سؤالات تشریحی:

۱

پذیرفته شدن کار $P(A) = \frac{95}{100}$

قابل اعتماد بودن نتیجه آزمایش $P(B) = \frac{75}{100}$

خوب ساخته شده و پذیرفته شود

از هم مستقل اند $\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$

$\Rightarrow P(A|B) = P(A) = \frac{95}{100}$

خوب ساخته شده و مورد پذیرش قرار نگیرد

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A^c)P(B)}{P(B)} = P(A^c) = \frac{5}{100}$$

۲

$$\underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{a}{a+b+c}}_{\text{کیسه اول}} + \underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{d}{d+e}}_{\text{کیسه دوم}} + \underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{1}}_{\text{کیسه سوم}}$$

۳

DISTRIBUTIONS $\Rightarrow \frac{13!}{(3!)(2!)(2!)}$

۴

تعداد راه های انجام : $(9!)(9!)$ $\Longrightarrow$ احتمال : $\frac{(9!)(9!)}{18!}$

۵

الف) خیر زیرا طبق فرض سؤال $P(A)$ و $P(B)$ مخالف صفراند.

ب) خیر زیرا هیچ کدام از $P(A)$ یا $P(B)$ برابر صفر نیستند.

دو پیشامد ناسازگار : $P(A\cap B) = 0$

دو پیشامد مستقل : $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

ج) $A\subset B \Longleftarrow P(A\cap B) = P(A) \xLeftarrow{\text{باید}} 1 = P(B) \Longleftarrow$ امکان ندارد چون طبق فرض $0 < P(B) < 1$ است و برابر ۱ نمی باشد.

۶

$$P(ABC) = \underbrace{P(BC)P(A|BC)}_{\text{قانون ضرب احتمال}} = \underbrace{P(C)P(B|C)P(A|BC)}_{\text{قانون ضرب احتمال}}$$

$P(A\cap(B\cap C))$

۷

$$P(A|C) \geqslant P(B|C) \Rightarrow \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \geqslant \frac{P(B\cap C)}{P(C)} \Rightarrow P(A\cap C) \geqslant P(B\cap C)$$

$$P(A|C^c) \geqslant P(B|C^c) \Rightarrow \frac{P(A\cap C^c)}{P(C^c)} \geqslant \frac{P(B\cap C^c)}{P(C^c)} \Rightarrow P(A\cap C^c) \geqslant P(B\cap C^c)$$

جمع عبارت +

قانون احتمال کل $\Rightarrow P(A) \geqslant P(B)$

۸

A سالم بودن

A^c ویروسی بودن

$$\Rightarrow P(A) = P(A^c) = \frac{50}{100}$$

B زیر یک دقیقه طول کشیدن

B^c بالای یک دقیقه طول کشیدن

$$P(B|A) = \frac{80}{100} \Rightarrow P(B^c|A) = \frac{20}{100}$$

$$P(B|A^c) = \frac{70}{100} \Rightarrow P(B^c|A^c) = \frac{30}{100}$$

الف)

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(B^c\cap A)+P(B^c\cap A^c)} = \frac{\frac{50}{100}\times\frac{30}{100}}{\frac{20}{100}\times\frac{50}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{50}{100}} = \frac{60}{100}$$

احتمال ویروسی بودن $\frac{50}{100}$ بوده $\Longleftarrow$ $\frac{10}{100}$ باور شخص نسبت به ویروسی بودن زیاد می‌شود

ب)

چون احتمال‌ها از هم مستقل‌اند:

$$P(A^c|B_1^c\cap B_2^c) = \frac{P(A^c\cap B_1^c\cap B_2^c)}{P(B_1^c\cap B_2^c)} = \frac{\frac{50}{100}\times\frac{30}{100}\times\frac{30}{100}}{P(B_1^c\cap B_2^c\cap A^c)+P(B_1^c\cap B_2^c\cap A)}$$

$$= \frac{\frac{50}{100}\times\frac{30}{100}\times\frac{30}{100}}{\frac{50}{100}\times\frac{30}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{50}{100}\times\frac{20}{100}\times\frac{20}{100}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{13}{100}} = \frac{9}{13} = \frac{69}{100}$$

$\Longrightarrow$ باور بر ویروسی بودن افزایش می‌یابد $\frac{19}{100}$

۹)

A سبز بودن طرف اول یک کارت

B سبز بودن طرف دوم یک کارت

احتمال اینکه دو طرف یک کارت سبز باشد

$$P(B|A) = \frac{\overbrace{P(A\cap B)}}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

---

۱۰) الف) $P(B|A) = ?$

A حداقل یه فرزند چشم سبز $\Rightarrow P(A) = ۱ - \underbrace{P(A^c)}_{\text{همه چشم غیر سبز}} = ۱ - \left(\frac{۳}{۴}\right)^۵$

B حداقل ۳ فرزند چشم سبز

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۳\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ + \binom{۵}{۴}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۴\left(\frac{۳}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۴}\right)^۵}{۱ - \left(\frac{۳}{۴}\right)^۵}$$

$B \subset A$

ب)

C کوچکترین فرزند خانواده چشم سبز است $\Rightarrow P(C) = \frac{۱}{۴}$

$$P(B|C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۴}}\left(\binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ + \binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۳\left(\frac{۳}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۴}\right)^۴\right)}{\cancel{\frac{۱}{۴}}}$$

$$\Rightarrow P(B|C) = \binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ + \binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۳\left(\frac{۳}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۴}\right)^۴$$

---

۱۱)

A برنده شدن نفر دوم $\Rightarrow P(A) = \left(\frac{۳۳}{۳۶}\right)\left(\frac{۳}{۳۶}\right) + \left(\frac{۳۳}{۳۶}\right)^۳\left(\frac{۳}{۳۶}\right) + \left(\frac{۳۳}{۳۶}\right)^۵\left(\frac{۳}{۳۶}\right) + \cdots$

B مجموع ۱۰ آمدن $\Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۳۶}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{۳۳}{۳۶} \times \frac{۳}{۳۶}}{۱ - \left(\frac{۳۳}{۳۶}\right)^۲} = \frac{\frac{۱۱}{۱۲\times۱۲}}{۱ - \frac{۱۱\times۱۱}{۱۲\times۱۲}} = \frac{۱۱}{۱۴۴ - ۱۲۱} = \frac{۱۱}{۲۳}$$

---

۱۲) ابتدا c را بیابیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = ۱$$

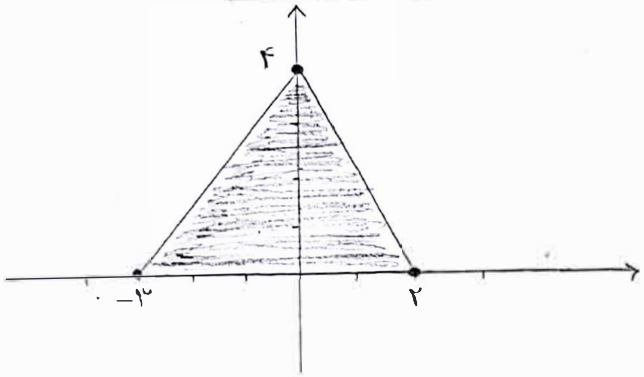
$$\Rightarrow \int_۰^۱\int_۰^۱ c(x+y^۲)\,dx\,dy = ۱ \Rightarrow \frac{cx^۲}{۲}\Big|_۰^۱ + \frac{cy^۳}{۳}\Big|_۰^۱ = \frac{۵}{۶}c = ۱ \Rightarrow c = \frac{۶}{۵}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx = \left(\frac{6}{5}y^2x+\frac{3}{5}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{5}y^2+\frac{3}{5}$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\,\Big|\,Y=\frac{1}{2}\right) = f_{X|Y}\left(0<X<\frac{1}{2}\,\Big|\,Y=\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{6}{5}\left(x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{5}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)dx = \frac{4}{3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

۱۳



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<-3 \\ \frac{2(x+3)^2}{30} & -3\leq x\leq 0 \\ \frac{(-x^2+4x)}{10}+\frac{6}{10} & 0\leq x\leq 2 \\ 1 & 2<x \end{cases}$$

$$F'_X(x) = f_X(x) = \begin{cases} 0 & x<-3 \\ \frac{2}{15}(x+3) & -3\leq x<0 \\ \frac{-(x-2)}{5} & 0\leq x\leq 2 \\ 0 & 2<x \end{cases}$$

۱۴

الف)

$$P\left(X>\frac{3}{2}\right) = 1-P\left(X\leq\frac{3}{2}\right) = 1-F_X\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

ب)

$$P\left(\frac{1}{4}<X\leq\frac{3}{4}\right) = F_X\left(\frac{3}{4}\right)-F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{15}{16}-\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{15}{16}-2^{-\frac{3}{2}}$$

ج)

$$F_X\left(X<\left(\frac{1}{2}\right)^+\right) = \frac{1}{2}$$

$$F_X\left(X\leq\frac{1}{2}\right) = \alpha$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$