

۱- رخداد A و رخداد B ناسازگار هستند. در چه شرایطی می توان گفت که این دو رخداد از هم مستقل هستند؟ برای پاسخ خود به زبان ریاضی دلیل بیاورید.

۲- آنتی ویروس با احتمال ۹۰ درصد یک ویروس را تشخیص میدهد و آن را پاک میکند. این آنتی ویروس با احتمال ۱۰ درصد یک فایل سالم را به عنوان ویروس تشخیص میدهد. اگر در سرور دانشکده این آنتی ویروس نصب باشد و بدانیم ۱ درصد فایل های سرور دانشکده ویروس هستند.
الف) اگر یک فایل توسط آنتی ویروس پاک شود چقدر احتمال دارد ویروس بوده باشد؟
ب) آیا اگر شما مسئول سرور دانشکده باشید این آنتی ویروس را نصب میکنید؟ چرا؟ دلیل منطقی بیاورید.

۳- تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) آیا X و Y مستقل هستند؟ با دلیل پاسخ دهید.

ب) $P(X > 0.4 | Y = 0.2)$

ج) $P(0 < X < 0.4 | 0 < Y < 0.2)$

۴- دو تاس چهار وجهی را پرتاب می کنیم اگر a برابر خروجی تاس اول و b برابر خروجی تاس دوم باشد متغیر تصادفی X را به صورت $X = a + b \bmod 3$ و متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = a - b \bmod 3$ تعریف می کنیم.
الف) تابع توزیع احتمال توام X و Y را به دست آورید.
ب) کواریانس X و Y را بیابید.
ج) $\text{Var}(X|Y=1)$ را به دست آورید.

۵- متغیر تصادفی X دارای امید ریاضی و واریانس زیر است.

$$E[X] = 3 \quad \text{Var}[X] = 4$$

اگر متغیر تصادفی Y به صورت $Y = X^3 + 7X^2 + 2e^X + 3$ تعریف شود،

الف) امید ریاضی Y را به دست آورید؟

ب) واریانس Y را بیابید؟

۶- ۵۰۰ پردازش کامپیوتری (Process) در زمان $T=0$ در ۵۰۰ کامپیوتر اجرا میشوند، ۲۵ پردازش ای که کمترین زمان اجرا را داشته باشند به عنوان پردازش های سبک شناخته میشوند. اگر بدانیم میانگین زمان اجرای این پردازش ها ۴۰۰ ثانیه با واریانس ۴۰۰ است، آیا پردازش ای که زمان اجرای آن برابر با ۲۹۰ ثانیه است پردازش سبک شناخته شود؟ چرا؟ پردازش ای که زمان اجرای آن ۴۴۵ ثانیه است چه طور؟ چرا؟

۷- متغیر تصادفی X و Y مستقل هستند و تابع توزیع تجمعی (CDF) آنها به صورت زیر است. به سوالات

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^2 & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 - \frac{4}{x^2} & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

الف) $E[XY]$ را به دست آورید؟

ب) احتمال $P(1 < X < 3 \cap Y < 0.5)$ را حساب نمایید؟

از اینجا تقلب کنید ☺

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot f(x)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$\text{Var}[x] = E[(x - \mu)^2]$$

$$E[g(X)] = \int g(x) \cdot f(x)$$

$$E[g(x)] = g(\mu_X) + \left[\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \right]_{x=\mu_X} \frac{\sigma_X^2}{2}$$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

$$P(-k\sigma < X - \mu < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\text{Var}[g(x)] = \left[\frac{\partial g(x)}{\partial x} \right]_{x=\mu_X}^2 \sigma_X^2$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$