تمرین دوم آمار:

$\sigma \; X$

۱. $\Pr(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

اثبات: $E[X] = \sum_{x>0} x p(x) \geq \sum_{x \geq a} x p(x) \geq$

$\sum_{x\geq a} a p(x) = a \sum_{x \geq a} p(x) =$

$a \Pr(X \geq a)$ $\boxtimes$

ب) $P\{\mu - k < x < \mu + k\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$

طبق اکدف: $P\{(X-\mu)^2 \geq k^2\} \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2}$ $\quad (X-\mu)^2 \geq 0$

از آن جایی که برای این $(X-\mu)^2 \geq k^2$ باشد باید $|X-\mu| \geq k$ باشد

داریم: $P\{(X-\mu)^2 \geq k^2\} = P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2}$

$P\{-k < X - \mu < k\} = 1 - P\{|X-\mu| \geq k\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$ $\boxtimes$

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty} c e^{-x^2} dx = 1 = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad . \quad I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy =$

YEKTA $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy \Longrightarrow$ محاسبات کروی $\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \pi$

$I = \sqrt{\pi}$ $\quad IC = 1 \Longrightarrow C = \frac{1}{I} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$E[X^{۲} + a^{۲} - ۲aX] = E[X^{۲}] + \underset{a^{۲}}{E[a^{۲}]} - \underset{۲aE[X]}{E[۲aX]}$ ۳ ①

$Var[X] = E[(X-\mu)^{۲}] = E[X^{۲}] - E[X]^{۲} = \sigma^{۲}$

جاگذاری در ①

$E[X^{۲}] = \sigma^{۲} + \mu^{۲} \Rightarrow \sigma^{۲} + \underbrace{\mu^{۲} + a^{۲} - ۲a\mu}_{(\mu-a)^{۲}} =$

$\sigma^{۲} + (\mu - a)^{۲}$

۴.

۵) الف) $\int_0^1 f(x)\,dx = r^2 \Longrightarrow f(r) = 2r$

$pdf = P'(r) = 2r$ $\qquad f(r) = \begin{cases} 2r & 0<r<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$

ب) $0<a,b<1$

$P(a<r<b) = \int_a^b \underbrace{f(r)}_{2r}\,dr = r^2\Big|_a^b = b^2 - a^2$

ج) $E[r] = \int_0^1 r\,\underbrace{f(r)}_{2r}\,dr = \frac{2r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$var[r] = E[r^2] - \underbrace{E[r]^2}_{\frac{4}{9}}$ $\qquad E[r^2] = \int_0^1 \underbrace{r^2 f(r)}_{2r^3}\,dr =$

$\frac{2r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ $\qquad var[r] = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}$

تعداد بازی

1 $\qquad$ د) $P(r>0.7) = \int_{0.7}^1 2r\,dr = r^2\Big|_{0.7}^1 = 1-(0.7)^2$

2 $\qquad r_1, r_2 : \frac{r_1+r_2}{2} > 0.7 : r_1 + r_2 > 1.4$

$0<r_1, r_2<1$

۶) ابتدا تابع چگالی احتمال انتخاب نقطه‌ای مانند x بین نقطه‌ی ۰ و ۱ را. (x فاصله از نقطه‌ی ۰)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1} & x \in (0,1) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حال ۲ نقطه به تصادف روی این پاره خط می‌خواهیم. Y را فاصله‌ی این دو

در نظر می‌گیریم: $Y = |x_1 - x_2|$

$$g(x_1, x_2) = Y \begin{cases} x_1 - x_2 & x_1 > x_2 \\ x_2 - x_1 & o.w \end{cases}$$

از آن جایی که انتخاب این ۲ نقطه از هم مستقل هستند داریم تابع چگالی احتمال

توام آن‌ها برابر با ضربشان است: $f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$

$$E[Y] = E[g(x_1,x_2)] = \int_0^1\int_0^1 g(x_1,x_2)\, f_{X_1X_2}(x_1;x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

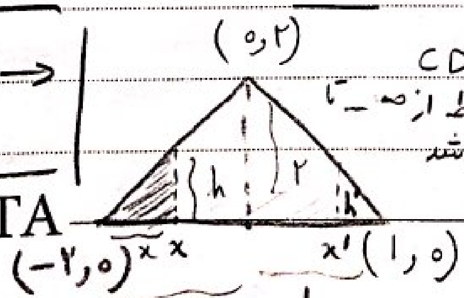
$$\int_0^1\int_0^{x_1} (x_1 - x_2)\, dx_2\, dx_1 + \int_0^1\int_0^{x_2} (x_2 - x_1)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$\int_0^1 \underbrace{x_1x_2 - \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^{x_1}}_{\frac{x_1^2}{2}} dx_1 + \int_0^1 \underbrace{x_2x_1 - \frac{x_1^2}{2}}_{\frac{x_2^2}{2}} \Big|_0^{x_2} dx_2 =$$

$$\boxed{\frac{x_1^3}{6}\Big|_0^1 + \frac{x_2^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}}$$

۷)

$$\boxed{\frac{x}{2} = \frac{h}{2} \rightarrow x = h}$$



CDF: نقطه از صفر تا x باشد

$$\frac{\frac{x \times h}{2}}{\frac{2\times 3}{2}} = \frac{x^2}{6} \qquad -2 < x-2 < 0$$

$$0 < x-2 < 1 \qquad h' - x'h'$$

$$\frac{2\times 2 + 1 - (1-x')\times h'}{2\times 3} =$$

$$\frac{1-x'}{1} = \frac{h'}{2} : \boxed{h' = 2 - 2x'}$$

Subject: $-2+2x'+2x'-2x'^2$

Year. Month. Day.

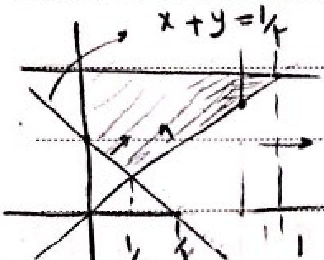
ادامه ۷)

$$\frac{4+1-(2-2x')+x'(2-2x')}{4}=\frac{3+4x'-2x'^2}{4}$$

$$\text{CDF}\begin{cases}\frac{x^2}{4} & -2<x-2<0\\ \frac{3+4x-2x^2}{4} & 0<x-2<1\end{cases}\Rightarrow \text{PDF:}\begin{cases}\frac{x}{2} & -2<x-2<0\\ \frac{2}{3}-\frac{4x}{4} & 0<x-2<1\end{cases}$$

((x فاصله از ۲ - در نظر گرفته شده))

۸) $P(x+y>1/2)=?$



$$\int_0^{1/4}\int_{1/2-x}^{1}\frac{1}{y}\,dy\,dx+\int_{1/4}^{1}\int_{x}^{1}\frac{1}{y}\,dy\,dx=$$

$$\int_0^{1/4}\ln y\Big|_{1/2-x}^{1}dx+\int_{1/4}^{1}\ln y\Big|_{x}^{1}dx=\dots$$

۹) الف)

$$\int_0^2\int_0^x \lambda x^2y^3\,dy\,dx=\lambda\int_0^2\frac{y^4}{32}\,x\,x^2\Big|_0^x dx=$$

تا $\frac{x^6}{32}$

$$\lambda\int_0^2\frac{x^5}{10}\Big|_0^2=\lambda\,\frac{32}{10}\;;\;\lambda=\frac{5}{16}$$

ب)

$$f(x)=\int_0^{x}\frac{5}{16}x^2y\,dy=\frac{5}{16}x^2\times\frac{x^2}{2}=\frac{5}{32}x^4$$

$$f(y)=\int_y^2\frac{5}{16}x^2y\,dx=\frac{5}{16}y\,\frac{x^3}{3}\Big|_y^2=\frac{5}{16}y\left(\frac{8}{3}-\frac{y^3}{3}\right)$$

$$E[X]=\int_0^2 x\times\frac{5}{32}x^4\,dx=\frac{x^6}{6}\Big|_0^2\times\frac{5}{32}=1.2$$

PAYA

$$\frac{\cancel{64}}{\cancel{6}}\times\frac{5}{\cancel{32}}=\frac{5}{3}$$

۶

Subject:

Year. Month. Day.

$$E[X^2] = \int_0^2 \frac{5}{32} \underbrace{x^4 \times x^2}_{x^6} \, dx = \frac{x^7}{7}\Big|_0^2 \times \frac{5}{32} =$$

$$\frac{\cancel{2^7}\ 4}{7} \times \frac{5}{\cancel{32}} = \frac{20}{7} \qquad var[X] = E[X^2] - E[X]^2 =$$

$$\frac{20}{7} - \frac{25}{9} = \boxed{\frac{5}{63}}$$

$$E[Y] = \int_0^2 \frac{40}{48} y^2 - \frac{5}{48} y^5 \, dy = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad \frac{40}{48} \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 -$$

$$\frac{5}{48} \frac{y^6}{6}\Big|_0^2 = \frac{40}{48} \times \frac{8}{3}^{\,2.2} - \frac{5}{48} \times \frac{64}{6}^{\,1.1} = 1.1$$

$$E[Y^2] = \int_0^2 \frac{40}{48} y^3 - \frac{5}{48} y^6 \, dy = \frac{40}{48} \frac{y^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{5}{48} \frac{y^7}{7}\Big|_0^2 =$$

$$\frac{\cancel{40}\ 10}{\cancel{48}\ \cancel{12}\ 3} \times \frac{\cancel{16}}{\cancel{4}} - \frac{5}{48} \times \frac{128}{7} = 1.4 \qquad E[Y^2] - E[Y]^2 = 1.4 - (1.1)^2 =$$

$$3.3 \qquad 1.9 \qquad \boxed{0.19}$$

$$cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \int_0^2\int_0^x \underbrace{xy \times 8x^2y}_{8x^3y^2} \, dy\, dx = 8\int_0^2 \overbrace{x^3 \underbrace{\frac{y^3}{3}\Big|_0^x}_{\frac{x^3}{3}}}^{\frac{x^6}{3}} dx =$$

$$\frac{x^7}{21}\Big|_0^2 = \frac{128}{21} = 6.09$$

$$cov[X,Y] = 6.09 - \frac{5}{3}^{\,1.6} \times 1.1 = 4.33 \qquad 1.79$$

۷

Subject:

Year. Month. Day.

۱۰) الف) $E[X] = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times ۲ + \frac{1}{4}\times ۳ + \frac{1}{4}\times ۴ = \frac{۱۰}{۴} = ۲{,}۵$

$E[X^2] = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times ۴ + \frac{1}{4}\times ۹ + \frac{1}{4}\times ۱۶ = \frac{\overset{۱۴}{۵ + ۹} + ۱۶}{۴} = \frac{۳۰}{۴} = ۷{,}۵$

$Var[X] = ۷{,}۵ - (۲{,}۵)^2 = ۱{,}۲۵$ $\quad \sigma(X) = ۱{,}۱۱$

۶,۲۵

$E[Y] = \frac{1}{۶}(1 + ۲ + \cdots + ۶) = \frac{۷}{۲}$ $\quad E[Y^2] = \frac{1}{۶}(1 + ۴ + \cdots + ۳۶) = \frac{۹۱}{۶}$

$Var[Y] = \frac{۹۱}{۶} - \frac{۷}{۲} = ۲{,}۸۵$ $\quad \sigma(Y) = ۱{,}۶۸$

ج) $f(x,y) \begin{cases} +۲x & x<y \\ -1 & \text{o.w} \end{cases}$

تعداد حالات $x<y$: $۵ + ۴ + ۳ + ۲ = ۱۵ \Rightarrow$

حالات $x<y$: $\left\{ \begin{matrix} (1,۲) & (۲,۳) & ۳,۴ & (۴,۵) \\ \vdots & \vdots & \vdots & (۴,۶) \\ (1,۶) & (۲,۶) & (۳,۶) & \end{matrix} \right. \Rightarrow$

د) $۱۰\left(\frac{1}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times ۲ + \frac{1}{۶}\times\frac{۴}{۶}\times ۴ + \frac{1}{۶}\times\frac{۳}{۶}\times ۶ + \frac{1}{۶}\times\frac{۲}{۶}\times ۸ + \frac{(۳۶-۱۵)}{۳۶}(-1)\right) = ۱۰(۱{,}۲۵ + ۲ + ۲{,}۲۵ + ۲ + (-۱/۸)) = \boxed{۱۱۳/۳}$

۱/۰

PAYA

۱۱) هرچه تعداد دفعات آزمایش (n) زیاد می‌شود میانگین $(\bar{x}_n)$ به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود.