سیگنال و سیستم

جلسه اول

Subject

Date ۹۷/۱۱/۱۴

سیگنال را موجودیتی می‌بینیم که حاوی اطلاعاتی است مثلاً یک صفحه کتاب را به عنوان یک سیگنال می‌بینیم و کلمات آن صفحه، یک مقدار از آن سیگنال است. همچنین می‌توانیم یک صفحه را به صورت یک ولکتور یا بردار در نظر بگیریم که کلمات، درایه‌های آن هستند.

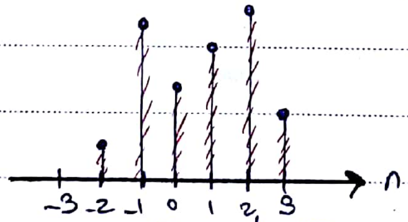
یا برای مثال یک تصویر را می‌توان یک سیگنال در نظر گرفت (که یک سیگنال دو بعدی می‌شود) و اگر آن را بردار در نظر بگیریم، یک ماتریس دو بعدی خواهیم داشت که تعداد آن ماتریس دو بعدی پیکسل‌های عکس خواهد بود.

سیستم را موجودیتی می‌بینیم که می‌تواند یک فرم فیزیکی داشته باشد یا یک نرم‌افزار باشد که سیگنال را می‌گیرد و بعد از پردازش به سیگنال دیگری تبدیل می‌کند یا از آن اطلاعات استخراج می‌کنند.

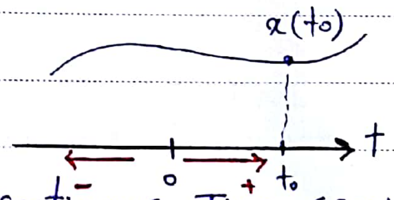
input → [system] → output

پیوسته	continuous	$x(t)$	$y(t)$
گسسته	Discrete	$x[n]$	$y[n]$

independant variable (متغیر مستقل) (integer number)



Discrete-Time (DT)

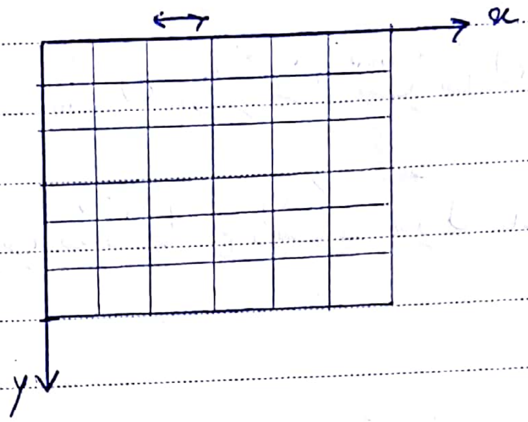


Continuous-Time (CT)

Subject
Date

در تصویرها ، متغیر مستقل دیگر برحسب زمان نیست از جنس فاصله و یا spatial هستند. پس این مختصات‌ها spatial cordinate هستند.

برحسب میلی‌متر.



"chapter SS_1"

Subject

Date ۹۷/۱۱/۱۴

جلسه دوم

سیگنال یا continuous پیوسته است یا Discrete (گسسته) به همین ترتیب

سیستم ها گسسته یا پیوسته و یا ترکیبی از آن ها هستند.

هر چیزی که منجر به تغییر سیگنال شود، سیستم است.

یک تقسیم بندی دیگر از سیگنال ها، اینگونه است که یا سیگنال Energy است یا سیگنال Power و یا هیچکدام.

توان لحظه ای:
$$p(t) = v(t)\,i(t) = \frac{1}{R} v^2(t)$$

مجموع انرژی در یک فاصله زمانی محدود:
$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)\,dt$$

متوسط توان در یک فاصله زمانی محدود:
$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)\,dt$$

"مجموع انرژی در یک فاصله زمانی محدود"

continuous_time (CT)
$$E \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$$

Discrete_time (DT)
$$E \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

"توان متوسط در یک فاصله زمانی محدود"

continous_time (CT)
$$P \triangleq \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$$

Discrete_Time (DT)
$$P \triangleq \frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

Subject

Date

"جمع انرژی یک فاصله زمانی نامحدود"

continuous_time (CT)

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Discrete_Time (DT)

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

"توان متوسط یک فاصله زمانی نامحدود"

continuous_time (CT)

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Discrete_Time (DT)

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

سیگنال های از نوع انرژی هستند، فقط در بازه ی محدود وجود دارند. اگر از $-\infty$ تا $+\infty$ تعریف شوند و یا وجود داشته باشند، سیگنال توانی است.

تغییرات متغیر مستقل: برای C.T.

$f(t) \to f(-t)$ همان سیگنال حول محور y Time Reversal

$f(t) \to f(t-t_0)$ ؛ سیگنال را t_0 (جابه‌جایی زمانی) Time shifting (Time Translation) در جهت افقی حرکت می‌کند.

$$\begin{cases} t_0 > 0 & \text{جابه‌جایی به سمت راست} \\ t_0 < 0 & \text{جابه‌جایی به سمت چپ} \end{cases}$$

Subject
Date

$f(t) \longrightarrow f(at)$ مقیاس زمانی Time scaling

$\begin{cases} a>1 \longrightarrow \text{compress} \\ a<1 \longrightarrow \text{expand} \end{cases}$ فشرده سازی

D.T. برای

$f[n] \longrightarrow f[-n]$ Time Reversal

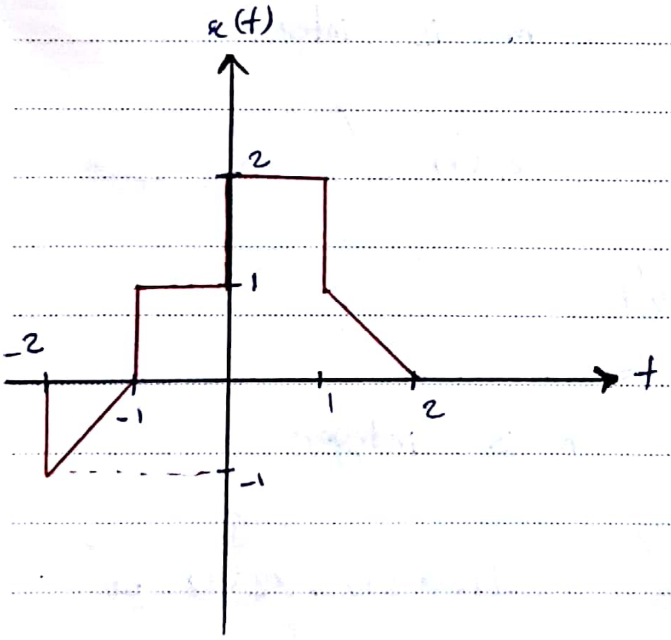
$f[n] \longrightarrow f[n-n_0]$ Time Shifting

$f[an]$ Time scaling

a باید صحیح باشد محدوده سیگنال باشد .

$$g[n] = \begin{cases} f[n] & ; \quad n = \text{even} \\ 0 & ; \quad n = \text{odd} \end{cases}$$

تمرین کوتاه: (برای یکشنبه ۲۱، ۱۱، ۹۷)



i) $x(t-1)$

ii) $x(2-t)$

iii) $x(2t+1)$

iv) $x(4-\frac{t}{2})$

v) $(x(t)+x(-t))u(t)$ for $t>0$

سیگنال های پریودیک :

اگر با T (دوره تناوب) پریودیک است، با 2T، ... و mT هم پریودیک است.

C.T. $$x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$
$$= x(t+2T)$$
$$= x(t+mT)$$ m integer

اگر کوچکترین T ممکن را با t_0 نشان دهیم خواهیم داشت:

دوره تناوب پایه: t_0 = fundamental period of $x(t)$

کوچکترین عدد مثبتی که به ازای آن رابطه تناوب برقرار است.

D.T. $$x[n] = x[n+N_0] \quad \forall n$$

سوال - اگر یک سیگنال پریودیک $x_1(t)$ با دوره تناوب T_{01} داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$x_1(t) = x_1(t+T_{01}) \quad \forall t$$
$$= x_1(t+mT_{01})$$ m is integer

همچنین سیگنال پریودیک $x_2(t)$ با دوره تناوب T_{02} را نیز داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$x_2(t) = x_2(t+T_{02}) \quad \forall t$$
$$= x_2(t+nT_{02})$$ n is integer

آیا $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ، یک سیگنال پریودیک است؟

Subject

Date

جواب -

$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$x_3(t)$ is Periodic when $x_3(t) = x_3(t + T_{03})$

$x_3(t) = x_1(t + m T_{01}) + x_2(t + n T_{02}) = x_3(T_{03} + t)$

$\Rightarrow T_{03} = m T_{01} = n T_{02}$

$\Rightarrow \dfrac{T_{01}}{T_{02}} = \dfrac{n}{m}$ این نسبت باید rational number (اعداد گویا) گویا باشد. (تا $x_3(t)$ پریودیک شود)

- اگر n سیگنال پریودیک داشته باشیم $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ را، جمع این n سیگنال پریودیک است؟ نسبت همه‌ی دوره تناوب هر دو سیگنال باید یک عدد گویا باشد.

سیگنال ها یا Even (زوج) و یا Odd (فرد) است:

$$\begin{cases} x(t) = -x(-t) & \text{فرد، odd} \\ x(t) = x(t) & \text{زوج، even} \end{cases}$$

هر سیگنال می‌تواند یک بخش زوج و یک بخش فرد داشته باشد.

$\{\text{Any Signal}\} = \text{Even Part}\{x(t)\} + \text{Odd}\{x(t)\}$

Subject

Date

نحو نمایش:

Even Part of $x(t) \equiv Ev\{x(t)\} \equiv x_e(t)$

Odd Part of $x(t) \equiv Od\{x(t)\} \equiv x_o(t)$

سیگنال $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$$

$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$$

Exponential & Sinusoidal Signals

$\underbrace{\sigma}_{real} + \underbrace{j\omega}_{imaginary}$ نمایش مستطیلی

$re^{j\omega}$ نمایش قطبی Polar form

$re^{j\omega} = r\cos(\omega) + jr\sin(\omega)$

$e^{j\omega t} = \underbrace{\cos(\omega t)}_{real} + \underbrace{j\sin(\omega t)}_{imaginary}$

فرکانس زاویه‌ای (رادیان بر ثانیه)

$\omega = 2\pi f$ هرتز $\quad f = \frac{1}{T}$

$$\{e^{jk\omega_0 t}\} = \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

PAPCO

Subject   جلسه سوم

Date ۹۷/۱۱/۲۳

سیگنال نمایی و سینوسی :

① پیوسته : C.T.

حقیقی ، موهومی

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) \rightarrow \text{Periodic}$$

تناوبی هستند

سیگنال نمایی مختلط

فرکانس زاویه‌ای $= 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$

(rad /cycle /second

$C e^{at}$ ، a و c ، ثابت هستند و در حالت کلی می‌توانند مختلط هم باشند

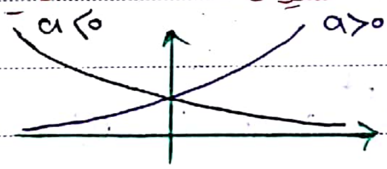
سیگنال نمایی

اگر a مختلط باشد $\rightarrow$ $a = \sigma + j\omega$ rectangular form

اگر c مختلط باشد $\rightarrow$ $c = |c| e^{j\theta}$ Polar form

$$\Rightarrow \underbrace{|c| e^{\sigma t}}_{\text{نمایی (کاهشی یا افزایشی برحسب } \sigma)} \cdot \underbrace{e^{j(\omega t+\theta)}}_{\text{سینوسی}}$$

c & a ∈ R



$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{e^{(j\theta)} + e^{(-j\theta)}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{(j\theta)} - e^{(-j\theta)}}{2j} \end{cases}$$

در a,c فقط بخش موهومی‌اش را در نظر بگیریم :

مجموعه سیگنال‌های نمایی مختلط متناوب : $\{e^{jk\omega_0 t}\}$ $k=0,\pm1,\pm2,\dots \rightarrow k_{th}$ signal : $\phi_k = e^{jk\omega_0 t}$

Harmonically related periodic exponentials

* فرکانس ثابت در حالت $k=0$ ، k برابر می‌شود. (هرچه k بزرگتر، فرکانس بیشتر)

Subject

Date

$\rightsquigarrow$ fundamental frequency $= |k|\omega_0$

$\rightsquigarrow$ fundamental Period $= \dfrac{T_0}{|k|}$

$\pm 1 \rightsquigarrow$ first harmonic $\qquad \pm 2 \rightsquigarrow$ 2nd harmonic

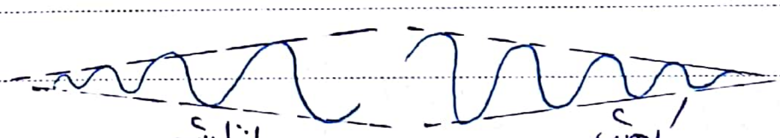
* مجموعه سیگنال های نمایی کامل (complete set) : یعنی هر سیگنالی را می توان برحسب این مجموعه نمایش داد.

c و a را اعداد مختلط در نظر بگیریم، و a را به صورت نمایش مستطیلی و c را به صورت نمایش قطبی در نظر بگیریم و a را نیز به صورت نمایش قطبی دربیاوریم، خواهیم داشت:

$$Ce^{at} = (|c|e^{j\theta})(e^{(r+j\omega_0)t}) \qquad \sigma + j\omega = re^{j\theta}$$

$$\Rightarrow Ce^{at} = |c|e^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta) + j|c|e^{rt}\sin(\omega_0 t+\theta)$$

سیگنال های نمایی مختلط (c & a complex) :



افزایشی $(\sigma > 0)$ $\qquad$ کاهشی $(\sigma < 0)$

ویژگی های سیگنال های نمایی مختلط هارمونیک پیوسته هستند:

- برای هر ω_0 ای Periodic است.
- با افزایش مقدار ω_0، نرخ نوسانات بیشتر می‌شود.
- یک مجموعه نمایی مختلط داریم که اعضای آن بی نهایت است.

Subject
Date

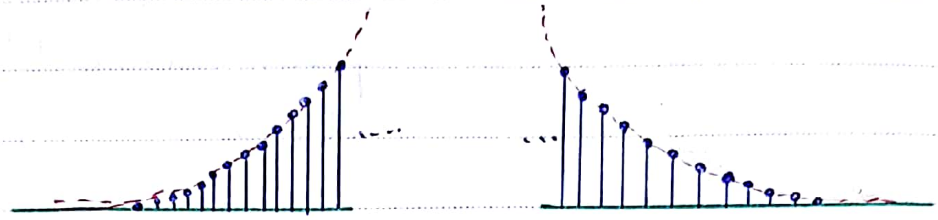
سیگنال های سینوسی
② گسسته:
D.T.

$x[n] = C e^{bn} = C a^{n}$

a و c می توانند مختلط یا حقیقی باشند.

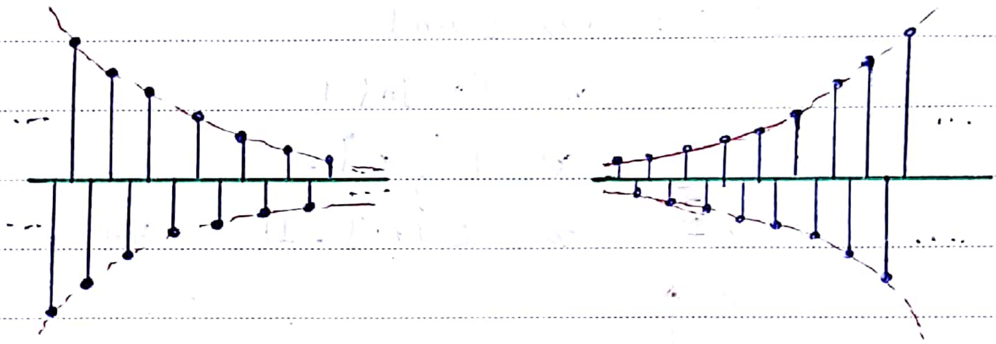
الف) $a \,\&\, c$ real:

$x[n] = Ca^{n}$



$a > 1$ نمایی افزایشی

$0 < a < 1$ نمایی کاهشی



$-1 < a < 0$ نمایی افزایشی

$a < -1$ نمایی کاهشی

ب) $b =$ Purely imaginary $(Re(b) = 0)$ $\quad b = j\omega_0 \xrightarrow{D.T.} e^{j\omega_0 n}$

(قسمت حقیقی نداشته باشد)

* برخلاف حالت پیوسته برای هر ω_0 ای Periodic نیست!

شرط متناوب بودن: $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N_0)} \longrightarrow e^{j\omega_0 N_0} = 1$

cos+sin $\sim e^{j2\pi n} = 1$ $\Big\} \Rightarrow \omega_0 N_0 = 2\pi n$

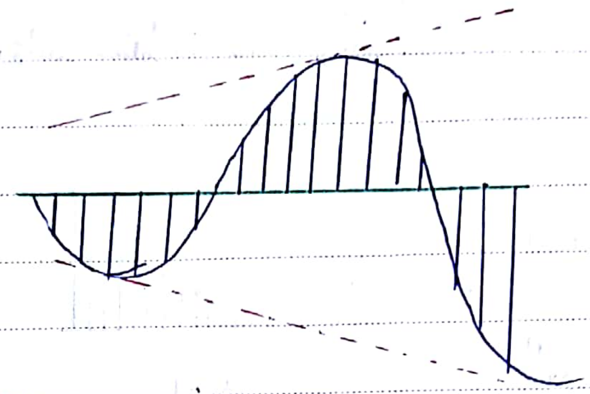
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N_0}}$$

ω_0 باید عدد گویا باشد نسبت $\frac{\omega_0}{2\pi}$ نسبت دو عدد صحیح باشد.

Subject
Date

* با افزایش ω_0 نرخ نوسانات در حالت گسسته در بازه‌های متفاوت، متفاوت است.

ج) c & a complex



$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n}$$ دوره تناوب 2π

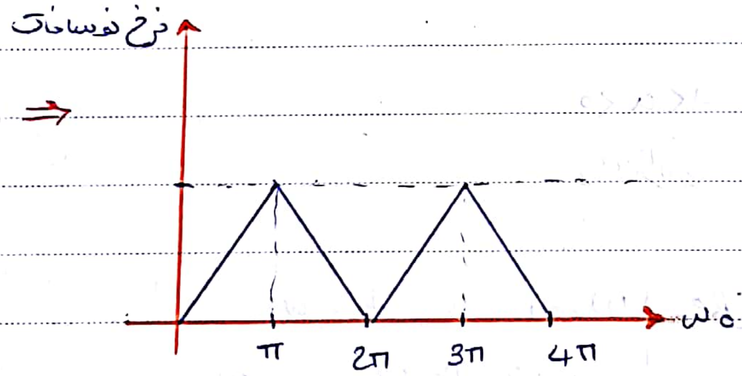
نرخ نوسانات : $\cos[\omega_0 n]$

$\cos[0n] = 1$

$\cos[\frac{\pi}{4}n] = \dots$

$\boxed{max}$ $\cos[\pi n] = \pm 1 \quad \forall n$

$\cos[\pi n] \Rightarrow$



* تعداد محدودی تابع در این مجموعه وجود دارد.

Subject
Date ۹۷/۱۱/۲۸

جلسه چهارم

خلاصه :

complex exponential نمایی مختلط

C.T. $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$

D.T. $e^{j\omega_0 n} = \cos[\omega_0 n] + j\sin[\omega_0 n]$

زمان پیوسته $\cos(\omega_0 t + \phi)$ is Periodic

$\omega_0 \rightarrow$ فرکانس

متفاوت است سیگنال در این بازه $\omega_0 = \{0, 2\pi\}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

زمان گسسته , $\cos[\omega_0 n]$

n is integer $\omega_0 = \pi$

$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$ نسبت دو عدد صحیح

* ω_0 باید عددی باشد وقتی بر 2π تقسیم می‌شود نسبت دو عدد صحیح شود

* max نرخ نوسانات یک سیگنال زمان گسسته برابر است با $\omega_0 = k\pi$
k فرد است

مجموعه سیگنال‌های نمایی مختلط هارمونیک

C.T. $\phi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\}$ $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ $\xrightarrow{\text{integer}}$ بی‌نهایت

D.T. $\phi_k[n] = \{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}$ $k = 0, 1, \ldots, N-1$

$\omega_0 = k\frac{2\pi}{N}$ بیشتر از این مقدار باعث می‌شود سیگنال‌ها تکرار شوند

اگر $k=N$ باشد : $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\Big|_{k=N} = e^{jN\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n} = 1$

اگر $k=0$ باشد : $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\Big|_{k=0} = e^{0} = 1$

$\Rightarrow$ برابرند

$\Rightarrow \boxed{\phi_k[n] = \phi_{k+N}[n]}$

* در D.T. ، N مقدار متفاوت داریم

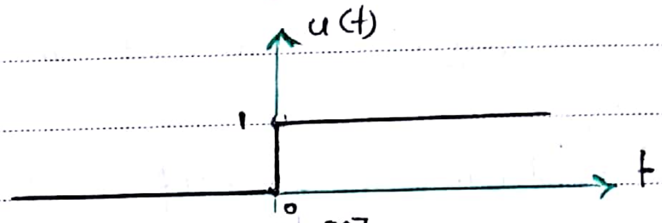
Subject
Date

C.T. $e^{j\omega_0 t}$	D.T. $e^{j\omega_0 n}$
با تغییر ω سیگنال نمایی تغییر می‌کند. برای هر ω ای Periodic است. فرکانس پایه $= \omega_0$	فقط برای مقادیر ω در ۲π مقادیر متفاوت است و تکرار می‌شوند $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ ، $m, N > 0$ فرکانس پایه $= \frac{\omega_0}{m}$

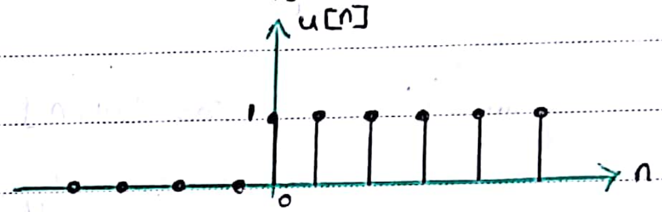
سیگنال های نمایی

Unit Step (پله واحد)

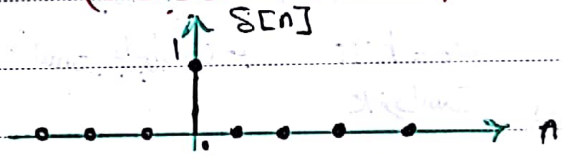
$$\text{C.T.} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \text{undifined} & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



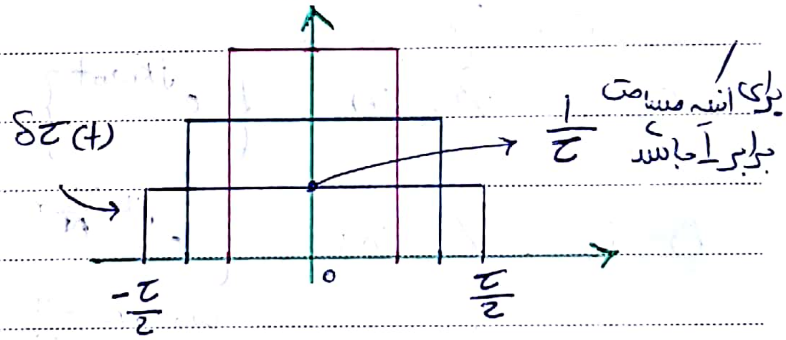
$$\text{D.T.} \quad u[n-n_0] = \begin{cases} 0 & n-n_0<0 \\ 1 & n-n_0 \geq 0 \end{cases}$$



Unit impulse (ضربه واحد)



$$\text{D.T.} \quad \delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & n=n_0 \\ 0 & n\neq n_0 \end{cases}$$



$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(\lambda)\, d\lambda = 1$$

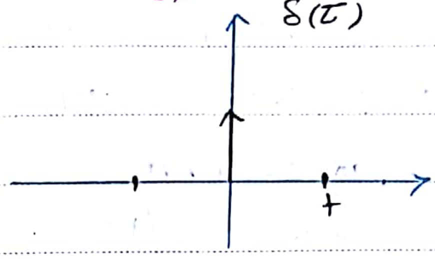
Subject
Date

C.T. $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ = ضربه واحد = اگر از پله واحد مشتق بگیریم

D.T. $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

C.T. $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$ = پله واحد = اگر از ضربه واحد انتگرال بگیریم

$$= \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



D.T. $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$

$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$

یک سیگنال دلخواه

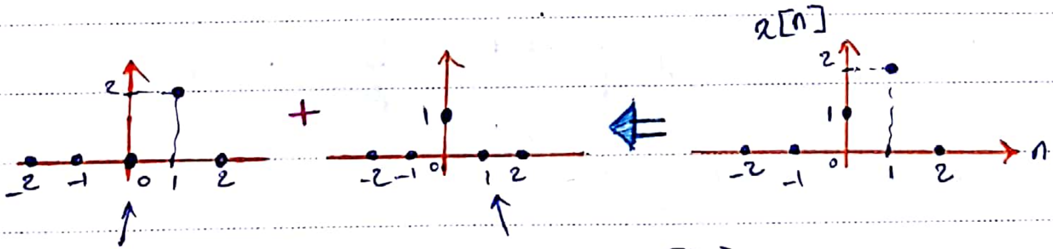
$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

$* \; x[n] \cdot \delta[n-n_0] = x[n_0]\, \delta[n-n_0]$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, \delta[n-m]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

مثال:



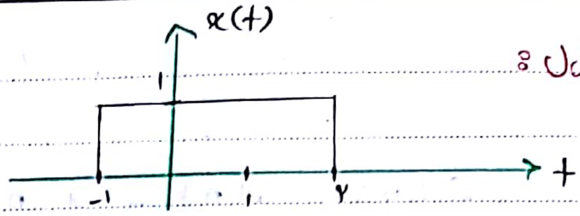
$x[n]\delta[n-1] = x[1]\delta[n-1]$, $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$

خاصیت غربالی

sifting property of $\delta[n]$ ← اگر هر قسمتی از سیگنال $x[n]$ را انتخاب کنیم در واقع داریم غربال می‌کنیم

اگر C.T. باشد $x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$

مثال :



$x(t) = u(t+1) - u(t-2)$

Simple example of CT systems اسلاید ۴۹

input $\equiv v_s(t) \equiv x(t)$

output $\equiv v_c(t) \equiv y(t)$

$\boxed{\text{input-output}}$

دیفرانسیل خطی درجه ۱ با ضرایب ثابت

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$

$$b = a = \frac{1}{RC}$$

$$\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

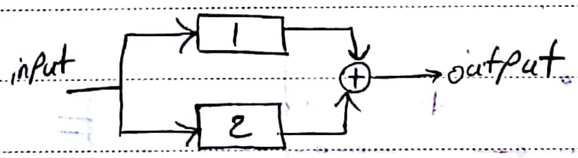
D.T. ورودی $x[n]$ خروجی $y[n]$

که خطی است و ضرایب ثابت ✓ / ✓ Difference Equation ← این معادلات، معادلات تفاضلی با

آن ثابت هستند (Linear & constant coefficient)

سیستم‌های سری

سیستم‌های موازی



Subject

Date ۹۷,۱۱,۱۶ — جلسه پنجم

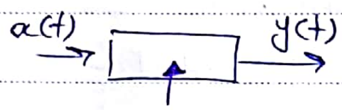
خلاصه‌ای از جلسه قبل:

C.T. input-output

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt}$$

D.T. D.E. ≡ Difference Equation

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$



خاصیت‌های سیستم:

- حافظه‌دار یا بدون حافظه بودن سیستم (system with or without memory):

سیستم بدون حافظه وقتی خروجی فقط به ورودی در همان لحظه وابسته باشد، سیستم بدون حافظه است.

سیستم با حافظه خروجی به حالت‌های قبلی و یا بعدی وابسته است.

* اگر به آینده وابسته باشد، یعنی سیستم‌هایی که به آینده می‌خواهد بیاید وابسته باشد. سیستم‌های real-time سیستم‌هایی هستند که به آینده وابسته نیستند ولی سیستم‌های offline یا سیستم‌های غیر real-time، می‌توانند به آینده هم وابسته باشند یا از اطلاعات آینده هم استفاده کنند.

مثال: $y[n] + n\,y[n-1] = x[n] + b\,x[n+1]$

هم زمان حال را نیاز داریم، هم زمان قبلی و هم زمان بعدی!

- معکوس‌پذیری، سیستم‌های معکوس (invertibility & inverse systems):

سیستمی معکوس‌پذیر است که با دیدن خروجی، ورودی‌اش را بتوانیم تعیین کنیم پس سیستم معکوس‌پذیر، به سیستمی گفته می‌شود که وقتی آن را با سیستمی که معکوس‌پذیر است به طور سری به هم وصل می‌کنیم خروجی سیستم‌مان، ورودی می‌شود.

(مثلاً وقتی تصویر خراب شده و می‌خواهیم تصویر اصلی را پیدا کنیم)

Subject

Date

_ علّی (causal) :

به سیستم‌های گفته می‌شود که خروجی وابسته به ورودی در زمان‌های بعدی نداشته باشد.

* به سیستم‌های non_causal ، سیستم‌های غیرپیشبینی هم گفته می‌شود.

_ پایداری (stability) :

سیستم‌هایی که خاصیت BIBO داشته باشند (Bounded input Bounded output)

یعنی اگر ورودی کران‌دار به آن بدهیم، خروجی هم کران‌دار باشد.

مثلاً اگر $x(t)$ کران‌دار باشد، یعنی $|x(t)| < B \Rightarrow |y(t)| < K$

_ ناوردا ، تغییرناپذیر با زمان (Time invariance) :

سیستمی Time invariance است که جابه‌جایی زمانی در ورودی با جابه‌جایی زمانی در خروجی یکسان است

مثال : آیا Time invariance است؟ چرا؟ $y(t) = x(t) \cos(w_0 t)$

این سیستم causal و memory less است.

و پایدار است (چون بین ۱ و ۱- است)

1) input $x_1(t)$

output $y_1(t) = x_1(t) \cos(w_c t)$

2) input $x_2(t) = x_1(t-t_0)$

output $y_2(t) = x_2(t) \cos(w_c t)$

$= x_1(t-t_0) \cos(w_c t)$

$t = t - t_0$

$y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0) \cos(w_c(t-t_0))$

اگر برابر باشند Time invariance است که در اینجا برابر نیستند

_ خطی بودن (Linearity) :

سیستمی خطی است که از قانون یا قضیه super position جمع آثار پیروی کند.

$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$

$x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$

if $x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{\text{then}} y_1[n] + y_2[n]$

$a x_1[n] \longrightarrow a y_1[n]$

" chapter SS_2 "

Subject

Date

(LTI) Linear & Time_Invarient Systems :

impulse signals
- C.T. $\delta(t)$
- D.T. $\delta[n]$

خاصیت غربالی (sifting)
- C.T. $x(t).\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$
- D.T. $x[n].\delta[n] = x[0].\delta[n]$

$$x(t)\,.\,\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$$

بنابراین
- C.T. $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$
- D.T. $x[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{a_k}\,\underbrace{\delta[n-k]}_{x_k[n]}$

یک عبارت a_k

$h_0[n] \equiv y[n]$ (خروجی) | when input $= \delta[n]$

$h_1[n] \equiv y[n]$ | when input $= \delta[n-1]$

$h_k[n] \equiv y[n]$ | $x[n] = \delta[n-k]$

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$ → **Linear System & T.I** → $y[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h_k[n]$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

convolution b/w $x[n]$ & $h[n]$

Subject

Date

Convolution b/w $x[n]$ & $h[n]$:

$$y[n] = x[n] * \underbrace{h[n]}_{} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

کانولوشن

⊛

$**$

خروجی به ازای $\delta[n]$ ، impulse response (پاسخ ضربه)

یعنی پاسخی که سیستم به ازای سیگنال ضربه واحد می دهد.

Subject
Date ۹۷,۱۲,۵

جلسه ششم

خلاصه ای از جلسه قبل

D.T. $\xrightarrow[\text{input}]{x[n]}$ LTI System $\xrightarrow[\text{output}]{y[n]}$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]}$$ convolution کانولوشن (I)

$h[n] \equiv$ impulse response پاسخ ضربه

$= \underset{\text{خروجی}}{y[n]} \Big|$ when $\underset{\text{ورودی}}{x[n]} = \delta[n]$

$y[n] = x[n] * h[n]$

** $\circledast$

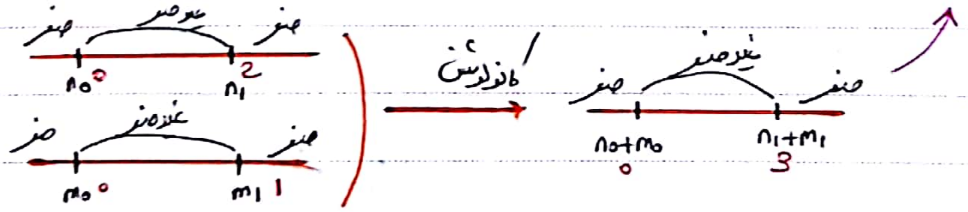
برای محاسبه ی رابطه (I) 5 تا عملیات باید انجام بشود:

1. $n \to k$, $x[n] \to x[k]$, $h[n] \to h[k]$
2. reflect $h[k]$; $h[k] \to h[-k]$
3. shift $h[-k]$; $h[-k] \to h[n-k]$ $\begin{cases} n<0 & \text{چپ} \\ n>0 & \text{راست} \end{cases}$
4. multiply ; $x[k]\,h[n-k]$
5. Sum ; $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

به k مقدار دهیم $\rightarrow$ $y[n] = \underbrace{\dots}_{k<-1} + \underbrace{x[-1]h[n+1]}_{k=-1} + \underbrace{x[0]h[n]}_{k=0} + \underbrace{x[1]h[n-1]}_{k=1} + \underbrace{\dots}_{k>1}$

می توان به n هم مقدار داد $\rightarrow$ و بعد از بسط دادن جواب را بدست می آوریم.

* مقدار نقاطی که سیگنال convolution غیرصفر شده، از فاصله n_0+m_0 تا n_1+m_1 است.



استفاده از 5 گام گفته شده

$(x[n] = \alpha^n u[n]) * (h[n] = u[n])$ (E 2.3

$$\sum_{n=0}^{n-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \quad 0<\alpha<1$$

closed form

$x[n] = \alpha^n u[n] \quad 0<\alpha \neq \beta<1$

$h[n] = \beta^n u[n]$

محاسبه closed form :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha^k u[k])(\beta^{n-k} u[n-k])$$

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geqslant 0 \\ 0 & k<0 \end{cases} \qquad u[n-k] = \begin{cases} 1 & n-k \geqslant 0 \text{ یا } n \geqslant k \\ 0 & o/w \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\alpha^k)(\underbrace{\beta^{n-k}}_{\beta^n \cdot \beta^{-k} = \beta^n \cdot \frac{1}{\beta^k}}) *$$

$$= \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

$$= \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \quad n \geqslant 0 \quad *$$

closed form یعنی بتوان در هر نقطه‌ای که نوشتی را حساب کرد. (یک الگوی ریاضی)

Subject

Date

$$\begin{cases} x[n]=0 & \text{for } n<N \\ h[n]=0 & \text{for } n<M \end{cases}$$

$$x[n] * h[n] = \begin{cases} 0 & n<M+N \\ \sum_{k=N}^{n-M} x[k]\,h[n-k] & \end{cases}$$

$x[n]$	سطر اول	$x[N]$	$x[N+1]$	$x[N+2]$	....
$h[n]$	سطر دوم	$h[M]$	$h[M+1]$	$h[M+2]$	....
	سطر سوم	$x[N]h[M]$	$x[N+1]h[M]$	$x[N+2]h[M]$	....
	+				
	سطر چهارم	$x[N]h[M+1]$	$x[N+1]h[M+1]$	$x[N+2]h[M+1]$	...
	+				
	سطر پنجم	...			
	⋮				
		$y[M+N]$			

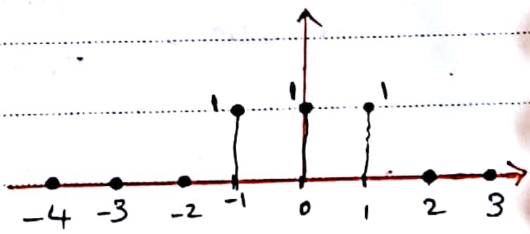
* این روش برای sample محدود قابل استفاده است.

مثال:

$N=0 \quad M=-1$

$y[-1]=0.5$, $y[0]=2.5$, $y[1]=2.5$, $y[2]=2$

$x[n]$	0.5	2			
$h[n]$	1	1	1		
	0.5	2			+
		0.5	2		+
			0.5	2	
	0.5	2.5	2.5	2	



LTI System

خلاصه‌ای از جلسه قبل :

D.T. input $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI System}} \longrightarrow y[n]$$

output $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

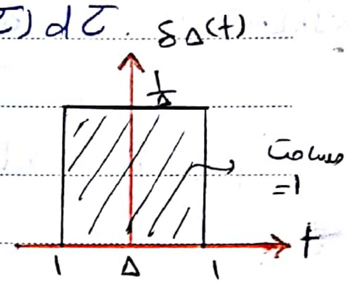
کانولوشن — پاسخ ضربه

اگر بخواهیم گام به گام جلو برویم، یک عملیات ۵ گامه است (که جلسه قبل کامل گفتیم)

C.T. input $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

output $y(t) = x(t) * h(t)$

کانولوشن



$h(t) \equiv$ impulse response of LTI System $\equiv y(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

"۵ گامه"

۱. $t \rightarrow \tau$, $x(t) \rightarrow x(\tau)$, $h(t) \rightarrow h(\tau)$

۲. reflect $h(\tau)$; $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$

۳. shift $h(-\tau)$; $h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

۴. multiply ; $x(\tau)\,h(t-\tau)$

۵. sum ; $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

Subject

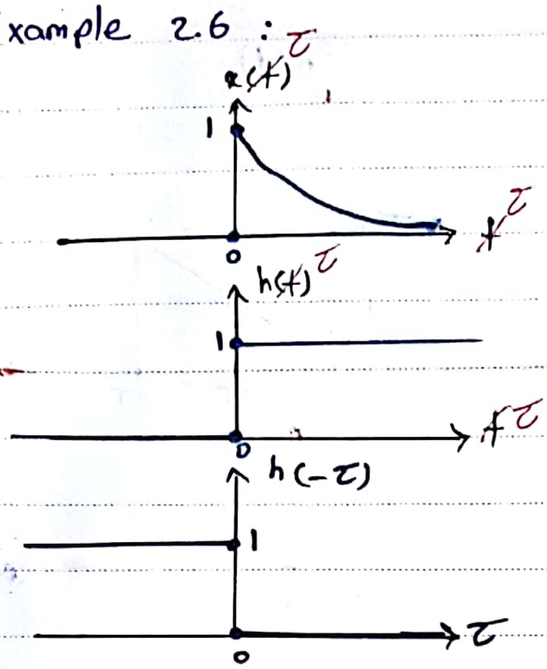
Date

Example 2.6 :

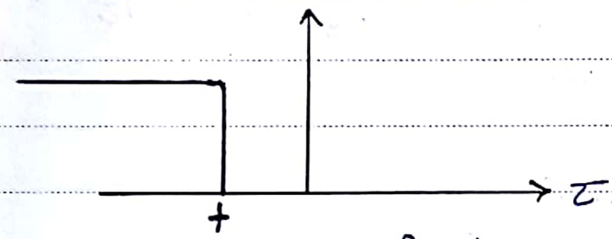
u(t) تعیین می کند در فقط برای مقادیر مثبت است .

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

$$a > 0$$

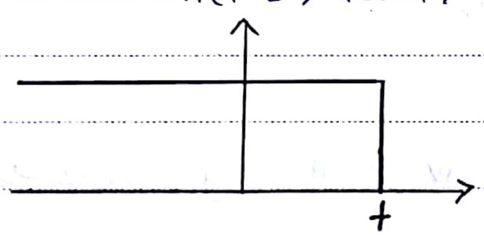


$h(t-\tau)$ for $t<0$



$$y(t) = 0 \qquad t<0$$

$h(t-\tau)$ for $t>0$



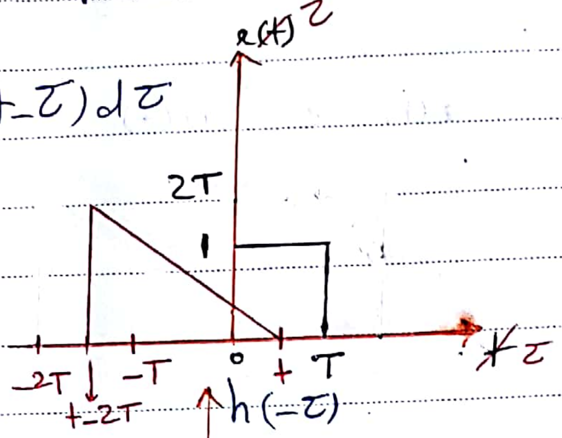
$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \qquad t>0$$

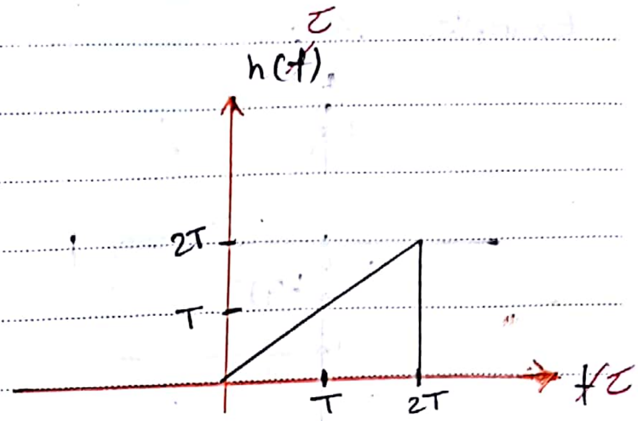
Subject

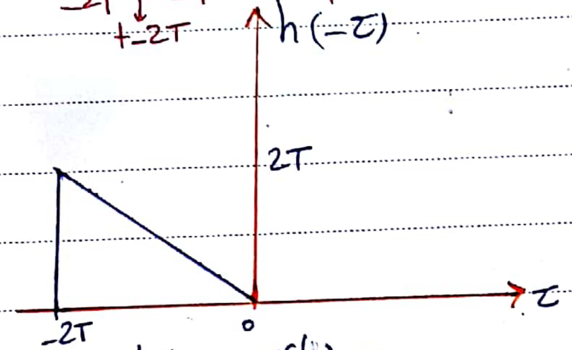
Date

Example 2.7:

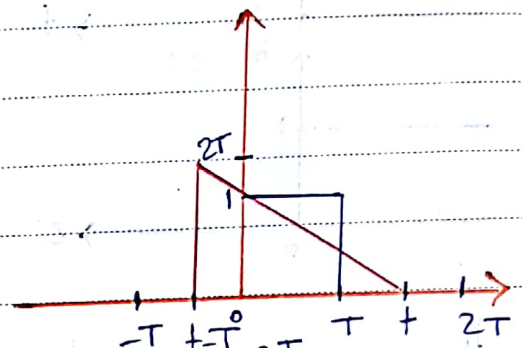
$\int_0^t (t-\tau)\, d\tau$



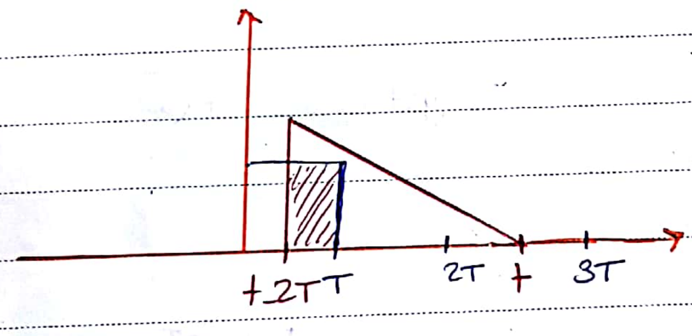




$t<0 \quad y(t)=0$

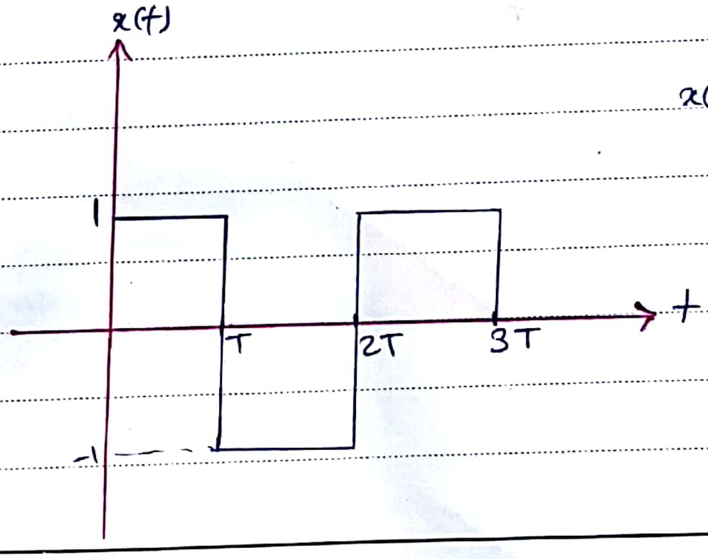


$\int_{t=0}^{T} (t-\tau)\, d\tau$



تمرین تحویلی برای [illegible] ۹۷ ، ۱۲ ، ۱۲

همین مثال را برای x(t) روبه‌رو حل کنید

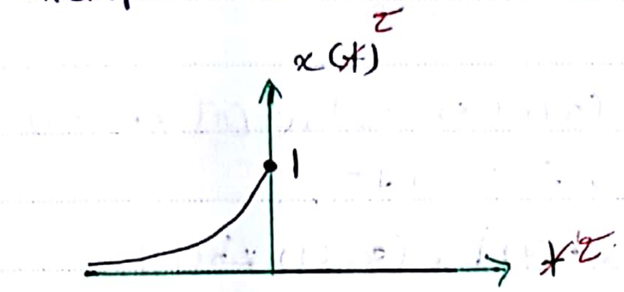


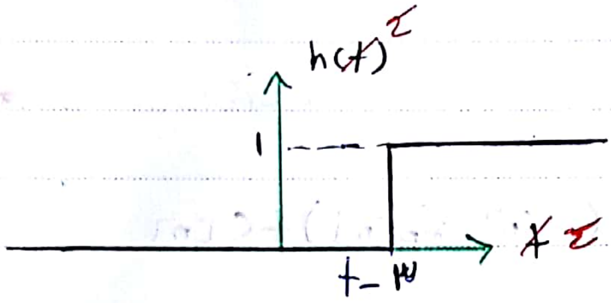
Subject

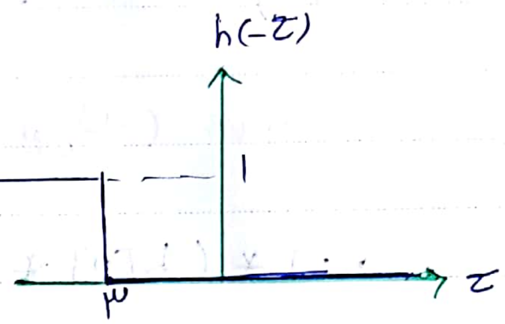
Date

Example 2.8 : $x(t) = e^{-2t} u(-t)$

یعنی برای t های منفی باید مقدار دهیم .







* pages.jh.edu/~signals/index.html

عضو اختیاری

C.T. $x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(\tau)\,\delta(t-\tau)}_{x(t)\,\delta(t-\tau)} d\tau$

$x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau$

$= x(t)$

$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

D.T. $x[n] * \delta[n] = x[n]$

خصوصیات سیستم LTI :

① Commutative (جابه‌جایی‌پذیری)

$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

Subject

Date

② Distributive (توزیع پذیری)

* برای سیستمی ~ اتصال موازی دارد

D.T. $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$

C.T. LTI system $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = (x_1(t) * h(t)) + (x_2(t) * h(t))$$

③ Associative (شرکت پذیری)

* برای سیستمی که اتصال سری دارد

$$a[n] * (b[n] * c[n]) = (a[n] * b[n]) * c[n]$$

در رابطه با ویژگی های زیر، قبلاً چک کرده بودیم و آنها را با روابط ورودی و خروجی اشکال ارائه کردیم در حال می بینیم این خواص را با کانولوشن ... به گونه‌ی دیگری ارائه داد.

④ with or without memory

⑤ Invertibility

⑥ Causality

⑦ Stability

⑧ Unit step response

PAPCO

Subject

Date ۹۷/۱۲/۱۲ — جلسه هشتم

LTI System — خلاصه‌ای از قبل :

	C.T.	D.T.
input	$x(t)$	$x[n]$
output	$y(t) = x(t) * h(t)$	$y[n] = x[n] * h[n]$
impulse response (پاسخ ضربه)	$h(t)$	$h[n]$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \qquad y[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

خواص :

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \qquad x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$y(t-t_0) = x(t) * h(t-t_0) = x(t-t_0) * h(t) \qquad y[n-n_0] = x[n] * h[n-n_0] = x[n-n_0] * h[n]$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \qquad x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

جابجایی پذیری

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \qquad x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

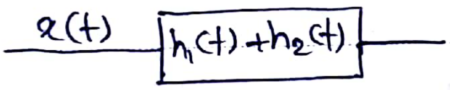
توزیع پذیری — Distributive

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \quad \text{I شکل} \qquad x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

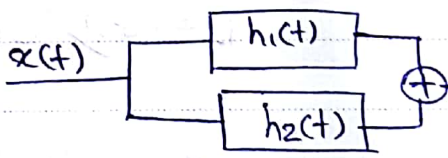
$$= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad \text{II شکل} \qquad = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) \qquad (x_1[n] + x_2[n]) * h[n]$$

$$= x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t) \qquad = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$



I شکل

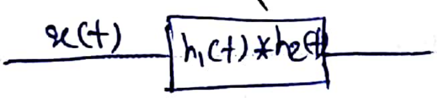


II شکل

شرکت پذیری — associative

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \quad \text{① شکل} \qquad x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

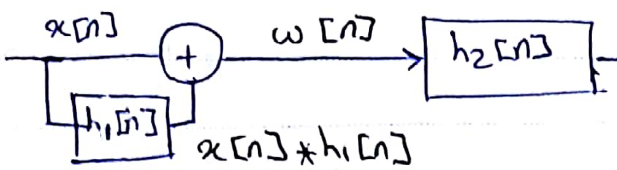
$$= (x(t) * h_1(t)) * h_2(t) \quad \text{② شکل} \qquad = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



① شکل

② شکل

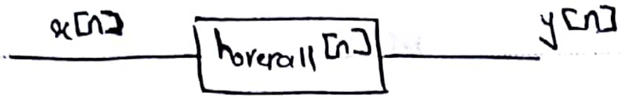
Subject
Date



مثال: اگر $h_1[n] = \beta\,\delta[n-1]$

و $h_2[n] = \alpha^n u[n]$, $0<\alpha<1$

باشد، overall $h[n] = ?$



$$w[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$y[n] = w[n] * h_2[n] = (x[n] + x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad \text{I}$$

از اول،

$$y[n] = x[n] * h_{overall}[n]$$

$\xrightarrow{\text{I طبق}}$ $$y[n] = x[n] * (\delta[n] + h_1[n]) * h_2[n]$$

$$h_{overall}[n] = h_2[n] + h_1[n] * h_2[n]$$

$$= \alpha^n u[n] + (\beta\,\delta[n-1] * \alpha^n u[n])$$

$$= \alpha^n u[n] + \beta \cdot \alpha^n u[n-1]$$

فرض $h_{overall}[n] = y[n]$ | when input $\equiv x[n] = \delta[n]$

در I به جای $x[n]$، $\delta[n]$ قرار می‌دهیم

④ System with or without memory :

Memoryless :

* ما اینجا این خصوصیات را براساس پاسخ ضربه بررسی می‌کنیم

D.T. LTI : $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]}_{\text{input - output}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

معادل

$$\begin{cases} h[n] \neq 0 & n=0 \\ h[n] = 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Subject
Date

$$y[n] = \dots + \underbrace{h[-1]x[n+1]}_{k=-1} + \underbrace{h[0]x[n]}_{k=0} + \underbrace{h[1]x[n-1]}_{k=1} + \dots$$

$$\xleftarrow{\;=0\;} \qquad \xrightarrow{\;=0\;}$$

برای اینکه سامانه input-output، memory less باشد، باید:
$$\begin{cases} h[n] \neq 0 & n=0 \\ h[n] = 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

می‌توان نوشت: $h[n] = \underset{\text{ثابت}}{A}\ \delta[n]$

$$y[n] = \underbrace{h[n]}_{A\delta[n]} * x[n] = A x[n]$$

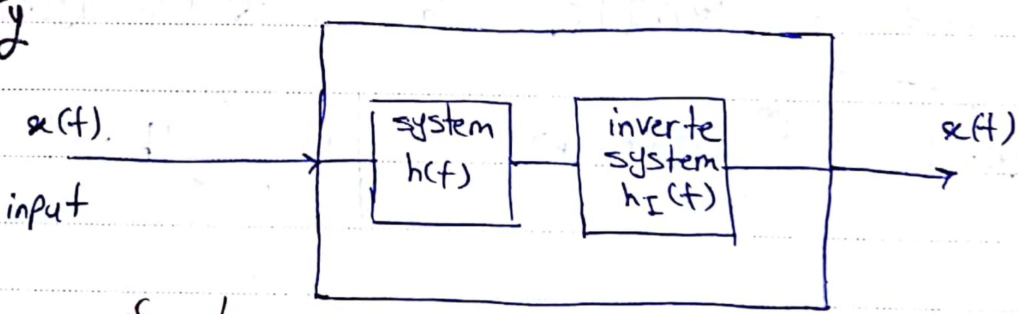
یعنی خروجی به مقدار ورودی در لحظه وابسته است.

پاسخ ضربه

	D.T.	C.T.
memory less	$A\delta[n]$	$A\delta(t)$
	$k\,\delta[n]$	$k\,\delta(t)$

ثابت

⑤ Invertibility



* وقتی دو سیستم به صورت متوالی به هم وصل باشند حاصل کانولوشن می‌شود.

$$h_{overall}(t) = h(t) * h_I(t) = \delta(t) \qquad \text{C.T.}$$

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \qquad \text{D.T.}$$

دقیقه 35 : 16

Ex 2.11

Subject
Date

توضیح شکل ۲.۱۲ درواقع دارد accumulate می‌کند و $x[k]$ ها متوالیاً باهم جمع می‌کند و برای اینکه inverse بودنش را چک کنیم از first difference استفاده می‌کنیم. به اینصورت که $w[n] = y[n] - y[n-1]$ درنظر بگیریم و... و جواب آن $\delta[n]$ باید باشد.

⑥ causality

input-output

$$y[n] = \dots + \underbrace{h[-1]x[n+1]}_{k=-1} + \underbrace{h[0]x[n]}_{k=0} + \underbrace{h[1]x[n-1]}_{k=1} + \dots$$

$=0$ | $\neq 0$

حداقل یک عبارت غیرصفر باید داشته باشد.

$h[n] = 0 \quad n<0 \rightarrow$ causal

$h[n] = \alpha^n u[n]$ ✓

$h[n] = \alpha^n u[n-1]$ ✗

⑦ stability

سیستم های پایدار هستند که BIBO باشند.

ورودی کران‌دار $|x[n]| < \beta \quad \forall n \longrightarrow$ خروجی کران‌دار $|y[n]| < C$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n]x[n-k]\right| \leq \boxed{B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]|}$$

پاسخ ضربه باید مطلقاً جمع پذیر تا stable باشد.

(یا به بیانی دیگر باید انتگرال پذیر باشد)

$h[n] = \alpha^n u[n] \quad 0<\alpha<1 \longrightarrow$ پایدار است چون به یک مقدار ثابت همگرا می‌شود.

$\alpha>1 \longrightarrow$ پایدار نیست.

C.T. stable $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$

② مشتق

$$y(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{ورودی}} * \underbrace{h(t)}_{\text{پاسخ ضربه}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

unit step response :

C.T. $\quad y(t) = x(t) * h(t)$

اگر $x(t) = u(t)$ step function

$$y(t)\Big|_{\text{when } x(t)=u(t)} \equiv \underline{g(t)} \quad \text{step response}$$

پاسخ پله

$$y(t) = u(t) * h(t) = g(t)$$

پاسخ پله

مشتق دو طرف را با u(t) convolve می‌کنیم

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} * h(t) = u(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

$$= \delta(t) * h(t) = h(t)$$

مشتق پله واحد

که یعنی برای پیدا کردن پاسخ ضربه این است که به سیستم سیگنال پله واحد بدهیم و از پاسخ آن نسبت به t مشتق بگیریم. $\Rightarrow$ $\boxed{h(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}}$

ضربه واحد

D.T. $\quad g[n]\Big|_{\text{when } x[n]=u[n]} \equiv$ step response, پاسخ پله واحد

$$\begin{cases} \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ h[n] = g[n] - g[n-1] \end{cases}$$

۷۸
۲/۴

مثال :

$$h[n] = (0.99)^n \, u[n+3]$$

memory ✓ — Non_causal — stable ✓

[illegible]

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (101)^n \, u[1-n]$$

memory ✓ — non-causal — stable ✓

[illegible]

۱۴۵

Subject
Date ۹۷, ۱۲, ۱۴

جلسه نهم

LTI system

خلاصه‌ای از قبل :

$h[n]$ }
$h(t) = \delta(t) k \quad h(t)$ } پاسخ ضربه

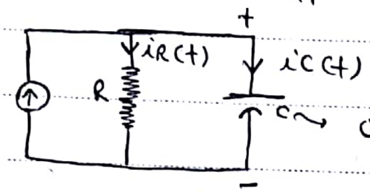
$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

ورودی $x(t) \equiv V_S(t)$

مدار RC قبلاً داشتیم.

خروجی $y(t) \equiv V_C(t)$ $\quad V_C(t) = C \frac{dv}{dt}$

input
$x(t) \equiv i(t)$



خازن

$V_C(t)$ خروجی

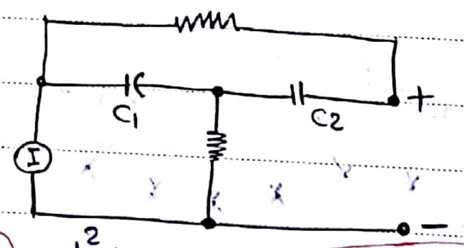
kvl قضیه : $i_C(t) + i_R(t) = i(t)$ $\quad i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$

$$C \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{R} V_C(t) = i(t)$$

input - output وجود دارد ← معادله فقط با مشتقات آن‌ها

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{C} x(t)$$

$x(t)$
input



$y(t)$
output

$$R_1C_1 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{R_1C_1}{R_2C_2} + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{R_2C_2} y(t)$$

$a_2 \quad a_1 \quad a_0$

$$= R_1C_1 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1C_1}{R_2C_2} + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{R_2C_2} x(t)$$

$b_2 \quad b_1 \quad b_0$

* به طور کلی در هر سیستم LTI ای (C.T.) رابطه input-output به صورت زیر است :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

همانطور که داشتیم:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{C} x(t)$$

برای حل این معادله خواهیم داشت:

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{RC}(t-\theta)} x(\theta) d\theta$$

به جای $x(\theta)$ ، $\delta(\theta)$ می‌گذاریم و فرض می‌کنیم $t<0$ ، $y(t)=0$ (یعنی در زمان گذشته ورودی نداریم)

impulse response $\equiv h(t) = ?$

$$h(t) = y(t) \Big|_{\text{when } x(t) = \delta(t)}$$

طبق خاصیت غربالی خواهیم داشت:

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \delta(t)$$

$$\hookrightarrow h(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad t \geq 0$$

$$\hookrightarrow h(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

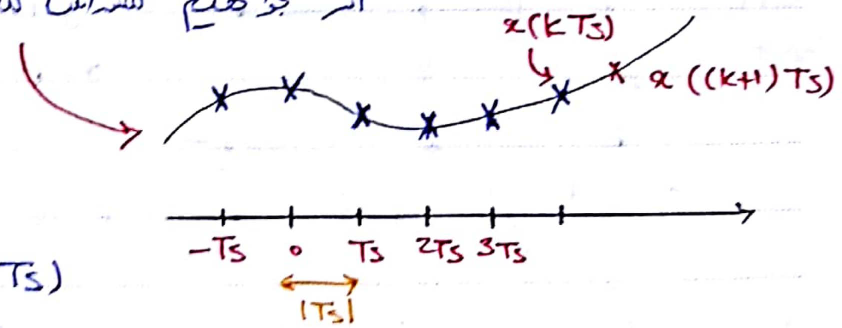
یک سیستم حافظه‌دار است

Causal است ، stable است .

همانطور که داشتیم:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = b x(t)$$

Discritize ⟶ اگر بخواهیم مشتق‌گیری کنیم



$$x[k] \Big|_{T_s = 1} = x(k T_s)$$

$$y(t) \Big|_{t = nT_s} = y(n)$$

$$x(t) \Big|_{t = nT_s} \equiv x[n]$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \simeq y[n] - y[n-1]$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \simeq y[n+1] - y[n]$$

$$y[n] - y[n-1] + a\,y[n] = b\,x[n]$$

معادله تفاضلی

$$\boxed{(1+a)\,y[n] - y[n-1] = b\,x[n]}$$ Difference equation

با روش های بازگشتی حل می‌شوند

D.T. LTI system

input_output

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] \right\}$$

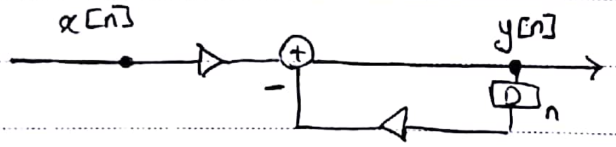
به ازای k=0 را سمت چپ نگه داشتیم.

Block diagram Representations:

Direct Form I — مستقیم از معادله تفاضلی نوشته می‌شود.

شکل:

i)

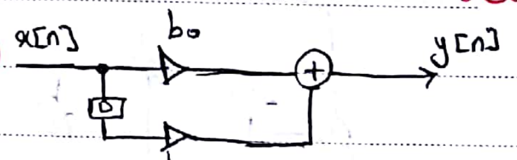


delay فقط یک y است.

$$y[n] + a\,y[n-1] = b\,x[n]$$

$$y[n] = b\,x[n] - a\,y[n-1]$$

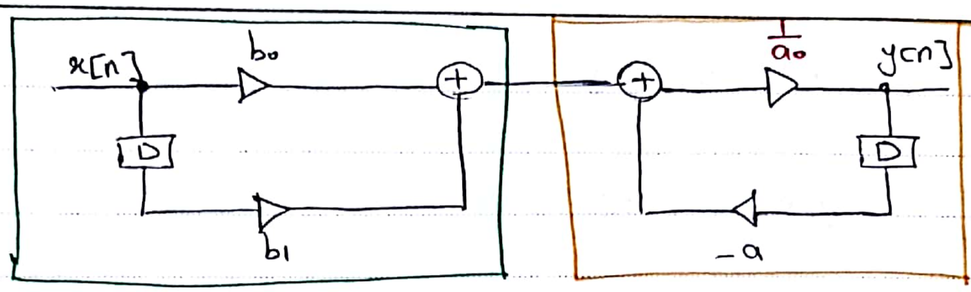
ii)



delay فقط یک x است.

$$y[n] = b_0\, x[n] + b_1\, x[n-1]$$

iii)



system 1 system 2

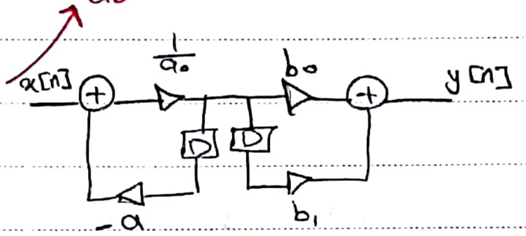
direct

$$y[n] + a\,y[n-1] = b_0\,x[n] + b_1\,x[n-1]$$

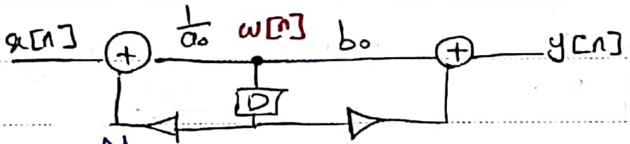
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(b_0\,x[n] + b_1\,x[n-1] - a\,y[n-1]\right)$$

a_0 ضریب $y[n]$ را داشت

شکل را می‌توان به صورت زیر نیز کشید :



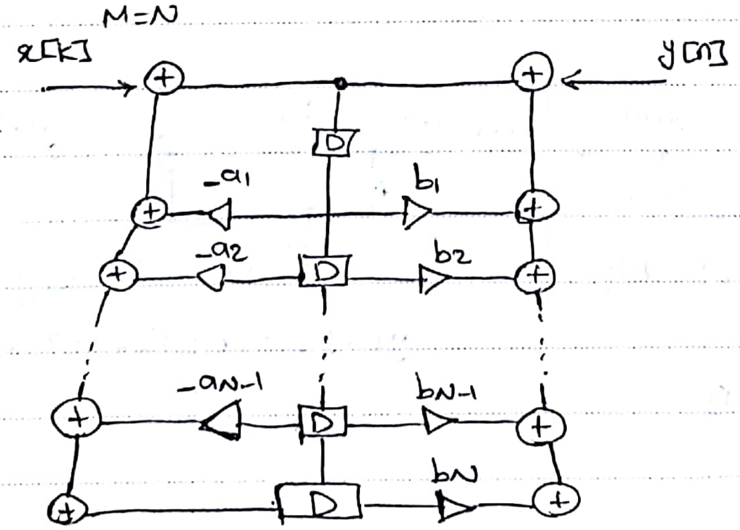
Direct Form II



$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right\}$$

M=N



- تاکنون سیگنال ها را در Time-During تعریف می کردیم.

- سیگنال های گسسته را علاوه بر اینکه می توان شکل آنها را رسم کرد، می توان به صورت بردار هم نمایش داد.

$$x[n] = \longrightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} x[-2] \\ x[-1] \\ x[0] \\ x[1] \\ x[2] \end{bmatrix}$$

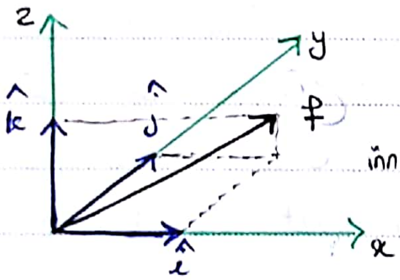
mathematical representation : وقتی یک فرمول برای یک سیگنال تعریف کنیم. (نمایش ریاضی)

vector representation ، وقتی یک عبارت را با بردار نشان دهیم (نمایش برداری)

* سیگنال ها و سیستم ها را به domain دیگری می بریم یعنی حوزه فرکانسی تا اطلاعات بیشتری از آنها دریافت کنیم.

Generalized Fourier Series:

Orthogonal functions توابع متعامد



مروری بر جبر خطی:

بردارها : $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

ویژگی : هر دوتای آنها دو به دو بر هم عمودند inner product

ضرب داخلی $\langle \hat{i} \cdot \hat{j} \rangle = i^T j = 0$, $\langle \hat{i} \cdot \hat{i} \rangle = 1$

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{f} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

این مجموعه بردارها orthonormal set هستند

طولشان یک است ← normal + orthogonal

چنین مفهومی را برای سیگنال ها خواهیم داشت:

$f(t) = \sum C_i \phi_i(t)$ (real functions) $[t_1, t_2]$

$\{\phi_i(t)\}$ $i = 1, \dots, N$

↳ orthogonal functions

* می‌خواهیم $f(t)$ را برحسب $\phi(t)$ بیان کنیم به
با ضرب کیلی ضریب در $\phi(t)$ به $f(t)$ برسیم.

تعریف orthogonal : $\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\, \phi_j(t)\, dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i = j \end{cases}$

برای یک سیگنال در بازه محدود

مقدار ثابت

$[t_1, t_2]$ $f(t)$

(hat) $\hat{f}$ سیگنال تقریبی را با $\hat{f}(t)$ نشان می‌دهیم

$\hat{f}(t) \cong \sum_{i=1}^{N} C_i \phi_i(t)$

نزدیک‌ترین تقریب

$e(t) = f(t) - \hat{f}(t)$ * اختلاف بین چیزی که می‌خواهیم داشته باشیم

سیگنال خطا با چیزی که پیدا کردیم : سیگنال خطا

ولی برای همه t ها نمی‌توان آن را حساب کرد پس باید معیار دیگری داشته باشیم تا جوابی برای تقریب داشته باشیم که از شاخص MSE استفاده می‌کنیم (mean square error)

شاخص MSE یعنی سیگنال error را به توان دو رسانده و از آن میانگین می‌گیریم. (در فاصله‌ای که می‌خواهیم این سیگنال را تقریب بزنیم مقدارها را جمع می‌کنیم و چون C.T. است، انتگرال می‌گیریم
تقسیم بر بازه‌ای که represent شده می‌کنیم.)

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - \hat{f}(t))^2\, dt$$: تعریف MSE

Subject

Date

مثال) Find $\hat{f}(t)$ s.t. MSE is minimized

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{C_i}_{\text{ضرایب ثابت}} \phi_i(t)$$

دنبال ضرایبی خواهیم بود که با تعیین C_i ، $\hat{f}(t)$ به $f(t)$ نزدیک‌ترین مقدار باشد

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\,\phi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & k = j \end{cases}$$

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f^2(t) + \underbrace{c_1^2 \phi_1^2(t)}_{c_1^2 k_1} + \dots + \underbrace{c_n^2 \phi_n^2(t)}_{c_n^2 k_n}$$

$$\underbrace{-2f(t)\,c_1\phi_1(t)}_{-2c_1\gamma_1 \ (\mathrm{I})} \underbrace{-\, 2c_2 f(t)\,\phi_2(t)}_{-2c_2\gamma_2 \ (\mathrm{I})} + \dots + \underbrace{2c_n f(t)\,\phi_n(t)}_{(\mathrm{I})\ -2c_n\gamma_n}$$

$$-\,2c_n f(t)\,\phi_n(t) + \cancel{2c_1c_2\phi_1(t)\phi_2(t)} + \dots$$

$$+\, \overset{0}{\cancel{2c_{n-1}c_n\phi_{n-1}(t)\phi_n(t)}}\,]\,dt$$

انتگرال این عبارت ها صفر (به دلیل متعامد بودن یا دو به دو برهم عمود بودن)

(I) $\quad \gamma_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\phi_i(t)\,dt$ $\qquad$ عرض عادجیبی

$$c_i^2 k_i - 2c_i\gamma_i = \left(c_i\sqrt{k_i} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{k_i}}\right) - \frac{\gamma_i^2}{k_i}$$

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1}\left\{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n}\left(c_i\sqrt{k_i} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{k_i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i^2}{k_i}\right\}$$

$$c_i\sqrt{k_i} = \frac{\gamma_i}{\sqrt{k_i}} \Rightarrow c_i = \frac{\gamma_i}{k_i}$$

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\phi_i(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\,\phi_i(t)\,dt}$$

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1}\left\{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 k_i\right\}$$

اگر $\{\phi_i(t)\}$ complex functions set خواهیم داشت:

توابع مختلط

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\phi_i^*(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\,\phi_i^*(t)\,dt}$$

ضریب ترتیب

conjugate

مزدوج

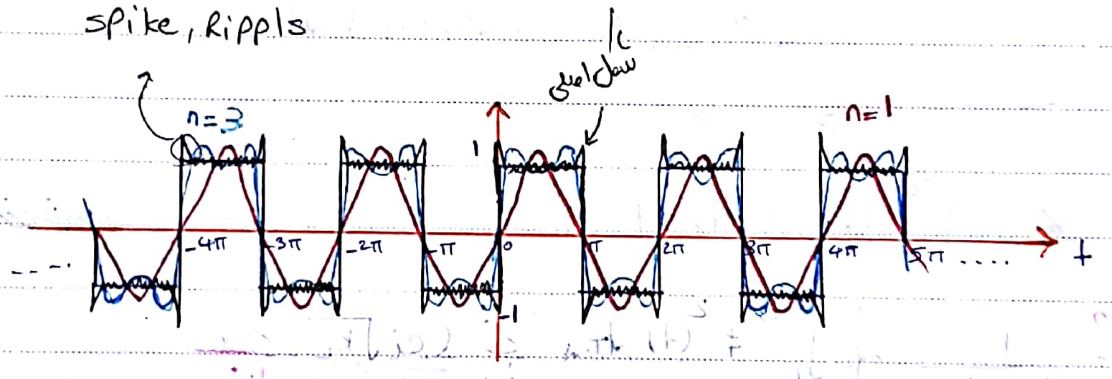
conjugate

مزدوج مختلط

$$\boxed{\begin{aligned}(a+jb)^* &= a-jb\\ (e^{j\omega_0 t})^* &= (e^{-j\omega_0 t})\end{aligned}}$$

مثال :

spike, Rippls



$[t_1, t_2] = [0, 2\pi]$

Periodic $T_0 = 2\pi$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$

$\{\phi_n(t)\} = \{\sin(n\omega_0 t)\}$

$n = 1, 2, \ldots$

مجموعه سیگنال های متعامد

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

$\langle T_0 \rangle$

فاصله یک دوره تناوب

$$C_i = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}(1)\sin(nt) + \int_0^{2\pi}(-1)\sin(nt)\right\} = \begin{cases}\frac{4}{\pi n} & n = \text{odd} \\ 0 & n = \text{even}\end{cases}$$

$$f(t) = \sum_n C_n \sin(nt)$$

$$\omega_0 = 1$$

$$n = 1 \longrightarrow C_1 = \frac{4}{\pi} \longrightarrow f(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t)$$

قطعا یک تابع سینوسی قابل تقریب باشد

$$MSE = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt - \pi C_1^2\right] \simeq 0.19$$

$$n = 3 \longrightarrow C_1 \ \& \ C_3 \longrightarrow f(t) = C_1\sin(t) + C_3\sin(3t)$$

$$+ \frac{4}{\pi}\sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t)$$

$$MSE = 0.1$$

$$\{\phi_n(t)\} = \{\sin(n\omega_0 T)\}$$

complete set نیستند (کامل نیستند)

$$\{\phi_n(t)\} = \{\cos(n\omega_0 T)\}$$

یعنی هر سیگنالی را نمی‌توان بر حسب آنها نوشت.

$$\longrightarrow \phi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

کامل است ✓

از دیگر توابع کامل :

walsh, Lagendra, Laguerre Functions, Hermite, ...

Subject

Date ۹۷/۱۲/۲۱

جلسه یازدهم

$$\{\phi_k(t)\}_{T_0} = \{e^{jk\omega_0 t}\} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad \int_0^{T_0} \phi_k(t)\phi_l^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 \\ T_0 \end{cases}$$

مجموعه سیگنال های متعامد هستند

$$k=1 \rightarrow e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

T_0

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jk\omega_0 t}\,(e^{jk\omega_0 t})^*\,dt = \int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jl\omega_0 t}\,dt$$

اگر $k=l$ باشد $\rightarrow 0$

$\langle T_0 \rangle$, $t_0 \rightarrow 0$

$k \neq l$

$k = l$

$$= \int_0^{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{j(k-l)\omega_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}\Big|_0^{T_0}$$

$$\frac{1}{j(k-l)\omega_0}\left[e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T_0}T_0} - 1\right] = 0$$

$$\cos((k-l)2\pi) - j\sin((k-l)2\pi)$$

نشان دادیم که مجموعه متعامد است.

اگر $f(t)$ پریودیک باشد $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f$ و T_0 دوره تناوب باشد خواهیم داشت:

$$f(t) = \sum_k \phi_k(t)\,C_k$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad k \text{ integer}$$

F.S. coefficients

Fourier Series (سری فوریه)

I

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0 \rangle} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

ضرایب سری فوریه یا

ضرایب طیفی

$k = 0$ C_k DC term

$k = \pm1$ 1^{st} Harmonic

spectral coefficients آنالیز طیفی

$f(t) \xleftarrow{F.S.} \underline{c_k}$ اگر c_k صفر باشد یعنی در سیگنال $f(t)$ هارمونی k ام نداشت

in general complex ضرایب نشان می‌دهد سیگنال‌ها چه فرکانس‌هایی دارد.

یعنی میتوان بر حسب real part و img part نوشت

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \, \underline{e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)}}$$

$$\cos(k\omega_0 t + \phi_k) + j\sin(k\omega_0 t + \phi_k)$$

تبدیل مختصات دکارتی به قطبی را نشان می‌دهد

* وقتی ضریب c_k را از فرمول (I) پیدا کنیم و با نمایش [illegible] سیگنال را [illegible] در $f(t)$ چه فرکانس‌هایی است (چه فرکانس‌هایی است) و هر چه بزرگتر باشد، [illegible] است.

$$c_k = |c_k| e^{j\phi_k}$$

* c_k را به صورت روبرو هم می‌توان نوشت

فرم دیگر برای نوشتن سری فوریه:

$$f(t) = a_0 + \sum \left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t) \right)$$

$$a_0 \text{ DC term}: \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t) \cdot \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t) \cdot \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - jb_k}{2} & k = 1, 2, 3, \dots \\ a_0 & k = 0 \\ \dfrac{a_{-k} + jb_{-k}}{2} & k = \dots, -2, -1 \end{cases}$$

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\}, \quad b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\}$$

LTI System

$$x(t) \xrightarrow[\text{input}]{} \boxed{\begin{matrix}\text{LTI System} \\ h(t)\end{matrix}} \xrightarrow[\text{output}]{y(t)} x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

input: e^{st} نمایی s complex

output: $$y(t)\Big|_{\text{when } x(t)=e^{st}} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \underbrace{e^{s(t-\tau)}}_{e^{st} \cdot e^{-s\tau}} d\tau$$

$$= \underbrace{e^{st}}_{\text{input}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau \rightarrow H(S) = |H(S)|$$

اندازه

input, $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$ $\quad S = jk\omega_0$

output = ?

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k H(S_k) e^{jk\omega_0 t}.$$

$$H(S)\Big|_{S=jk\omega_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-S\tau} d\tau \Big|_{S=jk\omega_0}$$

۴۷

Subject
Date

$x(t)$ Periodic (T_0) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$\phi_k^*(t)$

example 3.4

$$x(t) = 1 + (1 + \frac{1}{2j}) e^{j\overset{1}{k}\omega_0 t}$$

$a_1 = 1 + \frac{1}{2j}$ $k=1$

$a_1^* = a_{-1}$

$a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j}$ $k=-1$

$a_2^* = a_{-2}$

$a_2 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$ $k=2$

$a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$ $k=-2$

Subject
Date ۹۸,۱,۱۸

جلسه دوازدهم

$$f(t) = \sum C_k \, \phi_k(t)$$

یک سیگنال متناوب — توابع پایه

T_0 دوره تناوب

$$F.S. = \sum_k C_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

ضرایب طیفی — مجموعه توابع مختلف متعامد

$$f(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI \quad h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad y(t) = \sum_k c_k H(s_k)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$H(s_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s_k \tau}\, d\tau \Big|_{s_k = k\omega_0}$$

ex 3.4) نکته: بهتر است روابطی که از sin یا cos ... استفاده شده می‌خواهیم
سری فوریه آن را بدست آوریم، از روابط مثلثاتی استفاده کنیم.

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \quad , \quad \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

ex 3.5)

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

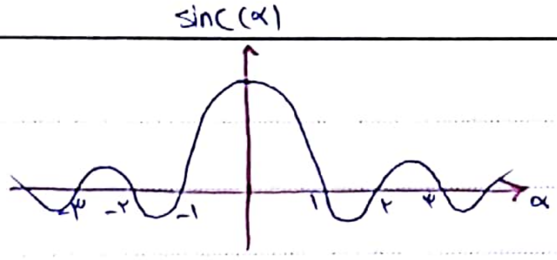
$$\text{I} \quad a_k = \frac{2\sin\left(k \frac{2\pi}{T_0} T_1\right)}{k \frac{2\pi}{T_0} T}$$

در این شکل ضرایب اعداد حقیقی هستند

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}}_{a_k} e^{+jk\omega_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

سیگنال سینک

$$\mathrm{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$



طبق (I) اگر به صورت تابع پیوسته بنویسیم :

$$a_k = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega T_0}\Bigg|_{\omega = k\frac{2\pi}{T_0}}$$

ω متغیر پیوسته

* اگر T_0 را به سمت بی نهایت ببریم پیوسته می شود.

Forier series of real periodic signals:

x(t) is real signal →
$$\begin{cases} x(t) = x^*(t) \\ a_k = a_k^* \\ a_{-k}^* = a_k \end{cases}$$

(1) در یک دوره تناوب انتگرال‌پذیر باشد
(2) max و min محدود در یک دوره تناوب داشته باشد
(3) در هر تناوب ناپیوستگی محدود داشته باشد.

شروط دیریکله را باید داشته باشند

در دسته سیگنال داریم :
۱- پیوستگی داشته باشد (می تواند داشته باشد)
۲- نمی تواند پیوستگی داشته باشد (همواره هستند)

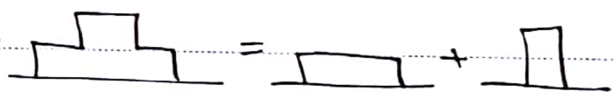
* اگر ازای تعداد کمتر باشند ضرایب سری فوریه هم محدود می شود پس برای کمترین شرط همگرایی انرژی را محدود می گیریم به محدود است باشد.

$$x(t) \overset{F.S}{\longleftrightarrow} a_k$$

خصوصیات سری فوریه :

1) Linearity خطی بودن

سیگنال را می توان شکست :



2) time shifting جابه جایی زمانی

$$x(t) \underset{T_0}{\longleftrightarrow} a_k$$
$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

$e^{-jk\omega_0 t_0} \rightarrow |\circ| = 1$ دامنه

* جابه‌جا می شود فاز ضرایب جابه جا شده و کل دامنه تغییر نمی کند.

$\measuredangle$ (فاز) $= -jk\omega_0 t_0 \rightarrow$

* اگر a_k هم complex باشد، amplitude یا دامنه اش در یک ضرب می شود و فازش با این فاز جمع می شود.

Subject
Date

3) time reversal

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$

* سیگنال های زوج ضرایب سری فوریه اشان هم زوج است و برای سیگنال های فرد هم فرد است .

4) Time scaling مقیاس زمانی

ضرایب تغییری نکند ولی فرکانس عوض می شود .

5) multiplication ضرب

$x(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k$

$y(t) \xleftrightarrow{F.S.} b_k$

پیوسته

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k * b_k = c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$$

6) Differentiation مشتق

$x(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k$

Periodic T

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F.S.} (jk\omega_0)\, a_k$$

$$\frac{d}{dx}\left((x(t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \frac{d}{dt}\left(e^{jk\omega_0 t}\right)$$

7) Integration انتگرال

$x(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{jk\omega_0} a_k$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

PAPCO

خلاصه‌ای از قبل: $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{+jk\omega_0 t} \\ C_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{cases}$$

conjugation & conjugate symmetry:

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T.} a_k$$

$$x^*(t) \longleftrightarrow a_{-k}^*$$

conjugate

اگر $x(t) = x^*(t)$ یعنی سیگنال حقیقی است $\Leftarrow R(a)$

$a_k = a_{-k}^* \longrightarrow a_{-k} = a_k^*$

8) Parseval's relation for CT Periodic signals

۴* $\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$ Total average power

اثبات:

$$= \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\, x^*(t)\, dt \dots$$

(تمرین تحویلی) $x(t)$ is Periodic. its F.S. coefficiats:

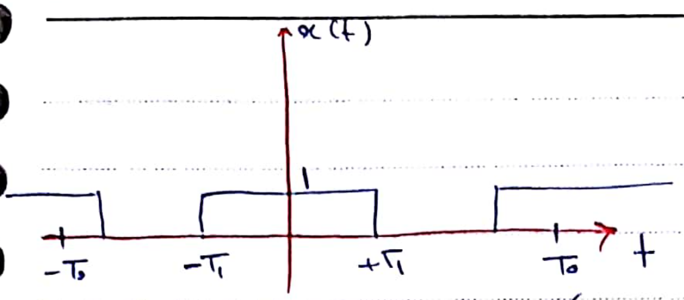
$a_k = \alpha^{|k|} \qquad 0<\alpha<1$

$$x(t),\ e^{st} \longrightarrow \boxed{\text{LTI system}}_{h(t)} \longrightarrow y(t),\ e^{st}\cdot H(s)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \qquad H(s) = \begin{cases} 1 & |s|<\omega \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

ω را طوری بیابید که $\underset{\text{output}}{(\text{total average power})} = 90\% \underset{\text{input}}{(T.A.P)}$ باشد.

Subject
Date



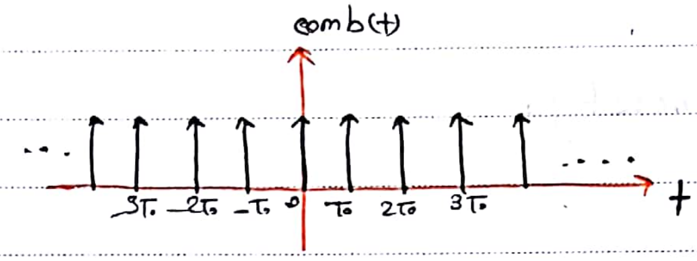
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$\xleftrightarrow{F.T.}$ $a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{\omega_0 T_0} \; (I) = \frac{2\sin(k\frac{2\pi}{T_0}T_1)}{\frac{2\pi}{T_0}T_0}$

(Ex 3.6   * از time_shifting استفاده می‌کنیم .

$x(t-t_0) \rightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

* سیگنال شانه‌ای: comb(t)



is Periodic

F.S.C of $comb(t) \equiv C_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} comb(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

با توجه به خاصیت غربالی

$\delta(t).f(t) = f(0)\,\delta(t)$

$\delta(t-t_0).f(t) = f(t_0).\delta(t-t_0)$

$\frac{1}{T_0} \quad \forall k \quad \Rightarrow comb(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T_0}}_{a_k} e^{jk\omega_0 t}$

$sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

با توجه به: (I)

$T_0 a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} = \frac{2\sin(\pi\frac{\omega T_1}{\pi})}{\frac{\pi\,\omega T_1}{\pi T_1}} = 2T_1 \, sinc(\frac{\omega T_1}{\pi})$

تابع پیوسته، متغیر پیوسته ω

$= \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$

۵۳

"SS 4"

Subject

Date

- روش مفصل برای سیگنال های غیرمتناوب همان بحث فصل قبل را می کنیم.

- اگر یک سیگنال پریودیک F.T. (C.T.) (CTFT) با دوره تناوب T_0 داشته باشیم و T_0 آن به بی نهایت میل کند فقط یک سیگنال باقی می ماند که معادل همان سیگنال های غیرپریودیک است. ضرایب آن فوریه ای پیوسته تشکیل می دهند.

- از اینجا به بعد سیگنال های پریودیک را با $\tilde{x}(t)$ (تیلدا) نشان می دهیم.

$$\circledast \quad a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$ ضرایب تبدیل فوریه

$$\circledast \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$

تابع پیوسته. Forier Transform

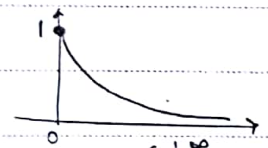
$$\circledast \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$ inverse Forier Transform

$$CTFT\{x(t)\} \equiv X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

حرف کوچک — حرف بزرگ

$$IFT\{X(j\omega)\} \equiv x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

مثال:



$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a>0$$

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-j\omega t}}_{e^{-t(a+j\omega)}}\, dt = \frac{-1}{a+j\omega} e^{-t(a+j\omega)}\Big|_0^{+\infty} = 0 - \frac{-1}{a+j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$

تابع پیوسته مختلط برحسب ω

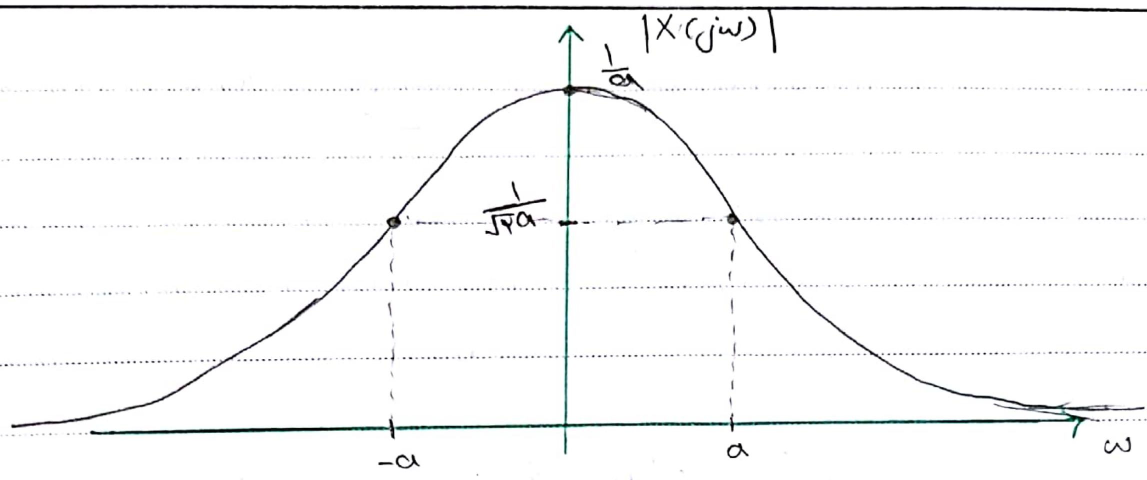
چون مختلط است می توان تابع اندازه آن را به صورت زیر نشان داد:

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \quad \measuredangle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$ تابع فاز

P4PCO

Subject

Date



Subject

Date ۹۸/۱/۲۵ — جلسه چهاردهم

$f(t)$ C.T.

$$F.T.\{f(t)\} \equiv F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

تابع پیوسته برحسب ω

تابع مختلط

$$F(j\omega) = \underbrace{|F(j\omega)|}_{Amplitude}\, e^{j\measuredangle F(j\omega)}$$

$$IFT\{F(j\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{+j\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|e^{+j\measuredangle F(j\omega)}\, e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(j\omega)|e^{j(\omega t+\measuredangle F(j\omega))}\,d\omega$$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

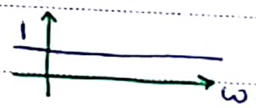
مثال: 1) $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F.T.} \dfrac{1}{a+j\omega}$

2) $e^{-a|t|}$, $a>0$ — یک تابع حقیقی و زوج

$$= \begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ e^{at} & t<0 \end{cases} \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

یک تابع حقیقی و زوج

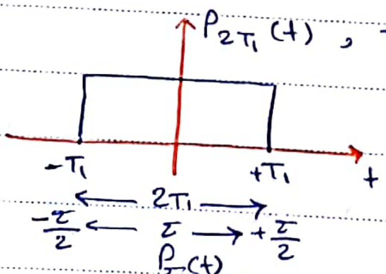
۳) $\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad \forall\omega$



$$FT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\,dt = 1 \quad \forall\omega$$

۴) * خیلی مهم در فیلترها و [illegible]

$P_{2T_1}(t)$, $\Pi_{2T_1}(t)$, $Rect\left(\frac{t}{2T_1}\right)$

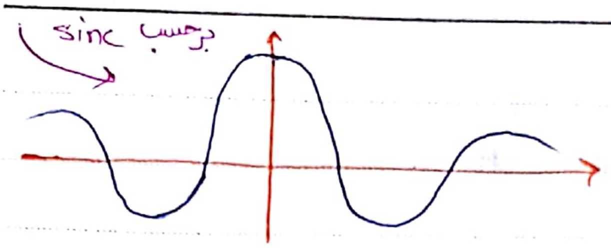


$$F.T.\{P_{2T_1}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2T_1}(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-T_1}^{+T_1}(1)e^{-j\omega t}\,dt = \frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{+T_1} = \frac{1}{j\omega}\left[\frac{-e^{-j\omega T_1}+e^{+j\omega T_1}}{j}\right] = \boxed{\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}}$$

حقیقی و زوج

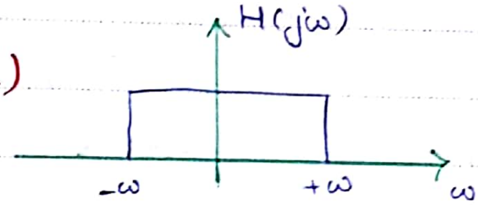
برحسب sinc



$$\frac{2\sin\left(\pi \frac{T_1\omega}{\pi}\right)}{\pi \frac{\omega T_1}{T_1\pi}} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

حقیقی و زوج

تبدیل فوریه معکوس را پیدا کنید.



$$h(t) = ? = \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} = \frac{\omega}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega t}{\pi}\right)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(j\omega)}_{P_{2\omega}(\omega)} e^{+j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{+\omega} (1)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{jt} e^{j\omega t}\right)\Bigg|_{-\omega}^{+\omega}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi} \times \frac{1}{\cancel{j}t}\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) = \boxed{\frac{\sin(\omega t)}{\pi t}}$$

$$\underset{x(t)}{e^{\pm j\omega_0 t}} \; ? \xleftrightarrow{F.T.} \underset{X(j\omega)}{2\pi\,\delta(\omega \mp \omega_0)}$$

$$x(t) = IFT\left\{2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(\cancel{2\pi}\,\delta(\omega-\omega_0))\, e^{j\omega t}}_{\delta(\omega-\omega_0)\times e^{j\omega_0 t}}\, d\omega$$

$$= e^{j\omega_0 t}$$

$$\delta(t)\cdot f(t) = \delta(t)\, f(0) \longrightarrow \delta(t-t_0)\cdot f(t) = \delta(t-t_0)\cdot f(t_0)$$

*نکته: گاهی سیگنال هایی که می‌خواهیم مستقیماً از آنها تبدیل فوریه بگیریم، ممکن است شروطی برای همگرا شدن لازم را ارضا نکنند (مثل سیگنال‌های پریودیک) در این حین غیرمستقیم تبدیل فوریه آنها را پیدا کنیم.

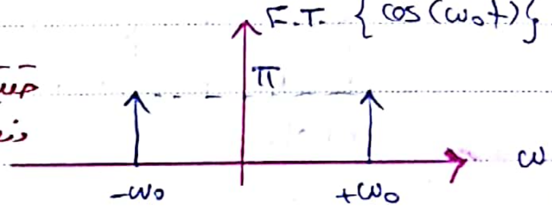
Subject

Date

حقیقی و زوج

$\cos(\omega_0 t)$ تبدیل فوریه $\longrightarrow \frac{1}{2}\left\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right\} \xleftrightarrow{F.T.}$

$\pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$ حقیقی و زوج



حقیقی و فرد تبدیل فوریه

$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left\{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right\} \longleftrightarrow$

$\frac{\pi}{j}\left\{\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right\} = j\pi\left\{\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right\}$

فرد، مختلط (فقط بخش imaginary است)

حال اگر بخواهیم برای هر سیگنال پریودیک تبدیل فوریه آن را پیدا کنیم:

$a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t} \longleftrightarrow 2\pi\left(a_1\delta(\omega-\omega_1) + a_2\delta(\omega-\omega_2)\right)$

– $x(t)$ is periodic با دوره تناوب T_0

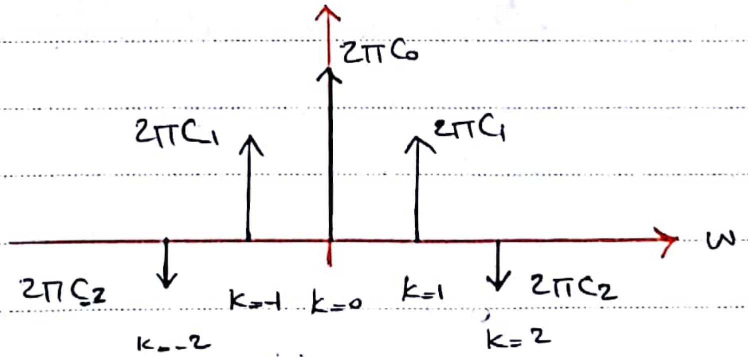
و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

سری فوریه ← F.S. of $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

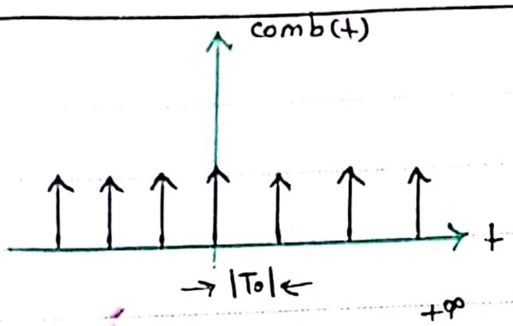
$$\xleftrightarrow{F.T.} X(j\omega) = 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

*تبدیل فوریه هر سیگنال پریودیکی تشکیل شده از یک قطاری از سیگنال های ضربه واحد.



Subject
Date

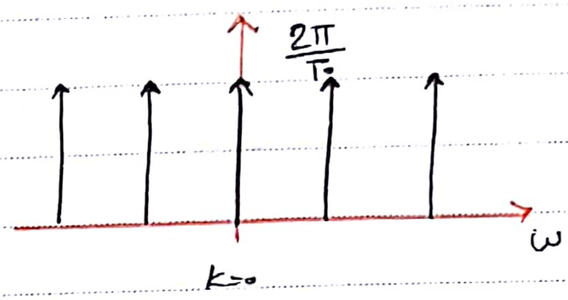
سیگنال شانه‌ای :



$$\text{F.T.}\{comb(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_0}\,\delta(\omega-\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_0}\,\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_0}\right)$$ سری فوریه

$a_k = \frac{1}{T_0}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$



تبدیل فوریه comb(t) یک comb(t') است.

خواص تبدیل فوریه :

۱- خطی بودن (Linearity)

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} X_1(j\omega) \\ x_2(t) \longleftrightarrow X_2(j\omega) \end{array}\right\} \longrightarrow a_1x_1(t)+a_2x_2(t) = a_1X_1(j\omega)+a_2X_2(j\omega)$$

2- time shifting (جابجایی زمانی)

$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$ $\qquad x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

$= |X(j\omega)|\, e^{j[\measuredangle X(j\omega)-\omega t_0]}$

3- conjugation & conjugate symmetry

$x(t)^* \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$

* اگر $x(t)$ ، real باشد ، $x(t)=x^*(t) \Leftarrow X(j\omega)=X^*(j\omega)$

* اگر $x(t)$ ، real و even باشد ، $X(j\omega)$ هم real و even است.

* اگر $x(t)$ ، real و odd باشد ، $X(j\omega)$ هم purely imaginary و odd است.

4- Differentiation & Integration

$\frac{d\,x(t)}{dt} \longleftrightarrow (j\omega)X(j\omega)$

$\frac{d^n x(t)}{dt} \longleftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega)$

Subject

Date ۹۸/۱/۲۷

جلسه پانزدهم

(Ex 4.12

اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم، به خاطر خط / یک تابع ثابت مستطیلی به ما می‌دهد

در impulse ها هم ناپیوستگی داریم.

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow G(j\omega) = (j\omega)\, X(j\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot G(j\omega)$$

* استفاده از خواص مشتق، جابه‌جایی زمانی و تبدیل فوریه سیگنال‌های ... می‌دانستیم.

$$\delta(t \mp 1) \longleftrightarrow e^{\mp j\omega}$$

5- Time & Frequency scaling

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

$$\underset{\text{عکس}}{f(at)} \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right) & a>0 \\ \frac{-1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right) & a<0 \end{cases}$$

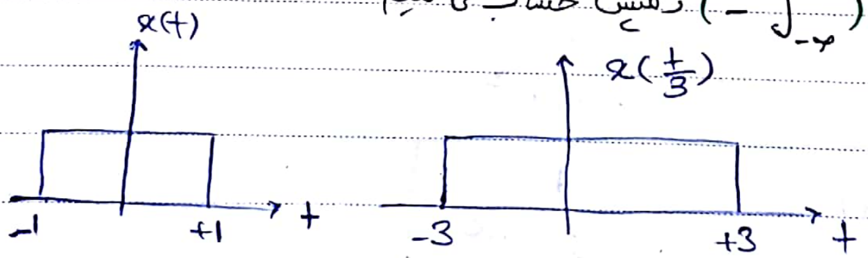
$$a>0 : \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\, e^{-j\omega t}\, dt = FT\{f(at)\}$$

$$\tau = at \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} d\tau = a\,dt \rightarrow dt = \frac{1}{a} d\tau$$

$$= \frac{1}{a} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}\, d\tau}_{F\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

* برای $a<0$: این بالا و پایین جابه‌جا شوند ($\int_{+\infty}^{-\infty}$) برای اینکه به حالت طبیعی برگردد یک منفی پشت آن ضرب می‌کنیم ($-\int_{-\infty}^{+\infty}$) و سپس حساب می‌کنیم.

مثال:



$a = \frac{1}{3}$

6 - Duality (دوگان)

$$f(t) \xleftrightarrow{F.T.} F(j\omega)$$

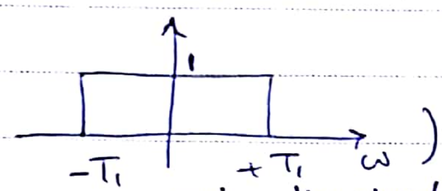
حروف کوچک — حروف بزرگ

$$F(t) \xleftrightarrow{F.T.} 2\pi\, f(-j\omega)$$

مثال: تبدیل فوریه $? = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{tT_1}{\pi}\right)$

- نکته‌اش این است که به دنبال تبدیل فوریه‌ جایگذاری ببینم و ... (مثلثی می‌شود ...)

- با خاصیت دوگان:

2π ()

* ω تبدیل به t شده و برحسب time signal می‌نویسیم.

* اگر مشتق در دامنه فرکانسی باشد، تابع در دامنه زمانی در تابع t ضرب می‌شود.

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

$$\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow (j\omega)\, F(j\omega)$$

$$-jt\, f(t) \longleftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

دو طرف را در j ضرب کنیم

$$t f(t) \longleftrightarrow j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

~ ~

$$e^{-at} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega + a}$$

$$t.\, e^{-at} u(t) \longleftrightarrow +j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega+a}\right)$$

$$= j\left(\frac{-j}{(j\omega+a)^2}\right) = \frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

$$\boxed{t.\, e^{-at} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(j\omega+a)^2}}$$

$$\boxed{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-at}\, u(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{(j\omega+a)^n}}$$ * بسیار مهم

Parseval's relation : $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

انرژی سیگنال

7- convolution property

LTI systems

input $x(t)$ → $\boxed{\text{LTI } h(t)}$ → output $y(t)$

پاسخ ضربه

خاصیت convolution : $y(t) = x(t) * h(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow X(j\omega) \\ h(t) &\longleftrightarrow H(j\omega) \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

ضرب

Transfer function ، پاسخ فرکانس $H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

deconvolution ، گاهی ممکن است لازم شود اول $H(j\omega)$ را پیدا کنیم و بعد از روی آن $h(t)$ را.

8- multiplication

$$x_3(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X_1(j\omega) * X_2(j\omega)\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\theta)\, X_2(\omega-\theta)\, d\theta$$

اگر ۲ سیستم به صورت سری به هم وصل شده باشند، پاسخ ضربه آنها به صورت جمع پاسخ ضربه‌ها می‌شود.

و براساس این خاصیت می‌شود ضرب تبدیل فوریه آنها.

مثال :

$$h(t) = e^{-4t} u(t) \longleftrightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+4}$$

$$x(t) = e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2} \qquad y(t) = ?$$

Subject

Date

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+4)(j\omega+2)}$$

* اگر $y(t) = IFT\{Y(j\omega)\}$ را بخواهیم، می‌توانیم آن را در فرمول قرار دهیم که راه حل‌ها سخت می‌شوند و به جای آن از راه حالا استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{A}{j\omega+4} + \frac{B}{j\omega+2}$$

$$\Rightarrow y(t) = A e^{-4t} u(t) + B e^{-2t} u(t), \quad A = -\tfrac{1}{2}, \; B = \tfrac{1}{2}$$

مثال:

$$x(t) = t e^{-2t} u(t), \quad h(t) = e^{-4t} u(t)$$

$y(t) = ?$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+4)(j\omega+2)^2} = \frac{A}{(j\omega+4)} + \frac{B}{(j\omega+2)^2} + \frac{C}{(j\omega+2)}$$

$$Y(j\omega) = Y(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{(s+4)(s+2)^2}\Big|_{s=j\omega}$$

$$C = \frac{d}{ds}\left((s+2)^2 Y(s)\right)\Big|_{s=-2} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \; B = \frac{1}{2}, \; C = \frac{-1}{4}$$

(ex 4.18

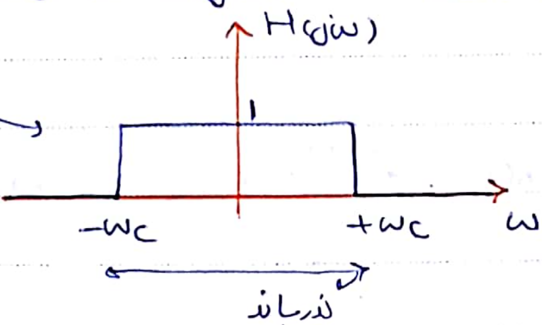
$$\text{input } x(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI Filter}}_{h(t)} \rightarrow \text{output } y(t)$$

$$y(t) = x(t) \underset{\text{پاسخ ضربه}}{*} h(t) \xleftrightarrow{F.T.} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

پاسخ فرکانسی

پاسخ فرکانس

شکل پاسخ ← پاسخ ضربه



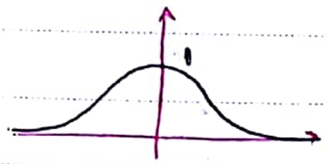
* حاصلضرب $X(j\omega)$ در $H(j\omega)$، در بازه‌ی $-\omega_c$ تا $+\omega_c$ حفظ و سایر نقاط صفر می‌شود.

PAPCO

Ideal lowpass Filter : سیستمی که بخشی از اطلاعات فرکانسی را حفظ کند یکی از مولفه‌های
پایین گذر
دیگر را حذف می‌کند Filtering است.

فرکانس‌های پایین را حفظ می‌کند. ideal ← cut off freq خیلی sharp است.
(تیز)

cut off frequency : نقطه‌ای از stop band به pass band می‌رویم و یا برعکس.



cut off freq کمتر smo th
(غیر ideal)

Subject
Date ۹۸/۱/۳

جلسه دوازدهم

مثال :

* نمونه سوال امتحانی

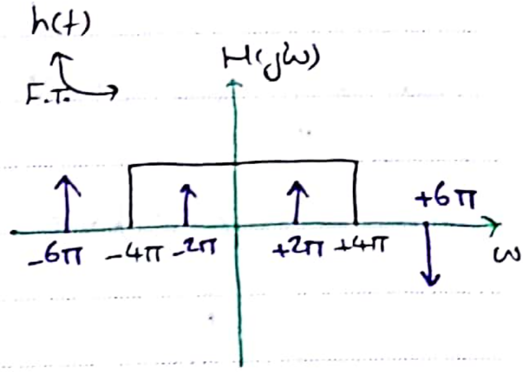
ورودی $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$

پاسخ ضربه $h(t) = \dfrac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$

$y(t) = ?$

کانولوشن / $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

پاسخ فرکانسی



ideal Low-Pass Filter

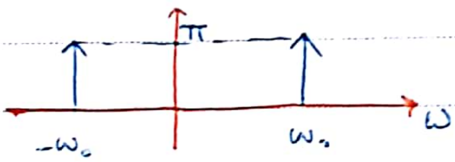
یادآوری :

$p(t)$ is periodic $T_0 \longrightarrow \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

its F.T. $P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$

ضرایب سری فوریه

$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow$



$\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$

$\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow j\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right)$

* بعد از ضرب $X(j\omega)$ در $H(j\omega)$ ، $\sin(6\pi t)$ حذف می شود و با توجه به خاصیت خطی بودن ، $y(t) = \cos(2\pi t)$

مثال :

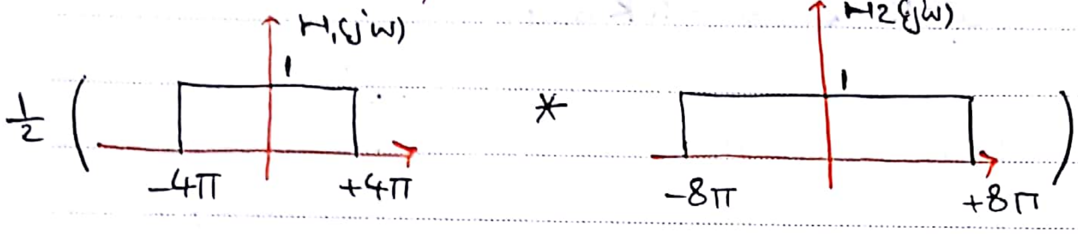
ورودی $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$

پاسخ ضربه $h(t) = \dfrac{\sin(4\pi t)\cdot\sin(8\pi t)}{\pi t^2}$

$y(t) = ?$

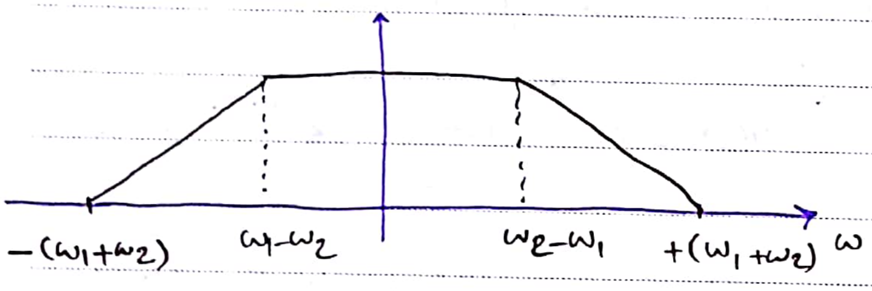
$$h(t) = \cancel{\pi}\,\underbrace{\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}}_{h_1(t)} \underbrace{\cdot}_{\text{ضرب}} \underbrace{\frac{\sin(8\pi t)}{\pi t}}_{h_2(t)}$$

$$\xleftrightarrow{F.T.} H(j\omega) = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\left\{H_1(j\omega) * H_2(j\omega)\right\} \Rightarrow$$

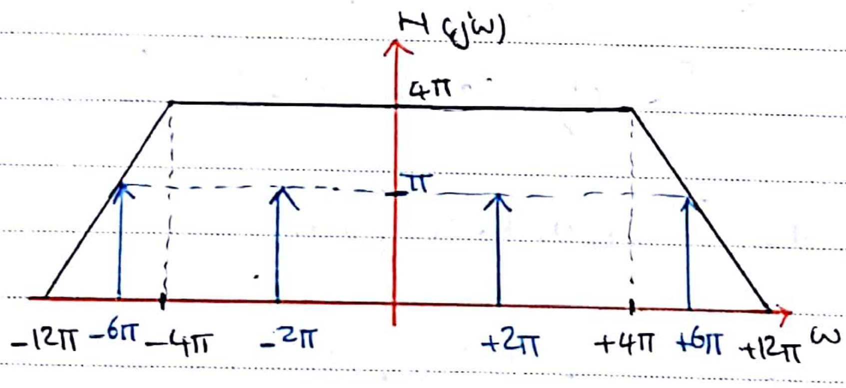


قاعده کلی :

$$2\pi\cdot\frac{\sin(\omega_1 t)}{\pi t}\cdot\frac{\sin(\omega_2 t)}{\pi t} \xleftrightarrow{F.T.}$$



پس خواهیم داشت :



$$y(t) = 4\pi\cos(2\pi t) + 3\pi\sin(6\pi t)$$

Special Signals

اگر تبدیل فوریه سیگنالی $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ باشد $\longleftrightarrow$? $e^{j\omega_0 t}$

$$\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cancel{2\pi}\,\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}\,d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

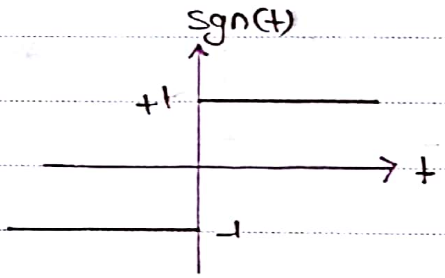
$$e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega \mp \omega_0)$$

if $\omega_0 = 0$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$\text{ثابت } K \longleftrightarrow 2\pi K\,\delta(\omega)$$

signum function $\equiv$ $\mathrm{sgn}(t)$



$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

$\mathrm{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$ براساس پله واحد

$$\mathrm{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}\left[e^{-at}u(t) - e^{+at}u(-t)\right] \xleftrightarrow{F.T.}$$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{j\omega+a} - \frac{1}{a-j\omega}\right) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\right) = \boxed{\frac{2}{j\omega}}$$

$$u(t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{k} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{F.T.} \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)(\cancel{2}\pi\,\delta(\omega)) + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{j\omega} = \boxed{\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{F.T.} X(j\omega)\cdot F.T.\{u(t)\}$$

$$= X(j\omega)\cdot\pi\left(\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \pi X(j0)\,\delta(\omega) + \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$

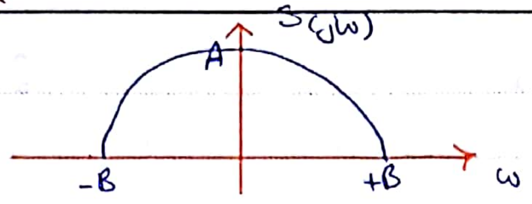
Subject

Date ۹۸,۲,۸

جلسه دهم

(EX 4.21

$S(t) =$



$s(t)$ is band-limited (باند محدود)

سیگنال فقط یک بازه‌ای مقدار دارد و خارج از آن بازه صفر است.

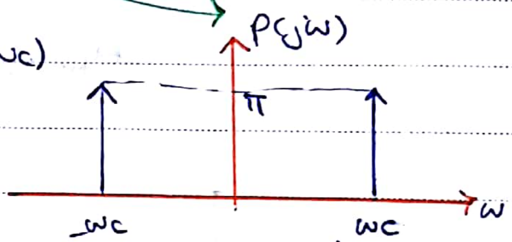
s(t) را در cos ضرب کنیم $\longrightarrow$ $r(t) = s(t) . \underbrace{\cos(\omega_c t)}_{p(t)} \xleftrightarrow{F.T.}$

تبدیل بالای صفحه

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\{S(j\omega) * P(j\omega)\}$$

$$\cos(\omega_c t) \longleftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_c)$$

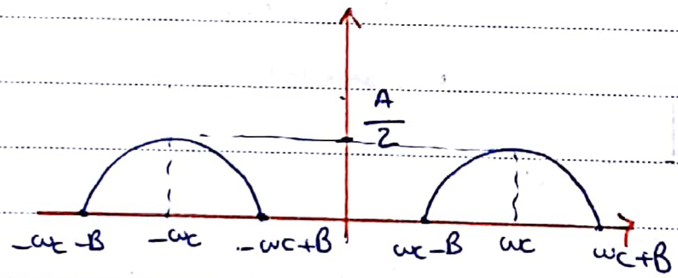
متناوب



$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$

یادآوری :

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$



طبق یادآوری :

وقتی در $\cos(\omega_c t)$ ضرب کنیم، طیف سیگنال به سمت جوری که برای فرکانس تبدیل فوریه است، شیفت پیدا کند (به اندازه سیگنال cos ضرب شده)

* نکته :

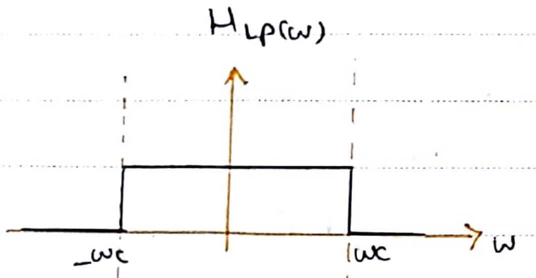
$$\begin{cases} f(t) . \cos(\omega_c t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\{F(j(\omega+\omega_c)) + F(j(\omega-\omega_c))\} \\ f(t) . \sin(\omega_c t) \longleftrightarrow \frac{j}{2}\{F(j(\omega+\omega_c)) + F(j(\omega-\omega_c))\} \end{cases}$$

$$g(t) = r(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

$$r(t) \downarrow s(t) \cdot \cos(\omega_c t) \Rightarrow g(t) = s(t) \cdot \underbrace{\cos^2(\omega_c t)}_{\downarrow}$$

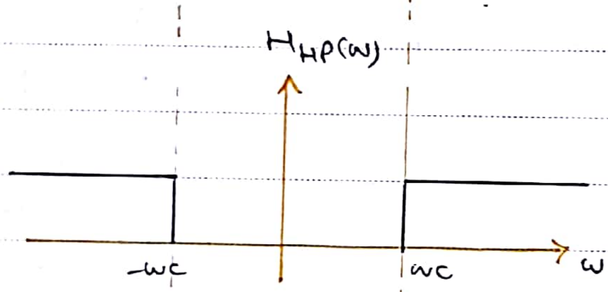
برحسب cos دو برابر زاویه نوشته و تبدیل فوریه می‌گیریم. ...

Filter :



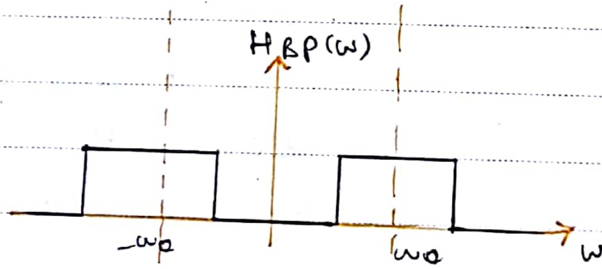
Low_Pass Filter

فرکانس‌های پایین عبور کنند.



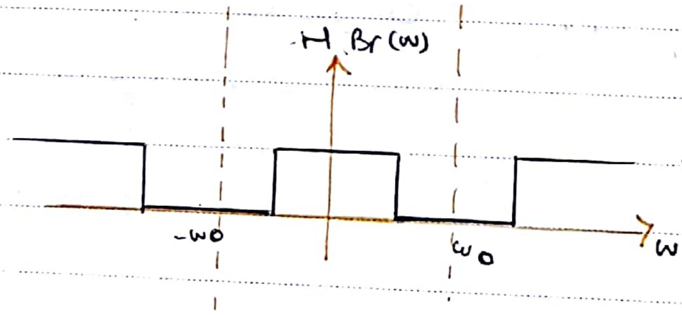
high_Pass Filter

فرکانس‌های بالا را عبور می‌دهد.



Band_Pass Filter

یک بازه مشخصی را اجازه عبور دهد.



Band_reject Filter

یک بازه مشخصی را اجازه عبور ندهد.

1- (Band_Pass Filter)

Band Pass Filter Using Amplitude Modulation :

$$\xrightarrow[x(t)]{\text{ورودی}} \boxed{\begin{matrix} H(j\omega) \\ BPF \end{matrix}} \xrightarrow{\text{خروجی}} \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot \underbrace{H(j\omega)}_{\text{پاسخ فرکانسی}}$$

* $x(t)$ هر پاسخ فرکانسی ای داشته باشد، $y(t)$ هم میل را دارد فقط به اندازه ω_c شیفت به راست دارد.

LTI System

$$\xrightarrow[\text{input-output}]{x(t)} \boxed{\text{LTI system}} \xrightarrow{y(t)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \underset{\uparrow \text{ ضرایب ثابت}}{a_k} \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} \underset{\uparrow \text{ ضرایب ثابت}}{b_k} \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت با در نظر گرفتن خاصیت ها تبدیل فوریه :

① Linearity (خطی)   ② convolution   ③ derivation مشتق

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

از معادله تبدیل فوریه گرفته می شود.

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega) \Rightarrow$$

$$Y(j\omega) \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(j\omega) \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k$$

پاسخ فرکانسی یا Frequency response

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} = \frac{b_M (j\omega)^M + \dots + b_0}{a_N (j\omega)^N + \dots + a_0}$$

چند جمله ای درجه M برحسب $(j\omega)$

مثال:

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$\Longrightarrow H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}\longrightarrow \text{پاسخ ضربه}\quad h(t)=e^{-2t}u(t)$$

اگر $x(t)=e^{-t}$ ، $y(t)=?$ و $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$

- یک راه این است که در معادله قرار دهیم
- یک راه دیگر این است که تبدیل فوریه آن را بنویسیم.

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

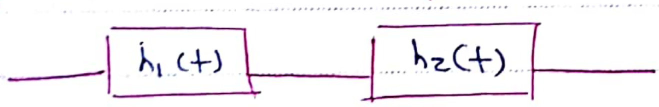
$$Y(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}\times\frac{1}{j\omega+1}=\frac{\overset{-\frac{1}{2}}{\cancel{A}}}{j\omega+2}+\frac{\overset{1}{\cancel{B}}}{j\omega+1}$$

$$\longrightarrow y(t)=\underset{-\frac{1}{2}}{\cancel{A}}e^{-2t}u(t)+\underset{1}{\cancel{B}}e^{-t}u(t)$$

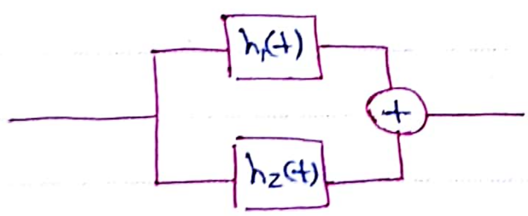
(ex 4.24 & 4.25

$$H(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}=\underbrace{\frac{j\omega+2}{j\omega+1}}_{H_1(j\omega)}\cdot\underbrace{\frac{1}{j\omega+3}}_{H_2(j\omega)}$$

شکل:



اگر $H_1(j\omega)+H_2(j\omega)$ بود شکل آن به صورت زیر می‌شود:



LTI System

زمان $y(t) = x(t) * h(t)$

فرکانس $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

متقارن برحسب ω

تابع اندازه $|Y(j\omega)| = |X(j\omega)| \cdot |H(j\omega)|$

تابع فاز $\measuredangle Y(j\omega) = \measuredangle X(j\omega) + \measuredangle H(j\omega)$

مثال:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t) - \frac{dx(t)}{dt}$$

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega} \longrightarrow |H(j\omega)| = 1$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \boxed{2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

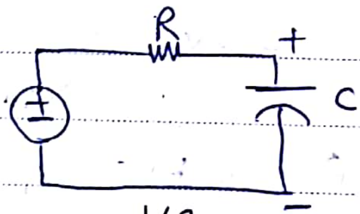
اگر $x(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t)$ ، $y(t) = ?$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\omega = 1$ $\omega = \sqrt{3}$

$a = 1$

$$y(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\sqrt{3}t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

LTI System



$x(t) = v(t)$
input

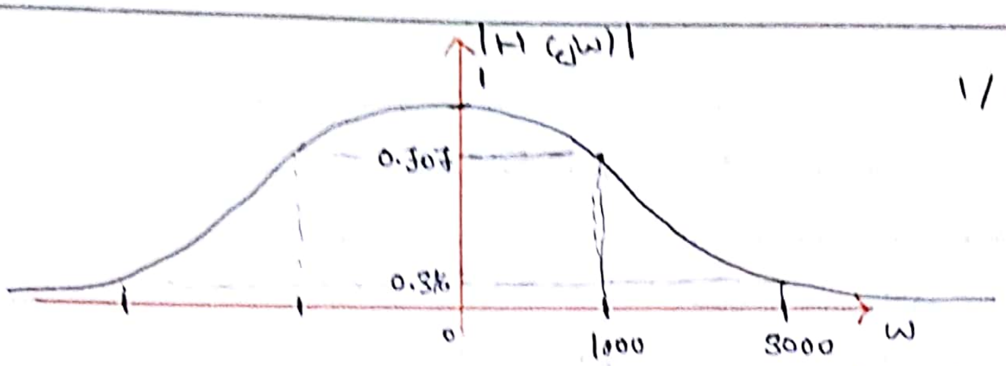
$v(t) = y(t)$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

پاسخ فرکانس $H(j\omega) = \dfrac{1/RC}{(j\omega) + 1/RC}$

پاسخ ضربه $h(t) = 1/RC \; e^{(-1/RC)t} \, u(t)$

$$|H(j\omega)| = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}} , \quad \measuredangle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$



اگر $1/RC = 1000$

* با توجه به پاسخ فرکانسی یک فیلتر low_Pass دارد.

اگر سیگنال ورودی برابر باشد با: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, $y(t) = ?$

$$y(t) = A \cdot |H(j\omega)| \cos(\omega_0 t + \theta + \measuredangle H(j\omega))$$

$1/RC = 1000$

$\longrightarrow$ اگر $\omega_0 = 0$ $\quad y(t) = A(1)\cos(\theta)$

اگر $\omega_0 = 1000$ $\quad y(t) = A(0.707)\cos(1000t + \theta - 45^\circ)$

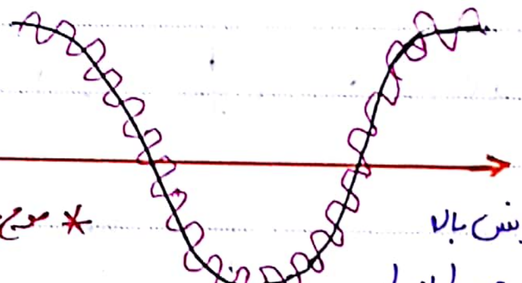
اگر $\omega_0 = 3000$ $\quad y(t) = \underline{A(0.316)}\cos(3000t + \theta - 71.6^\circ)$

حکم فیلتر پایین گذر دارد. ← دامنه اش ۷۰ درصد افت می کند.

اگر سیگنال ورودی برابر باشد با: $x(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$, $y(t) = ?$

$1/RC = 1000$

$\omega_1 = 100$ (فرکانس پایین) , $\omega_2 = 3000$ (فرکانس بالا)



* موج با فرکانس بالا روی سوار یک موج با فرکانس پایین شده

* برای اینکه فرکانس بالا حذف شود ورودی را از مدار RC عبور می دهیم

$$y(t) = A_1 \underbrace{|H(\omega_1)|}_{1} \cos(\omega_1 t + \theta_1 + \measuredangle H(j\omega_1))$$

$$+ A_2 \underbrace{|H(\omega_2)|}_{0.3} \cos(\omega_2 t + \theta_2 + \measuredangle H(j\omega_2))$$

Sampling (نمونه برداری) : برای اینکه سیگنال های زمان پیوسته را به سیگنال های زمان گسسته تبدیل کنیم تا بتوانیم در کامپیوتر ذخیره و پردازش کنیم.

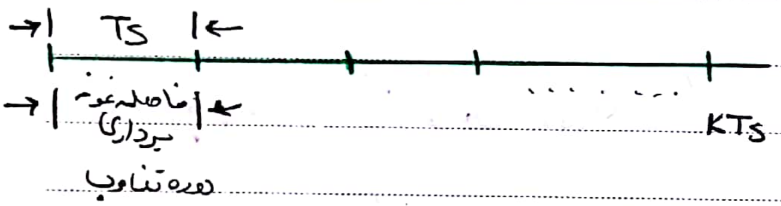
اگر تعداد sample ها زیاد باشد ← حافظه بیشتر نیاز دارد و زمان زیادی می برد

اگر تعداد sample ها کم باشد ← تخمین سیگنال مناسبی برای نمایش یا بیان آن سیگنال زمان پیوسته نخواهد بود.

⇐ نرخ نمونه برداری مهم است.

Representation of CT Signals by its Samples

فاصله ها را یکسان در نظر می گیریم. ; $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$



$x(KT_s)$

اگر یک سیگنال زمان پیوسته داشته باشیم

$$x(t)\Big|_{t=KT_s} = x(KT_s)$$

زمان پیوسته

k = integer, اعداد صحیح

impulse - train Sampling

سیگنال $x(t)$ را در comb ضرب می کنیم

$x(t) \cdot \underbrace{p(t)}_{comb}$

یادآوری: $x(t).\delta(t-T_s) = x(T_s).\delta(t-T_s)$

پس خواهیم داشت: $x(t).p(t) = x(t).\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)}_{comb(t)}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\delta(t-kT_s) \xleftrightarrow[\text{دامنه فرکانسی}]{F.T.} X_p(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\{X(j\omega)*P(j\omega)\}$$

sampling در دامنه زمانی

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cancel{2\pi}\,\cancel{a_k}\,\delta(\omega-k\omega_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega-k\omega_s))$$

$a_k = \frac{1}{T_0}$ ، $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

* وقتی $x(t)$ را در $p(t)$ ضرب می‌کنیم، $X(j\omega)$ در نقاطی از ω_s تکراری شوند
(ر ω_s با T_s در فرمول comb دیده‌ایم)

* با sampling طیف فرکانسی سیگنال در فرکانس‌های نمونه‌برداری تکراری شوند (ضریبی از ω_s)

* اگر سیگنال $x(t)$، محتوای فرکانسی اش بین $(-\omega_M, \omega_M)$ باشد band limited (باند محدود) است.

تداخل فرکانسی: وقتی سیگنال‌ها تو هم می‌افتند ($\omega_s < 2\omega_M$)

قضیه نمونه‌برداری: اگر $x(t)$، bound limited باشد (فرکانس انتها‌ای به بعد صفر است)، فرکانس نمونه‌برداری باید دو برابر max، frequency content سیگنال $x(t)$ باشد. با اینکار بازسازی سیگنال اصلی امکان‌پذیر خواهد بود.

$2\omega_M$: Nyquist rate

ω_M : Nyquist frequency

Subject

Date

مثال:

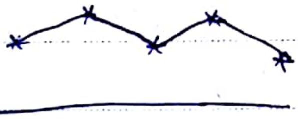
$x(t) = \cos(2\pi t)\cos(6\pi t)$

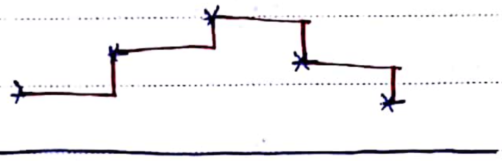
→ طبق روابط مثلثاتی

$\omega_M = 8\pi$

→ 16π ماکسیمم نرخ

* اگر یک سیگنال گسسته داشته باشیم، می‌خواهیم آن را بازیابی کنیم، می‌توانیم نقطه‌ها را به هم وصل کنیم و جمع آنها را بدست آوریم. مدل‌های خطی نام دارد.





* zero _ order hold

sample قبلی را تا sample جدید تکرار می‌کنیم.

overlapping in Frequency-Domain : Aliasing

aliasing یعنی طیف فرکانس‌ها باهم تداخل پیدا کنند و ما نمی‌توانیم آنها را بازسازی کنیم.

"SS_8"

FM : فرکانس را تغییر می‌دهد

وقتی دو سیگنال را جمع می‌کنیم چون فرکانس‌ها یکسان است، AM جمع می‌شود.

modulation یک سیگنال اطلاعات را بر سیگنال دیگری embede می‌کنیم.

demodulation بازیابی سیگنال embede شده.

اگر یک سیگنال اطلاعات ما Band-limited (باند محدود) است داشته باشیم، (باند محدود: یعنی
در یک بازه محدود تبدیل فوریه‌اش وجود داشته باشد) این نوع سیگنال‌ها، low energy هستند.
و برای اینکه بتوان آنها را ارسال کرد، نیاز است یک سیگنال حامل داشته باشیم که به آن
carrier signal می‌گوییم.

"اسلاید ۶ و ۷"

$x(t)$: سیگنال اطلاعات low frequency signal

$c(t)$: تابع exponential (با فرکانس ω_c) و اختلاف فاز داریم.

$x(t) \cdot c(t)$

Band-limited ← که بین $[-\omega, +\omega]$ محدود می‌شود (مربوط به فرکانس‌ها فرکانس است).

* با فرض که در خصوصیات تبدیل فوریه داشتیم، اگر یک سیگنال در یک سیگنال exponential ضرب شود تبدیل فوریه آن شیفت می‌یابد.

$\boxed{\theta_c = 0}$ و $\boxed{\text{بدون اختلاف فاز}}$

$$x(t) \cdot \cos(\omega_c t) = x(t) \cdot \left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \right)$$

فرکانس carrier

فرکانس بر حسب سیگنال‌ها

$$= \underbrace{\frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_c t}}_{\text{شیفت به راست ایجاد می‌کند}} + \underbrace{\frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_c t}}_{\text{شیفت به چپ ایجاد می‌کند}}$$

در حوزه زمانی

* محاسبه $y(t)$، $Y(j\omega), C(j\omega), X(j\omega)$ در فرکانس انجام می‌شود.

* ضرب سیگنال carrier و اطلاعات هم در فرکانس است ولی در حوزه زمانی.

در اسلاید ۸: modulation شیفت به سمت چپ

demodulation شیفت به سمت راست

Subject
Date

* دمدولیده $y(t)$ را گرفته و $c_d(t)$ ضرب کرده و $x(t)$ جدای شود وجود $e^{-j\omega_c}$ ضرب می‌کنیم تا شیفتی که داده شده بود به جای خود برگردانده شود.

اسلاید ۹ و ۱۰

* سیگنالی که می‌خواهیم اطلاعات را با آن بفرستیم باید فرکانس بالا داشته باشد چون انرژی بیشتر دارد و باید تقریبا بزرگ باشد که تداخل فرکانسی به وجود نیاید.

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\omega_c)) + X(j(\omega+\omega_c))\right]$$

دمدولیده: $y(t)$ را با $\cos(\omega_c t+\theta_c)$ ضرب می‌کنیم و طبق فرض داریم: $\theta_c = 0$

$$\begin{aligned}
w(t) &= y(t) \cdot \cos(\omega_c t) \\
&= x(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) \\
&= x(t)\left(\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2}\right)
\end{aligned}$$

(روابط مثلثاتی)

$$= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t) \xleftrightarrow{F.T.}$$

$$\frac{1}{2}X(j\omega) + \frac{1}{4}\left(X(j(\omega+2\omega_c)) + X(j(\omega-2\omega_c))\right)$$

فیلتر حذف می‌کند

در اسلاید 15: اگر θ_c صفر نباشد (اختلاف فاز داریم)، تغییری کند در amplitude جابه‌جایی که در سیگنال $x(t)$ به وجود آید داریم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

روش های غیرهمزمان Asynchronous :

سیگنال اطلاعات در ... envelope سیگنال حاصل ضرب است. پس می توانیم یک مدار

envelope detector ارائه کنیم که سیگنال envelope را بگیرد و خود سیگنال را بدهد.

مدار RC است که سر راهش یک دیود دارد و حول دیود در وسط است، بایاس کننده است.

سطح خازن با افزایش ولتاژش شارژ می شود و مقاومت را دشارژ می کند.

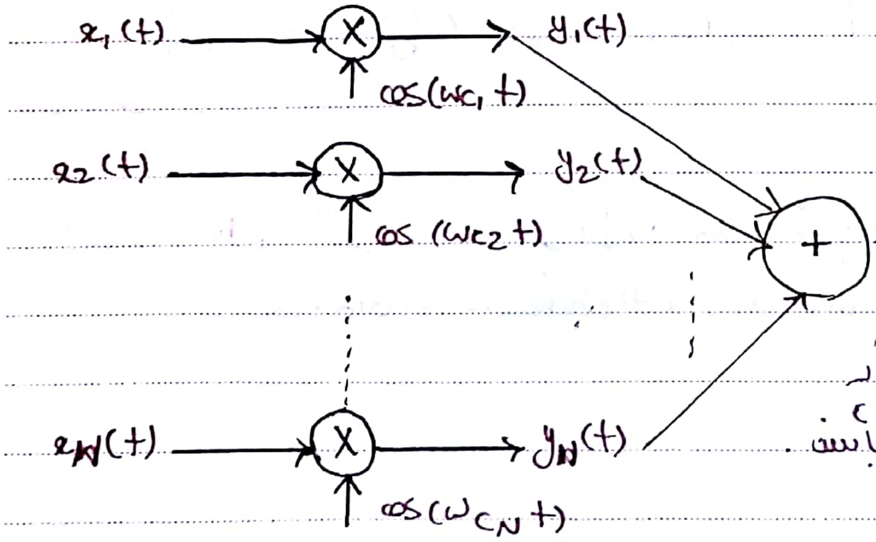
پس: مدار RC، شارژ و دشارژ، envelope یک سیگنال را detect می کند.

در قسمت های منفی سیگنال متفاوت با سیگنال ورودی می شود و به اشتباه detect می شود پس باید

آن را شیفت دهیم به این صورت که با یک مقدار ثابت جمع شود تا مثبت شود.

FDM Using Sinusoidal AM:

اگر n تا سیگنال داشته باشیم و بخواهیم n تا سیگنال در کانال ارتباطی (کانال مخابراتی، با پهنای باند هوا و ...) ارسال کنیم:

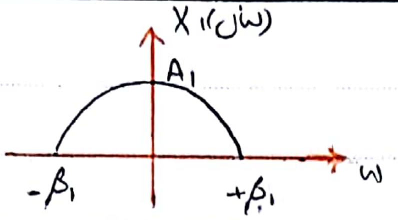


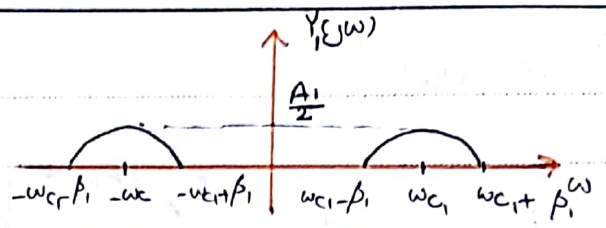
$$v_i(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\cdot\cos(w_{c_i}t)$$

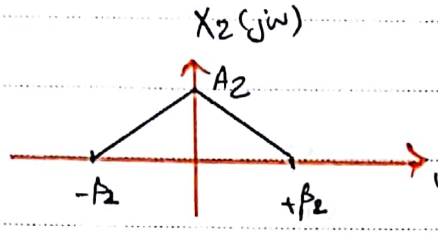
w_{ci} ها را بطوری انتخاب کنیم که با هم overlap نداشته باشند.

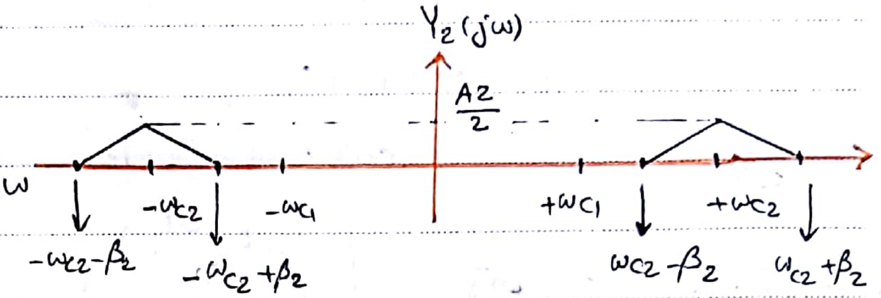
Subject

Date









Frequency-division multiplexing

فرکانس را بین سیگنال‌های اطلاعات تقسیم‌بندی می‌کنیم.

"SS_3"

Subject

Date ۹۸/۲/۲۲

جلسه بیستم

" اسلاید 60 "

* C.T. $\phi_k(t) = \left\{ e^{jk\omega_0 t} \right\} \longrightarrow T_0$ مشترک با دوره تناوب

از روی T_0، ω_0 بدست می‌آید

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

بی‌نهایت سیگنال داریم

* D.T. $\phi_k[n] = \left\{ e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \right\}$ متناوب با دوره تناوب N

مجموعه سیگنال‌های نمایی پایه‌ای مختلط

مختلط‌ها فقط

$k = \underbrace{0, 1, \dots, N-1}_{N \text{ تا}}$ تعداد محدودی سیگنال داریم

$\phi_k[n] = \phi_{k+N}[n] = \dots = \phi_{k+rN}[n]$

در ضریب صحیح تکرار می‌شود.

N تا صحیح یک دوره تکراری هستند.

$x[n]$ is periodic (N) $\xrightarrow{\text{سری فوریه}}$

$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n]$ (kها، N تا متوالی انتخاب بشند)

$\xrightarrow[\text{فوریه}]{\text{ضرایب سری}}$ $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

$e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$ دو طرف را $\longrightarrow$ ضرب می‌کنیم

یادآوری: $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$ ضریب صحیح

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, lN \\ \frac{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

PAPCO

$$= \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \dots, lN \\ 0 & O.W \end{cases}$$

اگر $k=r$ باشد حالت

$$N = e^{j(k-r)(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}} \quad \text{analysis معادله}$$

ضرایب طیفی (برای D.T.)

$$a_k = a_{k+N}$$

* ضرایب سری فوریه پریودیک است و دوره تناوب آن N است.

مثال)

$$x[n] = \sin\left[\frac{\pi(n-1)}{4}\right] \qquad N=8$$

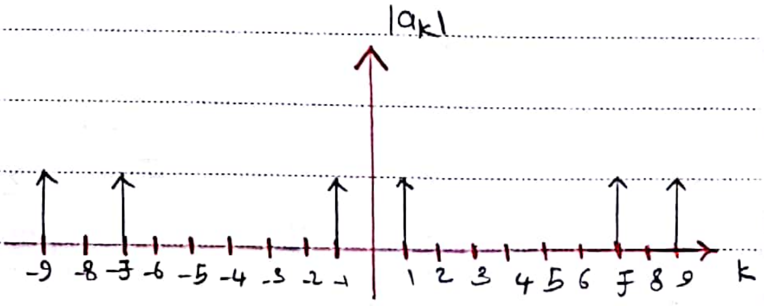
$$x[n] = \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\pi(n-1)}{4}} - e^{-j\frac{\pi(n-1)}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi n}{4}}}_{e^{2j\frac{\pi n}{8}}} - e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi n}{4}}}_{e^{-2j\frac{\pi n}{8}}}\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{-j}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{j}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$a_k = a_{k+8}$$



Subject

Date

مثال:

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad -2 \leq n \leq 3$

یک دوره تناوب

$N = 3-(-2)+1 = 6$

$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

یک دوره تناوب

$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jk\frac{2\pi}{6}n}$

* در امتحان ها باید بسته باشد

با توجه به $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$ و $m = n+2$ قرار دادن

$a_k = \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} e^{-jk\frac{2\pi}{6}(m-2)}$

$= \frac{1}{6}(2^2) \cdot e^{+jk\frac{4\pi}{6}} \sum_{m=0}^{5} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{6}m}}_{\left(\frac{1}{2} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{6}}\right)^m}$

$a_k = \frac{4}{6} e^{jk\frac{4\pi}{6}} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2} e^{-jk\frac{2\pi}{6}}\right)^{6}}{1-\frac{1}{2} e^{-jk\frac{2\pi}{6}}} \right)$

$= \frac{4}{6} \times \cancel{e^{jk\frac{4\pi}{6}}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\cancel{e^{jk\frac{4\pi}{6}}}\left(e^{-jk\frac{4\pi}{6}} - \frac{1}{2} e^{-jk\pi}\right)}$

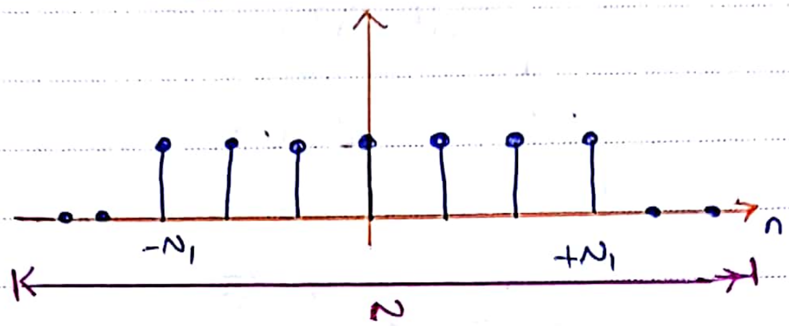
(ex 3.11 از رابطه اویلر استفاده کردیم.

(ex 3.12 دوره تناوب را از $-\frac{N}{2}$ تا $+\frac{N}{2}$ گرفتیم

$1-e^{-j\theta} = e^{-j\frac{\theta}{2}} \cdot e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}} \cdot e^{-j\frac{\theta}{2}}$

$$= e^{-j\frac{\theta}{2}} \left(2j \cdot \frac{e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}}}{2j} \right) = e^{-j\frac{\theta}{2}} \cdot 2j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$\xleftrightarrow{F.S.}$



ضرایب حقیقی شده

$$a_k = \frac{1}{N} \underbrace{\left[\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) k \left(N_1 + \frac{1}{2}\right) \right]}_{\sin\left[\left(\frac{\pi}{N}\right) k\right]}$$

$k = 0, \dots, N-1$

$k = \langle N \rangle$

* سیگنال هایی که حقیقی و even هستند ضرایبشان هم حقیقی و even می‌شود.

اسلاید 69" هرچه N بزرگتر شود، اندازه پالس‌ها کوچکتر می‌شود.

اگر Na_k را برحسب k رسم کنیم اندازه ها یکی می‌شود.

پالس باریک‌تر ← شبیه‌تر شدن ضرایب به sinc

پالس پهن‌تر ← شبیه‌تر شدن ضرایب به ضربه

* اگر از همه ضرایب استفاده نکنیم (برای بازسازی)، سیگنال اولیه تخریب شده اما شبیه سیگنال اولیه به دست می‌آید.

جلسه بیست و یکم

خلاصه‌ای از قبل:

سری فوریه برای سیگنال های زمان گسسته

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Periodic — $\phi_k[n]$

هر دوره تناوب (N) — N تا مقدار

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

ضرایب طیفی — هر دوره تناوب

* مهم‌ترین تفاوت ها نسبت به .C.T ← $x[n]$ در بازه محدودی جواب متناوب دارد
← ضرایب سری فوریه متناوب هستند $a_k = a_{k+N}$

اگر $\tilde{x}[n]$: متناوب Periodic با دوره تناوب N : سیگنال $\tilde{x}[n]$ تبدیل به سیگنال غیر پریودیک و غیر متناوب $x[n]$ می‌شود

$$Na_k \rightarrow X(e^{j\omega})$$

ضرایب سری فوریه — تابع پیوسته

تبدیل فوریه زمان گسسته (DTFT)

* خصوصیات از روی اسلاید ها خوانده شود

Time shifting

* مهم داشتجوی $\begin{cases} e^{j\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}n} & x[n] \longleftrightarrow a_{k-\frac{N}{2}} \quad \text{شیفت به } \frac{N}{2} \text{ اندازه } a_k \\ e^{j\pi n} & x[n] = (-1)^n x[n] \end{cases}$

$a_k \circledast b_k$ — پریودیک

$a_k * b_k$ — غیرپریودیک

تمرین تحویلی

اگر $x[n] \longrightarrow a_k$
(N متناوب $x[n]$) ← متناوب a_k

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

، ضرایب سری فوریه $y[n]$ را برحسب سری فوریه $x[n]$ بنویسید.

$x[n]$ بخواهیم بدست آوریم ، آیا متناوب خواهد بود؟ پریود آن چند خواهد بود؟ (N زوج ← پریودیک

N فرد ← با 2N پریودیک می‌شود)

$y[n]$ را به شکل روبه‌رو هم می‌توان نوشت: $\frac{1}{2}\left(x[n] + (-1)^n x[n]\right)$

First Difference معادل مشتق برای سیگنال‌های C.T. است.
D.T. ←

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT) تبدیل فوریه زمان گسسته

Discrete Fourier Transform (DFT) همراه هم هستند
(FFT)
Fast Fourier Transform

DTFT یک سیگنال گسسته ← تابع پیوسته
DFT یک سیگنال گسسته ← تابع گسسته

یک سیگنال غیرمتناوب $\tilde{x}[n]$ طبیعی و N را بی نهایت می بریم ($N \to \infty$)

$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow a_k$

$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow x[n]$ متناوب

DTFT of $x[n]$ $Na_k \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

پیوسته و متناوب (2π)

اگر $\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{N}$ قرار دهیم، $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ می شود.

$k = 0, 1, \dots, N-1$

* اگر دوره تناوب سیگنال پریودیک را به سمت بی نهایت ببریم سیگنال پریودیک به غیرپریودیک تبدیل می شود و فرکانس یک تابع پیوسته می شوند. ← $x[n]$ DTFT

$x[n]$ is aperiodic غیرمتناوب

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]\} \equiv X(e^{j\omega})$$

پیوسته برحسب ω و متناوب با دوره تناوب 2π

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})\, e^{+j\omega n}\, d\omega$$

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$$

Subject

Date

ex 5.1) تابع مختلط ، پیوسته ، متناوب (2π)

$$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$1-a(\cos(\omega)-j\sin(\omega)) = 1-a(\cos(\omega)+j\sin(\omega))$$

در مزدوج مخرج ضرب می کنیم و به ω مقداری دهیم ← imaginary و real را رسم می کنیم

ex 5.2)

$$\sum_{m=0}^{\infty}(ae^{j\omega})^m = 1$$

Subject

Date ۹۸/۲/۲۹

جلسه بیست و دوم

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

$X(\Omega)$

$X(e^{j\Omega})$

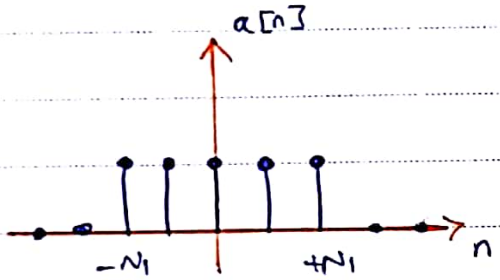
تابع پیوسته و متغیر پیوسته (ω)

متناوب (دوره تناوب 2π)

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

$|a|<1$

* سیگ دوره تناوب، فرکانس های پایین اطراف صفر و 2π و فرکانس های بالا اطراف π هستند.

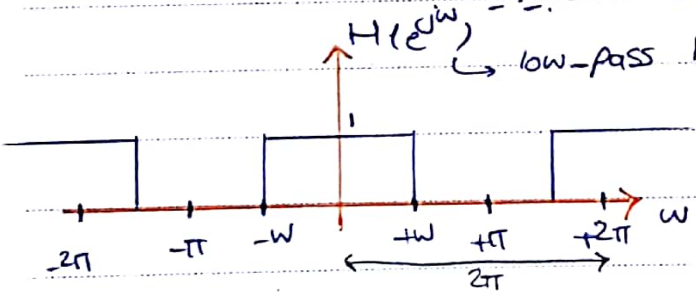


$$\longleftrightarrow \frac{\sin\left(\omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$\delta[n] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta[n]\, e^{-jn\omega}}_{\delta[n] f[n] = \delta[n] f[0]}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1 \quad \forall\omega$$

سیگنالی داریم که تبدیل فوریه آن بصورت زیر است. $h[n]$ را بیابید.



$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} H(e^{j\omega})\, e^{+j\omega n}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{+\omega} 1\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{-\omega}^{+\omega} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{jn}\left[\frac{e^{j\omega n}-e^{-j\omega n}}{2j}\right] = \frac{\sin(\omega n)}{\pi n}$$

Subject

Date

$$h[n] = \frac{\sin(\omega n)}{\pi n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\omega}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega n}{\pi}\right)$$

در بحث سری فوریه گسسته :

پاسخ یک سیستم LTI به سری فوریه (سیگنال های نمایی)

$x[n]$ is Periodic (N) :

F.S. of $x[n]$ is $\quad x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad a_k = a_{k+N}$

$$\underbrace{x[n] = e^{j\Omega n}}_{\text{نمایی و گسسته}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI system}\\ h[n]\end{array}} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{j\Omega(n-k)} = \underbrace{e^{j\Omega n}}_{\text{سیگنال ورودی}} \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot e^{-j\Omega k}}_{H(e^{j\Omega})}$$

حال اگر ورودی به شکل زیر باشد، خروجی را بیابید.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\overbrace{k\frac{2\pi}{N}}^{\Omega_k}n} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI system}\\ h[n]\end{array}} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \underbrace{a_k H(e^{j\Omega_k})}_{b_k} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

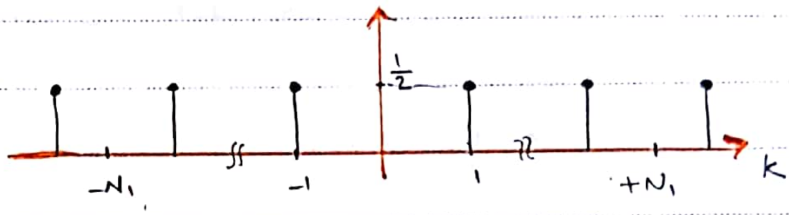
Subject
Date

مثال: یک سیستم LTI داریم که درآن $x[n]=\cos(\frac{2\pi}{N}n)$ و $h[n]=\alpha^n . u[n]$ باشد، $y[n]$ را بیابید.

$$x[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$$

$k=1 \qquad k=-1$



$$h[n]=\alpha^n u[n] \longleftrightarrow H(e^{j\Omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}}$$

$$\Omega=k\frac{2\pi}{N}$$

$$b_k=a_k \times \frac{1}{1-\alpha e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

تبدیل فوریه سیگنال‌های پریودیک:

* ما داریم:

C.T. $\quad \underline{e^{j\omega_0 t}} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

نمایی

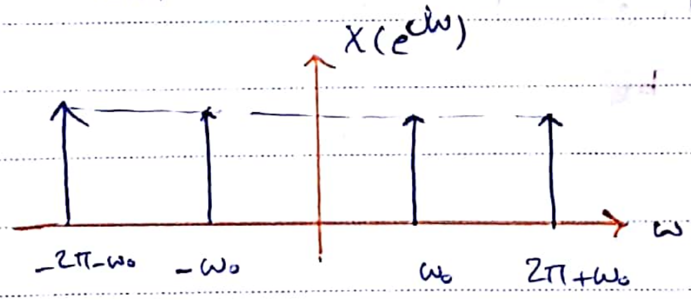
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

D.T. $\quad e^{jn\omega_0}=\ ? \longleftrightarrow \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi\ell)=X(e^{j\omega})$

چون پریودیک است

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})\,e^{+jn\omega}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\underbrace{e^{+jn\omega}}_{f(n)}\,d\omega$$

$$=e^{jn\omega_0}$$



Subject

Date

$$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jn\omega_0 k} \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{l=-N}^{+N} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi l\right)$$

$$\left(\omega_0 k = \frac{2\pi}{N} k\right) \qquad = \sum_{k=-N}^{+N} 2\pi a_k \, \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

تبدیل فوریه سیگنال D.T. پریودیک

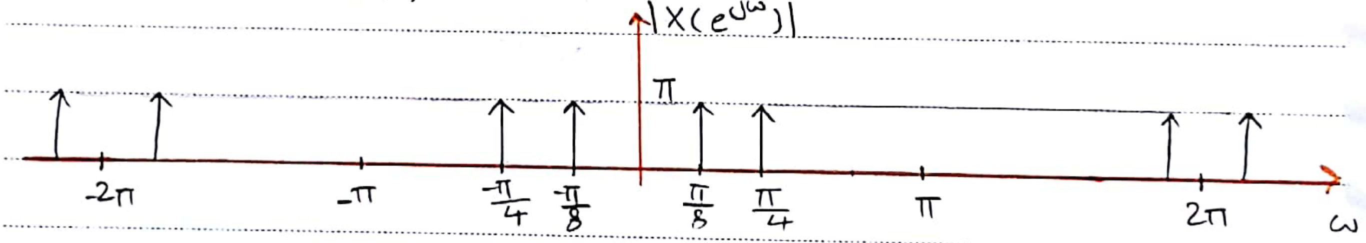
مثال: $x[n] = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)}_{\text{Periodic}} - \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}_{\text{Periodic}} \longleftrightarrow X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega})$

$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2j} \leftarrow N_1 = 16 \leftarrow x_1[n]$ $\qquad$ $x_2[n] \longrightarrow N_2 = 8 \rightsquigarrow a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$

* حاصل جمع دو سیگنال پریودیک، یک سیگنال پریودیک می شود

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \, \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{16}\right)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \, \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{8}\right)$$



4 تا impulse یک دوره تناوب

* خواص تبدیل فوریه زمان گسسته از روی اسلاید ها مطالعه شود

جابجایی در فرکانس

$$\begin{cases} e^{j\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X\left(e^{j(\omega - \omega_0)}\right) \\ e^{j\pi n} x[n] \longleftrightarrow X\left(e^{j(\omega - \pi)}\right) \end{cases} \qquad \omega_0 = \pi$$

$(-1)^n x[n]$

π تا شیفت

Subject
Date

$$\begin{cases} h[n] \longrightarrow \text{Low Pass Filter} \\ (-1)^n h[n] \longrightarrow \text{high Pass Filter} \end{cases}$$

تو نزدیکی π مقدار بگیرد

$$x[n] \cdot \cos(\omega_0 n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} ?$$

$$x[n] \cdot \left(\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} x[n] + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} x[n]$$

$$\xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2} X\left(e^{j(\omega - \omega_0)}\right) + \frac{1}{2} X\left(e^{j(\omega + \omega_0)}\right)$$

$$\text{DTFT}\left\{ \alpha^n \cos\left(\frac{2\pi}{8} n\right) u[n] \right\} = ?$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{8} n\right) \qquad h[n] = \alpha^n u[n]$$

$$\frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Subject

Date ۹۸/۲/۳۱ جلسه بیست و سوم

DTFT : Discrete Time Forier Transform

خلاصه‌ای از قبل :

$$\text{DTFT}\{\underbrace{x[n]}_{\text{گسسته}}\} \equiv X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\omega})\, e^{+j\omega n}\, d\omega$$

یک دوره تناوب

$X(e^{j\omega})$ is continuos ω & Periodic 2π

چند سیگنال مهم :

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$|a|<1$

$$(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\omega-\pi)})$$

properties: $x[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \times e^{-jn_0\omega}$

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\Omega_0)})$$

$e^{j\pi n} = (-1)^n$ ، $\Omega_0 = \pi$ باشد ، اگر *

DTFT for Periodic Signals

اگر دوره تناوب N_0 باشد.

$$\underbrace{x[n]}_{\text{سری فوریه}} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{N})$$

$k = 0, \dots, N-1$

$= 1, \dots, N$

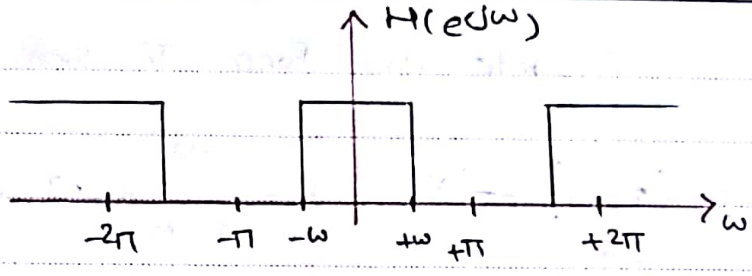
$= r, \dots, N+r$

قطار ضربه

Pulse train

P4PCO

$h[n] = ?$ $\longleftrightarrow$



$$h[n] = \frac{\sin(\omega n)}{\pi n} = \frac{\omega}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega n}{\pi}\right)$$

Differencing & Accumulation: معادل مشتق و انتگرال در CTFT است.

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$
$|a|<1$

$$n \cdot a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right\}$$

$$(n+1)\, a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}\, a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$$ $r \rightarrow$ integer

Time expansion : بین sample ها تغییری نداریم.

ex 5.12) فیلتر پایین گذر

ex 5.13)

$$y[n] = \frac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1-be^{-j\omega}}$$ $\boxed{s = e^{+j\omega}}$

$\xrightarrow{A}$

$$Y(s) = \frac{A}{1-as^{-1}} + \frac{B}{1-bs^{-1}} \rightarrow s^{-1} = \frac{1}{a}$$

طرفین معادله را در $(1-as^{-1})$ ضرب می‌کنیم و
قرار داده شود.

$$(1-as^{-1})\,Y(e^{j\omega}) = \frac{1 \times (1-as^{-1})}{(1-as^{-1})(1-bs^{-1})}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A}{1} + \frac{B(1-as^{-1})}{(1-bs^{-1})}\right)\Bigg|_{s^{-1}=\frac{1}{a}} \rightarrow A = \frac{1}{1-bs^{-1}}\Bigg|_{s^{-1}=\frac{1}{a}} = \frac{a}{a-b}$$

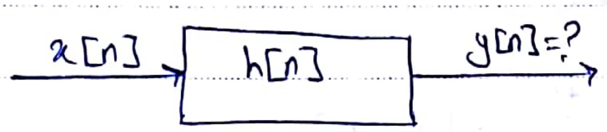
$$\Rightarrow B = (1-bs^{-1})\,Y(s)\Big|_{s^{-1}=b^{-1}}$$

Subject
Date ۹۸/۳/۵

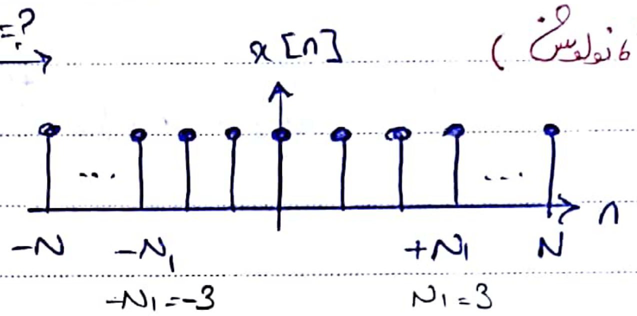
جلسه بیست و چهارم

$$x[n]\cdot\cos(\Omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j(\omega+\Omega_0)}) + X(e^{j(\omega-\Omega_0)})\right]$$

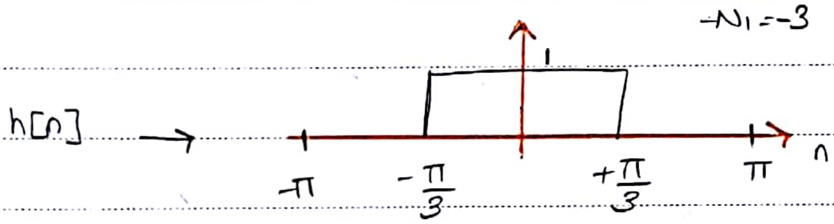
$$\text{DTFT}\left\{\left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cos\left(\tfrac{\pi n}{2}\right) u[n]\right\} \rightarrow \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$



(مثال از کانولوشن)



$$h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}$$



پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = ?$$

ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب

$$X(e^{j\omega}) = \sum 2\pi a_k \,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

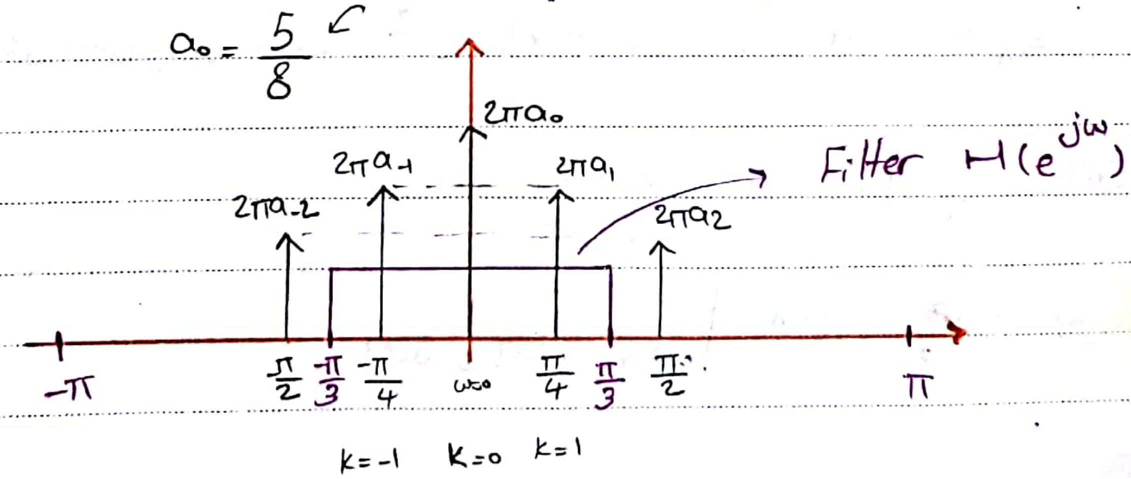
سری فوریه

$$a_k = \frac{1}{N} \times \frac{\sin\left[2\pi k\left(N_1+\frac{1}{2}\right)/N\right]}{\sin\left(\frac{2\pi k}{2N}\right)} \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

$$a_0 = \frac{2N_1+1}{N}$$

* فرض کنیم $N_1 = 2$ باشد دوره تناوب $N = 8$ باشد.

$$a_0 = \frac{5}{8}$$



Subject
Date

$$Y(e^{j\omega}) = \cancel{2}\pi a_0 \delta(\omega) + \cancel{2}\pi a_1 \delta(\omega + \frac{\pi}{4}) + \cancel{2}\pi a_{-1} \delta(\omega + \frac{\pi}{4})$$

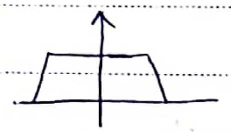
* برای بدست آوردن $y[n]$ ، باید $Y(e^{j\omega})$ را در $\frac{1}{2\pi}$ ضرب کنیم در با اینکار 2π ها حذف می شوند و همچنین $a_1 = a_{-1}$

$$y[n] = \frac{5}{8} + \cancel{a_1}^{\frac{1}{\pi}} \cos(\frac{\pi}{4} n)$$ با جایگذاری بدست می آید

با h قبل و $x[n] = \sum_{k=-N}^{+N} \delta[n-8k]$ و پریودیک باشد با $N = 8$ ، $y[n] = ?$

$$a_k = \frac{1}{N} = \frac{1}{8}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$$ شکل قبل فقط a_k جاعوض می شود.



این شکلی می شود (ex 5.15

LTI System

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$ Difference Eq.

$$a_N y[n-N] + a_{N-1} y[n-N-1] + \dots + a_1 y[n-1] + a_0 y[n]$$

$$= b_M x[n-M] + \dots + b_0 x[n] \quad \mathrm{I}$$ معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

$$y[n] - \frac{1}{9} y[n-2] = x[n]$$

پاسخ ضربه $h[n] = y[n] \Big|_{\text{when } x[n] = \delta[n]}$

از معادله (I) تبدیل فوریه زمان گسسته گرفته می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} \; Y[e^{j\omega}] = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} \; X[e^{j\omega}]$$

$$Y[e^{j\omega}] \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} = X[e^{j\omega}] \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} \quad \text{(II)}$$

یادآوری خاصیت کانولوشن

$$\underbrace{Y[e^{j\omega}]}_{\text{خروجی}} = \underbrace{X[e^{j\omega}]}_{\text{تبدیل فوریه سیگنال ورودی}} \cdot \underbrace{H[e^{j\omega}]}_{\text{تبدیل فوریه سیگنال } h[n]}$$

$$H[e^{j\omega}] = \frac{Y[e^{j\omega}]}{X[e^{j\omega}]}$$

از معادله (II) داریم:

$$H[e^{j\omega}] = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}} = \frac{b_M e^{-jM\omega} + \dots + b_0}{a_N e^{-jN\omega} + \dots + a_0}$$

مثال: $y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n] \;, \quad h[n] = ?$

$$H[e^{j\omega}] = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}} \xrightarrow{S = e^{-j\omega}} \frac{2}{1 - \frac{3}{4} S + \frac{1}{8} S^2}$$

$$= \frac{2}{(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = A \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + B \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$A = \left(1 - \frac{1}{2} S\right) H(S) \Big|_{S=2}$$

$x[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n u[n]$

$\downarrow$

$X[e^{j\omega}]$ ✓

با $h[n]$ قبل و

$y[n] = ?$

$\hookrightarrow Y[e^{j\omega}] = X[e^{j\omega}] \cdot H[e^{j\omega}]$ ✓

اتصال دو سیستم بصورت سری

$$\underbrace{\underset{\text{ورودی}}{x[n]} \rightarrow \boxed{\text{سیستم } 1}_{h_1[n]} \xrightarrow{w[n]} \boxed{\text{سیستم } 2}_{h_2[n]}} \rightarrow \underset{\text{خروجی}}{y[n]}$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}}_{H_1[e^{j\omega}]} \times \underbrace{\frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}}_{H_2[e^{j\omega}]}$$

$$H_1[e^{j\omega}] = \frac{W[e^{j\omega}]}{X[e^{j\omega}]} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \rightarrow w[n] - \frac{1}{2}w[n-1] = 2x[n]$$

$$H_2[e^{j\omega}] = \frac{Y[e^{j\omega}]}{W[e^{j\omega}]} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = w[n]$$

جلسه بیست‌وپنجم

D.T. LTI System

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

از خاصیت های تبدیل فوریه زمان گسسته استفاده شود ، LTI انسیتم Frequency Response پیدا می شود.

$$H[e^{j\omega}] = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega}}$$

$\leftarrow h[n]$ بدست می آید

مثال: $y[n] - \frac{1}{9} y[n-2] = x[n]$, $H[e^{j\omega}] = ?$

$h[n] = ?$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{9} e^{-j2\omega}}$$

$S = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{A}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$A \to \frac{1}{2}$, $B \to \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} A = B \\ A + B = 1 \end{cases} \longrightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{3})^n u[n] + (\tfrac{-1}{3})^n u[n]\right]$$

$y[n] = ?$ when $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \overbrace{H(e^{j\omega})}^{\text{از معادله تفاضلی بدست آمده}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})^2} = \frac{A}{(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \frac{C}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})^2}$$

$A \to \frac{1}{4}$, $B \to \frac{1}{4}$, $C \to \frac{1}{2}$

Subject
Date

$$y[n] = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

مثال :

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-4]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 2e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

→ درجه 4

→ درجه 2

* وقتی درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد باید صورت را به مخرج تقسیم کرد تا جایی که درجه صورت حداقل یکی از مخرج کمتر شود.

نمایش بلوکی این سیستم : اتصال سری چند زیر سیستم

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(1 - e^{j2\omega})(1 - e^{-j2\omega})}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$x[n]$ → سیستم 1 → $w[n]$ → سیستم 2 → $y[n]$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\omega})}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j2\omega})$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{W(e^{j\omega})} = (1 - e^{-2j\omega}) \longrightarrow y[n] = w[n] - w[n-2]$$

معادله تفاضلی زیر سیستم 1

$$w[n] - \frac{1}{4}w[n-1] - \frac{1}{8}w[n-2] = x[n] - x[n-2]$$

مثال : $x[n]$ ورودی و $y[n]$ خروجی است.

$$\text{I}\;\begin{cases} y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + w[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = \frac{2}{3}x[n] \\ \text{II}\;\; y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] = \frac{5}{3}x[n] \end{cases}$$

معادله تفاضلی این سیستم ؟

Take DTFT of I & II

$$\text{DTFT I}\quad (1+\frac{1}{4}e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) + (1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})W(e^{j\omega}) = \frac{2}{3}X(e^{j\omega})$$

$$\text{DTFT II}\quad (1-\frac{5}{4}e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) + (2-2e^{-j\omega})W(e^{j\omega}) = \frac{5}{4}X(e^{j\omega})$$

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\frac{2}{3}X(e^{j\omega}) - (1+\frac{1}{4}e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})}$$

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\frac{5}{4}X(e^{j\omega}) - (1-\frac{5}{4}e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})}{(2-2e^{-j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

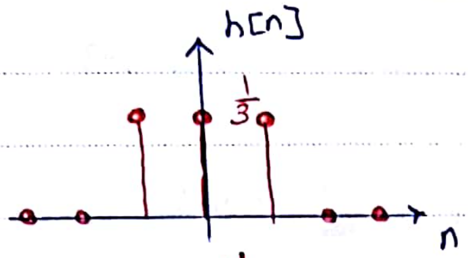
معادله تفاضلی

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

$h[n] = ?$ از $H(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه معکوس می‌گیریم $\rightarrow$ $\dfrac{A \to 4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \dfrac{B \to 1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

مثال: شکل روبه‌رو پاسخ ضربه یک فیلتر است، این فیلتر چه نوع فیلتری است؟

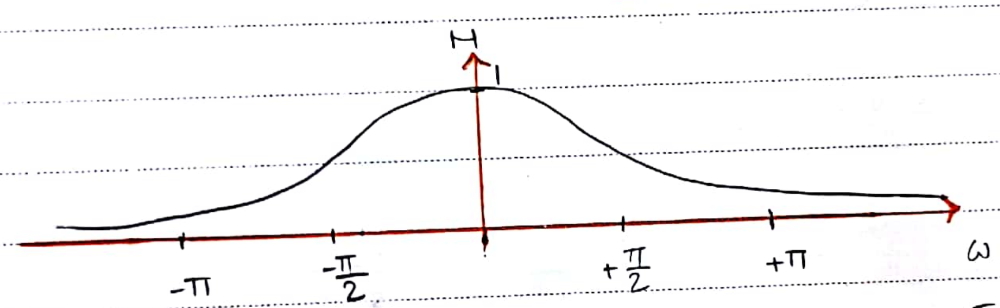


$$H(e^{j\omega}) = \sum_{\cancel{n=-\infty}\; n=-1}^{\cancel{+\infty}\; +1} h[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$= h[-1]\, e^{j\omega} + h[0] + h[1]\, e^{-j\omega}$$

$$= \frac{1}{3} e^{j\omega} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-j\omega}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\cancel{1}\,2}{3} \frac{(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\omega)$$



یک فیلتر پایین گذراست.

$$\text{vector:} \quad h = \begin{bmatrix} h[-1] \\ h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \rightarrow h(o)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{\cancel{k=-\infty}\; k=-1}^{\cancel{+\infty}\; +1} h[k]\, x[n-k]$$

$$y[n] = h[-1] \cdot x[n+1] + h[0] \cdot x[n] + h[1] \cdot x[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{3} \left(x[n+1] + x[n] + x[n-1] \right)$$

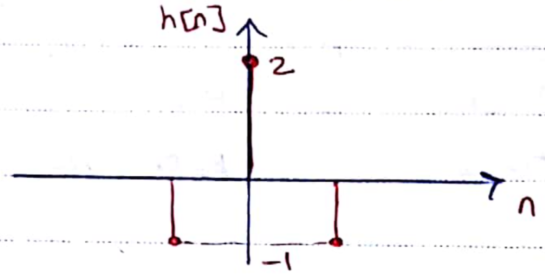
* متوسط گیری را ← وقتی بخواهیم نویز یک سیگنال را بگیریم
یعنی L.P.F انجام می‌شود.

Subject

Date

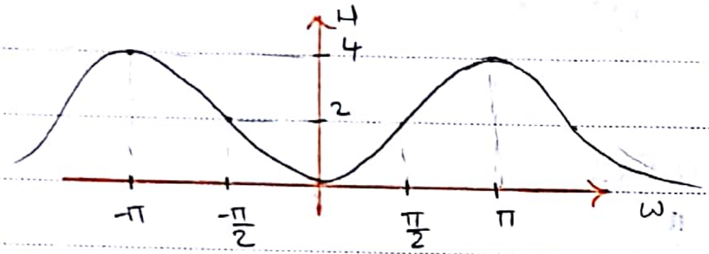
فرض کنیم فیلتر به شکل زیر باشد ، چه نوع فیلتری است؟

$$h = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow n=0$$



$$H(e^{j\omega}) = -1\, e^{j\omega} + 2 - e^{-j\omega} = 2 - (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) = 2 - 2\cos(\omega)$$

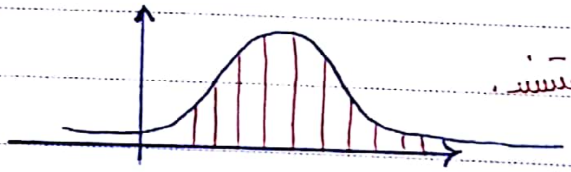
فیلتر بالاگذر است.



	F.S.		F.T.	
C.T.	$x(t)$ پیوسته و متناوب	c_k گسسته و غیرمتناوب	$x(t)$ پیوسته و غیرمتناوب	$X(j\omega)$ پیوسته و غیرمتناوب
D.T.	$x[n]$ گسسته و متناوب (N)	a_k گسسته و متناوب (N)	$x[n]$ گسسته و غیرمتناوب	$X(e^{j\omega})$ پیوسته و متناوب (2π)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

نمونه برداری کنیم



sample یا نمونه‌ها ، DFT ها هستند.

PAPCO

Subject
Date

DFT : $x[n]$ N- Point

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\} \equiv X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j \overset{\omega}{k\frac{2\pi}{N}} n} \quad \Big| \quad k = 0, \dots, N-1$$

تبدیل تابع گسسته

$$\mathrm{IDFT}\{X[k]\} \equiv x[n]$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{+jk\frac{2\pi}{N} n}$$

سری فوریه زمان گسسته

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "\text{گسسته}"', "T_s"'] \arrow[d, leftrightarrow] & x[nT_s] \arrow[d, equal] \\
X(j\omega) & x[n] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{DTFT}"] \\
& X(e^{j\omega}) \arrow[d, "\text{نمونه برداری}"] \\
& X[k]
\end{tikzcd}$$

رابطه بین k و ω

$$k \longrightarrow \Omega = \frac{2\pi}{\omega} k \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{N T_s} k$$

Subject "SS_10" " تبدیل z "

اختیاری ← (سؤال امتیازی در امتحان)

جلسه بیست و ششم

Date ۹۸ / ۳ / ۸

مروری بر روابطی که داشتیم:

C.T. Signals:

$$F.T.\{f(t)\} \equiv F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

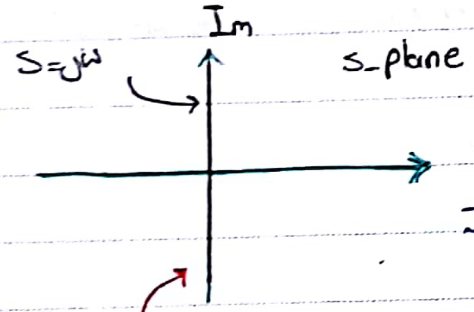
$F(j\omega)$: تابع مختلط و پیوسته ← ω

Laplace Transform

$$LT.\{f(t)\} \equiv F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

s متغیر مختلط و پیوسته

اگر $s = j\omega$ قرار دهیم دو فرمول یکی می‌شوند.



* تبدیل لاپلاس نسبت به تبدیل فوریه کلی‌تر است

یعنی، می‌توان سیگنالی داشت که تبدیل فوریه نداشته باشد ولی تبدیل لاپلاس داشته باشد.

به ازای $s=j\omega$ فقط این محور بدست می‌آید

ولی به ازای تبدیل لاپلاس کل صفحه حاصل می‌شود

D.T. Signals

تابع فوریه زمان گسسته

$$DTFT\{x[n]\} \equiv X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

تابع مختلط و پیوسته در (ω) و متناوب (2π)

two_sided Z.T.

bilateral Z.T.

$$Z.T. \text{ of } x[n]: \; Z\{x[n]\} \equiv X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$

متغیر z: مختلط و پیوسته

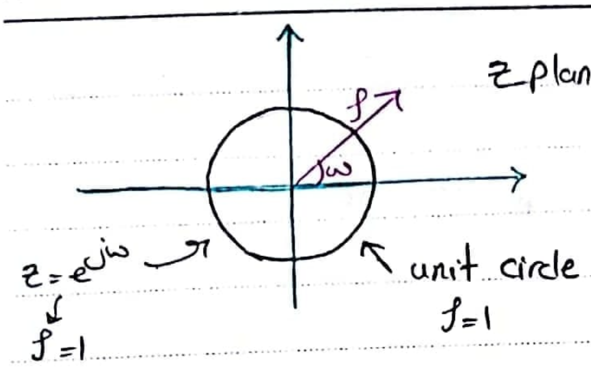
اگر $z = e^{j\omega}$ باشد، دو فرمول یکی می‌شوند

one_sided Z.T.

unilateral Z.T. → $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$

Subject

Date



z plane , $z = \rho e^{j\omega}$

* تبدیل z همان تبدیل فوریه است که نقطه روی شعاع واحد حساب می شود.

* تبدیل z از تبدیل فوریه کلی تر و کامل تر است.

[illegible] داشتیم:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} \equiv X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \qquad z = \rho e^{+j\omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,(\rho e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(x[n]\,\rho^{-n})}\, e^{-j\omega n}$$

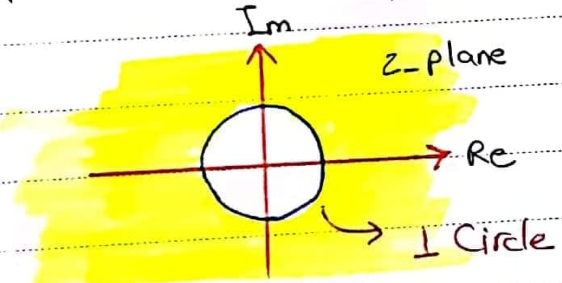
ROC: Region Of Convergence ناحیه همگرایی

مثال ۱:

$x[n] = u[n]$, $\mathcal{Z} = ?$

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cancel{x[n]}^{\,u[n]}\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n$$

$|z^{-1}| < 1$
or
$|z| > 1$

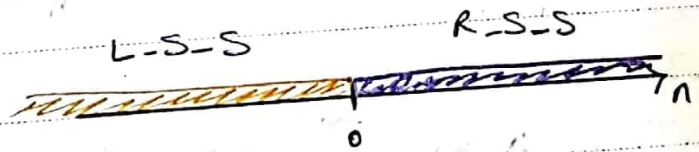


$\Rightarrow$ ROC : $|z| > 1$

in ROC : (I) $\sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

$$\boxed{u[n] \quad \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1}$$ Right-sided sequen

نکته:



n حقیقی

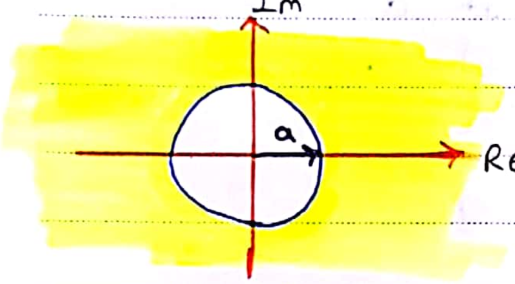
P4PCO

مثال 2 :

$x_2[n] = a^n u[n] \longrightarrow$ برخلاف R_S_S است

DTFT $\quad \dfrac{1}{1-ae^{j\omega}} \qquad |a|<1$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$



$$|az^{-1}| < 1 \quad \text{or} \quad \underbrace{|z| > |a|}_{ROC}$$

Z.T. of $x_2[n]$:

$$X_2(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad ROC: |z|>|a|$$

$$\boxed{a^n u[n] \quad \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |z|>|a|}$$ Right-sided sequence

مثال 3 :

$$x_3[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_3[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n u[-n-1] z^{-n}$$

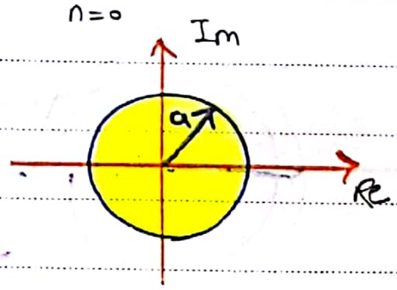
$+1$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \qquad n \longrightarrow -n$$ جابجا می کنیم

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^{+n} + 1 = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= \frac{1}{1-a^{-1}z} \qquad a^{-1}z \rightarrow \frac{z}{a} \qquad \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \quad \text{or} \quad |z| < |a|$$

$$= \frac{z}{z-a}$$



$$\boxed{-a^n u[-n-1] \quad \frac{z}{z-a} = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} \quad |z|<|a|}$$ left-sided sequence

Scanned by CamScanner

Subject

Date

* All R.S.S Signals : their ROC outside of a circle toward ∞

* All L.S.S Signals : their ROC inside of a circle toward its origin

$x_4[n] = \delta[n]$ full_sided sequence : 4 مثال

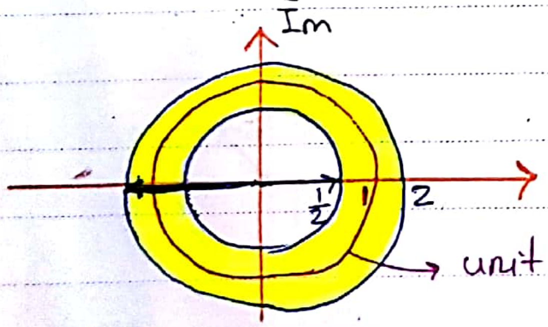
$$X_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \quad \forall z \qquad \delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$x_5[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} : \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n<0 \end{cases}$$: 5 مثال

$$x_5[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1]$$

$$|z|>\frac{1}{2} \quad \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad\qquad \frac{-z}{z-2} \quad |z|<2$$

$$X_5(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-2} = \frac{-\frac{3}{2}z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} \qquad \text{ROC: } \frac{1}{2}<|z|<2$$



* نکته : رشته‌های دوطرفه هستند (two_sided)، خاصیت‌های ایشان حلقه است.

Subject

Date

مثال 6:

$$x_6[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)u[n]$$ Right-Sided Sequence

$$X_6(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_6[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{e^{j\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}\right) z^{-n}$$

$$= \frac{3}{2}\left[e^{j\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{3} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1}\right)^n}_{|K|} + e^{-j\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{3} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1}\right)^n}_{|K|}\right]$$

$ROC: |z| > \frac{1}{3}$

دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{3}$

$$= \frac{3}{2}\left[e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\cancel{1}\, z}{z\left(\cancel{1} - \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}\cancel{z^{-1}}\right)} + e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\cancel{1}\, z}{z\left(\cancel{1} - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}\cancel{z^{-1}}\right)}\right]$$

صورت و مخرج در z ضرب شوند

$$= \frac{3z}{2}\left[\frac{2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(z - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \quad |z| > \frac{1}{3}$$

* خیلی مهم

$$x[n] \longleftrightarrow X(z)$$

$$x[n]\cos[\Omega_0 n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\Omega_0}z\right) + X\left(e^{-j\Omega_0}z\right)\right]$$

$$x[n]\sin[\Omega_0 n] \longleftrightarrow \frac{j}{2}\left[X\left(e^{j\Omega_0}z\right) - X\left(e^{-j\Omega_0}z\right)\right]$$

* نکته

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$ چندجمله‌ای برحسب z

$N(z) = 0$ Zeros صفرها

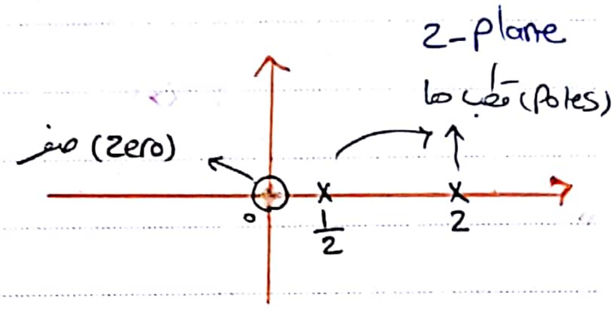
$D(z) = 0$ Poles قطب‌ها

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad \begin{cases} \text{poles} : z = a \\ \text{zero} : z = 0 \end{cases}$$

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad \begin{cases} \text{pole} : z = 1 \\ \text{zero} : z = 0 \end{cases}$$

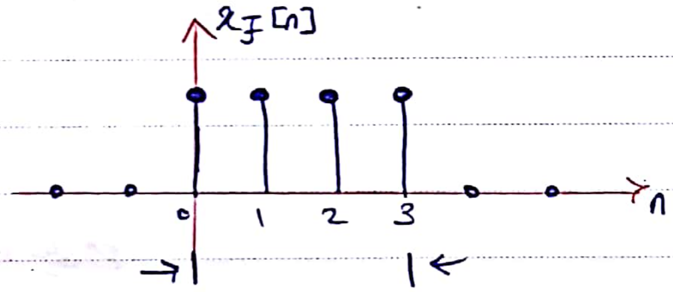
$$x[n] \longleftrightarrow X_5(z) \quad \begin{cases} \text{poles} : z_1 = \frac{1}{2} , z_2 = 2 \\ \text{zero} : z = 0 \end{cases}$$

zero را با دایره تو خالی نشان می‌دهیم O
pole را با ضربدر X



* ROC نمی‌تواند شامل قطب ها باشد، چون اگر باشد همگرا نمی‌شود.

مثال ۴:



Finite sequence

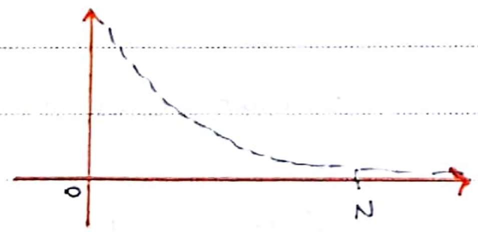
$$x_4[n] = \delta[n] + \delta[n-5]$$

$$X_4(z) = 1 + z^{-5} = 1 + \frac{1}{z^5} = \frac{1+z^5}{z^5}$$

مثال ۵:

$$x_5[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \end{cases}$$

Finite sequence



Subject

Date

$$X_g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_g[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{(az^{-1})}^{n}$$

اگر a محدود باشد، جواب محدود و همگرا خواهد بود

$$= \frac{(1-az^{-1})^N}{1-az^{-1}} \longrightarrow$$ صورت و مخرج در z^N ضرب شوند.

$$X_g(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - a^N}{z \; a}$$

$z=0$ $\quad z_k = a_k e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}$ $\quad k=0,1,\dots,N-1$

* ROC سیگنال‌های finite، کل صفحه z است بجز z برابر است با origin برابر با صفر.

خصوصیات Z.T.

Linearity

ROC

$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(z)$ $\quad R_{x_1}$

$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(z)$ $\quad R_{x_2}$

$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \longleftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

$R_{x_1} \cap R_{x_2}$

Time Shifting

$x[n] \longleftrightarrow X(z)$ $\quad R_x$

$x[n-n_0] \longleftrightarrow X(z) \times z^{-n_0}$ $\quad R_x$

وقتی شیفت پیدا کند می‌تواند در n_0 قطبی به وجود آورد یا حذف کند

Multiplication by n & n^2

$x[n] \longleftrightarrow X(z)$

$nx[n] \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n)\, x[n]\, z^{-n-1}$$

$$= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x[n] z^{-n}$$

دو طرف را در z ضرب کنیم

$$z \frac{dX(z)}{dz} = \underbrace{-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x[n] z^{-n}}$$

تبدیل z سیگنال $n x[n]$

Convolution

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{Z.T.}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$R_x \cap R_h$$

LTI System

$$\sum a_k y[n-k] = \sum b_k x[n-k]$$

فرمول تبدیل z معکوس

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$