# جزوه درس

# سیگنال ها و سیستم ها


**استاد: دکتر راستی**

**گردآورندگان:**

**مهناز نمازی**

**جلال خوهک**



**زمستان ۱۳۹۱**

Subject: شنبه 12:30 تا 1:30

Year. Month. Date. ( )

hakim @ aut.ac.ir

subject : signal

سیگنال ها و سیستم ها

مرجع اصلی: Signals & systems, 2th Edition by A.V oppenheim

مرجع کمکی: structure & Intrepretation of Signals & systems by E.A Lee

تمرین و کوییز: 10%   میان ترم: 40%   پایان ترم: 50%

عناوین مطالب:

فصل اول: سیگنال ها و سیستم ها

فصل دوم: سیستم های خطی - تغییر ناپذیر با زمان < زمان - گسسته / زمان - پیوسته

فصل سوم: سری فوریه و تبدیل فوریه برای زمان پیوسته

فصل چهارم: سری فوریه و تبدیل فوریه برای زمان گسسته

فصل پنجم: تبدیل لاپلاس

فصل ششم: تبدیل Z

فصل هفتم: نمونه برداری

فصل هشتم: فیلترینگ

## فصل اول: سیگنال ها و سیستم ها

1.1. سیگنال ها: 1.1.1. تعاریف و مثال ها   1.1.2. توان و انرژی سیگنال

1.1.3. تبدیل متغیرهای مستقل   1.1.4. سیگنال های پایه (نمایی، سینوسی، ضربه و پله)

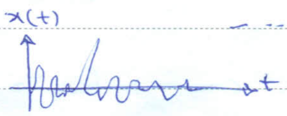
1.2. سیستم ها: 1.2.1. تعاریف و مثال ها   1.2.2. ویژگی های سیستم ها و دسته بندی سیستم ها براساس آن

1.2.2.1. حافظه   1.2.2.2. پایداری   1.2.2.3. علی بودن   1.2.2.4. معکوس پذیری   1.2.2.5. خطی

### 1.1. سیگنال

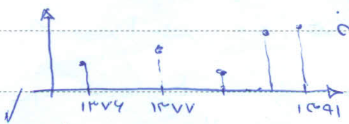
1.1.1. تعریف: از نظر ریاضی، سیگنال تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است. متغیر مستقل می‌تواند زمان، مکان، عمق و ...

مثال: صوت



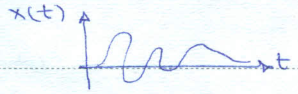

تصویر: brightness (x, y)

جمعیت سالانه

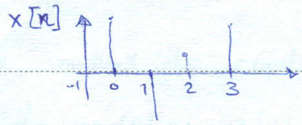



• متغیر مستقل را در این درس یک بعدی در نظر می‌گیریم و آن متغیر زمان (t) است

براساس گسسته یا پیوسته بودن متغیر مستقل، سیگنال های زمان گسسته و زمان پیوسته داریم




زمان پیوسته




زمان گسسته

• متغیر مستقل را در حالت گسسته با $n$ و در حالت پیوسته با $t$ نمایش می‌دهیم

$x[n]\ ,\ n\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $x(t)\ ,\ t\in\mathbb{R}$

سیگنال‌های گسسته ← برخی از سیگنال‌ها ماهیتاً گسسته هستند

برخی از روی نمونه‌برداری یک سیگنال پیوسته به دست می‌آید

## 2-1-1. توان و انرژی سیگنال:

توان لحظه‌ای: $p(t)=|x(t)|^2$ یا $p(t)=x(t)\cdot x^*(t)$ برای سیگنال پیوسته

$p(n)=|x[n]|^2$ برای سیگنال گسسته

انرژی در بازه‌ی $t_1$ تا $t_2$: $E_{t_1\to t_2}=\int_{t_1}^{t_2}p(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt$

انرژی در بازه‌ی $n_1$ تا $n_2$: $E_{n_1\to n_2}=\sum_{n_1}^{n_2}|x[n]|^2$

توان متوسط در بازه‌ی $t_1$ تا $t_2$: $P_{av_{t_1\to t_2}}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt$

توان متوسط در بازه‌ی $n_1$ تا $n_2$: $P_{av_{n_1\to n_2}}=\frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n_1}^{n_2}|x[n]|^2$

انرژی کل: $E_\infty=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$

$$E_\infty=\sum_{-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$$

توان متوسط کل: $P_{av_\infty}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$

$$P_{av_\infty}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}|x[n]|^2$$

if $E_\infty=$ عدد $<\infty \Rightarrow P_{av}=0$ → سیگنال دارای انرژی محدود

if $P_{av}=$ عدد $,\neq 0 \Rightarrow E_\infty=\infty$ → سیگنال دارای انرژی نامحدود

مثال: $E_\infty=\infty \Leftarrow P_{av}=\frac{A^2}{2} \Leftarrow x(t)=A\sin\omega t$

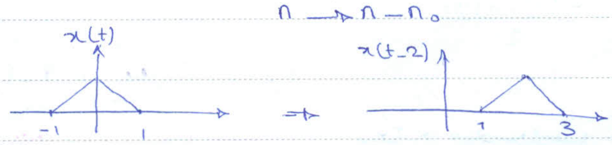
$P_{av}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}n^4=\infty \Leftarrow E_\infty=\infty \Leftarrow x[n]=n^2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

## 3_1_1 تبدیل های خطی متغیر های مستقل :

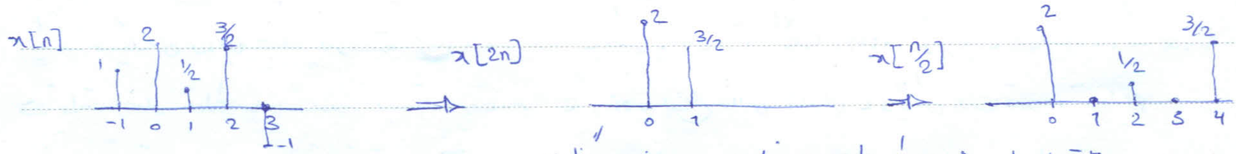
**1_ Time shift** $t \rightarrow t - t_0$ < if $t_0 > 0$ شیفت به راست ؛ if $t_0 < 0$ شیفت به چپ

$n \rightarrow n - n_0$



**2_ Time scaling** $t \rightarrow at$ < if $|a| > 1$ فشردگی سیگنال ؛ if $|a| < 1$ گستردگی سیگنال

$n \rightarrow an$



* به صورت قرارداد هرجا که sample نداریم به صفر می گذاریم

$y[n] = x[\frac{n}{2}] \triangleq \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & \text{مضرب زوج} \\ 0 & \text{مضرب فرد} \end{cases}$

طبق تعریف : $x[\frac{n}{k}] \triangleq \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & k \text{ مضرب} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$

**3_ Time reversal** (انعکاس زمانی) $t \rightarrow -t$

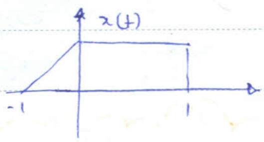
$n \rightarrow -n$

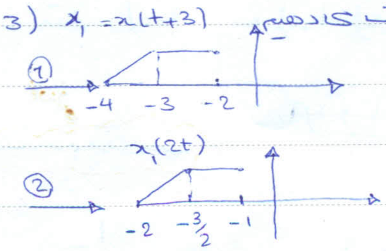
به طور کلی برای سیگنال (یافتن) $x(at+b)$ یا $x[an+b]$ از روی سیگنال های $x(t)$ و $x[n]$ دو روش داریم :

روش اول : $t \rightarrow at+b$ را به صورت ① شیفت زمانی به اندازه ی b و سپس ② تغییر مقیاس به اندازه ی a

روش دوم : $t \rightarrow at+b$ را به صورت $t \rightarrow a(t+\frac{b}{a})$ در آن ابتدا ① به اندازه ی a تغییر مقیاس داده و ② سپس به اندازه ی $\frac{b}{a}$ شیفت می دهیم

$y(t) = x(2t+3)$ $x_1 = x(t+3)$





نکته : برای سیگنال های گسسته فقط روش اول کاربرد دارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قسمت های زوج و فرد سیگنال:

$$Ev\{x[n]\} = \frac{x[n]+x[-n]}{2} \qquad Ev\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

$$Od\{x[n]\} = \frac{x[n]-x[-n]}{2} \qquad Od\{x(t)\} = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

1-1-4- سیگنال های ویژه

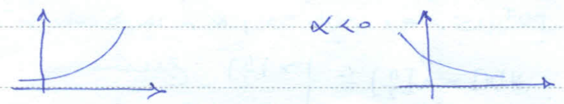
سیگنال متناوب (گسسته) $x[n]$ متناوب است اگر $\exists N>0 \Leftarrow x[n+N] = x[n] \,,\ \forall n$

سیگنال متناوب (پیوسته) $x(t)$ متناوب است اگر $\exists T>0 \Leftarrow x(t+T) = x(t) \,,\ \forall t$

1-1-4-1- توابع نمایی مختلط پیوسته زمان.

یک سیگنال نمایی مختلط پیوسته-زمان، در حالت کلی به صورت $x(t) = Ce^{\alpha t}$ تعریف می شود، که $C, \alpha$ می توانند اعداد مختلط باشند. بسته به مقادیر $C$ و $\alpha$، توابع نمایی متنوعی با ویژگی های متفاوت داریم

نمایی حقیقی $\Leftarrow$ $C, \alpha$ حقیقی هستند $\alpha<0$ $\alpha>0$



نمایی مختلط $\Leftarrow$

• یک حالت خاص را در نظر می گیریم: $C=1 \,,\ \alpha = j\omega \Leftarrow x(t) = e^{j\omega t}$

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

هارمونیک های مختلط مرتبط: Harmonically related Exponential Signals

سیگنال های هارمونیک دارند که دوره ی تناوبشان مضربی از هم باشد

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega t} \,,\ k = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$$

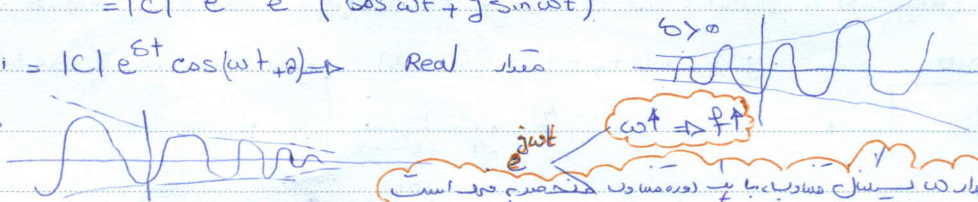
• در حالت کلی $C = |C| e^{j\theta} \,,\ \alpha = \sigma + j\omega$

$$x(t) = Ce^{\alpha t} = |C| e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}$$
$$= |C| e^{j\theta} e^{\sigma t} (\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

مقدار Real $\Leftarrow$ اندازه $= |C| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$

متناوب نیست

$\sigma>0$ $\sigma<0$



$e^{j\omega t}$ $\omega\uparrow \Rightarrow f\uparrow$

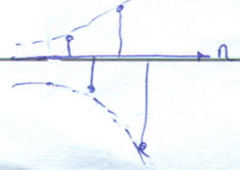
به ازای هر مقدار $\omega$ سیگنال متناوب با یک دوره متناوب منحصر به فرد است

1-1-4-2- توابع نمایی مختلط گسسته-زمان

یک سیگنال نمایی مختلط گسسته-زمان، در حالت کلی به صورت $x[n] = C\alpha^n$ $(\alpha = e^{\beta})$ تعریف می شود. در حالت کلی $\alpha$ و $C$ می توانند مختلط باشند

نمایی حقیقی $\Leftarrow$ $C, \alpha$ حقیقی $\Leftarrow$ $|\alpha|<1$ پوش نزولی $\Leftarrow$ $|\alpha|>1$ پوش صعودی

PAPCO



[redacted]

Subject:

Year. Month. Date. ( )

خاصیت ها برای این است

۱-۰ نمایی مختلط ⇐ $x[n] = e^{j\omega_0 n} = \boxed{\cos\omega_0 n} + j\sin\omega_0 n$

حالت خاص: $C=1$ , $\alpha = e^{j\omega}$ ⇐ $x[n] = e^{j\omega n}$

می‌بینیم که نکته‌ی قبلی اینجا صدق نمی‌کند یعنی با افزایش $\omega$، فرکانس لزوماً افزایش پیدا نمی‌کند

$x_1(t) = \cos 2\pi t$ $\quad x_2(t) = \cos 4\pi t$ ✓

$x_1[n] = \cos 2\pi n$ $\quad x_2[n] = \cos 4\pi n$ ✗

خاصیت اول: خاصیت تناوبی نمایی‌های مختلط زمان گسسته

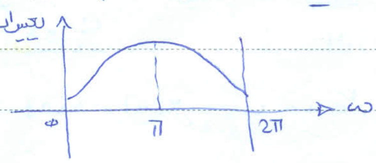
سیگنال نمایی مختلط زمان - گسسته با نسبت به اندازه‌ی $2\pi$ بدون تغییر باقی می‌ماند

$x[n] = e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\omega n}$

• بازه‌ی فرکانس که برای اینها در نظر می‌گیریم به طول $2\pi$ می‌باشد

از آنجا که سیگنال‌های گسسته‌ی $e^{j\omega_0 n}$ و $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ یکسان هستند، بازه‌ی فرکانس سیگنال‌ها

مختلط نمایی گسسته - زمان دارای طول $2\pi$ هستند ($0 \le \omega < 2\pi$ یا $-\pi \le \omega < \pi$)




مثال: 1) $x_1[n] = \sin \frac{51}{7} n\pi$ $\quad \omega_1 \Rightarrow \frac{9}{7}\pi$

2) $x_2[n] = \sin \frac{14}{3} n\pi$ $\quad \omega_2 \Rightarrow \frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow |\frac{9}{7}\pi - \pi| = \frac{2}{7}\pi$

می‌خواهیم ببینیم کدام به $\pi$ نزدیک‌تر است ⇐ $|\frac{2}{3}\pi - \pi| = \frac{\pi}{3}$ ✓ تغییرات↑

خاصیت دوم: آیا سیگنال $e^{j\omega n}$ همیشه متناوب است؟ خیر

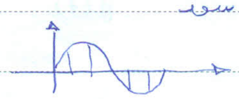
$e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}$

$e^{j\omega n} e^{j\omega N} = e^{j\omega n} \Rightarrow e^{j\omega N} = 1 = e^{j2m\pi} \Rightarrow \omega N = 2m\pi \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N}$

$\omega$ باید ضریبی از $\pi$ باشد تا متناوب شود

$x(t) = \sin t$ متناوب ✓

$x[n] = \sin n$ متناوب نیست



۱-۱-۴-۳. توابع ضربه و پله گسسته - زمان:

$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$ تابع ضربه $\qquad u[n] = \begin{cases} 1 & n\ge 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$

۱-۱-۴-۴. تابع ضربه و پله زمان - پیوسته

$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$ , $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$ $\qquad u(t) = \begin{cases} 1 & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ تابع ضربه مشتق تابع پله در نقطه‌ی صفر است

$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau$

PAPCO



$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ $\qquad u[n] = \sum_{-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{0}^{\infty} \delta[n-k]$

## ۱-۲- سیستم ها

۱-۲-۱- تعریف سیستم: یک ورودی و خروجی دارد. مجموعه‌ای از المان‌هاست که هدف خاصی را دنبال می‌کنند. از نظر مهندسی یک پردازش روی ورودی انجام می‌دهد جهت تولید خروجی مطلوب

سیستم‌ها بر اساس ورودی و خروجی متفاوت می‌باشند. ورودی و خروجی می‌تواند هردو پیوسته یا گسسته و یا یکی پیوسته و دیگری گسسته باشد.

مثال: سیستم اتومبیل ورودی: نیروی وارد شده بر پدال $f(t)$ خروجی: سرعت $v(t)$

$f(t)$ → [نمونه برداری] → $g[n]$ sample      sample → [بازیابی] →

$g[n] = T(f(t))$

### ۱-۲-۲- ویژگی های سیستم‌ها و دسته‌بندی سیستم‌ها بر اساس آن‌ها

#### ۱-۲-۲-۱- با حافظه بودن

اگر خروجی $y(t_0)$ فقط به ورودی $x(t_0)$ وابسته بود ⇐ بدون حافظه است

یک سیستم با حافظه است اگر خروجی در هر لحظه $t_0$ به ورودی آن لحظه و به لحظات قبل و بعد آن بستگی داشته باشد.

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ با حافظه      $y(t) = 2x(t)$ بدون حافظه

$y[n]=x[n]-x[n-1]$ با حافظه      $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ با حافظه      $y[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k]$ با حافظه

$y(t) = \sin(t-1)\, x(t)$ بدون حافظه

#### ۱-۲-۲-۲- معکوس پذیری

سیستمی معکوس پذیر است که به ازای ورودی‌های متفاوت، خروجی متفاوت بدهد ⇐ با مشاهده‌ی خروجی بتوان ورودی را تعیین کرد

$y(t) = x^2(t)$ X      $y(t) = 2x(t)$ معکوس پذیر

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ X معکوس پذیر      $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ معکوس پذیر

#### ۱-۲-۲-۳- علّی بودن

به سیستمی علّی گوییم که در هر لحظه‌ی $t_0$ یا $n_0$ خروجی به مقدار ورودی در لحظه‌ی $t_0$ یا $n_0$ و یا لحظات قبل بستگی داشته باشد نه لحظات بعد

$y[n]=x[-n]$ → غیرعلّی

سیستم‌های پیش‌بینی کننده ⇐ غیرعلّی      $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ علّی

در پردازش تصویر می‌تواند غیرعلّی باشد      $y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(t)\,dt$ غیرعلّی

#### ۱-۲-۲-۴- پایداری

$y(t) = \sin(t+7)$ علّی

یک مفهوم مهم در سیستم‌های کنترلی. سیستمی پایدار است که اگر ورودی‌های محدود به آن بدهیم، خروجی‌ها محدود بدهد

if $|x(t)| < M,\ \forall t \Rightarrow \exists N$ s.t. $|y(t)| < N,\ \forall t$

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ ناپایدار      $y(t) = 2x(t)$ پایدار

[redacted]



$y(t) = t\,x(t)$ ناپایدار

$y(t) = \begin{cases} t\,x(t) & |t|<5 \\ 2x(t) & |t|>5 \end{cases}$ پایدار

$y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ ناپایدار

* 1-2-2-4. تغییرناپذیری با زمان

اگر ورودی به اندازه‌ی $t_0$ شیفت پیدا کند $[x_1(t) = x(t-t_0)]$ آنگاه خروجی سیستم نیز به اندازه‌ی $t_0$ شیفت پیدا کند ← سیستم تغییرناپذیر با زمان

$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

$y(t) = 2x(t) \Rightarrow$ تغییرناپذیر با زمان

$y(t) = t\,x(t) \Rightarrow$ متغیر با زمان

$\begin{cases} x_1(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_1(t) = t\,x_1(t) = t\,x(t-t_0) \\ y(t-t_0) = (t-t_0)\,x(t-t_0) \end{cases} \neq$

$y(t) = x(t^2)$ متغیرپذیر

$\begin{cases} x_1(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_1(t) = x(t^2 - t_0) \\ y(t-t_0) = x((t-t_0)^2) \end{cases} \neq$

$y(t) = x(2t)$ متغیر با زمان

$y(t) = \begin{cases} 2x(t) & |t|<1 \\ 3x(t) & |t|>1 \end{cases}$ متغیر با زمان

* 1-2-2-5. خطی بودن

سیستمی خطی است، اگر دو ویژگی زیر را داشته باشد:

① $x(t) \to y(t) \Rightarrow a x(t) \to a y(t)$

ویژگی همگنی (a در حالت کلی مختلط است)

② $x_1(t) \to y_1(t)$ و $x_2(t) \to y_2(t)$ $\Rightarrow x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ویژگی جمع‌پذیری

• خطی بودن باعث می‌شود با داشتن یک ورودی خاص و خروجی آن بتوان برای هر ورودی دیگر خروجی آن را به دست آورد

دو ویژگی فوق را می‌توان در قالب یک ویژگی زیر بیان کرد (مثال)

$x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t)$ $\Rightarrow a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$

$y[n] = 2x[n] + 3$ خطی نیست

$x_1[n] = a x[n] \to y_1[n] = 2a x[n] + 3$

$a y[n] = 2a x[n] + 3a$ $\neq$

در سیستم خطی باید به ازای ورودی صفر ← خروجی صفر شود (شرط لازم) ← ویژگی ①

$y(t) = e^{x(t)}$ × خطی

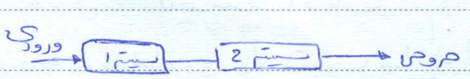
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ ✓ خطی

Subject:
Year.  Month.  Date.  ( )

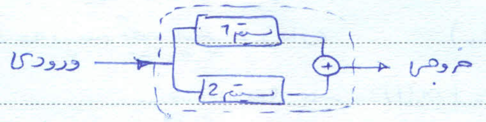
$y[n] = n\,x[n]$  $\quad a x_1[n] + b x_2[n] = a n x_1[n] + b n x_2[n]$

$$a y_1[n] + b y_2[n] = a n x_1[n] + b n x_2[n]$$

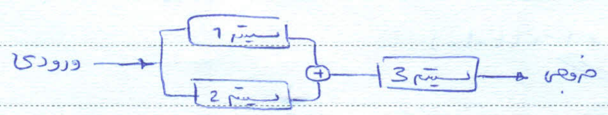
1-2-3. اتصال سیستم ها




1-2-3-1. اتصال سری (Cascade)

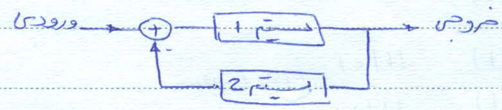



1-2-3-2. اتصال موازی




1-2-3-3. اتصال ترکیبی

1-2-3-4. اتصال فیدبک (Feedback) از خروجی یک مسیری به ورودی پیدا کنیم.




بنابراین پایداری این سیستم ها بسیار مهم است.
خواهیم دید هر سیستم هوشمند باید از این نوع باشد

## فصل دوم: سیستم های خطی - تغییر ناپذیر با زمان (Linear Time-Invarient system)

2-1. سیستم های LTI گسسته  2-2. سیستم های LTI پیوسته  2-3. خواص کانولوشن

2-4. بررسی خواص سیستم های LTI با استفاده از پاسخ ضربه سیستم

2-5. تشریح سیستم های LTI با استفاده از معادلات دیفرانسیل و تفاضلی و توصیف بلوک دیاگرامی آن ها

دو ویژگی خطی بودن و تغییر ناپذیر بودن با زمان باعث خاصیت "جمع آثار" می شود و لذا اگر بتوانیم سیگنال های ورودی به سیستم را به صورت ترکیب خطی از توابع پایه (basic signal) توصیف کنیم آنگاه می توانیم جواب سیستم را به ازای هر ورودی به صورت ترکیب خطی خروجی سیستم به ازای ورودی توابع پایه یا همان پاسخ سیستم به توابع پایه، توصیف کرد.

* مبنای انتخاب توابع پایه: 1. بتوان تعداد بسیار زیادی از سیگنال ها را به صورت ترکیب خطی توابع پایه انتخاب شده، توصیف کرد  2. پاسخ سیستم به توابع پایه به راحتی به دست آید

رویکرد و استراتژی تحلیل سیگنال های LTI:

1. چگونه سیگنال های ورودی را براساس توابع پایه توصیف کنیم (بسط دادن)

2. چگونه پاسخ سیستم را به هر ورودی دلخواه به دست آوریم

[redacted]



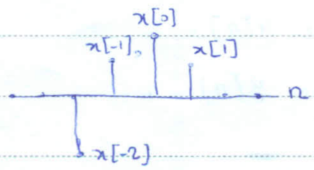
توابع پایه: 1. تابع ضربه $\Leftarrow\Rightarrow$ تحلیل Convolution 2. توابع سینوسی ونمایی $\Leftarrow$ تحلیل فوریه

2_1. سیستم های LTI گسسته:

صورت مسئله: فرض کنید پاسخ یک سیستم گسسته به تابع ضربه را می دانیم (رابطه ی خروجی بر اساس ورودی را نداریم). حال می خواهیم خروجی سیستم به ازای ورودی دلخواه $x[n]$ را بدست بیاوریم

$\delta[n] \to$ [سیستم گسسته] $\to h[n]$ $\quad x[n] \to [\ \ ] \to y[n]$ ? $\quad \delta[n-k] \to [\ \ ] \to h_k[n]$

EX.



$$x[n] = \dots + x[-2]\delta(n+2) + x[-1]\delta(n+1) + x[0]\delta[n] + x[1]\delta(n-1) + \dots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$\Leftarrow$ اگر سیستم مورد نظر خطی باشد

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \to \boxed{\text{سیستم خطی}} \to y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

$\Leftarrow$ اگر سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد: $h_k[n] = h[n-k] \longrightarrow$ تغییر ناپذیر با زمان

سیستم LTI:
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \to \boxed{\text{سیستم}} \to \underbrace{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}_{\text{جمع Convolution}}$$

2_1_2. نتیجه گیری:

1) در صورتی که سیستم LTI باشد و پاسخ ضربه ی آن مشخص باشد، آنگاه می توان خروجی سیستم به ازای هر ورودی دلخواه را به صورت زیر بدست آورد:

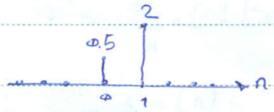
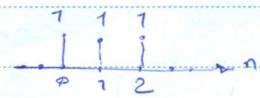
$$x[n] \to \boxed{\text{سیستم}} \to y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Convolution _ Sum

2) هر سیستم LTI به صورت منحصر به فردی با پاسخ ضربه ی آن مشخص می شود

2_1_3. مثال:

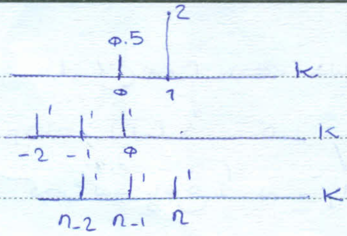
2_1_3_1.

$x[n]$  $h[n]$ 

روش اول:
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$$

روش دوم (تصویری): ابتدا $x[k]$ را به صورت تابعی از $k$ ترسیم می کنیم، سپس $h[n-k]$ را به صورت تابعی از $k$ ترسیم می کنیم. (ابتدا $h[-k]$ را رسم کرده سپس به اندازه ی $n$ شیفت می دهیم)

Subject:
Year. Month. Date. ( )



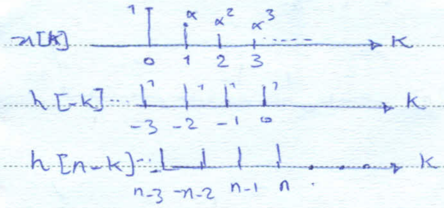

حال $x[k]h[n-k]$ را بدست آوریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} n<0 \Rightarrow \sum x[k]h[n-k]=0 \\ n=0 \Rightarrow y[n]=0.5 \\ n=1 \Rightarrow y[n]=2.5 \\ n=2 \Rightarrow y[n]=2.5 \\ n=3 \Rightarrow y[n]=2 \\ n\geq 4 \Rightarrow y[n]=0 \end{cases}$$

← تعداد المان‌های $y[n]$، احتمالاً کمتر از تعداد المان‌های غیرصفر $x[k]$ به اضافه‌ی المان‌های غیرصفر $h[n]$ منهای ۱

2-3-1-2. $h[n]=u[n]$ $\quad x[n]=\alpha^n u[n]$ , $0<\alpha<1$

ابتدا $x$ را بر اساس تابعی از $k$ رسم می‌کنیم

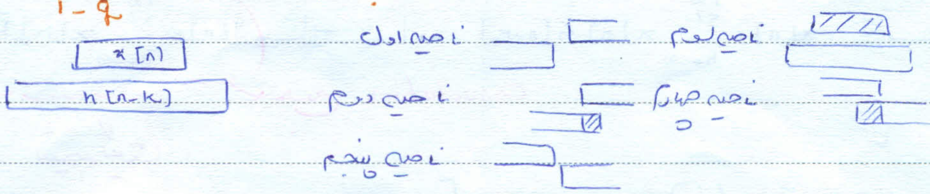



$$\Rightarrow \begin{cases} n<0 \Rightarrow y[n]=0 \\ n\geq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^n=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \end{cases}$$

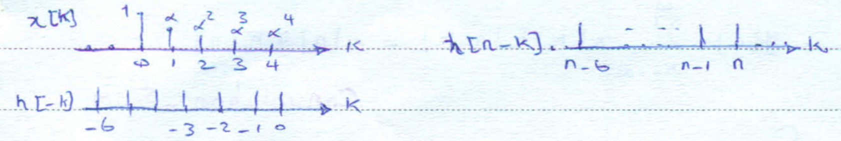
$$\Rightarrow y=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u[n]$$

جمع $n$ جمله تصاعد هندسی با جمله‌ی اول آن $t_1$، و قدر نسبت $q$ باشد $t_1\frac{(1-q^{n+1})}{1-q}$

3-3-1-2.

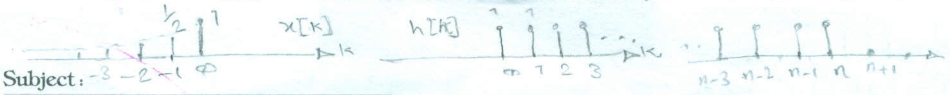



$$h[n]=\begin{cases}1 & 0\leq n\leq 6\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad x[n]=\begin{cases}\alpha^n & 0\leq n\leq 4\\ 0 & o.w\end{cases}$$




$$\begin{cases} n<0 \Rightarrow y[n]=0 \\ 0\leq n\leq 4 \quad x[k]h[n-k]=\begin{cases}\alpha^k & 0\leq k<n\\ 0 & o.w\end{cases} \Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \\ 4<n\leq 6 \quad x[k]h[n-k]=\begin{cases}\alpha^k & 0\leq k\leq 4\\ 0 & o.w\end{cases} \Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{4}\alpha^k=\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} \\ n>6 \Rightarrow 6<n\leq 10 \\ n-6<4 \\ \quad x[k]h[n-k]=\begin{cases}\alpha^k & n-6\leq k\leq 4\\ 0 & o.w\end{cases} \Rightarrow y[n]=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^k=\sum_{k=0}^{4-n+6}\alpha^{k+n-6} \\ n>10 \Rightarrow y[n]=0 \end{cases}$$

$$y[n]=\alpha^{n-6}\left(\frac{1-\alpha^{11-n}}{1-\alpha}\right)$$




Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x[n]=2^n u[-n]$ $h[n]=u[n]$ $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ $k\leq 0$ .2-1-3-4

$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k h[n-k] \longrightarrow$ if $n\geq 0 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = \frac{1-(1/2)^\infty}{1-1/2}=2$

if $n<0 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k = \sum_{k=-n}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = \frac{(1/2)^{-n}-(1/2)^\infty}{1-1/2} = \frac{2^n}{1/2} = 2^{n+1}$

$$\begin{cases} \text{if } n<0 \longrightarrow 2^{n+1} \\ \text{if } n\geq 0 \longrightarrow 2 \end{cases}$$

2-2. سیستم های LTI پیوسته-زمان

$\delta(t) \rightarrow \boxed{\phantom{xx}} \rightarrow h(t)$ $x(t) \rightarrow \boxed{\phantom{xx}} \rightarrow y(t)=?$

توصیف سیگنال پیوسته-زمان برحسب تابع ضربه پیوسته

$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

خواص ضربه $\Rightarrow$ $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0) \Rightarrow x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

$=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau}_{1} = x(t)$

انتظار: $\delta(t) \rightarrow h(t) \Rightarrow \delta(t-t_0) \rightarrow h(t-t_0)$ , $k\delta(t) \rightarrow kh(t)$

$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$

انتگرال Convolution

2-2-2. نتیجه گیری

2-2-2-1. سیستم های پیوسته زمان LTI، به صورت منحصر به فردی با پاسخ ضربه مشخص می شوند

2-2-2-2. $y[n]=x[n]+x[n-1] \rightarrow$ LTI $h[n]=\delta[n]+\delta[n+1]$

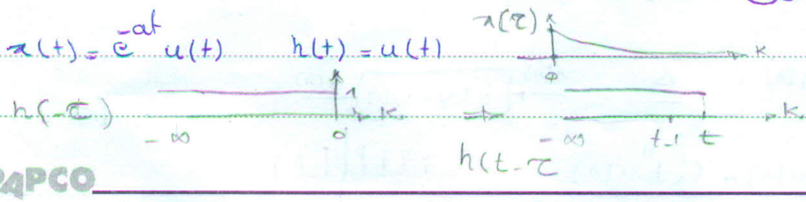
$y[n]=(x[n]+x[n-1])^2 \rightarrow$ LTI ✗ $h[n]=(\delta[n]+\delta[n-1])^2=\delta[n]+\delta[n-1]$

$y[n]=\max\{x[n],x[n-1]\} \rightarrow$ LTI ✗

- Convolution ضربه با هر پاسخ ضربه ی دیگری برابر با خود همان پاسخ ضربه خواهد بود
- لزومی ندارد که پاسخ ضربه ی یک سیستم LTI، پاسخ ضربه ی سیستم های غیر LTI دیگر نباشد

2-2-3. روش محاسبه ی انتگرال کانولوشن

مثال: $x(t)=e^{-at}u(t)$ $h(t)=u(t)$




PAPCO

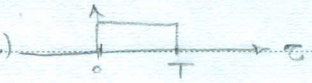
$t<0 \rightarrow y(t)=0$

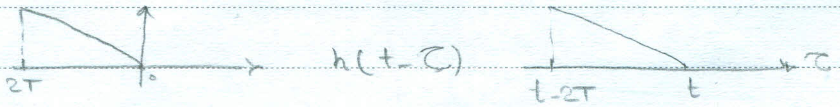
$t>0 \rightarrow \int_0^t e^{-\tau}d\tau$

Subject: مسائل فصل دو : 5, 12, 13, 19, 21, 23, 24, 27, 28, (c و g) و 29(b)
Year. Month. Date. ( )

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \frac{e^{-a\tau}}{-a}\Big|_0^t = \frac{e^{-at}}{-a} + \frac{1}{a}$$

مثال: $x(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<T \\ 0 & o.w \end{cases}$ $\quad h(t) = \begin{cases} t & 0<t<2T \\ 0 & o.w \end{cases}$




if $t<0 \longrightarrow y(t)=0$

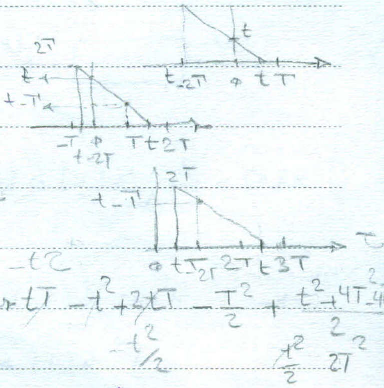
if $0<t<T \longrightarrow \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}$

if $T<t<2T \longrightarrow \int_0^T (t-\tau)d\tau = t\tau - \frac{T^2}{2}$

if $2T<t<3T \longrightarrow \int_{t-2T}^{T} (t-\tau)d\tau = t\tau - \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-2T}^{T}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}T^2 - \frac{t^2}{2} + t\tau$

$-t\tau + tT - t^2 + 2tT - \frac{T^2}{2} + \frac{t^2+4T^2-4}{2}$ $\quad -\frac{t^2}{2}$ $\quad \frac{t^2}{2}$ $\quad 2T^2$




if $t>3T \longrightarrow$

## 2-3 خواص کانولوشن : فقط در سیستم‌های LTI

1. جابجایی Commutative  2. شرکت‌پذیری Associative  3. توزیعی Distributive

2-3-1 جابجایی :

$x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad \overset{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \qquad r=n-k$

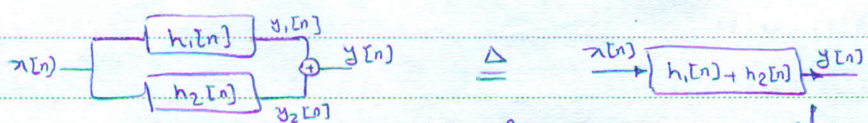
$\Rightarrow y[n] = \sum_{r=\infty}^{r=-\infty} x[n-r]h[r] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r]$ ✓


2-3-2 توزیعی :

$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n] + x[n]*h_2[n]$

طرف اول $= \sum x[k](h_1[n-k]+h_2[n-k]) = \sum x[k]h_1[n-k] + x[k]h_2[n-k]$

$= \sum x[k]h_1[n-k] + \sum x[k]h_2[n-k]$ ✓



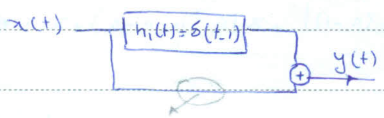

مثال، $h[n] = 2^n u[n] + (\frac{1}{2})^n u[n]$

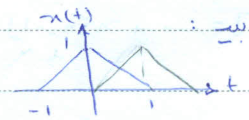
Subject:
Year. Month. Date. ( )

با استفاده از دو ویژگی جابجایی و توزیع‌پذیری داریم: $(x_1[n]+x_2[n]) * h[n] = x_1[n]*h[n]+x_2[n]*h[n]$

به طور مشابه برای سیستم‌های پیوسته هم داریم.

مثال: پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید:



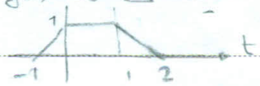

$h_2(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=x(t)$ سیستم همانی $\Rightarrow h(t)=\delta(t-1)+\delta(t)$

وقتی در پاسخ ضربه‌ی ما، ترم ضربه است: می‌دانیم که حاصلش هر چیزی در ضربه میشه آن

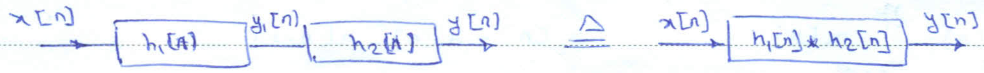
$x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

سیگنال می‌شود $y(t)$

$\Rightarrow y(t)= x(t)*(h_1(t)+h_2(t)) = x(t)+x(t-1)$




2-3-3. شرکت‌پذیری: $(x(t)*h_1(t))*h_2(t) = x(t)*(h_1(t)*h_2(t))$




نتیجه‌گیری 1.

سیستم حاصل از دو سیستم سری برابر است با سیستمی که پاسخ ضربه‌ی آنها کانوالو شده

نتیجه‌گیری 2.

جای سیستم‌ها را می‌شود در سیستم‌های سری، جابجا کرد $x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$

$\xrightarrow{\text{جابجایی}} x[n]*(h_2[n]*h_1[n]) = (x[n]*h_2[n])*h_1[n]$

2-4. ویژگی‌های سیستم‌های LTI با استفاده از پاسخ ضربه:

با حافظه بودن، علّی بودن، معکوس‌پذیری، پایدار بودن

2-4-1. با حافظه بودن:

$$y[n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n_0-k] = \dots + x[n_0-1]\,h[n_0-(n_0-1)] + x[n_0]\,h[n_0-n_0] + x[n_0+1]\,h[n_0-(n_0+1)] + \dots$$

شرط لازم و کافی برای بی‌حافظه بودن

$h[n_0-k]=0 \quad \text{if } k\neq n_0 \Rightarrow h[n]=0 \quad \text{if } n\neq 0$

$h[n]=k\,\delta[n] \Rightarrow y[n]=k\,x[n]$

مثال: $h(t)=\delta(t-1)$ با حافظه

$h(t)=u(t)$ با حافظه

[redacted]

* مثال: if $h[n]=u[n] \longrightarrow y[n]=\sum_{-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k]=\sum_{-\infty}^{n} x[k]u[n-k]=\sum_{-\infty}^{n} x[k]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲_۴_۲. علّی بودن:

خروجی در هر لحظه فقط به ورودی های تا آن لحظه وابسته است

$$y[n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=\dots+\underbrace{x[n_0-1]h[n_0-(n_0-1)]+x[n_0]h[n_0-n_0]}+x[n_0+1]h[n_0-(n_0+1)]+\dots$$

شرط لازم و کافی برای علّی بودن: $h[n_0-k]=0$ if $k>n_0 \Rightarrow h[n]=0$ if $n<0$

مثال: $h[n]=u[n]$ ✓ $\qquad h[n]=u[n+1]$ ✗

۳_۴_۲. معکوس پذیری:

سیستمی معکوس پذیر است که بتوان با اتصال سری آن با یک سیستم دیگر، خروجی نهایی برابر با ورودی باشد

$$h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]$$

مثال: $y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow h_1[n]=u[n]$ $\qquad y_2[n]=x[n]-x[n-1] \rightarrow h_2[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

این دو تابع معکوس پذیر هستند: $h_1[n]*h_2[n]=u[n]-u[n-1]=\delta[n]$

۴_۴_۲. پایداری:

به ازای هر ورودی محدود ← خروجی محدود تولید شود (منظور اندازه ی محدود)

if $\exists N$ s.t $|x[n]|<N,\ \forall n \overset{?}{\Rightarrow} \exists M$ s.t $|y[n]|<M$

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|\,\cancel{|x[n-k]|}^{N}$$

شرط لازم و کافی برای پایداری: $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=$ مقدار محدود $<\infty$

h جمع پذیر باید باشد

مثال: $h[n]=u[n]$ ✗ $\qquad h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ ✓

۵_۴_۲. رابطه ی پاسخ پله و پاسخ ضربه

$x[n]\rightarrow\boxed{h[n]}\rightarrow y[n]$ , $u[n]\rightarrow\boxed{h[n]}\rightarrow s[n]$ → پاسخ سیستم گسسته زمان به ورودی پله

$$s[n]=u[n]*h[n]=h[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] \qquad u[n-k]=\begin{cases}1 & k\le n\\ 0 & k>n\end{cases}$$

* $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k]$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$u[n] \rightarrow \boxed{?} \rightarrow s[n]$ * $h[n] = s[n] - s[n-1]$

مثال: اگر $s[n] = \delta[n]$ سیستم کدام است؟ $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

پایدار $\Longrightarrow$ $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| = 2 < \infty$

پاسخ سیستم پیوسته - زمان به ورودی پله $\rightarrow$ $u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow s(t)$

$$s(t) = u(t) * h(t) = \dots = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \Longrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \ *$$

$u(t) \rightarrow \boxed{?} \rightarrow s(t)$ $h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ *

5-2. تشریح سیستم های LTI با استفاده از معادلات دیفرانسیل و تفاضلی و توصیف بلوک دیاگرامی آن ها: دیفرانسیلی $\leftarrow$ پیوسته - زمان تفاضلی $\leftarrow$ گسسته - زمان

5-2-1. روش های توصیف سیستم

5-2-1-1. روش Explicit description (توصیف به صورت صریح)

• مثل بیان خروجی سیستم به صورت تابعی از ورودی: $y(t) = x(t-t_0)$ $y[n] = (x[n])^2$

• برای سیستم های LTI $\leftarrow$ پاسخ ضربه

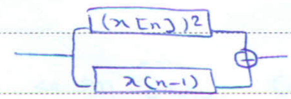
5-2-1-2. روش Implicit description (توصیف به صورت ضمنی)

رابطه ی خروجی و ورودی سیستم به صورت یک معادله ی دیفرانسیل یا تفاضلی

در این حالت باید معادله ی دیفرانسیل یا تفاضلی حل گردد تا رابطه ی صریح ورودی و خروجی به دست آید

* هم برای توصیف صریح، هم برای ضمنی می توانیم نمایش بلوک دیاگرامی هم داشته باشیم

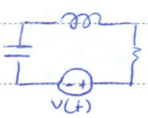
مثلاً: $y[n] = (x[n])^2 + x[n-1]$




برای شبیه سازی کاربرد دارد. (برای جلوگیری از هزینه و خطر)

5-2-2. توصیف سیستم های پیوسته - زمان با معادلات خطی با ضرایب ثابت:

سیستم دیفرانسیلی




$x(t) \rightarrow \boxed{\phantom{h}} \rightarrow y(t)$

یک مثال ساده: $\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = x(t)$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ پاسخ عمومی — پاسخ خاص

■ پاسخ معادلات دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت، یک پاسخ همگن (عمومی) و یک پاسخ خاص دارد

پاسخ همگن به شکل سیستم و عناصر آن بستگی دارد و به ازای ورودی صفر به دست می آید

$\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = 0$ $sy(t) - 4y(t) = 0 \Longrightarrow s = 4 \Longrightarrow y_h(t) = Ae^{4t}$

PAPCO

[redacted]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پاسخ خصوصی وابسته به ورودی $u(t)$ است و شبیه به ورودی است. $x(t)=u(t)$ ⇐ فرض

$$y(t)=Ku(t) \xrightarrow{t>0} 0-4Ku(t)=u(t) \Rightarrow K=-\frac{1}{4} \Rightarrow y_p(t)=-\frac{1}{4}u(t)$$

بنابراین: $y(t)=\left(Ae^{-4t}-\frac{1}{4}\right)u(t)$

اگر معادلات دیفرانسیل ما خطی باشد و با ضرایب ثابت باشد و برای $t<0$ صفر باشد ⇐ LTI هست. تعیین پاسخ، نیاز به یک مقدار اولیه داریم (شرایط کمکی) مثلاً $y(0)=0$

$$\Rightarrow y(0)=A-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

به طور کلی جهت یافتن پاسخ کلی برای معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، از مرتبه‌ی N به n شرط کمکی نیاز داریم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k}y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k}x(t)$$

* شرط اینکه یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، متناظر با یک سیستم LTI باشد، این است که خروجی و مشتقات خروجی (تا مرتبه N) قبل از اعمال ورودی برابر با صفر باشد

$$\frac{d^k}{dt^k}(y(t))\Big|_{t=t_0}=0, \quad k=1,2,\dots,N \quad \Rightarrow \text{استراحت اولیه}$$

* اگر $N=0$ باشد، به توصیف صریح می‌رسیم ⇐ نیازی به حل معادله نداریم

3.5.2. توصیف سیستم‌های گسسته-زمان با معادلات تفاضلی

مرتبه

یک معادله‌ی تفاضلی از مرتبه‌ی N:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

رابطه‌ی بین y و تغییراتش و x و تغییراتش

$$y[n] = \underbrace{y_h[n]}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{y_p[n]}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

* شرط اینکه یک معادله‌ی تفاضلی توصیف کننده‌ی یک سیستم LTI باشد، این است که خروجی و تغییرات آن، قبل از اعمال ورودی، برابر با صفر باشد

$$y[n-k]\Big|_{k=0,1,\dots}=0 \Rightarrow y[-N]=y[-N+1]=\dots=y[-1]=0$$

با فرض اینکه ورودی در لحظه‌ی $t=0^+$ اعمال شده است

* اگر $N=0$ باشد، به توصیف صریح می‌رسیم

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

پاسخ ضربه ⇐

$$h[n]=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0\le n\le M \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

طول $h[n]$ محدود هست $(M+1)$. به سیستم‌هایی که پاسخ ضربه آنها در طول زمان محدود است

(دارای تعداد محدودی مقادیر غیر صفر است) ⇐ FIR (Finite Impulse Response)

در غیر این صورت IIR (Infinite Impulse Response)

مثال: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$ پاسخ ضربه؟

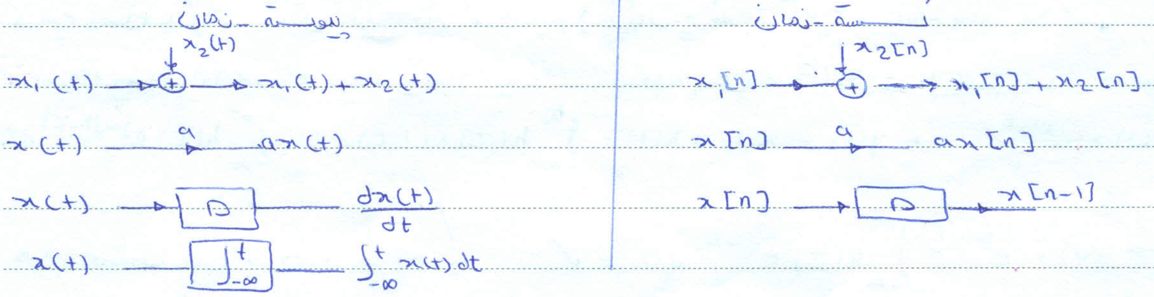
$\Rightarrow h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2}h[n-1] + \delta[n]$

با فرض LTI و علی بودن $h[-1] = 0 \Rightarrow h[0] = 0 + \delta[0] = 1 \qquad h[1] = \frac{1}{2}\times 1 + 0 = \frac{1}{2}$

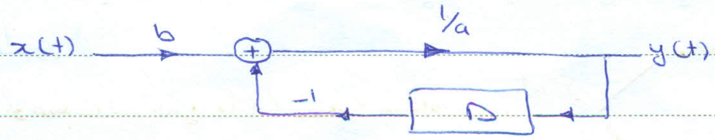
$h[2] = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4} \quad \dots \quad \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

2-5-4. نمایش بلوک دیاگرامی معادلات دیفرانسیلی و تفاضلی

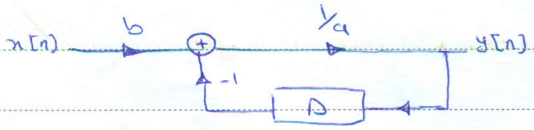
ترکیب: شبیه سازی




مثال: $\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{a}\left(b\,x(t) - \frac{dy(t)}{dt}\right)$




مثال: $y[n-1] + a\,y[n] = b\,x[n]$




فصل سوم: سری فوریه و تبدیل فوریه برای سیگنال های زمان-پیوسته (3.5, 3.6, 3.11, و فصل 4)

3-1. سری فوریه: 3-1-1. رابطه ی ریاضی سری فوریه و همگرایی آن (روش محاسبه ضرایب / همگرایی)

3-1-2. ویژگی های سری فوریه 3-1-3. سری فوریه و پاسخ سیستم های LTI به ورودی های متناوب

3-2. تبدیل فوریه: 3-2-1. رابطه ی ریاضی تبدیل فوریه 3-2-2. ویژگی های تبدیل فوریه

3-3-3. تبدیل فوریه و پاسخ سیستم های LTI

[redacted]

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مقدمه: سیستم‌های LTI دارای خاصیت جمع آثار هستند.

• استراتژی تحلیل سیستم‌های LTI ← توصیف سیگنال‌های ورودی بر اساس ترکیب خطی سیگنال‌های پایه

← محاسبه پاسخ سیستم LTI به هر ورودی دلخواه بر اساس

پاسخ سیستم‌های LTI به سیگنال‌های پایه

• ویژگی‌های سیگنال‌های پایه ← پاسخ سیستم LTI به سیگنال پایه، به سادگی محاسبه شود

← گستره‌ی وسیعی از سیگنال‌ها را بتوان به صورت ترکیب خطی

سیگنال‌های پایه توصیف کرد

- در این فصل با یک سیگنال پایه‌ی مهم کار داریم (یکی از پرکاربردترین سیگنال‌های پایه) ← $e^{j\omega_k t}$

1. بررسی ویژگی اول برای این سیگنال پایه: $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

$$x(t) = e^{j\omega_k t} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j\omega_k (t-\tau)}\, d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = e^{j\omega_k t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega_k \tau}\, d\tau = \checkmark$$

خروجی شد همان ورودی در یک ترم دیگر

$y(t) = e^{j\omega_k t} H(\omega_k)$ ← پاسخ سیستم LTI به سیگنال پایه، به سادگی محاسبه شد

2. بررسی ویژگی دوم برای این سیگنال پایه: سری فوریه و تبدیل فوریه ما را برای رسیدن به این ویژگی کمک می‌کنند

توصیف سیگنال‌ها بر اساس سیگنال پایه $e^{j\omega_k t}$

توصیف سیگنال‌های متناوب ← سری فوریه

توصیف سیگنال‌های غیرمتناوب ← تبدیل فوریه

3.1. سری فوریه

نمایش سیگنال‌های متناوب به صورت ترکیب خطی $\{e^{j\omega_k t}\}$ ها

3.1.1. رابطه‌ی ریاضی سری فوریه و همگرایی آن:

Given $x(t)$: $x(t+T_0) = x(t) \quad \forall t$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$e^{j\omega_0 t}$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

harmonically related ← $e^{jk\omega_0 t}$ $\quad T = \frac{2\pi}{k\omega_0} = \frac{T_0}{k}$

$k = 1, 2, 3, \dots$

هدف: $x(t) =$ ترکیب خطی از سیگنال‌های مختلط نمایی

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}}$$

سری فوریه

$a_k$ ← ضرایب سری فوریه

[redacted]

Subject:

Year. Month. Date. ( )

if $k=\pm1 \longrightarrow a_1 e^{j\omega_0 t}$ , $a_{-1} e^{-j\omega_0 t}$ مؤلفه های اصلی یا فرکانس اصلی

if $k=0 \longrightarrow a_0$ مؤلفه dc

$a_k \longrightarrow$ مؤلفه هارمونی k ام فرکانس اصلی $k\omega_0$

سوالات: 1. ضرایب $a_k$ چگونه به دست می‌آید؟

2. چه دسته از سیگنال های $x(t)$ را می‌توان با سری فوریه توصیف کرد؟ (همگرایی)

جواب سؤال 1: $\int_{T_0} e^{-jn\omega_0 t} x(t) = \int_{T_0} e^{-jn\omega_0 t} \sum a_k e^{j\omega_0 k t}\, dt$

$$\int_T e^{j\omega_0 m t} = \begin{cases} 0 & m\neq 0 \\ T & m=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_T e^{-jn\omega_0 t} x(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_T a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt = a_n T$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{-jk\omega_0 t} x(t)\, dt$$

نکات:

1. بازه ی انتگرال را $\int_{-T/2}^{T/2}$ یا $\int_0^T$ می‌گیریم

2. در تحلیل سری فوریه، سیگنالهای $e^{jk\omega_0 t}$، سیگنالهای پایه هستند که دو ویژگی لازم را دارند.

$x(t) = a_1 Q_1(t) + a_2 Q_2(t) + \dots$ $\qquad \int Q_k(t) Q_m^*(t)\, dt = T\,\delta[n-k]$

خاصیت عمود بودن: $\int e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega_0 n t}\, dt = \begin{cases} T & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases}$

بر این اساس می‌توان سری فوریه را به صورت دیگری نیز بیان کرد:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t \qquad C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt$$

$$C_k = \frac{2}{T}\int_T x(t) \cos k\omega_0 t\, dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t) \sin k\omega_0 t\, dt$$

البته در این درس ما همان فرم مختلط را در نظر گرفته و روی آن کار می‌کنیم

در اینجا همیشه فرض می‌کنیم که $x(t)$ حقیقی باشد (در حالت کلی سیگنال $x(t)$ می‌تواند مختلط باشد)

برای $x(t)$ حقیقی ضرایب سری فوریه می‌تواند مختلط باشد $\qquad$ $x(t)$ حقیقی $\Rightarrow x(t) = x^*(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow a_k = a_{-k}^*$$

$\rightarrow \begin{cases} Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \rightarrow \text{زوج} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \rightarrow \text{فرد} \end{cases}$

Subject:
Year.　Month.　Date.　(　)

* قسمت حقیقی ضرایب سری فوریه $x(t)$ نسبت به $k$ زوج و قسمت موهومی آنها فرد است.

* حال فرض کنید $x(t)$ علاوه بر حقیقی بودن، زوج نیز باشد　$x(t)=x(-t)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow a_k = a_{-k} \Rightarrow$$ زوج و حقیقی

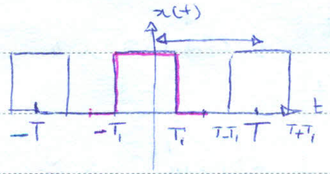
* حال اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد　$x(t)=-x(-t)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 tk} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -a_{-k} e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow a_k = -a_{-k} \Rightarrow$$ فرد و موهومی خالص

* اما اگر $x(t)$ نه زوج و نه فرد باشد ← $a_k$ هم قسمت موهومی و هم حقیقی دارد

مثال:

$$x(t) = \sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j \\ a_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2}j \\ a_k = 0 \quad k \neq 1,\ k \neq -1 \end{cases}$$

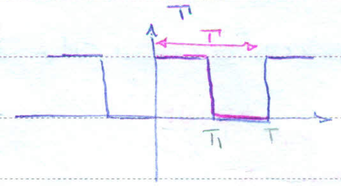



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega_0 kt}\,dt = \frac{e^{-j\omega_0 kt}}{-jk\omega_0}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}\right) = \frac{1}{T}\left(2\,\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\,2\pi/T}\right) = \frac{\sin k\,\frac{2\pi}{T} T_1}{k\pi}$$ ← Low Frequency

چون در فرکانس های پایین مقادیر بیشتری دارد

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$




$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right|_0^{T_1}$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{e^{-jk\omega_0 T_1} - 1}{-jk\omega_0}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{-jk\omega_0 T_1/2}\left(e^{-jk\omega_0 T_1/2} - e^{jk\omega_0 T_1/2}\right)}{-jk\omega_0}\right)$$

$$= \frac{1}{Tk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0 T_1/2}\left(2\sin k\omega_0 T_1/2\right)\right) = \frac{e^{-jk\omega_0 T_1/2}}{\cancel{T}k\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\, 2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{T_1}{2}$$

$$= e^{-jk\frac{T_1\pi}{T}}\left(\frac{\sin k\frac{T_1\pi}{T}}{k\pi}\right)$$

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

جواب سوال 2 همگرایی سری فوریه: اگر $x(t)$ یک سیگنال پریودیک باشد و در یک دوره تناوب دارای ویژگی‌های زیر باشد:

1. $\int_T |x(t)|dt < \infty$ یعنی سیگنال باید محدود باشد. مثلاً: $x = \frac{1}{t}$ $\quad 0<t<1 \; , \; T=1$

2. در هر فاصله‌ی زمانی محدود $x(t)$ تغییرات محدودی داشته باشد (تعداد ماکسیمم‌ها و مینیمم‌های محلی آن محدود باشد) مثلاً: $\sin \frac{2\pi}{t}$ $\quad 0<t<1 \; , \; T=1$ $\qquad \frac{2\pi}{t} = (2K+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{4}{2K+1}$
از $K=2$ تا $K=\infty$ بی‌نهایت max و min دارد $\Leftarrow X$

3. در هر دوره‌ی تناوب، تعداد ناپیوستگی‌ها محدود باشد.

اگر این شرایط را داشته باشد، سری فوریه به $x(t)$ همگرا می‌شود در نقاطی که $x(t)$ پیوسته است و در نقاطی که ناپیوسته است، سری فوریه به متوسط حد چپ و راست آن نقطه همگراست.

2-1-3 ویژگی‌های سری فوریه:

برای بیان این ویژگی‌ها، از این نماد استفاده می‌کنیم $\quad x(t) \overset{F.S}{\longleftrightarrow} a_K$

1-2-1-3. خطی بودن

$$x_1(t) \longleftrightarrow a_K$$
$$x_2(t) \longleftrightarrow b_K \quad \Rightarrow A x_1 + B x_2 \longleftrightarrow A a_K + B b_K$$

فرض: سیگنال‌های $x_1(t)$، $x_2(t)$ هر دو پریودیک هستند.

2-2-1-3. شیفت زمانی $\quad x(t) \longleftrightarrow a_K \Rightarrow x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jK\omega_0 t_0} a_K$

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K e^{j\omega_0 K t} \Rightarrow x(t-t_0) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K \underbrace{e^{-j\omega_0 K t_0}} e^{j\omega_0 K t} \qquad |e^{-jK\omega_0 t_0}| = 1$$

3-2-1-3. معکوس زمانی $\quad x(t) \longleftrightarrow a_K \Rightarrow x(-t) \longleftrightarrow a_{-K}$

در هارمونی‌ها تغییر ایجاد نمی‌شود
$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K e^{-j\omega_0 K t} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_{-K} e^{j\omega_0 K t}$$

4-2-1-3. مقیاس‌بندی زمانی Time Scaling $\quad x(t) \longleftrightarrow a_K \Rightarrow x(\alpha t) \longleftrightarrow a_K$

اگر $x(t)$ دارای تناوب $T_0$ و فرکانس اولیه‌ی $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ باشد، آنگاه $x(\alpha t)$ دارای تناوب $\frac{T}{\alpha}$ و فرکانس آن $\omega_0' = \alpha\omega_0$ می‌شود.

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K e^{jK\omega_0 t} \Rightarrow \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K e^{jK\alpha\omega_0 t}$$

[redacted]

Subject:

Year. Month. Date. ( )

هارمونی‌هایی که در تشکیل $x(t)$ حضور دارند دارای فرکانس‌های $\omega_0$ و $2\omega_0$ و $3\omega_0$ و ... 

و هارمونی‌هایی که در تشکیل $x(\alpha t)$ حضور دارند دارای فرکانس‌های $\alpha\omega_0$ ، $2\alpha\omega_0$ ، ... 

3.1.2.5 کانولوشن و ضرب $\quad x_1(t) \longleftrightarrow a_k \qquad x_2(t) \longleftrightarrow b_k$

* اثبات در کتاب $\quad y(t) = x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow T a_k b_k$

این ویژگی بسیار مهم و کاربردی است $x_1(t)$ و $x_2(t)$ هم پریود هستند ($T$)

$$x_1(t)x_2(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

در سیگنال‌ها از فضا (زمان) به فضای دیگری می‌رویم که در آن فضا تحلیل سیگنال راحت‌تر می‌شود

این ویژگی‌هایی که برای فوریه بیان شد، در اکثر تبدیل‌ها وجود دارد


3.1.2.6 سیگنال conjugate

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x^*(t) \longleftrightarrow a^*_{-k}$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد $\Rightarrow x(t) = x^*(t) \Rightarrow a_k = a^*_{-k}$

3.1.2.7 رابطه‌ی پارسوال parseval's Relation (برای سیگنال‌های پریودیک)

اهمیت این رابطه به خاطر ارتباط آن با توان است (توان متوسط)

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

توان متوسط سیگنال $x(t)$ برابر است با

مجموع توان متوسط هارمونی‌های تشکیل دهنده‌ی آن $\quad \int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = |a_k|^2$

3.1.2.8 مشتق‌گیری

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow jk\omega_0 a_k$

میزان حضور فرکانس‌های بالا تقویت، و فرکانس‌های ضعیف را ضعیف‌تر می‌کند

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{jk\omega_0 a_k}\, e^{jk\omega_0 t}$$

سیستم‌های مشتق‌گیر باعث ناپایداری می‌شوند

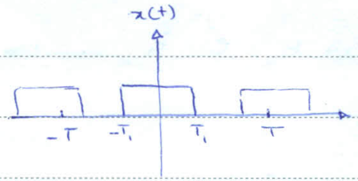
QPCO

* سایر ویژگی‌ها در جدول 3-1 کتاب آمده

سیگنال‌ها
شنبه ۲۷ آبان ← 10:45 - 12:30 و 16:30 - 18:30 ← جلسه

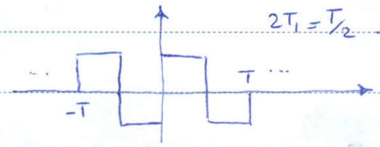
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال‌هایی از کاربرد این ویژگی‌ها:



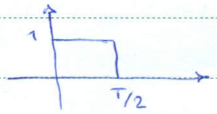

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \qquad a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

ضرایب سری فوریه؟




$2T_1 = T/2 \Rightarrow T_1 = \frac{T}{4}$

$x(t - T/4)$

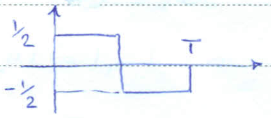



$a_0 = 1/2$

$\Downarrow -1/2$

$x(t - T/4) - 1/2$

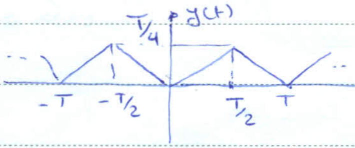
این مقدار $a_0$ اضافه می‌شود




$\Rightarrow b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \quad , b_0 = 0$

روش مستقیم: $b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \rightarrow$ ✓

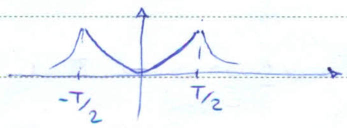
ضرایب سری فوریه؟




روش مستقیم ⇐ $C_k = \frac{1}{T}\int_T y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ ✓

$C_k = \frac{b_k}{jk\omega_0}$

اگر از این مشتق بگیریم، شکل بالایی تشکیل می‌شود (مشتق بگیر)

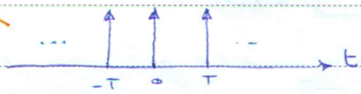



$d_k = \frac{C_k}{jk\omega_0}$

داریم می‌بینیم که هر چه مشتق می‌گیریم ⇐ فرکانس‌های بالا دارند تقویت می‌شوند

سیگنال قطار ضربه

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ ← پرکاربرد




در خیلی از جاها، نویز را این طور مدل می‌کنند

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \qquad a_k = \frac{1}{T}$

همه فرکانس‌ها را به یک میزان دارد (مثل نویزی که در همه جا حضور دارد) ← نویز ضربه

سیگنال $x(t)$ را بیابید، $x(t)$ حقیقی است، متناوب با دوره تناوب اساسی $T=4$ و ضرایب سری فوریه آن را با $a_k$ نمایش می‌دهیم، $a_k = 0$ if $|k| > 1$، سیگنال متناظر با سری فوریه

[redacted]

Subject :
Year . Month . Date . ( )

به عبارتی $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ فرد است ، $\frac{1}{4}\int |x(t)|^2 dt = 1/2$

$x(t)$ حقیقی $\Rightarrow a_k = a^*_{-k}$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ضرایب غیرصفر $\Rightarrow a_{-1}, a_0, a_1$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 1/2$$

فرد : $b_k = -b_{-k} \Rightarrow b_0 = 0 \qquad b_0 = e^{-jk\pi/2} a_0 = 0 \rightarrow a_0 = 0$

$$a_k = a^*_{-k} \Rightarrow |a_k| = |a^*_{-k}| \Rightarrow |a_1| = |a_{-1}|$$

$\Rightarrow |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 2|a_1|^2 = 1/2 \Rightarrow |a_1| = |a_{-1}| = 1/2 \rightarrow$ دایره ای به شعاع $1/2$

از طرفی : $b_1 = -b_{-1} \Rightarrow \underbrace{e^{-j\pi/2}}_{-j} a_{-1} = -\underbrace{e^{j\pi/2}}_{j} a_1 \Rightarrow a_{-1} = a_1 \rightarrow$ زوج و حقیقی

$\Rightarrow a_1 = a_{-1} = 1/2$ یا $a_1 = a_{-1} = -1/2$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\pi/2 t} + e^{-j\pi/2 t}\right) = \cos \pi/2 t$

یا $x(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{j\pi/2 t} + e^{-j\pi/2 t}\right) = -\cos \pi/2 t$

## 3-3-1. سری فوریه و پاسخ سیستم‌های LTI به ورودی‌های متناوب:

$\delta(t) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow h(t)$

پاسخ فرکانسی سیستم

$e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{j\omega t} H(j\omega)$

$x(t) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t)$

فرض کنیم ، سیگنال ورودی $x(t)$ متناوب با تناوب اصلی $T_0$ به این سیستم داده ایم

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \dots$$

$$\Rightarrow y(t) = \dots + a_{-2} e^{-2\omega_0 jt} H(-2j\omega_0) + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} H(-j\omega_0) + a_0 H(0) + a_1 e^{j\omega_0 t} H(j\omega_0) + \dots$$

$$\boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} H(jk\omega_0)}$$

نتیجه ۱ : سیستم LTI را برای ورودی‌های متناوب می‌توان به صورت یکتا با پاسخ فرکانسی بیان کرد

APCO

[redacted]

\\fileserver\common\rost\signal & system\Hw + تبدیل فوریه : تمرین 41 و 42 از فصل 4

تمرینات فصل سوم : 22، 32، 34، 36، 38، 40، 44

Subject:

Year. Month. Date. ( )

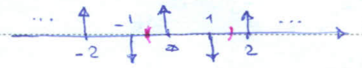
نتیجه 2.5 : خروجی سیستم های LTI به ورودی متناوب، یک سیگنال متناوب است با همان دوره تناوب که ضرایب سری فوریه آن به صورت $b_K = a_K H(jK\omega_0)$ است

مثال : ضرایب سری فوریه خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}u(t)$ را بیابید.

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n) \quad , T_0=2 \qquad y(t)=?$$

راه اول: به روش حل فصل گذشته حل کنیم $y(t)=x(t)*h(t)$

راه دوم: $x(t)$



$T_0=2 \Rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\pi$

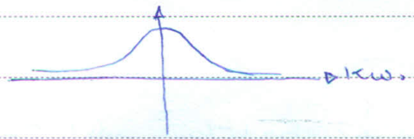
$$a_K=\frac{1}{2}\int_T x(t)e^{-jK\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\left[\int_{-1/2}^{3/2}\delta(t)e^{-jK\omega_0 t}dt+\int_{-1/2}^{3/2}-\delta(t-1)e^{-jK\omega_0 t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-jK\omega_0}\right)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-jK\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos K\pi\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty}b_K e^{jK\omega_0 t} \qquad b_K=a_K H(jK\omega_0)$$

$$H(jK\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-jK\omega_0 t}dt=\int_0^{\infty}e^{-t}e^{-jK\omega_0 t}dt=\left.\frac{e^{-t(1+jK\omega_0)}}{-(1+jK\omega_0)}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{1+jK\omega_0}$$

$$|H(jK\omega_0)|=\frac{1}{\sqrt{1+(K\omega)^2}}$$



فیلتر پایین گذر

## 3-2 . تبدیل فوریه :

رویکرد اصلی ما در سری فوریه این بود که سیگنال متناوب را بر اساس ترکیب خطی سیگنال های از نوع هارمونیک مرتبط با هم توصیف کردیم

سؤال: اگر سیگنال غیرمتناوب باشد، چگونه می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی سیگنال های $e^{j\omega t}$ توصیف کرد؟

تبدیل فوریه پاسخی برای این سؤال است.

فرض کنیم $x(t)$ سیگنالی با انرژی محدود و غیرمتناوب است. $\tilde{x}(t)$ را برحسب $x$، سیگنالی متناوب با تناوب $T_0$ تعریف کنیم

$$x(t)=\begin{cases}\tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2}<t<\frac{T_0}{2}\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

رونظر به این لونه است که سری فوریه را برای $\tilde{x}(t)$ به دست آورده و $T_0$ را به بی‌نهایت میل می‌دهیم

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t)$$

if $T_0 \uparrow \Rightarrow \omega_0 \downarrow \Rightarrow$ فاصله هارمونی‌ها $\downarrow$

$\Rightarrow$ if $T_0 \sim \infty \Rightarrow$ طیف پیوسته

3_2_1. رابطه‌ی ریاضی:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

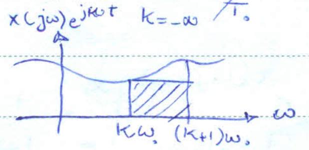
$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Let define $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $\Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0} X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$

تبدیل فوریه

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$




$$\Rightarrow x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t) \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

تبدیل فوریه معکوس

نکات ① در اینجا هم $\omega$ مفهوم فرکانس را دارد. عبارت فرکانسی یک سیگنال غیر متناوب، طیف پیوسته‌ای از فرکانس را شامل می‌شود

② می‌توان به صورت‌های مختلفی تعریف کرد برای مثال: $X(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

③ تبدیل فوریه حالت کلی‌تر سری فوریه است.

④ می‌توانیم به جای $X(j\omega)$ از $X(\omega)$ استفاده کنیم

شرط همگرایی تبدیل فوریه:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ 2) در هر بازه‌ی زمانی تعداد ماکزیمم‌ها و مینیمم‌ها محدود باشد

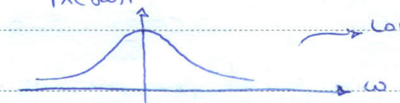
3) در هر بازه‌ی زمانی، تعداد ناپیوستگی‌ها محدود باشد

Subject :
Year . Month . Date . ( )


مثال ۱) $x(t) = e^{-at}u(t)$ , $a>0$

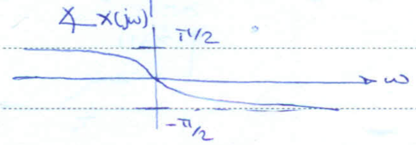
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+a)t}\, dt = \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |X(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \\ \measuredangle X(j\omega) = -tg^{-1}\dfrac{\omega}{a} \end{cases}$$




→ Low Frequency

تأخیر فاز ایجاد می‌کند

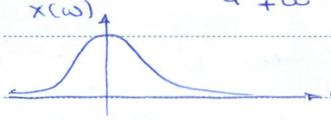



مثال ۱) $x(t) = e^{-a|t|}$ , $a>0$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

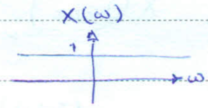
هر وقت سیگنال زوج باشد ← $X(\omega)$ حقیقی و زوج است.




سرعت میرایی ↑ از حالت قبلی

مثال ۱) $x(t) = \delta(t)$


$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$$




در همه‌ی فرکانس‌ها مؤلفه‌ی ثابت دارد

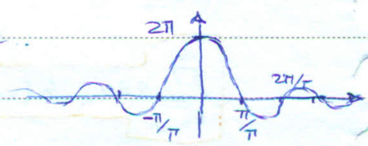
* حضور این سیگنال نسبت به مثال اول مخرب‌تر است. چون در مثال اول ما می‌دانیم که حضور سیگنال در کجا زیاد است و می‌توانیم با فیلتر آن را حذف کنیم


مثال ۱) $x(t) = \begin{cases} 1 & |t|<T \\ 0 & o.w \end{cases}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{-j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{-T}^{T}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}\right) = 2j\sin\omega T / j\omega = \frac{2\sin\omega T}{\omega} = 2T\,\mathrm{Sinc}\,\frac{\omega T}{\pi}$$

Define $\mathrm{Sinc}\,\phi = \dfrac{\sin \pi\phi}{\pi\phi}$

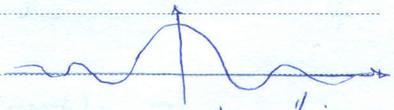
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

مثال : 
$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{+j\omega t}\, d\omega = \frac{W}{\pi}\,\text{Sinc}\,\frac{Wt}{\pi}$$

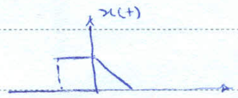


ویژگی Duality

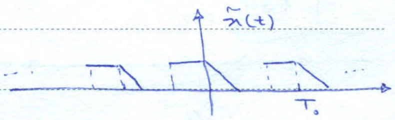
می‌خواهیم ببینیم آیا تبدیل فوریه برای سیگنال‌های متناوب نیز صادق است ؟

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

غیرمتناوب









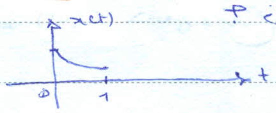
$$\tilde{x}(t) \xrightarrow{\text{سری فوریه}} a_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

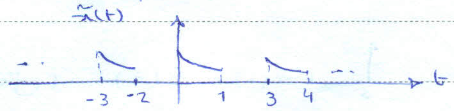
$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\, X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}}$$

مثال : سیگنال $x(t)$ را داریم ، تبدیل فوریه آن ؟

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$









$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{1} e^{-(j\omega+1)t}\, dt$$

$$X(j\omega) = \frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(j\omega+1)}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{-1}{j\omega+1}\left(e^{-(j\omega+1)} - 1\right) = \frac{1 - e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$$

$$\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{سری فوریه}} a_k = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - e^{-(jk\omega_0+1)}}{jk\omega_0+1}\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

نحوه‌ی بدست آوردن تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب :

Hint : اگر $X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$ آنگاه $x(t)$ برابر است با :

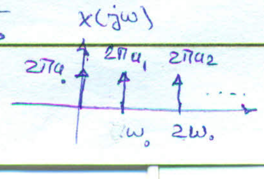
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega = e^{j\omega_0 t} \qquad e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

اگر داشته باشیم :

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k\, \delta(\omega - k\omega_0)} \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

قطاری از توابع ضربه

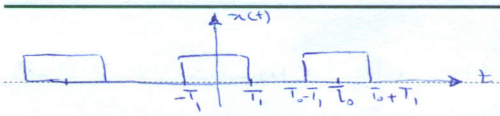


مثال: تبدیل فوریه a (عدد ثابت)

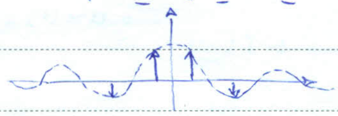
$a_k:\ a_0=a,\ a_k=0\ \ k\neq 0$

$2\pi a\,\delta(\omega)$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید.




$$x(t) \xleftrightarrow{\text{سری فوریه}} \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{sinc}\,\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}$$



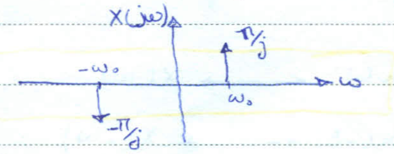
$$x(t) \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0) = \sum 2\pi\,\frac{2T_1}{T}\,\mathrm{sinc}\,\frac{k\omega_0}{\pi}T_1\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=\sin\omega_0 t$ را به دست آورید.

$$x(t)=\sin\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1/2j \\ a_{-1}=-1/2j \\ a_k=0 \quad k\neq\pm1\end{cases}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)=\frac{2\pi}{-2j}\delta(\omega+\omega_0)+\frac{2\pi}{2j}\delta(\omega-\omega_0)$$

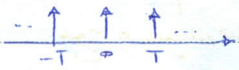
$$X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$



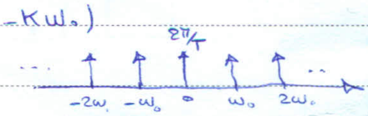

تبدیل فوریه قرار بود به ما کمیتهای فرکانسی را بدهد، میبینیم که اینجا هم چیزی جز ω به ما نداده

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$



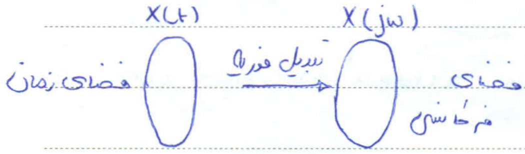

$$a_k=\frac{1}{T}\int x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{T} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega-k\omega_0)$$




## 2-2-3 ویژگی‌های تبدیل فوریه:

■ این ویژگی‌ها بینشی به ما می‌دهند تا $x(t)$ و $X(j\omega)$ را بهتر شناخته و تفسیر کنیم

■ همچنین این ویژگی‌ها باعث کاهش پیچیدگی محاسبات می‌شود.




$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$x(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega) \qquad \begin{cases} X(j\omega)=F(x(t)) \\ x(t)=F^{-1}(X(j\omega))\end{cases}$$

[redacted]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

## 3-2-2-1. خطی بودن Linearity

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega)$ $\rightarrow ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(\omega)+bY(\omega)$

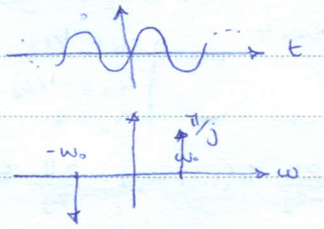
## 3-2-2-2. شیفت زمانی Time shifting

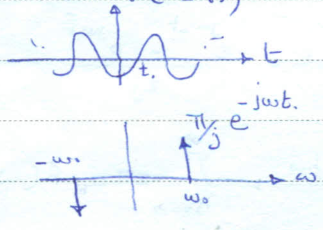
باعث تغییر اندازه نمی‌شود

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$ شیفت در حوزه زمان = شیفت در فاز در حوزه فرکانس

مثال: $x(t) = \sin \omega_0 t$ $\quad\quad$ $\sin \omega_0 (t-t_0)$





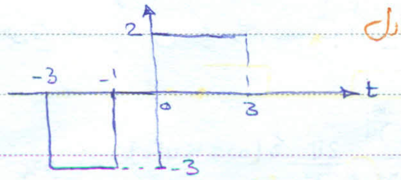

## 3-2-2-3. معکوس زمانی

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$ $\quad\quad$ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$x(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega \quad \omega \rightarrow -\omega \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(-j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

مثال:




* خیلی پرکاربرد: موج مستطیلی متقارن

به عرض $T$  تبدیل فوریه $\Rightarrow$ عرض $\times \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\frac{\text{عرض}}{2}\right)$

$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \longrightarrow T \operatorname{sinc} \frac{\omega}{\pi}\frac{T}{2}$

$X(j\omega) = 2\Pi\left(\frac{t-1.5}{3}\right) - 3\Pi\left(\frac{t-(-2)}{2}\right) = 2e^{-j\omega 1.5} \times 3\operatorname{sinc} \frac{\omega}{\pi}\frac{3}{2} - 3e^{+j\omega 2} \times 2\operatorname{sinc}\frac{\omega}{\pi}$

## 3-2-2-4. مزدوج زمانی

$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$

$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$

اگر $x(t)$ حقیقی $x(t)=x^*(t) \Rightarrow X(j\omega)=X^*(-j\omega) \Rightarrow$ قسمت Real آن زوج

$\Rightarrow$ قسمت Imag. آن فرد

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج $x(t)=x(-t)$, $x(t)=x^*(t) \Rightarrow X(j\omega)=X(-j\omega) \Rightarrow$ تنها دارای قسمت حقیقی است

$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ و زوج است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد ⟸ $X(j\omega)$ تنها دارای قسمت موهومی است و فرد است.

## 5.2.2.3. مقیاس بندی

$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$

اثبات: $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow x(at)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega at}d\omega$

$\omega \to \frac{\omega}{a}$ با توجه به علامت a

$x(at)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mp\infty}^{\pm\infty} X(j\frac{\omega}{a})e^{j\omega t}\frac{d\omega}{a} = \frac{1}{|a|}X(j\frac{\omega}{a})$

## 6.2.2.3. مشتق گیری و انتگرال گیری در حوزه‌ی زمان

$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$

$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega X(\omega)$

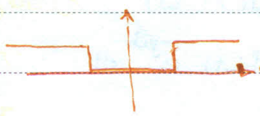
$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

ویژگی‌های قبلی شکل ظاهری سیگنال را تغییر نمی‌دادند ولی در اینجا شکل سیگنال تغییر می‌کند ⟸ دخالتی که مشتق روی سیگنال دارد بیشتر است.

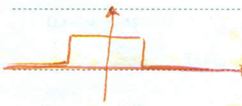
کارش فرکانس‌های پایین را تضعیف و بالا را تقویت می‌کند ⟸ فیلتر بالا گذر

انواع فیلتر:

1. بالا گذر (ایده‌آل) $\omega$



2. پایین گذر (ایده‌آل) $\omega$



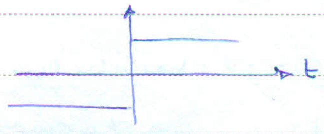
3. میان گذر (ایده‌آل) $\omega$

$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$

$\int_{-\infty}^t x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\text{انتگرال}}{e^{j\omega t}}X(\omega)(\frac{1}{j\omega}+\underbrace{\pi\delta(\omega)}_{\text{مقدار dc}})d\omega$

$\int_{-\infty}^t x(t)dt \leftrightarrow (\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega))X(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi\delta(\omega)X(0)$

مثلا:



$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=0$ ⟸ مقدار dc آن صفر است

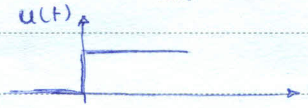
شبیه یک فیلتر پایین گذر عمل می‌کند

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال، $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$ $\qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) \times 1$

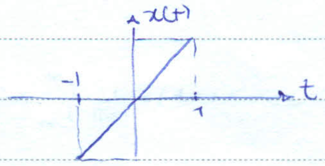
$u(t) \longleftrightarrow ?$



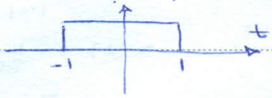
چون $u(t)$ مقدار dc دارد

باید حتما ترم ضربه داشته باشد

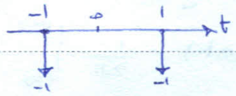
مثال،



$g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$



ناپیوستگی ها را با ضربه نشان می دهیم $+$



عرض مستطیل

$$\Longrightarrow 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) + e^{-j\omega(-1)} \times (-1) + e^{-j\omega(1)} \times (-1) = G(\omega)$$

dc ندارد

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau = \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi \cancel{G(0)}\,\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) - \frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

* 7-2-2-3. رابطه ی دوگانی duality

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$f(t) \longleftrightarrow g(\omega)$ $\qquad$ $g(\omega)$ را ازش $g(t)$ می سازیم تبدیل فوریه آن چیست؟

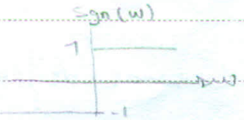
$g(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad \underset{\omega \to t}{t \to \omega} \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \overset{\omega \to -\omega}{=}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

مثال، $\frac{1}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} ?\ \pi e^{-|\omega|}$ $\qquad e^{-a|t|} \xRightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

$\pi e^{-|t|}\ ? \xleftrightarrow{F} 2\pi \frac{1}{1+\omega^2}$



با هم تبدیل فوریه، ما در اصل ۲تا فوریه را حساب می کنیم

مثال : عکس تبدیل فوریه $X(j\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(j\omega)$ را بیابید

$-j\,\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{F} ?$

$u(t) - u(-t) \xrightarrow{F} \checkmark$ $\Longrightarrow$

APCO

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　　( )

۳-۲-۲-۷-۱. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در حوزه‌ی فرکانس:

$$-jt\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \Rightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt\,x(t))\, e^{-j\omega t}\, dt$$

انتگرال‌گیری ⇐

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty} X(\eta)\, d\eta$$

۳-۲-۲-۷-۲-۱. از duality نتیجه می‌گیریم

$$x(t)\, e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$$

۳-۲-۲-۸. قضیه پارسوال

$$\text{انرژی} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2$$

تبدیل فوریه انرژی را حفظ می‌کند ( $\frac{1}{2\pi}$ فقط یک ضریب است )

۳-۲-۲-۹. کانولوشن در حوزه‌ی زمان

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = X(\omega).H(\omega)$$

این ویژگی به ما کمک می‌کند که تحلیل‌های

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

در حوزه‌ی زمان را به حوزه‌ی فرکانس ببریم

$$h(t) \longleftrightarrow H(\omega)$$

و با این کار تحلیل‌ها ساده می‌شود

۳-۲-۲-۱۰. dual رابطه‌ی بالا "ضرب در حوزه‌ی زمان"

$$s(t) \longleftrightarrow S(\omega)$$

$$p(t) \longleftrightarrow P(\omega)$$

$$p(t).s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} S(\omega) * P(\omega)$$

۳-۲-۳. کاربرد تبدیل فوریه ← خاصیت کانولوشن در حوزه‌ی زمان $x(t)*h(t) \longleftrightarrow X(\omega)H(\omega)$

خاصیت ضرب در حوزه‌ی زمان $p(t)s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}S(\omega)*P(\omega)$

تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه‌ی فرکانس با استفاده از مفهوم فرکانسی سیستم

خاصیت کانولوشن در حوزه زمان

مفهوم فیلترینگ

مدولاسیون

خاصیت ضرب در حوزه زمان

نمونه‌برداری Sampling

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3-2-3-1. تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه‌ی فرکانس با استفاده از مفهوم پاسخ فرکانسی سیستم

$$\boxed{H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$ : پاسخ فرکانسی سیستم

- پاسخ فرکانسی سیستم LTI، آن سیستم را به صورت کاملی توصیف می‌کند (یعنی همان نقش پاسخ ضربه).

- با استفاده از پاسخ فرکانسی می‌توان سیستم LTI را تحلیل کرد: 1. به ازای ورودی مشخص، خروجی آن را به دست آورد 2. بررسی ویژگی‌های پایدار، علّی بودن و ... 3. از روی رابطه معادلات دیفرانسیل خطی، پاسخ فرکانسی را به دست آورد.

• سری و موازی بودن را نیز می‌توان تشخیص داد:

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow \boxed{h_2(t)} \rightarrow y(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t) * h_2(t)} \rightarrow y(t)$$

$$X(\omega) \rightarrow \boxed{H_1(\omega)} \rightarrow \boxed{H_2(\omega)} \rightarrow Y(\omega) \quad \overset{\Delta}{\Longrightarrow} \quad X(\omega) \rightarrow \boxed{H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)} \rightarrow Y(\omega)$$

مثال: سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t-t_0)$ را داریم. پاسخ فرکانسی و رابطه‌ی خروجی برحسب ورودی را به دست آورید.

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad \Rightarrow \quad y(t) = x(t-t_0)$$

مثال: سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) \rightarrow \boxed{\phantom{xxxx}} \rightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t) \qquad H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} \text{ یا } H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega X(\omega)}{X(\omega)}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = j\omega$$

مثال: اگر سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-bt}u(t)$ باشد و ورودی زیر به آن اعمال شود خروجی را به دست آورید. $x(t)=e^{-at}u(t)$ یک راه: حل در حوزه‌ی زمان $x(t)*h(t)$

$$H(\omega) = \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\infty} e^{-bt} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(b+j\omega)t}\, dt = \frac{1}{-(b+j\omega)} e^{-(b+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{b+j\omega}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow Y(\omega) = \left(\frac{1}{b+j\omega}\right)\left(\frac{1}{a+j\omega}\right) = \frac{A}{b+j\omega} + \frac{B}{a+j\omega}$$

$$A = \frac{1}{a-b} \qquad B = \frac{1}{b-a} \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b+j\omega} - \frac{1}{a+j\omega}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{a-b}\left[e^{-bt}u(t) - e^{-at}u(t)\right] = \frac{u(t)}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: یک سیستم LTI داریم:

$h(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t)$

$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

$X(\omega) = \left(\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}\right) \qquad H(\omega) = 1 + 2 \times \frac{1}{1+j\omega}$

$$Y(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega} + \frac{2}{(1+j\omega)^2} - \frac{2}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$= \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega} + \frac{2}{(1+j\omega)^2} \rightarrow \text{مشق}$$

3.2.3.2. تحلیل سیستم‌های LTI توصیف شده توسط معادلات دیفرانسیل خطی:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad X(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow Y(\omega) = H(\omega) \times X(\omega)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega) \qquad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال: برای تحلیل باید $h(t)$ را بدست آوریم یا $H(\omega)$

$y'(t) + a y(t) = x(t)$

$$j\omega Y(\omega) + a Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow h(t) = e^{-at}u(t)$$

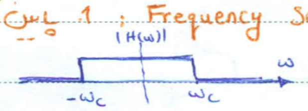
3.3.2.3. مفهوم فیلترینگ:

در بسیاری از کاربردها نیاز داریم، اندازه‌ی نسبی مؤلفه‌های فرکانسی موجود در یک سیگنال را تغییر دهیم ← فیلتر

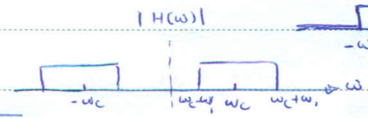
فیلتر: هرگونه تغییر در محتوای فرکانسی سیگنال (مطلوب یا نامطلوب) یعنی تبدیل فوریه یا طیف سیگنال

معروف‌ترین فیلترها Frequency selective: 1. پایین‌گذر 2. میان‌گذر 3. بالاگذر

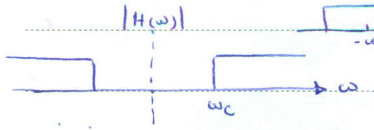
1. پایین‌گذر (LPF) ایده‌آل:




2. میان‌گذر (BPF) ایده‌آل:

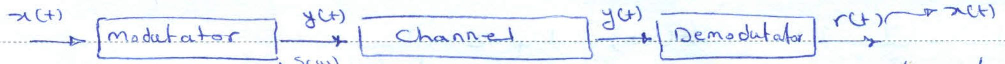



3. بالاگذر (HPF) ایده‌آل:




این فیلترها علی نیستند، چرا که سیگنال حاصل Sinc است، و Sinc هم برای $t<0$، صفر نبود

3-2-3-4. مدلاسیون - Modulation: مدلاتورها کاربرد بسیار زیادی در سیستم‌های مخابراتی دارند.




فرض کنید سیگنال $s(t)$ یک سیگنال فرکانس پایین است. ($S(\omega)$، $-\omega_1$، $\omega_1$، $\omega$) کانال مخابراتی در مسایل، صورت یک فیلتر میان‌گذر عمل می‌کند ($-\omega_c$، $\omega_c$) در نتیجه اگر سیگنال را همین جوری ارسال کنیم صفر دریافت می‌شود. بنابراین باید بدون تغییر محتویات شیفت فرکانسی بدهیم

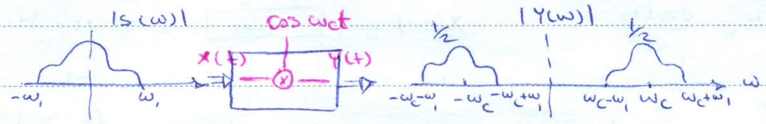
می‌خواهیم جداسازی فرکانسی برای سیگنال‌های متعلق به اپراتورهای مختلف انجام دهیم.

برای این کار باید حول $\omega$ های مختلف شیفت فرکانسی دهیم

← دلایل نیاز به مدلاسیون: 1. تطبیق فرکانسی سیگنال ورودی و کانال

2. جداسازی فرکانسی برای سیگنال‌های اپراتورهای متفاوت

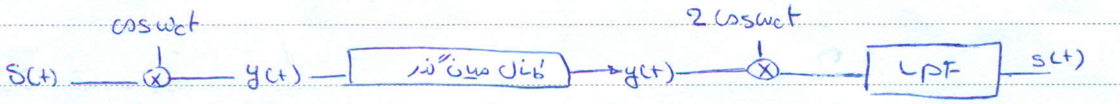
هدف: modul




$$Y(\omega) = X(\omega) * F\{\cos\omega_c t\} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

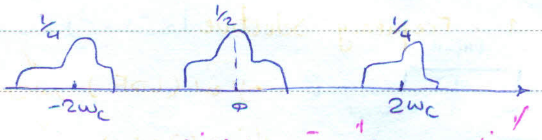
$$Y(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2} S(\omega+\omega_c) = \frac{1}{2}\left[\left(S(\omega) * \pi\delta(\omega-\omega_c)\right) + \left(S(\omega) * \pi\delta(\omega+\omega_c)\right)\right]$$

$$F(\cos\omega_c t) = \sum 2\pi a_k\, \delta(\omega - k\omega_c) = \pi\,\delta(\omega-\omega_c) + \pi\,\delta(\omega+\omega_c)$$




3-2-3-5. دمدلاسیون - Demodulation:

$$r(t) = y(t)\cos\omega_c t \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} Y(\omega) * F\{\cos\omega_c t\} = \frac{1}{2}\left(Y(\omega-\omega_c) + Y(\omega+\omega_c)\right)$$




مبحث چهارم: سری فوریه و تبدیل فوریه برای سیگنال‌های گسسته - زمان:

4-1. سری فوریه گسسته زمان 4-2. تبدیل فوریه گسسته - زمان

4-1-1. رابطه‌ی ریاضی 4-1-2. ویژگی‌ها 4-1-3. سری فوریه گسسته و سیستم LTI گسسته

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یادآوری: روش تحلیل سیستم‌های LTI ← توصیف سیگنال‌های ورودی به صورت ترکیب خطی سیگنال‌های پایه

← پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه براساس پاسخ سیستم به سیگنال‌های پایه

$x(t),\ x[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t),\ y[n]$

پیشنهاد سیگنال پایه برای توصیف سیگنال‌های گسسته-زمان $e^{j\omega_k n}$

$\varphi_k[n]$ سیگنال خط اساسی

• بررسی ویژگی اول (انتخاب سیگنال پایه): $y[n]=\varphi_k[n]*h[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\varphi_k[n-r]$

ویژگی اول را دارد ⇐ $=\sum h[r]e^{j\omega_k n}e^{-j\omega_k r}=e^{j\omega_k n}\underbrace{\sum h[r]e^{-j\omega_k r}}_{H(\omega_k)}$

ورودی عیناً تکرار شد

یادآوری:

$e^{j\omega t}$: متناوب است با دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{2\pi}{\omega}$

با افزایش ω، فرکانس به معنی تغییرات سیگنال افزایش می‌یابد

$e^{j\omega n}$: تنها در صورتی متناوب است که $\frac{2\pi}{\omega}$ نسبت دو عدد صحیح باشد (نسبت گویا)

نسبت به ω، متناوب است با دوره‌ی 2π، لذا $e^{j\omega n}=e^{j(\omega+2\pi)n}$ ⇐ با افزایش ω

لزوماً فرکانس افزایش پیدا نمی‌کند

← مضارب فرد π ← فرکانس‌های بالا  مضارب زوج π ← فرکانس‌های پایین

فرکانس زاویه اصلی

$\omega=\frac{2\pi}{5}=\frac{2\pi}{N}$  متناوب با دوره‌ی تناوب 5 ← $\frac{2\pi}{2\pi/5}=5$ ⇐ $\sin\frac{2\pi}{5}n$

$\omega=\frac{2\pi\times3}{5}\neq\frac{2\pi}{N}$  متناوب با دوره‌ی تناوب 5 ← $\frac{2\pi}{3\times2\pi/5}=\frac{5}{3}$ ⇐ $\sin\frac{3\times2\pi}{5}n$

قدم‌های بررسی متناوب بودن سیگنال نمایی مختلط گسسته:

$\frac{2\pi}{\omega}$ ← عدد صحیح است یا نسبت دو عدد صحیح یا نسبت . نباشد ← متناوب نباشد، N=?

در آخر فرکانس زاویه اصلی = $\frac{2\pi}{N}$

• بررسی ویژگی دوم (انتخاب سیگنال پایه):

توصیف سیگنال‌های گسسته-زمان به صورت ترکیب خطی سیگنال‌های پایه نمایی مختلط:

← سری فوریه: سیگنال‌های گسسته-زمان متناوب

← تبدیل فوریه: سیگنال‌های گسسته-زمان غیرمتناوب

Subject:
Year. Month. Date. ( )

## ۱.۴ سری فوریه:

سؤال: سیگنال متناوب گسسته زمان $x[n]$ داده شده است: $x[n] = x[n+N], \forall n$ ← دوره تناوب اصلی

می‌خواهیم این سیگنال را به صورت ترکیب خطی سیگنال پایه نمایی مختلط $e^{j\omega_k n}$ توصیف کنیم.

← سیگنال پایه باید خود متناوب با دوره‌ی تناوب N باشد. $x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}$

سیگنال‌های نمایی مختلط با تناوب N چگونه به دست می‌آیند: $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

$\frac{2\pi}{\frac{2\pi k}{N}} = \frac{N}{k}$ ← متناوب ← تناوب اصلی N ، $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

← تعداد سیگنال‌های متفاوت به صورت $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ برابر N است

← مجموعه سیگنال‌های نمایی مختلطی که دارای تناوب N هستند: $\varphi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, \dots, N-1$

دارای فرکانس اصلی $\frac{2\pi}{N}$ و $\varphi_k[n] = \varphi_{k+N}[n]$

ضرایب سری فوریه مثل حالت پیوسته که نهایت نیست و از ۰ تا N-1 است

- برای توصیف یک سیگنال دوره‌ای گسسته زمان، تنها N هارمونیک (سیگنال نمایی مختلط) در اختیار داریم.

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\omega_0 n}} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$\sum_{k=\langle N\rangle}$ ← N مقدار متوالی

سؤالات: 1. $a_k$ها چگونه به دست می‌آیند؟

2. (همگرایی) چه سیگنال‌هایی را $x[n]$ای را می‌توان این گونه توصیف کرد؟

Given $x[n]$ s.t. $x[n] = x[n+N], \forall n$   N = Foundamental Period

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ = Foundamental Frequency

$$x[n] = \sum_{n=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

**تفاوت‌ها:**

- سیگنال متناوب $x(t)$ از مجموع بی‌نهایت هارمونیک $e^{jk\omega_0 t}$ تشکیل می‌شود در حالی که در سیگنال‌های متناوب $x[n]$ تنها از مجموع وزن‌دار N هارمونیک به دست می‌آید

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}}$$

- $a_k$ها نسبت به k متناوب هستند با دوره‌ی تناوب N: $a_k = a_{k+N}$

مثال ۱: $x[n] = \sin \omega n$

$\omega$: $\frac{2\pi}{\omega} = N$ → $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \omega$ (الف)

$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{M}$ → متناوب $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ، $\omega = \frac{2\pi}{N} M$ (ب)

$0.\omega$ → X متناوب

حالت (الف): $\omega_0 = \omega = \frac{2\pi}{N}$

$$\sin \omega_0 n = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$a_1 = \frac{1}{2j} \quad a_{-1} = \frac{-1}{2j}$

حالت (ب): $\omega = M\omega_0 \rightarrow \sin \omega n = \frac{1}{2j}\left[e^{jM\omega_0 n} - e^{-jM\omega_0 n}\right]$

$a_M = \frac{1}{2j} \quad a_{-M} = \frac{-1}{2j}$

APCO

برای x(t) هم صادق است: $x[n]$ is periodic in $n$ $\quad e^{jk\omega_0 n}$ is periodic in $n$

برای x(t) صادق نیست: $e^{jk\omega_0 n}$ is periodic in $k$ $\quad a_k$ is periodic in $k$

مثال 2:

$$x[n] = 1 + \sin\frac{2\pi}{N}n + 3\cos\frac{2\pi}{N}n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{N}} = N \qquad \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{N}} = N \qquad \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{N}} = \frac{N}{2} \Rightarrow \text{تناوب} = N$$

کل سیگنال متناوب با دوره‌ای که

تناوب N و فرکانس اصلی $\frac{2\pi}{N}$

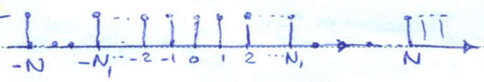
$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + \frac{3}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] - \frac{1}{2j}\left[e^{2j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-2j\frac{2\pi}{N}n}\right]$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} \qquad a_2 = \frac{-1}{2j} \qquad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} \qquad a_{-2} = \frac{1}{2j}$$

بقیه ضریب‌ها در یک پریود برابر صفر هستند

$$a_{k+N} = a_k$$

مثال 3:




متناوب N

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| < N_1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}}{N}\left(\frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N}\cancel{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}}\;\cancel{\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\times\frac{1}{2}}}}\left(\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}\times 1/2} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\times 1/2}}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N}\,\frac{\sin k\pi/N\,(2N_1+1)}{\sin k\pi/N} \qquad a_0 = \frac{2N_1+1}{N}$$

همان نمونه‌ی سینک بر خلاف سری فوریه در حالت پیوسته

این $a_k$ پریودیک است.

4-1-2. ویژگی های سری فوریه گسسته-زمان:

4-1-2-1. خطی بودن

$$\left.\begin{aligned} x[n] &\longleftrightarrow a_k \\ y[n] &\longleftrightarrow b_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow A x[n] + B y[n] \longleftrightarrow A a_k + B b_k$$

4-1-2-2. کانجوگیت: اگر x[n] حقیقی باشد

$$a_k = a^*_{-k}$$

4-1-2-3. کانولوشن

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \longleftrightarrow \sum_{l=\langle N\rangle} a_l\, b_{k-l}$$

کانولوشن متناوب

$$\sum_{k=\langle N\rangle} x_1[n]\,x_2[n-k] = N a_k b_k$$

4.1.2.4 شیفت زمانی:

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} a_k$$

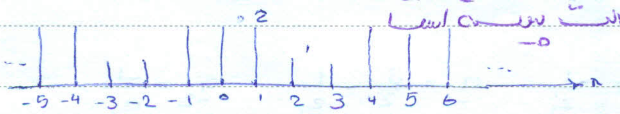
4.1.2.5 تفاضل مرتبه ی اول

$$x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow a_k - e^{-jk\frac{2\pi}{N}} a_k = a_k \underbrace{\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)}$$

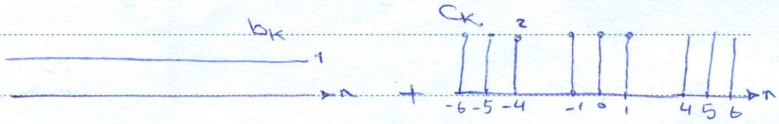
معادل مشتق در حالت پیوسته است

سایر ویژگی ها نیز مشابه ویژگی های حالت پیوسته است

مثال: $N=5$



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$



$$x_2[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} b_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \text{عدد ثابت} \Rightarrow$$ فقط $b_0$ دارد $$\Rightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_k = 0 & o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{5}\,\frac{\sin\frac{k\pi}{5}\times 3}{\sin\frac{k\pi}{5}} \qquad c_0 = \frac{3}{5} \qquad \Rightarrow a_k = \begin{cases} a_0 = 8/5 \\ a_k = \frac{1}{5}\,\frac{\sin k3\pi/5}{\sin k\pi/5} & k \neq 0, \pm 5, \dots \end{cases}$$

4.1.2.6 رابطه ی پارسوال

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

متوسط توان در یک پریود

مثال: با اطلاعات زیر $x[n]$ را بیابید.

1- پریودیک با دوره ی تناوب 6   2- $\sum_{n=0}^{5} x[n]=2$   3- $\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n]=1$   4- در بین سیگنالها

با ویژگی های فوق $x[n]$ کمترین انرژی را دارد.

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] = 2 \Rightarrow a_0 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

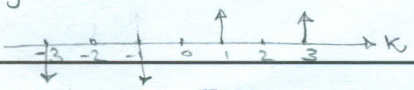
$$a_k = \frac{1}{6}\sum x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{3}n} \Rightarrow k=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}\sum x[n]\, e^{-jn\pi} = \frac{1}{6}$$

چون کمترین انرژی پس بقیه ضرایب صفر هستند ⇐ $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$

$$x[n] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$$

$$\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{-j\frac{\pi}{3}n}}{2}\right)\left(\frac{e^{2j\frac{\pi}{3}n}-e^{-2j\frac{\pi}{3}n}}{2j}\right)=\frac{1}{4j}\left(e^{j\pi n}-e^{-j\frac{\pi}{3}n}+e^{j\frac{\pi}{3}n}-e^{-j\pi n}\right)=\frac{1}{4j}\left(e^{3j\frac{2\pi}{6}n}-e^{-j\frac{2\pi}{6}n}+e^{j\frac{2\pi}{6}n}-e^{-3j\frac{2\pi}{6}n}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$\frac{2\pi}{\pi/3}=6$ $\frac{2\pi}{2\pi/3}=3$

مثال: ضرایب سری فوریه را بدست آورید $x[n]=\cos\frac{\pi}{3}n\cdot\sin\frac{2\pi}{3}n \Rightarrow N=6$

$a_1=a_3=\frac{1}{4j}$ $a_{-1}=a_{-3}=-\frac{1}{4j}$

3.1.4. فرض کنید سیگنال متناوب $x[n]$ به عنوان ورودی به سیستم LTI داده شده است

$$x[n]\,\{a_k\} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y[n]\,\{b_k\}$$

خروجی نیز متناوب با همان دوره تناوب ورودی است.

$$e^{j\omega_k} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow e^{j\omega_k}$$

$$H(e^{j\omega_k})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]\,e^{-j\omega_k n}$$

$$x[n]=\sum a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \longrightarrow \boxed{\phantom{LTI}} \longrightarrow \sum a_k H(e^{j\omega_k})\,e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$b_k=a_k\,H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$$

مثال: سیستم با پاسخ ضربه $h[n]=\alpha^n u[n]$ , $|\alpha|<1$ داریم. سیگنال $x[n]=\cos\frac{2\pi}{N}n$ اعمال کنیم، ضرایب سری فوریه خروجی؟

$$H(e^{jk\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^n u[n]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^n=\frac{1}{1-\alpha e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

ضرایب سری فوریه ورودی: $\cos\frac{2\pi}{N}n=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$ $a_1=\frac{1}{2}$ $a_{-1}=\frac{1}{2}$

سایر ضرایب در یک دوره صفر است

$$b_k \Rightarrow b_1=\frac{1}{2(1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}})}=\frac{1}{2}re^{j\theta} \qquad b_{-1}=\frac{1}{2(1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}})}=\frac{1}{2}re^{-j\theta}$$

$$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} b_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{2(1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}})}+\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n}}{2(1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

## 2.4. تبدیل فوریه گسسته:

عمده‌ترین تفاوت سری فوریه پیوسته و گسسته: محدود بودن تعداد جملات سری فوریه گسسته

سیگنال نامتناوب $x[n]$ با طول محدود داریم $x[n]=0$ $\begin{matrix} n>N_1 \\ n<-N_2 \end{matrix}$. از روی $x[n]$ سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ را به صورت زیر می‌سازیم

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n] & -N_1 \leqslant n \leqslant N_2 \\ \text{periodic with Period } N \end{cases} \qquad x[n] = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}[n]$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad , \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-n_1}^{n=n_2} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \quad \text{Define} \Longrightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}}$$

پیوسته و متناوب

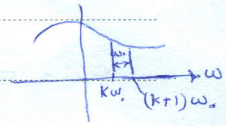
$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

زوج تبدیل فوریه گسسته

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

از طرفی : $\frac{1}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \qquad \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega}$$




$$\overset{\omega}{\overbrace{k\omega_0}} = \frac{2\pi}{N} k \rightarrow k = 0, 1, \ldots, N \Rightarrow \omega = 0, \ldots, 2\pi$$

همان‌طور که می‌بینیم تفاوت این با تبدیل فوریه پیوسته کران انتگرال است

قبلاً هم گفته بودیم $e^{j\omega n}$ به‌عنوان تابعی از $\omega$ متناوب است با دوره‌ی تناوب $2\pi$

تفاوت‌ها :

1. بازه انتگرال $2\pi$ است. 2. $X(e^{j\omega})$ انتگرال نیست بلکه summation است.

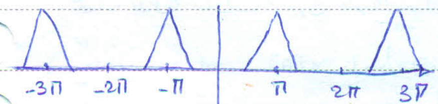
← تفاوت عمده‌ی تبدیل فوریه گسسته و پیوسته ① متناوب بودن $X(e^{j\omega})$ نسبت به $\omega$

② محدود بودن فاصله‌ی انتگرال‌گیری در عکس تبدیل فوریه

این دو تفاوت ناشی از این واقعیت است که $e^{j\omega n}$ نسبت به $\omega$ متناوب است ولی $e^{j\omega t}$ نیست.

نکته: تبدیل فوریه طیف فرکانسی سیگنال $x[n]$ را مشخص می‌کند


طیف فرکانسی یک سیگنال دارای فرکانس پایین حول مضارب زوج $\pi$




طیف فرکانسی یک سیگنال دارای فرکانس بالا حول مضارب فرد $\pi$

APCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

همگرایی تبدیل فوریه: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|<\infty$ یا $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2<\infty$

اگر سیگنال گسسته‌ی ما همچین ویژگی داشته باشد

دیگر لازم نیست که از یک جایی به بعد صفر باشد و برای آن تبدیل فوریه داریم

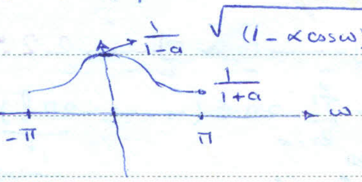
مثال: مثلاً در اینجا اگر $|a|>1$ باشد تبدیل فوریه نداریم برای همین $|a|<1$ ، $x[n]=a^n u[n]$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

همان طور که می‌بینیم پریودیک است

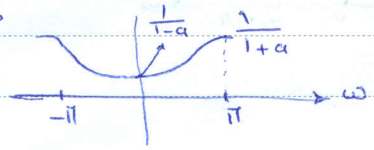
$$|X(e^{j\omega})|=\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha\cos\omega)^2+(\alpha\sin\omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}$$

$a>0$




* سیگنال ما حضور فرکانس‌های پایین بیشتر است.

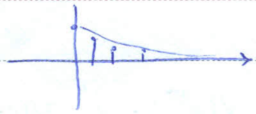
$a<0$




* سیگنال ما حضور فرکانس‌های بالا بیشتر است.

این را می‌توانستیم از ابتدا هم متوجه شویم چرا که:

$x[n]$ , $a>0$



$x[n]$ , $a<0$


تغییرات ↑

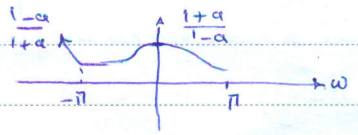
مثال: $x[n]=a^{|n|}$ , $|a|<1$ $\qquad X(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-jn\omega}+\sum_{0}^{\infty}a^{n}e^{-jn\omega}$

$$X(e^{j\omega})=\frac{-1}{1-a^{-1}e^{-j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

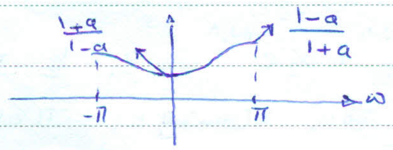
$$=\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

برای این سیگنال هم تفسیری مشابه مثال قبل خواهیم داشت

$a>0$




$a<0$



Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال : سیگنال مستطیلی

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leqslant N \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-N}^{N} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(-N)} \frac{1 - e^{-j\omega(2N+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{j\omega N} \frac{\cancel{e^{-j\omega(\frac{2N+1}{2})}}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{\sin(\frac{2N+1}{2})\omega}{\sin \omega/2}$$

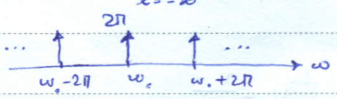
$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{\omega(2N+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \qquad a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = k\omega_0 = \frac{k2\pi}{N_0}}$$

$$a_k = \frac{1}{N_0} \frac{\sin \frac{k2\pi}{N_0} \frac{(2N+1)}{2}}{\sin \frac{k2\pi}{N_0} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{N_0} \frac{\sin \frac{k\pi}{N_0}(2N+1)}{\sin \frac{k\pi}{N_0}}$$

## 2.2.4. تبدیل فوریه سیگنال های گسسته پریودیک :

$$x[n] = \sum_{k\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega n} \qquad e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{F} \longrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

پریودیک




$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi \, e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \checkmark$$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \cdots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum 2\pi a_0 \, \delta(\omega - 2\pi l)$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_1 \, \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l) + \cdots + \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_{N-1} \, \delta(\omega - \frac{(N-1)2\pi}{N} - 2\pi l)$$

$$= \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \, \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N}) = X(e^{j\omega})}$$

تبدیل فوریه گسسته پریودیک

* $a_k$ نسبت به k پریودیک است با دوره تناوب N و $\delta(\omega - \frac{k2\pi}{N})$ هم پریودیک است ← پس
این summation پریودیک است.

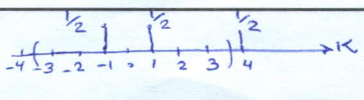
مثال : تبدیل فوریه $x[n] = \cos \omega_0 n$ را بدست آورید ( $\omega_0 = \frac{2\pi}{5}$ ) $\frac{2\pi}{2\pi/5} = 5 \Rightarrow N = 5$

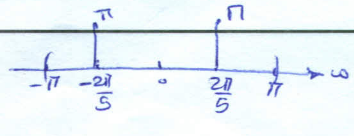
$$\cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} \qquad a_{-1} = \frac{1}{2} \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

در یک پریود بقیه ضرایب صفر هستند

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \, \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k) = \pi \, \delta(\omega + \frac{2\pi}{5}) + \pi \, \delta(\omega - \frac{2\pi}{5}) \qquad -\pi < \omega < \pi$$

PAPCO

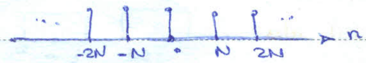


[redacted]

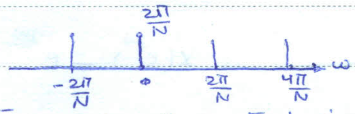
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: تبدیل فوریه؟ $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$




$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N} \Rightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\,\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$

$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\,\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$




نمی‌شود گفت فرکانس پایین است یا بالا، همه‌ی محتوای فرکانسی را دارد. بنابراین نویز را این گونه مدل می‌کنند (معمولاً نویز را با ضربه نشان می‌دهند)

4_2_3 . ویژگی‌های تبدیل فوریه گسسته:

4_2_3_1 . خطی بودن: $c_1x_1[n]+c_2x_2[n]\longleftrightarrow c_1X_1(e^{j\omega})+c_2X_2(e^{j\omega})$

4_2_3_2 . پریودیک بودن تبدیل فوریه: $X(e^{j(\omega+2\pi)})=X(e^{j\omega})$

4_2_3_3 . معکوس زمانی: $x[n]\longleftrightarrow X(e^{j\omega})$ $\quad x[-n]\longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$

4_2_3_4 . سیگنال‌های حقیقی

$\begin{cases} x[n]\longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \\ x^*[n]\longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega}) \end{cases}$

اگر $x[n]$ حقیقی باشد $\Rightarrow X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega}) \Rightarrow \begin{cases} Re\{X(e^{j\omega})\} & \text{زوج نسبت به } \omega \\ I_m\{X(e^{j\omega})\} & \text{فرد نسبت به } \omega \end{cases}$

$x[n]$ حقیقی و زوج ← تبدیل فوریه هم سیگنال حقیقی است ← زوج است

$x[n]$ حقیقی و فرد ← " " " موهومی " ← فرد "

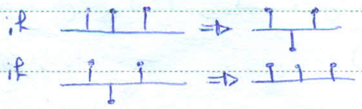
4_2_3_5 . شیفت زمانی و فرکانسی: $x[n-n_0]\longleftrightarrow e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$

$X(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\omega}=\sum_{-\infty}^{\infty}x[n-n_0]e^{-jn\omega}\underset{k=n-n_0}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j(k+n_0)\omega}=e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$

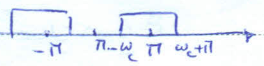
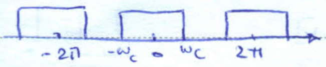
$X(e^{j(\omega-\omega_0)})\longleftrightarrow e^{j\omega_0 n}x[n]$

شیفت فرکانسی خیلی اهمیت دارد چون می‌تواند یک فرکانس بالا را پایین و برعکس کند.

مثلاً شیفت به اندازه‌ی π: $e^{j\pi n}x[n]=(-1)^n x[n]$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

 فیلتر بالاگذر :  فیلتر پایین گذر : (ایده آل)

$$h_{hp}[n] = (-1)^n h_{Lp}[n]$$

4-2-3-6. تفاضل و جمع در حوزه‌ی زمان

$$x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) = (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] = \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi \underbrace{X(e^{j0})}_{\text{جزء dc}} \sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)$$

مثال: تبدیل فوریه $x[n]=\delta[n]$ را محاسبه و با استفاده از آن تبدیل فوریه $u[n]$ را به دست آورید.

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1$$

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)$$

4-2-3-7. مشتق در حوزه‌ی فرکانس.

$$x[n]\longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$n x[n] \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$

مثال: تبدیل فوریه $(n+1)\alpha^n u[n]$ ?

$$\alpha^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$n\alpha^n u[n] \longrightarrow \frac{-j\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

$$(n+1)\alpha^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

مثال: $(-1)^n(n+1)\alpha^n u[n]$ ?

$$\longrightarrow \frac{1}{(1-\alpha e^{-j(\omega-\pi)})^2}$$

4-2-3-8. گستردگی در حوزه‌ی زمان Time-expansion ← فشردگی در فرکانس

در حالت پیوسته $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$

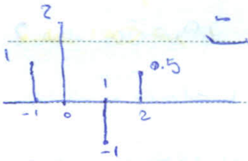
برای حالت گسسته a باید عدد صحیح می‌باشد و گستردگی در حوزه‌ی زمان و فشردگی را با هم حل داریم

$$x_k[n] = x[\tfrac{n}{k}] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \text{اگر n مضربی از k باشد} \\ 0 & \text{" " " نباشد} \end{cases}$$

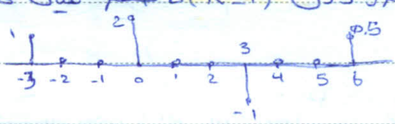
Subject :
Year .  Month .  Date .  ( )

$x_{(k)}[n]$ ← معادل قرار دادن $(k-1)$ تا صفر میان هر دو مقدار متوالی $x[n]$ است

مثال :



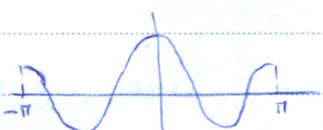
$\Rightarrow x_3[n] \Rightarrow$

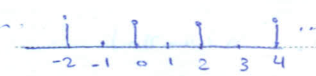


چون دارد سیگنال را منبسط می‌کند ← $x_{(k)}[n] \longleftrightarrow X(e^{jk\omega})$

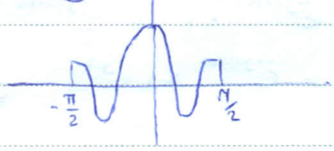
تبدیل آن را نیز دارد منقبض می‌کند

$\longrightarrow$





$\Longrightarrow$



4_2_3_9. فشردگی در حوزه‌ی زمان ← جزو تئوری Sampling ربط دارد. ان‌ترسیم لازم نیست خواهد شد

*جزو درسنامه نیست

$$x[Mn] \longrightarrow \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega-2k\pi}{M}\right)}\right)$$

4_2_3_10. قضیه پارسوال :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

$\hookrightarrow \omega = 2\pi f$

4_2_3_11. کانولوشن در حوزه‌ی زمان (بسیار مهم)

$$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) . H(e^{j\omega})$$

4_2_3_12. ضرب در حوزه‌ی زمان

$$y[n] = x_1[n]\, x_2[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\, X_2(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$$

کانولوشن متناوب

در این حالت $X_1(e^{j\theta})$ فقط روی یک پریود در نظر می‌گیریم و در هنگام نوشتن خارج از پریود را صفر می‌گیریم ولی $X_2(e^{j(\omega-\theta)})$ از $-\infty$ تا $+\infty$ است.

4_3 - تبدیل فوریه گسسته و سیستم های LTI گسسته :

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow x[n] * h[n] = y[n]$

$X(e^{j\omega}) \quad H(e^{j\omega}) \quad X(e^{j\omega}) . H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})$

● استفاده در فیلترینگ

● استفاده از ویژگی تبدیل کانولوشن در حوزه‌ی زمان به ضرب

در حوزه‌ی فرکانس : 1. مفهوم پاسخ فرکانسی :

$$H(e^{j\omega}) = F\{h[n]\} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

سیستم LTI گسسته‌زمان به وسیله‌ی $H(e^{j\omega})$ به صورت یکتایی توصیف می‌شود

Subject:

Year. Month. Date. ( )

محاسبه‌ی خروجی به ازای یک ورودی مشخص

2. محاسبه‌ی خروجی    3. حل معادلات تفاضلی ـ تحلیل سیستم LTI بسته توصیف شده به وسیله معادلات تفاضلی با ضرایب ثابت

* سیستم‌های پایدار دارای پاسخ فرکانسی هستند. چون اگر پایدار نباشند برایشان تبدیل فوریه وجود ندارد. اما تحلیل پاسخ فوریه در حوزه‌ی زمان برای تمامی سیستم‌های LTI است.

مثال: اگر $h[n]=\delta[n-n_0]$ آنگاه پاسخ فرکانسی سیستم و رابطه خروجی و ورودی را بدست آورید

$$h[n]=\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0}\times 1 = e^{-j\omega n_0}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) \Rightarrow y[n]=x[n-n_0]$$

مثال: اگر $x[n]=\alpha^n u[n]$ , $h[n]=\beta^n u[n]$ آنگاه خروجی ؟

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}\alpha} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}\beta}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}).H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}} = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = A\alpha^n u[n] + B\beta^n u[n] \qquad A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \qquad B = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

$$(1-\alpha e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=1/\alpha}$$

$$y[n] = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})u[n]$$

$$\text{if } \alpha=\beta \Rightarrow \lim_{\alpha\to\beta} y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

4.4. استفاده از مفهوم پاسخ فرکانسی برای حل معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \xrightarrow{F} \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

PAPCO

شنبه : 4/5-6 کلاس جبرانی

مثال: پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه‌ی سیستم توصیف شده به وسیله‌ی معادلات زیر را بدست آورید.

$$y[n]-a\,y[n-1]=x[n]\xrightarrow{F}Y(e^{j\omega})-a e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})(1-a e^{-j\omega})=X(e^{j\omega})\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-a e^{-j\omega}}\xrightarrow{F^{-1}}h[n]=a^n u[n]$$

$a<1$

فرض کنید $x[n]=\beta^n u[n]$ ورودی باشد، $y[n]=?$

جواب در صفحه‌ی قبل

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\times H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-a e^{-j\omega}}\ \checkmark$$

مثال: اگر

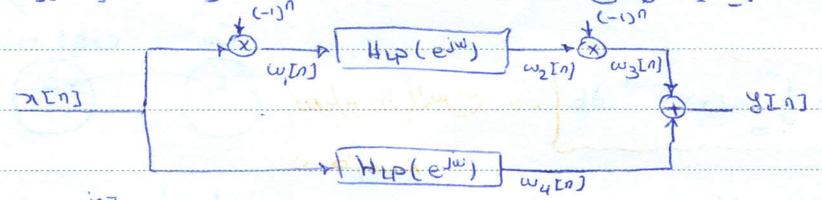
$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

$$Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}\right)=2X(e^{j\omega})\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}=\frac{A}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\ \checkmark$$

## 5.4. فیلترها:

* مثال: سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی معادل آن را بدست آورید و تفسیر نمایید.




طبیعتاً راحت‌تر است که تحلیل را در حوزه‌ی فرکانس انجام دهیم

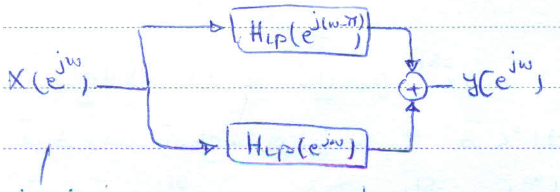
$(-1)^n=e^{jn\pi}$

$$x[n]\times(-1)^n=w_1[n]\Rightarrow w_1(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$w_2(e^{j\omega})=H_{Lp}(e^{j\omega})\,X(e^{j(\omega-\pi)})$$

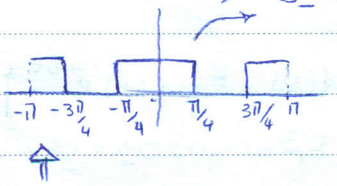
$$w_3(e^{j\omega})=H_{Lp}(e^{j(\omega-\pi)})\,X(e^{j(\omega-2\pi)})=H_{Hp}(e^{j\omega})\,X(e^{j\omega})\Rightarrow$$ معادل یک فیلتر بالاگذر

$$w_4(e^{j\omega})=H_{Lp}(e^{j\omega})\,X(e^{j\omega})\Rightarrow$$ معادل فیلتر پایین‌گذر

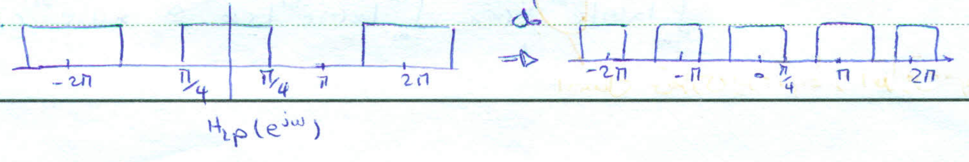



فقط درست رسم شود

فیلتر میان‌گذر




فرض کنید:



Subject:
Year. Month. Date. ( )

## مبحث پنجم : تبدیل لاپلاس

مقدمه: تبدیل فوریه نقش مهمی در تحلیل سیستم های LTI دارد

پیوسته $H(j\omega)=F\{h(t)\}$ گسسته $H(e^{j\omega})=F\{h[n]\}$

شرط وجود تبدیل فوریه ← مطلقاً انتگرال پذیر باشد $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty$

البته این شرط معادل شرط پایداری سیستم است $\sum_{-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$

• بنابراین تبدیل فوریه تنها برای تحلیل سیستم های LTI پایدار مناسب است.

برای تحلیل سیستم های LTI ناپایدار و به طور کلی بررسی پایداری یا ناپایداری یک سیستم LTI به تبدیل تعمیم یافته به نام تبدیل لاپلاس نیاز داریم

5-1. معرفی تبدیل لاپلاس و مفاهیم پایه اولیه (نواحی همگرایی، صفر و قطب)

5-2. ویژگی های تبدیل لاپلاس 5-3. کاربرد تبدیل لاپلاس در توصیف و تحلیل سیستم های LTI

### 5-1. معرفی تبدیل لاپلاس:

$$e^{st}\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)$$

$$e^{st}*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,e^{s(t-\tau)}\,d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau=e^{st}H(s)$$

لذا همین ویژگی اول را دارد (پاسخ سیستم به آن ساده است)

$S=\sigma+j\omega$ عدد مختلط

$$\boxed{X(S)=L\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-st}\,dt}\Rightarrow$$ تبدیل لاپلاس دو طرفه

Time حوزه ی لاپلاس

$$t\longrightarrow s$$

• تبدیل لاپلاس یک طرفه برای سیستم های علّی است $X(s)=\int_{0}^{\infty}x(t)\,e^{-st}\,dt$

### 5-1-2. رابطه ی تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه:

if $\sigma=0\Rightarrow s=j\omega\Rightarrow X(S)=X(j\omega)$

s یک متغیر دو بعدی است.

$$X(S)=X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-st}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-\sigma t}\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\Rightarrow X(S)=F\{x(t)\,e^{-\sigma t}\}$$

تبدیل لاپلاس $x(t)$ = تبدیل فوریه $x(t)\,e^{-\sigma t}$

شرط وجود تبدیل فوریه $x(t)$ $\triangleq \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt<\infty$ ⇐ شرط وجود تبدیل لاپلاس $x(t)$ = شرط وجود

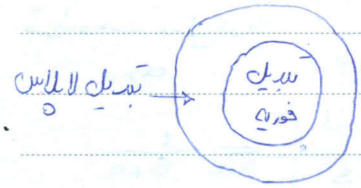
تبدیل فوریه $x(t)\,e^{-\sigma t}$ $\triangleq \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)\,e^{-\sigma t}|<\infty \Leftarrow \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,|e^{-\sigma t}|\,dt<\infty$

احتمال برقراری این شرط را افزایش می دهد

وجود عبارت $e^{-\sigma t}$ باعث می‌شود عبارت داخل انتگرال $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\right)$ برای برخی از مقادیر $\sigma$ بیشتر نزولی شود ولذا احتمال مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن آن بیشتر شود، به عبارت دیگر ممکن است $x(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر نباشد اما بتوان محدوده‌ای از $\sigma$ را به نحوی انتخاب کرد که $x(t)e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر گردد.

ممکن است سیگنالی تبدیل فوریه نداشته باشد اما بتوان محدوده‌ای از $\sigma$ را به نحوی تعیین کرد که در آن محدوده دارای تبدیل لاپلاس باشد.

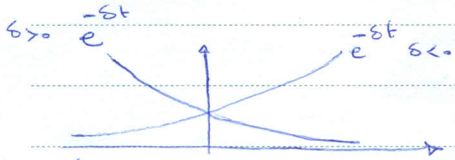
تمام سیگنال‌هایی که تبدیل فوریه دارند، تبدیل لاپلاس را دارند.

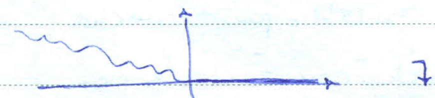



## تعریف ناحیه همگرایی:

بحث فوق در مورد وجود یا عدم وجود تبدیل لاپلاس به ازای برخی از مقادیر $\sigma$ به تعریف ناحیه همگرایی (Region of convergence - ROC) منجر می‌شود.

ناحیه همگرایی: محدوده‌ای از صفحه مختلط S که به ازای آن تبدیل لاپلاس برای یک سیگنال پیوسته-زمان وجود دارد، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس می‌نامند.




مثلاً: 

برای اینکه تبدیل لاپلاس این وجود داشته باشد باید در $e^{-\sigma t}$ $(\sigma<0)$ ضرب کنیم که ناحیه همگرایی آن است (به طور کلی همراه هر تبدیل لاپلاسی یک ناحیه همگرایی مطرح است).

* اگر یک $X(s)$ و ناحیه همگرایی‌اش را به ما داده اند و می‌خواهیم ببینیم که تبدیل فوریه دارد یا نه باید ببینیم که $\sigma=0$ جز دامنه $X(s)$ یا همان ناحیه همگرایی است یا نه.

## تعریف صفر و قطب‌های یک تبدیل لاپلاس گویا:

دسته وسیعی از سیگنال‌ها دارای تبدیل لاپلاس گویا (به صورت نسبت یک چندجمله‌ای به یک چندجمله‌ای) هستند.

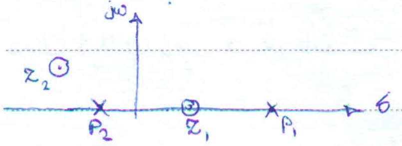
$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

- ریشه‌های صورت را صفرهای تبدیل لاپلاس گویند.
- ریشه‌های مخرج را قطب‌های تبدیل لاپلاس گویند.

معمولاً ROC یک تبدیل لاپلاس را در یک صفحه دو بعدی مختلط به نام S-Plane در قالب صفرها و قطب‌های آن نمایش می‌دهند.

$\bigcirc$ به $z_1, z_2, \ldots$ صفرها

X به $P_1, P_2, \ldots$ قطب‌ها



Subject:
Year. Month. Date. ( )

وقتی صفرها و قطب‌های یک تبدیل لاپلاس گویا را بدانیم می‌توانیم فرم کلی $X(s)$ را بدست آوریم
البته ممکن است یک ضریب ثابتی هم داشته باشد که این مقدار ثابت تأثیری بر ناحیه همگرایی
ندارد.

مثال: $x(t)=e^{-at}u(t)$

شرط وجود تبدیل فوریه $a>0$

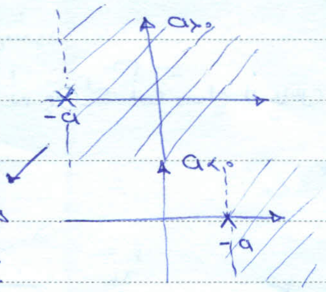
$$X(j\omega)=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt=-\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt=-\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\Big|_0^{\infty}\underset{ROC}{=}\boxed{\frac{1}{s+a}}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(a+s)t}=0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{-(a+\sigma)t}e^{-j\omega t}=0 \Rightarrow a+\sigma>0 \Rightarrow \boxed{\sigma>-a}$$

$ROC=Re\{s\}>-a$

$X(s)=\frac{1}{s+a}$ قطب: $s=-a$




همان طور که می‌بینیم به ازای $a>0$ خط $\sigma=0$ جزء
ناحیه همگرایی است پس تبدیل فوریه دارد

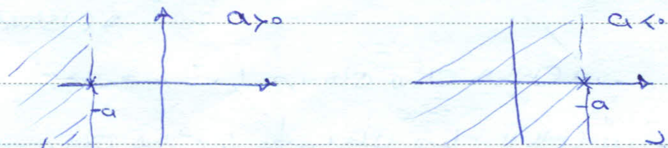
مثال: $x(t)=-e^{-at}u(-t)$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{0} -e^{-at}e^{-st}\,dt=\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\Big|_{-\infty}^{0}\underset{ROC}{=}\boxed{\frac{1}{a+s}}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-(a+s)t}=0 \Rightarrow \lim_{t\to-\infty} e^{-(a+\sigma)t}e^{-j\omega t}=0 \Rightarrow a+\sigma<0 \Rightarrow \boxed{\sigma<-a}$$

$ROC=Re\{s\}<-a$

که چون این دو سیگنال (مثال قبل) رابطه جبری یکسانی دارند، اما چون ناحیه همگرایی متفاوتی دارند
می‌گوییم که تبدیل لاپلاس متفاوتی دارند



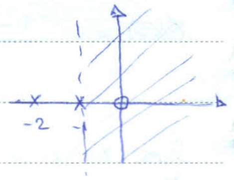

در این حالت ($a<0$) تبدیل فوریه وجود دارد

برای محاسبه‌ی تبدیل معکوس لاپلاس باید علاوه بر رابطه‌ی جبری تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی
تبدیل لاپلاس را نیز در نظر داشت.

مثال: $x(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t) \rightarrow X(s) = X_1(s) - X_2(s)$

$X_1(s) = \dfrac{2}{s+2} \quad Re\{s\} > -2 \qquad X_2(s) = \dfrac{1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$

$X(s) = \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{1}{s+1}$ with $ROC = R_1 \cap R_2 = Re\{s\} > -1$



$X(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s+1)}$

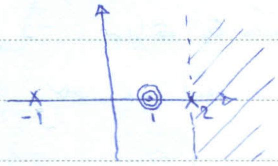
مثال: $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$

$\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \quad ROC = \text{entire } s\text{-plane}$

$-\frac{4}{3}e^{-t}u(t) \longleftrightarrow -\frac{4}{3}\dfrac{1}{s+1} \quad ROC = Re\{s\} > -1$

$\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{3}\dfrac{1}{s-2} \quad ROC = Re\{s\} > 2$

$X(s) = \dfrac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad ROC = Re\{s\} > 2$



خواص ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس:

برای مشخص کردن کامل تبدیل لاپلاس ← عبارت جبری $X(s)$ / ناحیه همگرایی ROC

در این بخش مشاهده خواهیم کرد، ROC سیگنال ها تا حدودی به ← مکان قطب ها / شکل آنها در حوزه زمان ← بستگی دارد.

ویژگی 1: ROC تبدیل لاپلاس در صفحه s، شامل یک نوار متصل به هم و موازی با محور $j\omega$ است.

$Re\{s\} > \sigma_1$ یا $Re\{s\} < \sigma_2$ یا $\sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2$

ویژگی 2: ROC تبدیل لاپلاس در صفحه s برای تبدیل لاپلاس گویا، هیچ قطبی را شامل نمی‌شود
زیرا تبدیل لاپلاس به ازای قطب‌ها مقدار $\pm\infty$ می‌گیرند ⟸ حاصل انتگرال $\infty$ ⟸ همگرا نیست
(این ویژگی برای تبدیل لاپلاس های گویا می باشد)

Subject:
Year.    Month.    Date.    ( )

مثال: $x(t)=\begin{cases} e^{-at} & 0<t<T \\ 0 & o.w \end{cases}$ $\quad X(s)=\int_0^T e^{-at}e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-(a+s)t}}{s+a}\Big|_0^T$

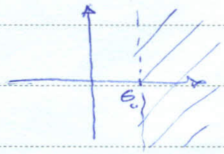
$X(s)=\frac{1-e^{-(s+a)T}}{s+a}$ $\quad$ ROC: کل صفحه $s$ $\qquad$ داریم که می‌بینیم که $s=-a$ قطب است

و در ناحیه همگرایی آمده چرا که این تبدیل لاپلاس گویا نیست

$\lim_{s\to -a} X(s) = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{T e^{-(s+a)T}}{1}\Big|_{s\to -a} = T$

ویژگی 3. اگر $x(t)$ دارای عرض محدود باشد (Finite duration) و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن شامل تمام صفحه $s$ می‌شود.

ویژگی 4. اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت راستی باشد (Right-Sided) و خط $Re\{s\}=\sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر $Re\{s\}>\sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس مذکور قرار دارد.



سیگنالی سمت راستی است اگر $T_0$ وجود داشته باشد که $x(t)=0,\ t<T_0$

برای $\sigma_0$ همگراست $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt<\infty$

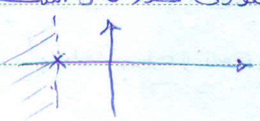
باید اثبات کنیم $\Rightarrow$ برای $\sigma>\sigma_0$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\,dt$

$$=\int_T^{\infty}\underbrace{|x(t)|e^{-\sigma_0 t}}_{\text{محدود}}\ \underbrace{e^{-(\sigma-\sigma_0)t}}_{\text{نزولی}}\,dt \le e^{-(\sigma-\sigma_0)T}\int_T^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt < \infty$$

از ویژگی 1 و 2، 4 $\Leftarrow$ ROC یک سیگنال سمت راستی شامل نواری موازی محور $j\omega$ است که مابین سمت راست‌ترین قطب $X(s)$ و $+\infty$ قرار دارد.

ویژگی 5. اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت چپی باشد (left-sided) و خط $Re\{s\}=\sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر $Re\{s\}<\sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس مذکور قرار دارد.

از ویژگی 1 و 2، 5 $\Leftarrow$ ROC یک سیگنال سمت چپی شامل نواری موازی محور $j\omega$ است که مابین سمت چپ‌ترین قطب $X(s)$ و $-\infty$ قرار دارد.



Subject:
Year. Month. Date. ( )

ویژگی 6: اگر $x(t)$ یک سیگنال دوطرفه (Two – sided) باشد و خط $\sigma_0$ = Re{s} در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد. آنگاه ROC تبدیل لاپلاس آن نواری موازی محور $j\omega$ در صفحه‌ی s است که شامل خط $\sigma_0$ = Re{s} است.

از ویژگی 1، 2، 6 ⟸ ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال دوطرفه در حوزه‌ی زمان بین دو قطب متوالی (قطب‌هایی که قسمت حقیقی آنها متوالی است) قرار دارد.

* ROC هر سیگنال دوطرفه را می‌توان با تقسیم آن سیگنال به دو بخش سیگنال سمت راستی و سیگنال سمت چپی به دست آورد.

$$x(t)=\begin{cases} x_R(t) & t>T_0 \\ x_L(t) & t<T_0 \end{cases}$$

ROC سیگنال دوطرفه از اشتراک ROC های تبدیل لاپلاس هر یک از بخش های سمت راستی و سمت چپی بدست می‌آید. لذا در صورت وجود اشتراک، ROC یک سیگنال دوطرفه حتماً میان دو قطب متوالی است. البته ممکن است ROC های بخش سمت چپی و سمت راستی دارای هیچ اشتراکی نباشد که در این حالت علیرغم وجود تبدیل لاپلاس و ROC برای هر یک از بخش های سمت راستی و سمت چپی به طور جداگانه برای سیگنال دوطرفه، تبدیل لاپلاس وجود ندارد.

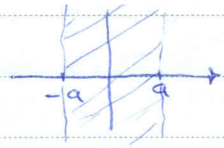
مثال: $x(t)=e^{-a|t|}$ ← دوطرفه $\quad x_R(t)=e^{-at}u(t) \quad x_L(t)=e^{at}u(-t)$

$X_R(s)=\dfrac{1}{s+a}$ Re{s} > −a $\qquad X_L(s)=\dfrac{-1}{s-a}$ Re{s} < a

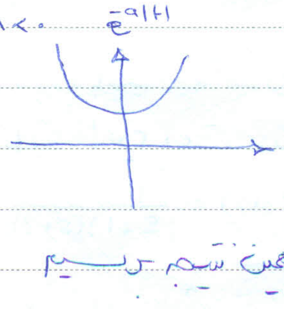
$a>0$: $(\text{Re}\{s\}<a)\cap(\text{Re}\{s\}>-a)=\{-a<\text{Re}\{s\}<a\}$

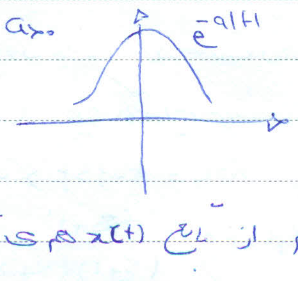
$a<0$: 〃 $\cap$ 〃 $=\Phi$ ⟹ تبدیل لاپلاس وجود ندارد

$\Rightarrow$ if $a>0 \Rightarrow X(s)=\dfrac{-1}{s-a}+\dfrac{1}{s+a}=\dfrac{-2a}{(s-a)(s+a)}$




در حوزه‌ی زمان:




حالا معلوم می‌بینیم از تابع $x(t)$ هم می‌توانیم به همین نتیجه برسیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

## عکس تبدیل لاپلاس :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

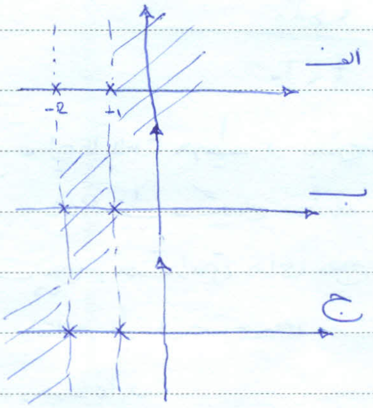
البته ما از این انتگرال به دلیل پیچیده بودن استفاده نمی کنیم

در عمل محاسبه ی عکس تبدیل لاپلاس، با استفاده از بسط به کسرهای جزئی بدست می آید (با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس)

مثال: عکس تبدیل لاپلاس زیر را برای همه ی نواحی همگرایی (ROC) ممکن بدست آورید.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

ROC های ممکن 3 تا هستند




$$* \; e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > -a$$

$$* \; -e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} < -a$$

الف) $\Rightarrow e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ ⟵ سمت راستی

ب) $\Rightarrow -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$ ⟵ دو طرفه

ج) $\Rightarrow -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$ ⟵ سمت چپی

## ویژگی های تبدیل لاپلاس :

1) خطی بودن $x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s) \quad ROC = R_1 \qquad x_2(t) \longleftrightarrow X_2(s) \quad ROC = R_2$

$$a x_1(t) + b x_2(t) \longleftrightarrow a X_1(s) + b X_2(s) \qquad ROC \text{ شامل } R_1 \cap R_2$$

ناحیه همگرایی یک ترکیب خطی چند سیگنال، بزرگتر یا مساوی اشتراک ROC آنهاست
$(R_1 \cap R_2 \subseteq ROC)$

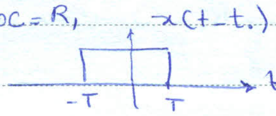
اگر اشتراکی وجود نداشته باشد تبدیل لاپلاس وجود ندارد. در صورت وجود اشتراک ممکن است حذف قطبها اتفاق بیافتد که این باعث بزرگتر شدن ناحیه همگرایی میشود

مثال: $X_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad ROC = Re\{s\} > -1 \qquad X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad Re\{s\} > -1$

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad Re\{s\} > -2$$

2) جابجایی زمانی : $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ $ROC = R_1$ $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0} X(s)$ $R_1$

مثال: $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$




$x(t) = u(t+T) - u(t-T)$ $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$

$\longleftrightarrow \underset{R\{s\}>0}{e^{sT}\frac{1}{s}} - \underset{R\{s\}>0}{e^{-sT}\frac{1}{s}} \Rightarrow X(s) = \frac{e^{sT}}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$ $R\{s\}>0$

3) شیفت فرکانسی : $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ $ROC = R_1$ $e^{s_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(s-s_0)$

$\hookrightarrow ROC = R_1 + Re\{s_0\}$

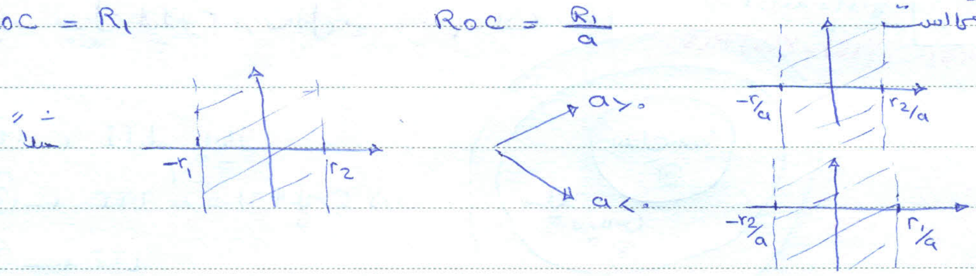
حالت خاص : $e^{j\omega_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(s-j\omega_0) \rightsquigarrow ROC = R_1$

مثال : $x(t) = \cos 2t \, e^{-\alpha t} u(t)$

4) تغییر مقیاس زمانی : $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$

$ROC = R_1$ $ROC = \frac{R_1}{a}$ که a یک عدد حقیقی است

مثال:




5) مزدوج گیری : $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ $x^*(t) \longleftrightarrow X^*(s^*)$

$\hookrightarrow ROC = R$ $\hookrightarrow ROC = R$

اگر $s = s_0$ قطب $X(s)$ باشد آنگاه اگر $x(t)$ حقیقی باشد $\Rightarrow X(s) = X^*(s^*)$

$s = s_0^*$ نیز قطب $X(s)$ است $\Rightarrow$ قطبها مزدوج یکدیگر هستند (در حقیقی $x(t)$) |

(در مورد صفرها این مسئله برقرار است ، فقط یک نکته ای توجه دارد که در مطالب مثال بیان می کنیم)

6) مشتق گیری زمانی و فرکانسی : $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s)$

$\hookrightarrow ROC = R_1$ $\hookrightarrow ROC$ contains $R_1$ اگر ضرب s در $X(s)$ قطبی را حذف

کند ( $X(s)$ در $s=0$ دارای قطب باشد ) آنگاه ناحیه همگرایی حداقل $R_1$ است

$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$ $Re\{s\}>0$ $\delta(t) \longleftrightarrow s\frac{1}{s} = 1$ $ROC =$ کل صفحه s

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　( )

با مشتق‌گیری از $X(s)$ نه قطبی اضافه و نه کم می‌شود

$$-t\,x(t) \longleftrightarrow \frac{d\,X(s)}{ds} \qquad ROC = R_1$$

مثال:

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad Re\{s\} > -a$$

$$t\,e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \quad \dots \quad \frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+a)^3}$$

$$\dots \quad \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n}$$

* 7) کانولوشن:

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s)\,X_2(s) \qquad ROC \text{ contains } R_1 \cap R_2$$

مثال:

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \qquad X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \qquad \Rightarrow X(s) = X_1(s)X_2(s) = 1$$

$$\hookrightarrow Re\{s\} > -2 \qquad Re\{s\} > -1$$

این دو inverse یکدیگر هستند

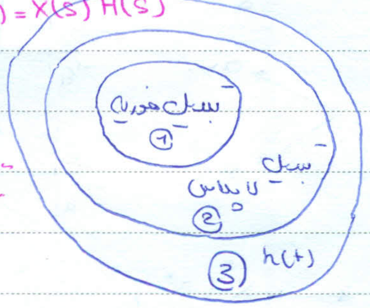
تمام صفحه s = ROC

کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل سیستم های LTI:

$$\underset{X(s)}{x(t)} \rightarrow \boxed{\underset{H(s)}{h(t)}} \rightarrow \begin{matrix} y(t) = x(t) * h(t) \\ Y(s) = X(s)\,H(s) \end{matrix}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

↳ تابع سیستم / تابع تبدیل




① ← LTI پایدار

② ← LTI که تبدیل لاپلاس دارد

③ ← LTI

قضیه 1: علی بودن $\Leftarrow h(t)\big|_{t<0} = 0$ حال بررسی علی بودن از طریق ROC , H(s)

ناحیه همگرایی H(s) سمت راستی $\Rightarrow$ H(s) سمت راستی $\Rightarrow$ h(t) سمت راستی $\Rightarrow$ h(t) علی

ولی عکس این مسئله وجود ندارد چون از سمت راستی بودن h(t) نمی‌فهمیم که از $t<0$ مقدار دارد یا نه

$\Leftarrow$ اگر یک سیستم LTI علی باشد، آنگاه تابع تبدیل آن به صورت $Re\{s\} > \sigma_0$ است و

اگر تابع تبدیل گویا باشد عکس قضیه نیز صادق است.

قضیه 2: اگر ناحیه همگرایی H(s) شامل محور $j\omega$ باشد، آنگاه سیستم پایدار است (دارای

تبدیل فوریه نیز است) ناحیه همگرایی شامل $j\omega$ ⟶ اگر سیستم پایدار

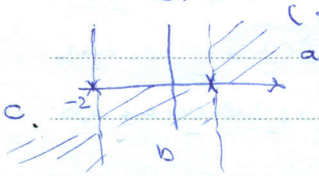
〃　〃 ⟵　〃

P4PCO

تمام قطب ها در سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارد و ROC سمت راستی است $\xrightarrow[\text{گویا باشد}]{H(s)\ \text{اگر}}$ اگر سیستم پایدار و علی باشد

مثال ۱: پایداری و علی بودن؟ (برای تمام ROC های ممکن)

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

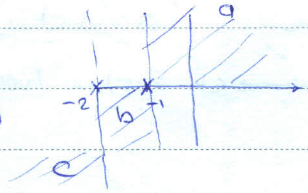


a) ← پایدار نیست / علی است

b) ← پایدار است / علی نیست

c) ← پایدار نیست / علی نیست

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



a) ← پایدار / علی است

b) ← پایدار نیست / علی نیست

c) ← پایدار نیست / علی نیست

## مبحث ششم: تبدیل Z

از تبدیل فوریه‌ی گسسته-زمان، نمی‌توان برای تحلیل سیستم‌های ناپایدار استفاده کرد ← تبدیل Z

تبدیل Z تعمیم یافته‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته-زمان است.

6-1. رابطه‌ی تبدیل Z و مفاهیم   6-2. خواص ناحیه همگرایی در تبدیل Z   6-3. کاربرد تبدیل Z در تحلیل سیستم‌های LTI

### 6-1. رابطه‌ی تبدیل Z

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = z^n * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = \underbrace{z^n}_{\text{ورودی ظاهر شد}} \underbrace{\sum_{k=-\infty} h[k] z^{-k}}_{H(Z)}$$

$$z = re^{j\omega} = a + bj$$

تعریف تبدیل Z دوطرفه:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z) \qquad \boxed{X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] Z^{-n}}$$

$$z = re^{j\omega}, \quad |Z| = r$$

جاهایی که با سیستم‌های علی سروکار داریم از تبدیل Z یک طرفه استفاده می‌کنیم

رابطه‌ی تبدیل Z و تبدیل فوریه: $X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = F\{x[n] r^{-n}\}$

شرط لازم برای وجود تبدیل Z سیگنال $x[n]$ = شرط لازم برای وجود تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty\right)$

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　　( )

نکته: سیگنال $x[n]$ ممکن است فاقد تبدیل فوریه باشد، اما برای آن بتوان محدوده‌ای از $r$ را تعیین کرد که $\sum x[n] r^{-n} < \infty$ و تبدیل $Z$ وجود داشته باشد. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$

تعیین محدوده‌ای از $r$ که به ازای آن تبدیل $Z$ وجود دارد، منجر به تعریف ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل $Z$ می‌شود.

ناحیه همگرایی تبدیل $Z$: مجموعه تمامی از صفحه مختلط $Z$ که به ازای آن تبدیل $Z$ یک سیگنال وجود دارد، ناحیه همگرایی تبدیل $Z$ آن سیگنال می‌نامیم.

با توجه به تعریف ROC تبدیل $Z$، تبدیل فوریه گسسته-زمان یک سیگنال زمانی وجود دارد که نقاط روی دایره‌ای به شعاع 1 جزء ROC تبدیل $Z$ آن سیگنال باشد. تبدیل $Z$ < رابطه‌ی جبری / ROC

نکته: ROC در تبدیل $Z$، به وسیله‌ی محدودیتی روی اندازه‌ی $Z$ یعنی $|Z|$ تعریف می‌شود

ROC در " لاپلاس، " " " قسمت حقیقی آن یعنی $Re\{s\}$ تعریف می‌شود

تعریف صفر و قطب: تبدیل $Z$ معمولاً به صورت یک تابع گویا از $Z$ یا $Z^{-1}$ بیان می‌شود، یعنی

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

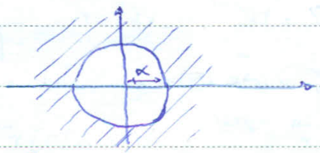
صفرهای $X(Z)$: $X(Z) = 0 \Rightarrow$ ریشه‌های $N(Z) = Z_1, Z_2, \ldots Z_n$

قطب‌های $X(Z)$: $X(Z) = \infty \Rightarrow$ ریشه‌های $D(Z) = P_1, P_2, \ldots, P_n$

ریشه‌ها و قطب‌ها می‌توانند در حالت کلی، مختلط باشند.

مثال: تبدیل $Z$ سیگنال $x[n] = \alpha^n u[n]$ را بدست آورید.

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n Z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} (\alpha Z^{-1})^n = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{Z}} , \quad \left|\frac{\alpha}{Z}\right| < 1 \Rightarrow |Z| > |\alpha|$$



$$X(Z) = \frac{Z}{Z-\alpha} , \quad |Z| > |\alpha|$$

$|\alpha| > 1$ فوریه ندارد

$|\alpha| < 1$ فوریه دارد

مثال: $x[n] = -\alpha^n u[-n-1]$

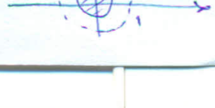
$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n u[-n-1] Z^{-n} = -\sum_{-\infty}^{-1} (\alpha Z^{-1})^n = -\sum_{1}^{\infty} (\alpha^{-1} Z)^n$$

$$= -\sum_{\infty}^{1} (\alpha^{-1} Z)^n = -\frac{\alpha^{-1} Z}{1-(\alpha^{-1} Z)} = \frac{Z}{Z-\alpha}$$

$\text{ROC} = |Z| < |\alpha|$

PAPCO

$|\alpha| > 1$



$|\alpha| < 1$

*** ویژگی 2: ناحیه همگرایی شامل هیچ قطبی نمی‌شود (سایر ویژگی‌ها یک سیگنال خوبند)

مثال 1: $x[n] = 2^n u[n] + 3^{n+1} u[-n-1] \longleftrightarrow X(z)$

$2^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z|>2$ $\qquad 3 \times 3^n u[-n-1] \longleftrightarrow 3\frac{-1}{1-3z^{-1}} \quad |z|<3$

$$x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{-3}{1-3z^{-1}} \; ; \; 2<|z|<3$$

مثال: $(\frac{1}{2})^n u[-n-1] + 3^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-3z^{-1}} \; ; \; |z|>3$

$\longrightarrow \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \; ; \; |z|<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow |z|<\frac{1}{2} \cap |z|>3 = \emptyset$ ← تبدیل Z وجود ندارد

## 6.2. ویژگی‌های ناحیه همگرایی:

تبدیل Z > عبارت جبری، ROC

6.2.1: ویژگی 1. ناحیه همگرایی تبدیل Z به صورت حلقه‌های با مرکز مبدأ مختصات هستند

***

6.2.2: ویژگی 2. سیگنال‌های با عرض محدود شامل کل صفحه Z می‌شوند

اگر سیگنال $x[n]$ دارای عرض محدود باشد، یعنی فقط در بازه‌ی $[N_1, N_2]$ دارای مقدار غیر صفر باشد، آنگاه ناحیه همگرایی تبدیل Z آن شامل تمام صفحه Z به غیر از احتمالاً $z=0$ یا $z=\infty$ خواهد بود

$$X(z) = \sum_{N_1}^{N_2} x[n] z^{-n} = x[N_1] z^{-N_1} + \dots + x[N_2] z^{-N_2}$$

حالت الف، اگر $N_1$ و $N_2$ هر دو کوچکتر از صفر باشند ⇐ سیگنال برای $n>0$ دارای مقدار صفر است.

بنابراین $X(z)$ تنها شامل توان‌های مثبت Z است ⇐ $z=0$ در ROC قرار دارد ولی $z=\infty$ قرار ندارد

حالت ب، اگر $N_1$ و $N_2$ هر دو بزرگتر از صفر باشند ⇐ سیگنال برای $n<0$ دارای مقدار صفر است.

بنابراین $X(z)$ تنها شامل توان‌های منفی Z است ⇐ $z=0$ در ROC قرار ندارد ولی $z=\infty$ قرار دارد

حالت ج، اگر $N_1$ کوچکتر از صفر و $N_2$ بزرگتر از صفر ⇐ سیگنال هم به ازای $n<0$ دارای صفر و هم $n>0$ دارای مقدار است

بنابراین $X(z)$ هم شامل توان‌های مثبت Z و هم منفی Z است ⇐ $z=0$ و $z=\infty$ در ROC قرار ندارند

• برای تمام حالت‌ها باید $z=0$ و $z=\infty$ را اینگونه چک کنیم

6.2.3. ویژگی 3. اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی باشد، یعنی به ازای $n<N_1$، $x[n]=0$، آنگاه اگر دایره‌ای به شعاع r در ROC آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام نقاط با $|z|>r$ در ROC قرار دارند. (به غیر از احتمالاً $z=\infty$)

الف، اگر $N_1>0$ (سیگنال برای $n<0$ دارای مقدار صفر است) ← تنها شامل توان‌های منفی Z هستیم ⇐ $z=\infty$ در ROC است

ب، اگر $N_1<0$ (سیگنال برای برخی مقادیر منفی n دارای مقدار غیر صفر است)

که $X(z)$ دارای توان‌های مثبت Z نیز هست ⇐ $z=\infty$ در ROC قرار ندارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

← با توجه به اینکه ناحیه همگرایی نمی‌تواند شامل قطب باشد، آنگاه ⇐ ناحیه همگرایی یک سیگنال سمت راستی شامل نقاط میان بزرگترین قطب و $\infty$ است.

6.2.4 . ویژگی 4 . اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت چپی باشد، آنگاه، اگر نقاط روی دایره‌ای به شعاع $r$ در ROC آن قرار داشته باشد؛ نتیجه می‌گیریم تمام نقاط $Z$ با $|Z|<r$ نیز در ROC قرار دارند. (به غیر از احتمالاً $Z=0$)

الف، $N_2>0$ ، $X(Z)$ شامل ترم‌های دارای توان منفی $Z$ نیز می‌باشد ⇐ $Z=0$ جزء ناحیه همگرایی نمی‌باشد.

ب، $N_2\le 0$ ← $X(Z)$ فقط شامل ترم‌های دارای توان مثبت $Z$ می‌باشد ⇐ $Z=0$ جزء ROC است

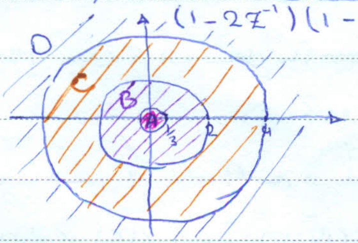
← ROC سیگنال‌های دست چپی شامل نقاط درون یک دایره است که شعاع این دایره برابر با اندازه کوچکترین قطب است

6.2.5 . ویژگی 5 . سیگنال دو طرفه ⇐ ROC سیگنال‌های دو طرفه، نقاط درون دو قطب متوالی است

مثال: نواحی همگرایی چیست؟

$$X(Z)=\frac{1}{(1-2Z^{-1})(1-\frac{1}{3}Z^{-1})(1-4Z^{-1})}$$

قطب‌ها: $Z=2,\ Z=\frac{1}{3},\ Z=4$




$$\Rightarrow X(Z)=\frac{Z^3}{(Z-2)(Z-\frac{1}{3})(Z-4)}$$

ROC:
- D: $|Z|>4$ → سمت راستی
- C: $2<|Z|<4$ → دوطرفه
- B: $\frac{1}{3}<|Z|<2$ → "
- A: $|Z|<\frac{1}{3}$ → سمت چپی

6.3 . معکوس تبدیل Z :

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|Z|=r} X(Z)\,Z^{n-1}\,dZ$$

برای محاسبه‌ی تبدیل معکوس Z توابع گویا، از تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.

مثال: تبدیل معکوس مثال قبل را به دست آورید.

$$X(Z)=\frac{A}{(1-2Z^{-1})}+\frac{B}{(1-\frac{1}{3}Z^{-1})}+\frac{C}{(1-4Z^{-1})}$$

- $|Z|>2$: $A2^n u[n]$ ; $|Z|<2$: $-A2^n u[-n-1]$
- $|Z|>\frac{1}{3}$: $B(\frac{1}{3})^n u[n]$ ; $|Z|<\frac{1}{3}$: $-B(\frac{1}{3})^n u[-n-1]$
- $|Z|>4$: $C4^n u[n]$ ; $|Z|<4$: $-C4^n u[-n-1]$

D: $|Z|>4 \Rightarrow x[n]=A2^n u[n]+B(\frac{1}{3})^n u[n]+C4^n u[n]$

C: $2<|Z|<4 \Rightarrow x[n]=A2^n u[n]+B(\frac{1}{3})^n u[n]-C4^n u[-n-1]$

B: $\frac{1}{3}<|Z|<2 \Rightarrow x[n]=-A2^n u[-n-1]+B(\frac{1}{3})^n u[n]-C4^n u[-n-1]$

A: $|Z|<\frac{1}{3} \Rightarrow x[n]=-A2^n u[-n-1]-B(\frac{1}{3})^n u[-n-1]-C4^n u[-n-1]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $x[n] = b^{-n}u[-n-1] + b^{n}u[n]$ $\qquad x[n] = b^{|n|} \longleftrightarrow X(Z) = ?$

تبدیل Z ندارد $\Leftarrow \infty \xrightarrow{n}$ if $b>0$ $\qquad X(Z) = \dfrac{-1}{1-b^{-1}Z^{-1}} + \dfrac{1}{1-bZ^{-1}}$

$b<|Z|<\frac{1}{b} \xrightarrow{n}$ if $b<0$ $\qquad |Z|<b^{-1} \qquad |Z|>b$

6_3 . ویژگی های تبدیل Z .

6_3_1 . خطی بودن

$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(Z) \quad ROC = R_1$

$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(Z) \quad ROC = R_2$

$ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(Z) + bX_2(Z)$

ROC contains $R_1 \cap R_2$

6_3_2 . جابه جایی زمانی :

$x[n] \longleftrightarrow X(Z) \quad ROC = R_1$

$x[n-n_0] \longleftrightarrow Z^{-n_0}X(Z)$ ROC: ناحیه همگرایی شامل $R_1$ است و ممکن است نقاط $Z=0$ یا $Z=\infty$ به ناحیه همگرایی اضافه شوند یا از ناحیه همگرایی خارج شوند

مثال: $X(Z) = 2Z + 1$ , ROC = کل صفحه به غیر از $Z=\infty$

$Z^{-1}X(Z) = 2 + Z^{-1}$ , ROC = کل صفحه به غیر از $Z=0$

6_3_3 . معکوس زمانی

$x[n] \longleftrightarrow X(Z) \quad ROC = R_1$

$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{Z}\right) \quad ROC = R_1\Big|_{Z \to \frac{1}{Z}} = \frac{1}{R_1}$

6_3_4 . انبساط زمانی (گستردگی در زمان)

$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & n = mk \\ 0 & o.w \end{cases}$

(k-1) صفر میان هر دو نمونه متوالی

$x_{(k)}[n] \longleftrightarrow X(Z^k) \quad ROC = R_1\Big|_{Z \to \sqrt[k]{Z}}$ $\qquad Z_0 \in R_1$, $\sqrt[k]{Z_0} \in R_{new}$

6_3_5 . کانجوگیت (مزدوج زمانی)

$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(Z^*)$ , ROC = $R_1$

اگر $x[n]$ حقیقی $\Rightarrow X(Z) = X^*(Z^*) \Rightarrow X^*(Z) = X(Z^*)$

صفرها و قطب های تبدیل Z سیگنال های حقیقی مزدوج هستند

6_3_6 . کانولوشن در حوزه زمان .

$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(Z) \quad ROC = R_1$

$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(Z) \quad ROC = R_2$

$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(Z).X_2(Z)$ ROC contains $R_1 \cap R_2$

دو ویژگی بعدی از این ویژگی ها به دست می آیند

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

6-3-7. تفاضلی    $x[n] \longleftrightarrow X(z)$   ROC $= R_1$

$x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow X(z) - z^{-1}X(z) = (1-z^{-1})X(z)$   ROC $= R_1 \pm \{0,\infty\}$

که ROC شامل $R_1$ است و ممکن است به دلیل حذف صفر و قطب، ناحیه همگرایی گسترش یابد. همچنین نقاط $z=\{0,\infty\}$ به ناحیه همگرایی اضافه یا کم شوند.

6-3-8. مجموع (حاصل جمع)    $x[n] \longleftrightarrow X(z)$   ROC $= R_1$

$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n]*u[n] \longleftrightarrow X(z)\frac{1}{1-z^{-1}}$   $R_1 \cap \{|z|>1\}$

ROC شامل است و ممکن است صفرهای $X(z)$، $(z-1)$ را حذف کند. همچنین نقاط $z=\{0,\infty\}$ به ناحیه همگرایی اضافه یا کم شوند.

6-3-9. مشتق گیری در حوزه $z$    $x[n] \longleftrightarrow X(z)$   ROC $= R_1$

$-nx[n] \longleftrightarrow z\frac{dX(z)}{dz}$   ROC $= R_1 \pm \{0,\infty\}$

مثال: تبدیل معکوس $z$ برای $X(z)=\ln(1+az^{-1})$ بدست آورید.

$$z\frac{dX(z)}{dz} = z\frac{-a/z^2}{1+az^{-1}} = \frac{-az^{-1}}{1+az^{-1}} \Rightarrow (-a)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1+az^{-1}} \quad |z|>a$$

$$\frac{-az^{-1}}{1+az^{-1}} \longleftrightarrow -a(-a)^{n-1}u[n-1] \Rightarrow X(z) \longleftrightarrow \frac{(-a)^n u[n-1]}{-n}$$

6-4. توصیف و تحلیل سیستم های LTI

$$\underset{X(z)}{x[n]} \longrightarrow \boxed{\underset{H(z)}{h[n]}} \longrightarrow \underset{Y(z)=X(z)H(z)}{y[n]=x[n]*h[n]}$$

$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$ ; تابع تبدیل / انتقال سیستم

نکته: سوال: سیستم LTI با تابع تبدیل $H(z)$ داریم. خروجی این سیستم به ازای ورودی $x[n]=2^n$ بدست آورید.

$$z_0^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow z_0^n H(z)\big|_{z=z_0}$$

6-4. بررسی علی بودن و پایداری از روی ناحیه همگرایی تابع تبدیل.

6-4-1 علی بودن    $h[n]\big|_{n<0}=0$   شرط علی بودن    $x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

اگر سیستم LTI گسسته، علی باشد ناحیه همگرایی تابع تبدیل به صورت بیرون دایره (یعنی $|z|>r$) است که $z=\infty$ جز ROC قرار دارد. $H(z)=h[0]+h[1]z^{-1}+h[2]z^{-2}+\dots$

توان مثبت $z$ نداریم

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر ناحیه همگرایی تابع تبدیل به صورت بیرون دایره‌ای است و $z=\infty$ جزء ROC قرار دارد (مشروط بر گویا بودن) $\Longleftarrow$ سیستم علّی است

مثال: (درجه صورت > درجه مخرج) سیستم علّی نیست $\longleftarrow$

$$H(z) = \frac{z^3+2z^2+4}{z^2-4z+4}$$

مثال: علّی است $\longleftarrow$ $|z|>2$

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

چون دایره‌ای و $z=\infty$ جزء ROC

## 6-4-2. پایداری

اگر سیستم LTI گسسته، پایدار باشد ($\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] < \infty$) $\longleftarrow$ نقاط روی دایره به شعاع واحد $|z|=1$ در ناحیه همگرایی تابع سیستم قرار دارد

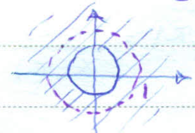
$$\sum_{-\infty}^{\infty} h[n]r^{-n} < \infty \quad , \quad r=1 \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} h[n] < \infty$$

* اگر سیستم LTI گسسته، پایدار باشد $\longleftarrow$ تبدیل فوریه وجود دارد

اگر نقاط روی دایره واحد در ناحیه همگرایی تابع سیستم قرار داشته باشد $\longleftarrow$ پایدار است

سؤال: شرط لازم و کافی برای علّی بودن و پایدار بودن سیستم LTI گسسته با تابع سیستم گویای $H(z)$ ROC

بزرگترین قطب (تمام قطب‌ها) باید کمتر از 1 باشد $\longrightarrow$
- ROC باید به صورت بیرون دایره‌ای باشد $\Rightarrow$ شرط علّی بودن
- ROC باید شامل دایره واحد باشد $\Rightarrow$ شرط پایدار بودن



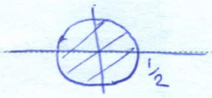
$\Longleftarrow$ عموماً با feedback سعی می‌شود یک سیستم ناپایدار را پایدار کرد (حتی می‌تواند یک سیستم پایدار را ناپایدار کند)

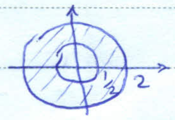
مثال: برای تمام حالات همگرایی تابع تبدیل زیر، پایداری و علّی بودن را بررسی کنید.

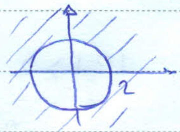
$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

قطب‌ها: $z=2$ , $z=1/2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف، $|z|<\frac{1}{2}$ →  علّی و پایدار نیست

ب، $\frac{1}{2}<|z|<2$ →  علّی نیست و پایدار هست

ج، $|z|>2$ →  علّی هست و پایدار نیست

مثال: در چه صورتی سیستم روبرو علّی و پایدار است.

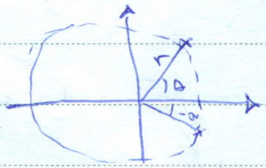
$$H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^{2}z^{-2}}$$

$j\sin\theta \qquad 1=\cos^{2}\theta+\sin^{2}\theta$

$$z^{-1}=\frac{2r\cos\theta\pm\sqrt{4r^{2}\cos^{2}\theta-4r^{2}}}{2r^{2}}=\frac{2r\cos\theta\pm 2r\sqrt{\cos^{2}\theta-1}}{2r^{2}}=\frac{1}{r}e^{j\theta},\ \frac{1}{r}e^{-j\theta}$$

$$H(z)=\frac{1}{z^{2}-2r\cos\theta z+r^{2}}=\frac{1}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})}$$

قطب ها $= re^{j\theta},\ re^{-j\theta}$



$\Rightarrow r<1$ → پایداری

$|z|>1$ → علّی

6_5 تحلیل سیستم های LTI توصیف شده بوسیله معادلات تفاضلی:

$$\sum_{k=0}^{M}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{N}b_k x[n-k]\Rightarrow\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k}Y(z)=\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}{\sum a_k z^{-k}}$$

برای ناحیه همگرایی باید اطلاعات دیگری هم داشته باشیم

مثال: یک سیستم LTI توسط معادله تفاضلی $y[n]-2y[n-1]=2x[n-1]$ در نظر بگیرید. تابع تبدیل و پاسخ ضربه حالت علّی این سیستم؟

$$Y(z)-2z^{-1}Y(z)=2X(z)z^{-1}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}}\qquad |z|>2 \Rightarrow h[n]=2\cdot 2^{n-1}u[n-1]$$

حالت علّی

$$h[n]=2^{n}u[n-1]$$