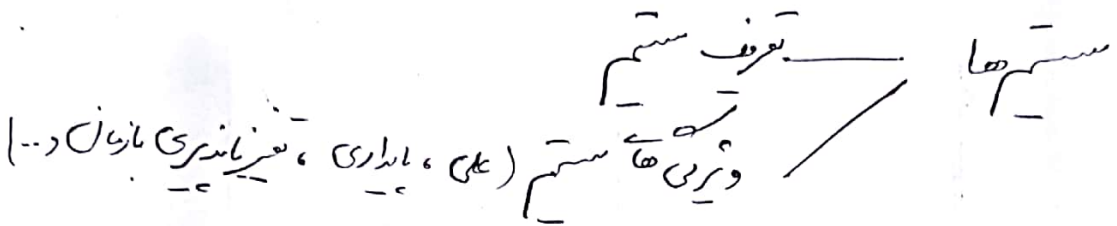
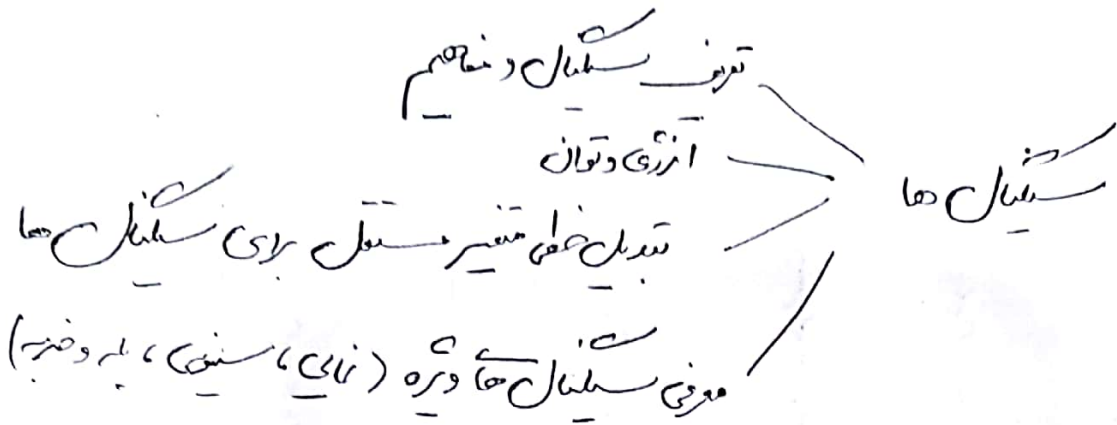
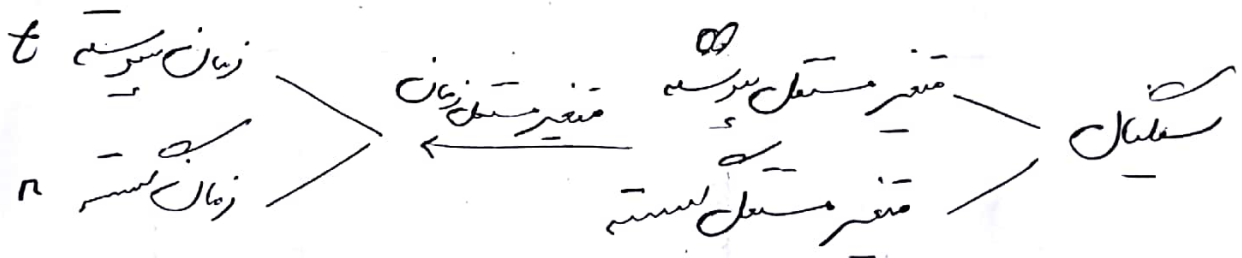


فصل اول :



سیگنال (نشانه) : یک کمیت متغیر که حاوی مکتبی اطلاعات دیم است.
می تواند در ارتباط با یک فزیده فیزیکی باشد.



تاریخ سیگنال زمان پیوسته : $t \in \mathbb{R}$ یا زیر مجموعه ای از \mathbb{R} $x(t)$

تاریخ سیگنال زمان گسسته : $n \in \mathbb{Z}$ یا زیر مجموعه ای از \mathbb{Z} $x[n]$

* مقدار کمیت وابسته سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ عضو مجموعه یا فزیده است

* سیگنال گسسته زمان وابسته، ماضی یا آینده باشد مثل قیمت
وابسته، ماضی یا آینده باشد مثل سنسور (مادر)

② انرژی و توان سیگنال:

تعریف توان لحظه‌ای سیگنال:

سیگنال پیوسته زمان: $x(t)$: $P(t) = |x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$
 سیگنال گسسته زمان: $x[n]$: $P[n] = |x[n]|^2 = x[n] \cdot x^*[n]$

تعریف انرژی سیگنال:

سیگنال پیوسته زمان: $E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$

سیگنال گسسته زمان: $E = \sum_{k=n_1}^{n_2} P[k]$

توان متوسط:

سیگنال پیوسته زمان: $P_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$

سیگنال گسسته زمان: $P_{AV} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{k=n_1}^{n_2} P[k]$

انرژی کل:

$E_{کل} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T P(t) dt$

$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N P[n]$

توان متوسط کل:

$P_{av کل} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(t) dt$

$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N P[n]$

$$P_{\phi'} = \infty \quad E_{\phi'} = \infty$$

توان انرژی نامحدود

$$E_{\phi'} = \text{محدود} \Rightarrow P_{\phi'} = 0$$

انرژی محدود، توان صفر

$$P_{\phi'} = \text{محدود} \Rightarrow E_{\phi'} = \infty$$

توان نامحدود، غیر صفر

چند اتحاد:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \gamma \cos^2 x - 1 = 1 - \gamma \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \gamma \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin 2x = \gamma \sin x \cos x$$

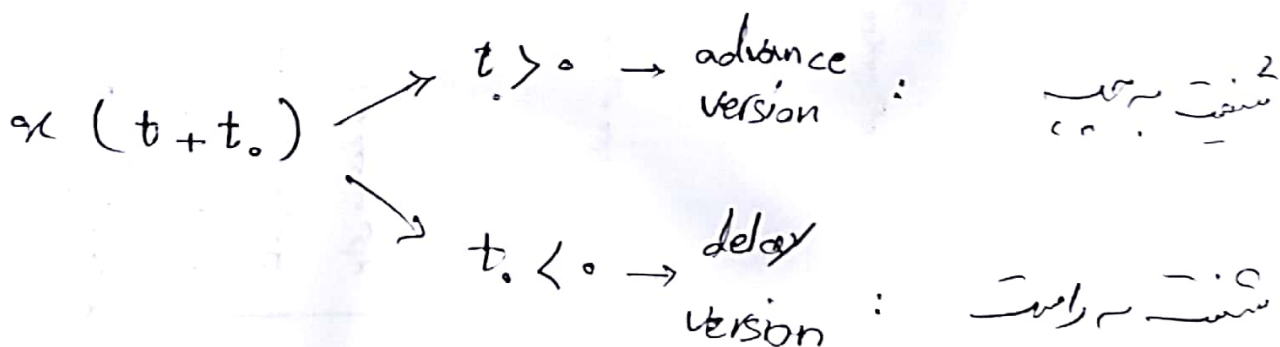
$$\tan 2x = \frac{\gamma \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

تبدیل‌های مختصات

(timeshift) شیفت زمانی

$$t \rightarrow \begin{matrix} t - t_0 \\ t + t_0 \end{matrix} : \begin{matrix} x(t - t_0) \\ x(t + t_0) \end{matrix}$$

$$n \rightarrow \begin{matrix} n - n_0 \\ n + n_0 \end{matrix} : \begin{matrix} x[n - n_0] \\ x[n + n_0] \end{matrix}$$



$$t \rightarrow -t$$

$$n \rightarrow -n$$

→ قرینه نسبت به محور زمان

۱۲ انعکاس زمانی

$$t \rightarrow \alpha t$$

$$n \rightarrow \alpha n$$

۱۳ timescaling

→ سیگنال منبسطتر $|\alpha| > 1$

→ سیگنال گستردهتر $|\alpha| < 1$

$$x[\alpha n + \beta] \stackrel{L}{=} x(\alpha t + \beta)$$

روش اول: اول β را اعمال می‌کنیم بعد α را روی سیگنال جدید اعمال می‌کنیم.

روش دوم: اول α را تأثیر می‌دهیم و بعد $\frac{\beta}{\alpha}$ را اعمال می‌کنیم.

$$x(t) = x(t+T), \quad x[n] = x[n+N]$$

سیگنال متناوب:

$$\forall T, N > 0$$

$$x(-t) = x(t), \quad x[-n] = x[n]$$

$$x(-t) = -x(t)$$

سیگنال زوج: قرینه نسبت به محور زمان

سیگنال فرد: قرینه نسبت به مبدأ مختصات

* تبدیل هر سیگنال به یک قسمت زوج و فرد:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} (x(t) + x(-t))}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{1}{2} (x(t) - x(-t))}_{\text{فرد}}$$

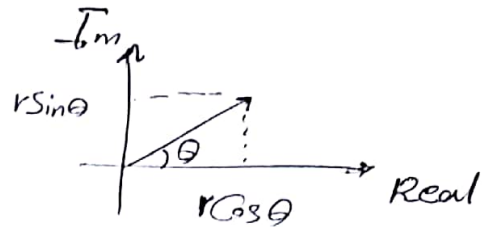
این قسمت ها می‌توانند

$$a + bj \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

بیشتر (2)

$$\rightarrow \tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$= r e^{j\theta}$$



$$a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

بیشتر

$$x(t) = C e^{at}$$

$$\rightarrow a, C \xrightarrow{\text{بیشتر}} \begin{cases} a = \sigma + j\omega \\ C = |C| e^{j\theta} \end{cases}$$

*1) (a, C) \Rightarrow $a > 0, \dots, a < 0$

*2) $(c=1), (a=j\omega_0)$ $\Rightarrow x(t) = e^{j\omega_0 t}$ $\xrightarrow{\text{بیشتر}} T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$

$$E_{\text{Period}} = \int_0^{T_0} \underbrace{|e^{j\omega_0 t}|^2}_1 dt = T_0$$

بیشتر

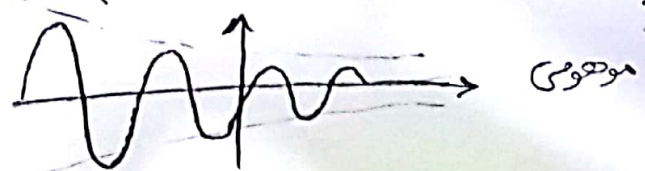
$$P_{\text{Period}} = \frac{1}{T_0} E_{\text{Period}} = 1$$

$$E_{\infty} = \infty \rightarrow P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = 1$$

بیشتر $\rightarrow \phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{k=0} \phi_k(t) = 1$

*3) (a, C) $\Rightarrow C e^{at} = (|C| e^{j\theta}) (e^{(r+j\omega_0)t})$ $\xrightarrow{k \neq 0} \phi_k(t) \xrightarrow{\text{بیشتر}} \frac{T_0}{|k|}$

$$= |C| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} = |C| e^{rt} (\cos(\omega_0 t + \theta) + j \sin(\omega_0 t + \theta))$$



④ نوی گسسته زمان نقطه :

$$x[n] = C e^{bn} = C(e^b)^n = C a^n, \quad a = e^b$$

$$\Rightarrow x[n] = C a^n \quad (a, C \text{ قیله})$$

* ① $(a, C \text{ قیله}) \Rightarrow$ تابع نای گسسته

* ② $(C=1), (|a|=1 \text{ یا } a = e^{j\omega_0}) \Rightarrow x[n] = e^{j\omega_0 n}$ متناوب
 $\Rightarrow x[n] = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$

* ③ $(a, C \text{ قیله}) \Rightarrow x[n] = |C| e^{j\theta} (|a| e^{j\omega_0})^n$ نامتناوب

فراکان کم $\xrightarrow{\text{به سمت}} \omega_0 < 2\pi \quad \text{یا} \quad -\pi < \omega_0 < \pi \xrightarrow{\text{به سمت}} 2k\pi$
 فزاینده $\xrightarrow{\text{به سمت}} (2k+1)\pi$
 تغییرات زیاد $\Rightarrow N = \text{دوره تناوب} \Rightarrow$ نیمی این عدد گویا باشد
 $\frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{N}{m} \Rightarrow$ شرط تناوب

$$\begin{cases} \phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \phi_{k+N}[n] = \phi_k[n] \end{cases}$$

هارمونیک

نکات:

- جمع دو سیگنال متناوب یک دوره زمان اگر $\frac{T_1}{T_2}$ گویا باشد متناوب است
 - جمع دو سیگنال گسسته زمان متناوب $\left(\frac{T_1}{T_2} \right) \text{ کم}$ متناوب است
 - جمع دو سیگنال گسسته زمان متناوب $\left(\frac{T_1}{T_2} \right) \text{ کم}$ متناوب است

⑤ ساختار ضرب و جمع:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \\ \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \end{cases}$$

$$* x[n] \delta[n-n_0] = x[n_0] \delta[n-n_0]$$

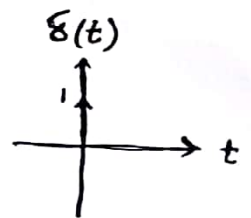
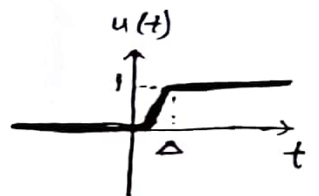
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$t=0 \rightarrow \text{نقطه}$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{d}{dt} u_{\Delta}(t) \Rightarrow \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau$$



$$* x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0)$$

① سیستم: مجموعه‌ای از عناصر که هدف مشخصی را دنبال می‌کنند که یک سیستم یک سیگنال ورودی را به یک سیگنال خروجی تبدیل می‌کند.

انواع سیستم‌ها: سری، موازی، ترکیب سری و موازی، $feedback$ دارد.
سیستم‌ها از نظر حافظه: بی‌حافظه \leftarrow خروجی به ورودی در حین لحظه فقط بستگی دارد.
با حافظه

سیستم‌ها از نظر معکوس پذیری: معکوس پذیر \leftarrow ورودی متناوب \leftarrow خروجی متناوب
معکوس ناپذیر

سیستم‌ها از نظر علی بودن: علی \leftarrow خروجی به ورودی در زمان حال وابسته است.
غیر علی \leftarrow به ورودی در لحظات بعدی هم وابسته است.
Causality

مستقر و ورودی سیگنال ورودی است.

سیستم‌ها از نظر پایداری: ورودی محدود \leftarrow خروجی محدود \leftarrow BIBO Stable

سیستم‌ها از نظر تغییرناپذیری با زمان: تغییرناپذیری زمانی در ورودی \leftarrow همان میزان تغییرناپذیری در خروجی دارد.
Time Invariance

سیستم‌ها از نظر هم خطی بودن: همزمان دارای دو ویژگی
 $x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y_1[n] + y_2[n]$
 $\alpha x_1[n] \rightarrow \alpha y_1[n]$