{1}{2}}{0/2\times\frac{1}{2}+0/3\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

ب) انتخاب ویروسی ← $P(B)$ پس از ۲ اجرای برنامه ۲ بار بیشتر از ۱ دقیقه طول بکشد. ← $P(A)$

۵

B ← ویروسی $\frac{1}{2}$
- A_1' ($0/7\times\frac{1}{2}$)
  - A_2' $0/7\times0/7\times\frac{1}{2}$ ✓
  - A_2 $0/7\times0/3\times\frac{1}{2}$
- A_1 ($0/3\times\frac{1}{2}$)
  - A_2' $0/7\times0/3\times\frac{1}{2}$
  - A_2 $0/3\times0/3\times\frac{1}{2}$

B' ← ویروس سالم $\frac{1}{2}$
- A_1' ($0/8\times\frac{1}{2}$)
  - A_2' $0/8\times\frac{1}{2}\times0/8$ ✓
  - A_2 $0/8\times\frac{1}{2}\times0/2$
- A_1 ($0/2\times\frac{1}{2}$)
  - A_2' $0/2\times\frac{1}{2}\times0/8$
  - A_2 $0/2\times\frac{1}{2}\times0/2$

$$P(B|A)=\frac{0/3\times0/3\times\frac{1}{2}}{0/2\times0/2\times\frac{1}{2}+0/3\times0/3\times\frac{1}{2}}=\frac{9}{4+9}=\frac{9}{13}$$

(ج

$\mu = E[X] = 40 \qquad \sigma_x = 10$

$P(40-5\times10 < X < 40+5\times10) \geqslant 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

$1 - P(X \geqslant 110, X \leqslant -10) \geqslant \frac{24}{25} \Rightarrow \frac{1}{25} \geqslant P(X \geqslant 110, X \leqslant -10)$

$\Rightarrow \frac{1}{25} \geqslant P(X \geqslant 110) \Rightarrow P'(X > 110) \geqslant \frac{24}{25}$

(د

$Var[XY] = E[(XY - \mu_{XY})^2]$

$\int_0^b \int_0^a \frac{1}{ab} xy \Rightarrow \frac{x^2 y^2}{4ab} \Rightarrow \frac{ab}{4}$

$\int_0^b \int_0^a xy - \frac{ab}{4} \, dx\, dy = \frac{x^2 y}{2} - \frac{xab}{4} \Big|_0^a$

۵

$\frac{a^2 b^2}{4} - \frac{ab^2}{4} \qquad \frac{a^2}{2} y^2 - \frac{a^2 b}{4} y \Big|_0^b$

$\cancel{\iint x^2 y^2 - 2xy} \quad \iint \frac{1}{ab}\left(\frac{x^2 y^2}{ab} - 2xy\frac{ab}{4} + \frac{a^2 b^2}{16}\right)$

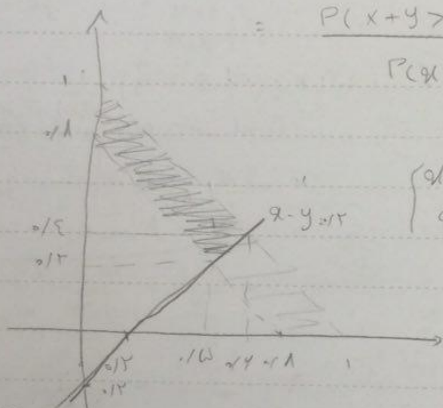
$= \iint_0 \frac{x^3 y^2}{3ab} - x^2 y + \frac{xab}{16} = \frac{a^2 b^2}{9} - \frac{a^2 b^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{16}$

$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{xy}{\pi} \, dx\, dy = \frac{x^2}{2}\frac{y}{\pi} \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1-y^2}{2} y$

۲- $f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x) & x>0 ,\ y>0 ,\ x+y\le 1\\ 0 & o.w\end{cases}$

الف) $P(x+y>0.8 \mid x-y<0.2)$

$$= \frac{P(x+y>0.8 \cap x-y<0.2)}{P(x-y<0.2)}$$



$\begin{cases}x+y=0.8\\ x-y=0.2\end{cases} \Rightarrow x=0.5 \quad y=0.3$

$\begin{cases}x+y=1\\ x-y=0.2\end{cases} \Rightarrow x=0.6 \quad y=0.4$

$P(x+y>0.8 \cap x-y<0.2)$

$$\int_0^{0.5}\int_{0.8-x}^{1-x} 24y(1-x)\,dy\,dx+\int_{0.5}^{0.6}\int_{x-0.2}^{1-x} 24y(1-x)\,dy\,dx$$

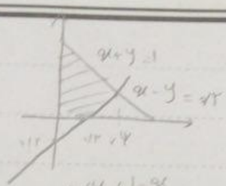
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} 12y^2(1-x)\Big|_{0.8-x}^{1-x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{0.6} 12y^2(1-x)\Big|_{x-0.2}^{1-x}dx$$

$$=12\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^3-\underbrace{(0.8-x)^2}_{0.8-1.8x+x^2}(1-x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{0.6}(1-x)^3-\underbrace{(x-0.2)^2}_{-0.2+1.2x-x^2}(1-x)\,dx$$

$$=12\Bigg[\Big(-\frac{(1-x)^4}{4}-0.8x+0.9x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\Big)+$$

$$\Big(-\frac{(1-x)^4}{4}+\frac{x^3}{3}-0.6x^2+0.2x\Big|_{\frac{1}{2}}^{0.6}\Big)\Bigg] \quad (*)$$

$P(x-y<0.2)$



$= \int_0^{0.2}\int_0^{1-x} 24y(1-x)\,dy\,dx + \int_{0.2}^{0.6}\int_{x-0.2}^{1-x} 24y(1-x)\,dy\,dx$

$= \int_0^{0.2} 12(1-x)y^2\Big|_0^{1-x} dx + \int_{0.2}^{0.6} 12(1-x)y^2\Big|_{x-0.2}^{1-x}$

$= 12\left[\int_0^{0.2}(1-x)^3\,dx + \int_{0.2}^{0.6}(1-x)^3 - (1-x)(x-0.2)\,dx\right]$

$= 12\left[\frac{-(1-x)^4}{4}\Big|_0^{0.2} + \frac{(1-x)^4}{4}\Big|_{0.2}^{0.6} - (1.2x - 0.2 - x^2)\Big|_{0.2}^{0.6}\right]$ #

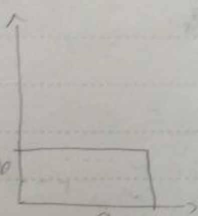
$P(x+y>0.8 \mid x-y<0.2) = \frac{*}{\#}$

ادامه در صفحه ۸

۳_ الف) عرض $\to Y$ طول $\to X$

$E[(X+Y)^2] = ?$

$F(X,Y) = \frac{xy}{ab} \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{ab}$



$E((x+y)^2) = \int_0^b\int_0^a (x+y)^2 \cdot \frac{1}{ab}\,dx\,dy$

$= \frac{1}{ab}\int_0^b\int_0^a x^2+2xy+y^2\,dx\,dy = \frac{1}{ab}\int_0^b \left(\frac{x^3}{3}+x^2y+xy^2\right)\Big|_0^a dy$

$= \frac{1}{ab}\int_0^b \frac{a^3}{3}+a^2y+ay^2\,dy = \frac{1}{ab}\left(\frac{a^3}{3}y+a^2\frac{y^2}{2}+a\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^b$

$= \frac{1}{ab}\left(\frac{a^3b}{3}+\frac{a^2b^2}{2}+\frac{ab^3}{3}\right)$

$\frac{a^2+b^2}{3}+\frac{ab}{2}$

ب)

$$\sigma^2_{(XY)} = E[(XY - \mu_{XY})^2] =$$

$$E[XY] = \int_0^b\int_0^a xy \frac{1}{ab}\, dx\, dy = \int_0^b \frac{x^2}{2} y \frac{1}{ab} \Big|_0^a dy = \int_0^b \frac{a^2}{2} \times y \times \frac{1}{ab}\, dy$$

$$= \frac{a}{4b} y^2 \Big|_0^b = \frac{ab}{4}$$

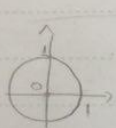
$$\int_0^b\int_0^a \frac{1}{ab}\left(x^2y^2 - 2\frac{ab}{4}xy + \frac{a^2b^2}{16}\right) dx\, dy =$$

$$= \int_0^b\int_0^a \frac{x^2y^2}{ab} - \frac{xy}{2} + \frac{ab}{16}\, dx\, dy = \int_0^b \frac{x^3y^2}{3ab} - \frac{x^2y}{4} + \frac{xab}{16} \Big|_0^a$$

$$= \int_0^b \frac{a^3y^2}{3ab} - \frac{a^2y}{4} + \frac{a^2b}{16}\, dy = \frac{a^3y^3}{9ab} - \frac{a^2y^2}{8} + \frac{a^2b}{16} y \Big|_0^b$$

$$= \frac{a^3b^3}{9ab} - \frac{a^2b^2}{8} + \frac{a^2b^2}{16}$$

۴-



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 & o.w. \qquad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) = E[xy] - E[x]E[y]$$

$$f(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \qquad f(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

$$E[X] = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{2}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$E[Y] = 0$$

۵- با توجه به صفحه ی ... مشخص است میانگین مقادیر X ، Y و XوY یعنی E آنها
صفر است

$$E[XY] = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\pi}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{xy^2}{2}\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$x \quad y$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x(1-x^2)}{2} - \frac{x(1-x^2)}{2} = 0$$

$$cov = 0 - 0 \times 0 = 0$$

ب) اینکه cov برابر صفر است هیچ چیز در مورد مستقل بودن x و y را از خود نشان می دهد.

$$x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$$
$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

$f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y) \rightarrow$ وابسته اند.

۵)

$f_{(x|y)}(۱|۲) = \frac{P(۱,۲)}{h(۲)} \Rightarrow \frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۷} = P(۱,۲) = \frac{۱}{۷}$

$f_{(x|y)}(۲|۲) = \frac{P(۲,۲)}{h(۲)} \Rightarrow P(۲,۲) = \frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۷} = \frac{۴}{۲۱}$

$f_{(x|y)}(۳|۲) = \frac{P(۳,۲)}{h(۲)} \Rightarrow P(۳,۲) = \frac{۵}{۱۲}\times\frac{۴}{۷} = \frac{۵}{۲۱}$

		$\frac{۳}{۷}$ $y=۱$	$\frac{۴}{۷}$ $y=۲$
$\frac{۵}{۲۱}$	$x=۱$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۱}{۷}$
$\frac{۱}{۳}$	$x=۱$	$\frac{۳}{۲۱}$	$\frac{۴}{۲۱}$
$\frac{۳}{۷}$	$x=۳$	$\frac{۴}{۲۱}$	$\frac{۵}{۲۱}$

$F[y|x=۳] \Rightarrow$

$F[\phi|x=۳] = f(y=\phi|x=۳)$

$= \frac{P(x=۳,y=\phi)}{P(x=۳)} = \frac{\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۳}{۷}} = \frac{۴}{۹}$

$F[y=۲|x=۳] = \frac{۴}{۹} + \frac{P(x=۳,y=۲)}{P(x=۳)} = \frac{۴}{۹} + \frac{\frac{۵}{۲۱}}{\frac{۳}{۷}} = ۱$

$F[y=۱|x=۲] = f(y=۱|x=۲) = \frac{P(۲,۱)}{P_x(۲)} = \frac{\frac{۳}{۲۱}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۹}{۲۱}$

$F[y=۲|x=۲] = \frac{۹}{۲۱} + \frac{P(۲,۲)}{P_x(۲)} = \frac{۹}{۲۱} + \frac{\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۱}{۳}} = ۱$

-۲۵

تابع توزیع تجمعی باید روی هم بازه $-\infty$ تا $+\infty$ تعریف شود.

۱.۲

$E[Y|X=۲] = ۱\times F(۱|x=۲) + ۲\times f(۲|x=۲)$

$= ۱\times\frac{۹}{۲۱} + ۲\times\frac{۱۲}{۲۱}$

ادامه ۳)

$$P(0.15<x<0.8 \mid Y=0.3) \Rightarrow P(0.5<x<0.7 \mid y=0.3)$$

$$=\int_{0.5}^{0.7} \frac{f(x,0.3)}{h(0.3)}\,dx \quad (*)$$

$$h_y(0.3)=\int_0^{1-y} 24y(1-x)\,dx = 24y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{1-y}$$

$$=24y\left(1-y-\frac{1+y^2-2y}{2}\right)=24y\left(\cancel{1}^{\frac{1}{2}}-\cancel{y}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{2}+\cancel{y}\right)=12y-12y^2$$

$$(*)=\int_{0.5}^{0.7}\frac{\cancel{24}^{2}\cancel{y}(1-x)}{\cancel{12}y(1-y^2)}\,dx=\int_{0.5}^{0.7}\frac{2}{(1-(0.3)^2)}\times 1-x\,dx$$

$$=\frac{2}{1-0.3^2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0.5}^{0.7}=\frac{2}{1-0.3^2}\left(0.7-\frac{0.49}{2}-0.5+\frac{0.25}{2}\right)$$

۲)

$$f_X(x)=\int_0^{1-x} 24y(1-x)\,dy=\left(12(1-x)y^2\right)\Big|_0^{1-x}$$

$$=\begin{cases} 12(1-x)^3 & 0\le x\le 1 \\ 0 & x\ge 1 \text{ یا } x<0 \end{cases}$$

۴/۵

$$F(X\le x)=\int_0^x 12(1-t)^3\,dt=-3(1-t)^4\Big|_0^x=-3(1-x)^4+3$$

$$F(X\le x)=\begin{cases} -3(1-x)^4+3 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{ow} \end{cases}$$