Signal & systems (oppenhiem) (1)

فصل اول :

سیگنال ها
- تعریف سیگنال و مفاهیم
- انرژی و توان
- تبدیل خطی متغیر مستقل برای سیگنال ها
- معرفی سیگنال های ویژه (نمایی، سینوسی، پله و ضربه)

سیستم ها
- تعریف سیستم
- ویژگی های سیستم (علی، پایداری، تغییرناپذیری با زمان و ...)

سیگنال (نشانک) : یک کمیت متغیر که حاوی نوعی اطلاعات و پیام است. می تواند در ارتباط با یک پدیده فیزیکی باشد.

سیگنال
- متغیر مستقل پیوسته
- متغیر مستقل گسسته

متغیر مستقل ← متغیر مستقل زمان
- زمان پیوسته t
- زمان گسسته n

تعریف سیگنال زمان پیوسته : $t \in R$ یا زیرمجموعه ای از $R \leftarrow x(t)$

" گسسته : $n \in Z, N$ یا زیرمجموعه ای از $Z \leftarrow x[n]$

* مقدار کمیت وابسته سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ عضو اعداد حقیقی یا مختلط است

* سیگنال گسسته زمان ← وابسته، ماهیتا گسسته باشد مثل جمعیت
← وابسته، ماهیتا پیوسته باشد مثل سنسور دما در دقیقه

۲) انرژی و توان سیگنال:

تعریف توان لحظه‌ای سیگنال:

پیوسته زمان $x(t)$: $$P(t) = |x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

گسسته زمان $x[n]$: $$P[n] = |x[n]|^2 = x[n] \cdot x^*[n]$$

تعریف انرژی سیگنال:

پیوسته زمان: $$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

گسسته زمان: $$E = \sum_{k=n_1}^{n_2} P[k]$$

توان متوسط:

پیوسته زمان: $$P_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

گسسته زمان: $$P_{AV} = \frac{}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{k=n_1}^{k=n_2} P[k]$$

انرژی کل:

$$E_{\text{کل}} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} P(t)\,dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} P[n]$$

توان متوسط کل:

$$P_{AV\,\text{کل}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} P(t)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} P[n]$$

توان و انرژی نامحدود

$$P_{کل} = \infty \qquad E_{کل} = \infty$$

انرژی محدود و توان صفر

$$E_{کل} = \text{محدود} \Rightarrow P_{av\,کل} = 0$$

توان محدود و غیر صفر

$$P_{ave\,کل} = \text{محدود} \Rightarrow E_{کل} = \infty$$

چند اتحاد:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

تبدیل های خطی سیگنال:

۱) شیفت زمانی (timeshift)

$$t \rightarrow \begin{matrix} t - t_0 \\ t + t_0 \end{matrix} : \begin{matrix} x(t - t_0) \\ x(t + t_0) \end{matrix}$$

$$n \rightarrow \begin{matrix} n - n_0 \\ n + n_0 \end{matrix} : \begin{matrix} x[n - n_0] \\ x[n + n_0] \end{matrix}$$

۲ شیفت به چپ: $x(t + t_0) \rightarrow t_0 > 0 \rightarrow$ advance version

شیفت به راست: $x(t + t_0) \rightarrow t_0 < 0 \rightarrow$ delay version

۲) انعکاس زمانی

$t \to -t$

$n \to -n$ $\longrightarrow$ قرینه نسبت به محور y

۳) timescaling

$t \to \alpha t$

$n \to \alpha n$ $\longrightarrow$ $|\alpha| > 1$ $\to$ سیگنال فشرده‌تر

$\searrow$ $|\alpha| < 1$ $\to$ سیگنال گسترده‌تر

* ترکیبی: $x(\alpha t + \beta)$ یا $x[\alpha n + \beta]$

روش اول: اول β را اعمال می‌کنیم بعد α را روی سیگنال جدید اعمال کنیم.

روش دوم: اول α را تأثیر می‌دهیم و بعد $\frac{\beta}{\alpha}$ را اعمال می‌کنیم.

سیگنال متناوب: $x(t) = x(t+T)$, $x[n] = x[n+N]$

$\forall T, N > 0$

سیگنال زوج: قرینه نسبت به محور y $\quad x(-t) = x(t)$, $x[-n] = x[n]$

سیگنال فرد: قرینه نسبت به مبدأ مختصات $\quad x(-t) = -x(t)$

* تبدیل هر سیگنال به یک قسمت زوج و فرد:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\Big(x(t) + x(-t)\Big)}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Big(x(t) - x(-t)\Big)}_{\text{فرد}}$$

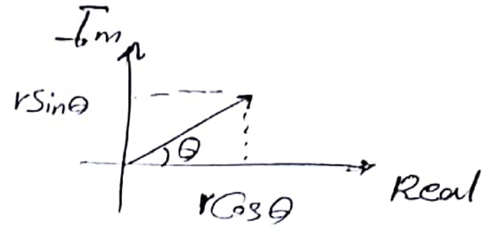
این قسمت‌ها یکتا هستند.

عدد مختلط

$a+bj \rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

$= re^{j\theta}$



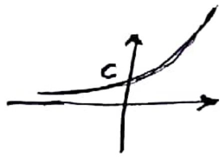
$a = r\cos\theta \ , \ b = r\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2}$

سیگنال های نمایی مختلط :

$x(t)=Ce^{at} \rightarrow a, C$ مختلط $\rightarrow \begin{cases} a = \sigma + j\omega \\ C = |C|e^{j\theta}\end{cases}$

*① (a, c حقیقی) $\Rightarrow$



$a>0$, ... $a<0$

*② ($c=1$) , (a کاملا موهومی) $\Rightarrow x(t)=e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\text{متناوب}} T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$

$E_{Period} = \int_0^{T_0} \underbrace{|e^{j\omega_0 t}|^2}_{1} dt = T_0$ نمایی مختلط متناوب

$P_{Period} = \frac{1}{T_0}E_{Period} = 1$

$E_\infty=\infty \rightarrow P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|e^{j\omega_0 t}|^2 dt = 1$

هارمونیک $\rightarrow \phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, $k\in\mathbb{Z} \xrightarrow{k=0} \phi_k(t)$ ثابت

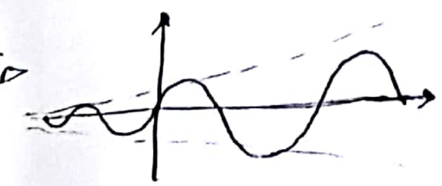
$\xrightarrow{k\neq 0} \phi_k(t)$ متناوب $\rightarrow \frac{T_0}{|k|}$

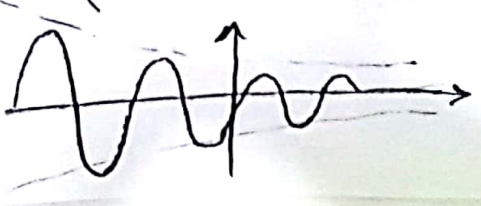
*③ (a, c مختلط)
نامتناوب

$Ce^{at} = (|C|e^{j\theta})(e^{(r+j\omega_0)t})$

$= |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)} = |C|e^{rt}(\cos(\omega_0 t+\theta)+j\sin(\omega_0 t+\theta))$

حقیقی





موهومی

⑥ نمایی گسسته زمان مختلط :

$$x[n] = Ce^{bn} = C(e^{b})^{n} = Ca^{n} \quad , a = e^{b}$$

$$\Rightarrow x[n] = Ca^{n} \quad (a, c \text{ مختلط})$$

* ① $(a, c$ حقیقی$)$ ⇐ تابع نمایی گسسته

* ② $(C=1)$, (b کاملاً موهومی یا $|a|=1$) $\Rightarrow x[n] = e^{j\omega_0 n}$ متناوب

$$\rightarrow x[n] = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$

* ③ $(a, c$ مختلط$)$ $\Rightarrow x[n] = |C| e^{j\theta}\left((|a| e^{j\omega_0})^{n}\right)$ نامتناوب

② در حالت گسسته زمان $\Rightarrow 0 \leq \omega_0 < 2\pi$ یا $-\pi \leq \omega_0 < \pi$ $\xrightarrow{\text{به سمت}}$ $2k\pi$ فرکانس کم

$\xrightarrow{\text{به سمت}}$ $(2k+1)\pi$ فرکانس زیاد

شرط تناوب

$$\frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{N}{m}$$ ⇐ گویا باشد یعنی این عدد $\Rightarrow N$ = دوره تناوب

تغییرات زیاد

هارمونیک →
$$\begin{cases} \phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ \phi_{k+N}[n] = \phi_k[n] \end{cases}$$

نکات :

- جمع دو سیگنال متناوب پیوسته زمان ← اگر $\frac{T_1}{T_2}$ گویا باشد ← متناوب است

دوره تناوب ← $\text{ک.م.م}(T_1, T_2)$

- جمع دو سیگنال گسسته زمان متناوب ← متناوب است

۷ سیگنال ضربه و پله :

گسسته

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

ضربه

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

پله

$$\Rightarrow \begin{cases} u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \\ \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \end{cases}$$

$$* \quad x[n]\,\delta[n-n_0] = x[0]\,\delta[n-n_0]$$

پیوسته

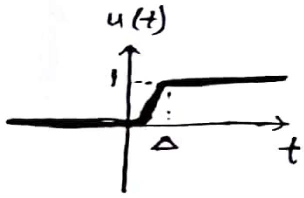
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

پله

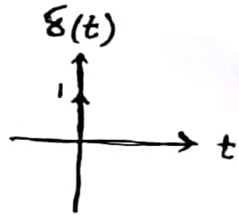
$$\rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

$$t = 0 \rightarrow$$ ناپیوسته

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$



$$\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt} u_\Delta(t) \Rightarrow \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$



$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau$$

$$* \quad x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

(۸) سیستم: مجموعه‌ای از عناصر که هدف مشخصی را دنبال می‌کنند که یک سیستم یک سیگنال ورودی را به یک سیگنال خروجی نگاشت می‌کند.

اتصال سیستم‌ها: سری، موازی، ترکیب سری و موازی، feedback دار

سیستم‌ها از نظر حافظه:
- بی حافظه ← خروجی به ورودی در همین لحظه فقط بستگی دارد.
- با حافظه

سیستم‌ها از نظر معکوس پذیری:
- معکوس پذیر ← ورودی متفاوت ⇐ خروجی متفاوت
- معکوس ناپذیر

سیستم‌ها از نظر علّی بودن Causality:
- علّی ← خروجی به ورودی در زمان حال و گذشته بستگی دارد.
- غیر علّی ← به ورودی در لحظات بعدی هم وابسته است

منظور ورودی، سیگنال ورودی است.

سیستم‌ها از نظر پایداری ← ورودی محدود ⇐ خروجی محدود ← BIBO stable

سیستم‌ها از نظر تغییرناپذیری با زمان ← شیفت زمانی در ورودی ⇐ همان میزان شیفت زمانی در خروجی دارد

Time Invariance

سیستم‌ها از نظر خطی بودن ← هم‌زمان دارای دو ویژگی:

$$x_1[n]+x_2[n] \rightarrow y_1[n]+y_2[n]$$

$$a x_1[n] \rightarrow a y_1[n]$$

⑨ فصل دوم ← سیستم‌های LTI (Linear Time Invariant)

- نمایش گسسته زمان با پالس: $x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + \cdots + x[1]\delta[n-1] + \cdots$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

مثل ضریب ثابت ← اگر سیستم خطی باشد ← ضریب خروجی هم می‌شود

مثلاً سیستم خطی L

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h_k[n]$$

حالا مثلاً سیستم TI باشد

$$h_k[n] = h_0[n-k] = h[n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\,h[k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \Leftarrow \text{Convolution}$$ رابطه

$$= h[n] * x[n]$$ که LTI است

حداکثر تعداد نقاط y[n] خالف ۰ $= n_y \leq n_x + n_h - 1$

- نمایش پیوسته زمان با پالس:

$$x(t) \xrightarrow{\text{تقریب}} \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Rightarrow x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

خطی L

$$\delta_\Delta(t) \Downarrow \hat{h}_{0\Delta}(t)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

$$\rightarrow y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h_\tau(t)\,d\tau$$

TI

$$\delta(t-\tau) \Downarrow h_\tau(t) = h_0(t-\tau) = h(t-\tau)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

خواص سیستم‌های LTI :

جابجایی Commutative $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

توزیع پذیری Distributive $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

شرکت پذیری Associative $a[n] * (b[n] * c[n]) = (a[n] * b[n]) * c[n]$

بی حافظه / با حافظه Memoryless $\longrightarrow$ بی حافظه وقتی که فقط خروجی به ورودی همان لحظه وابسته است

$h[n] = k\delta[n]$ / $n \neq 0 \Leftrightarrow h[n] = 0$ در بی حافظه اگر

معکوس پذیری Invertibility دو سیستم معکوس هم $\longrightarrow h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$

علیت Causality خروجی به ورودی حال و گذشته وابسته است $\longrightarrow h[n] = 0 \quad n < 0$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

پایداری Stability $\xrightarrow{\text{اگر}} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|}_{\text{مطلقا جمع پذیر یا انتگرال پذیر}} < \infty \xRightarrow[\text{x[n] محدود}]{\text{اگر}} y[n]$ is bounded

پاسخ پله و ضربه Unit Step Response $\longrightarrow \begin{cases} \delta[n] \longrightarrow h[n] \\ u[n] \longrightarrow s[n] \end{cases}$

$$s[n] = u[n] * h[n] \xRightarrow{\text{حل}} h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

$*$ $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

فصل سوم ← سری فوریه برای سیگنال های متناوب

سیگنال پایه ← سیگنال های دیگر را می توان با ترکیب خطی سیگنال های پایه نوشت

* استفاده از سیگنال نمایی مختلط :

$$\begin{cases} e^{st} \xrightarrow{\text{پیوسته}} H(s)e^{st} \\ z^{n} \xrightarrow{\text{گسسته}} H(z)z^{n} \end{cases}$$

* هارمونیک نمایی مختلط :

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

سری فوریه : * پیوسته زمان

$$\underbrace{x(t)}_{\text{مختلط متناوب}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

$$\xrightarrow[\int]{\times e^{-jn\omega_0 t}} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)\, dt + j\int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t)\, dt$$

$$= \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} = a_n T \Rightarrow a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t} dt \quad (*)$$

$$- \operatorname{Sinc}(k\alpha) = \frac{\sin(k\pi\alpha)}{k\pi\alpha}$$ → ضرایب سیگنال مربعی

۱۲

$$\begin{cases} x^*(t) = x(t) \\ (a+b)^* = a^* + b^* \\ (ab)^* = a^* b^* \end{cases}$$

حقیقی — مساوی

$$x(t) = x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right)^*$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow a_{-k}^* = a_k \ , \ a_k^* = a_{-k}$$

$$\Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\right]$$

(*)

$$\Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\, \mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}$$

① $a_k = A_k e^{j\theta_k} \longrightarrow x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$

② $a_k = B_k + jC_k \longrightarrow x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)\right]$

همگرایی سری فوریه:

کلاس ①

انرژی محدود

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt < \infty$$

$$\Rightarrow x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) \qquad e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$E_N(t) = \int_T |e_N(t)|^2 dt \qquad E(t) = \int_T |e(t)|^2 dt = 0$$

کلاس ②

شرایط دیریکله

$$\int_T |x(t)| dt < \infty \longrightarrow |a_k| \leq \frac{1}{T}\int_T \left| x(t) e^{-j\omega_0 k t}\right| dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T |x(t)| dt < \infty$$

شرط دوم ← سیگنال در هر دوره تناوب تعداد محدودی max و min داشته باشد

شرط سوم ← در هر فاصله زمانی محدود، تعداد ناپیوستگی ها محدود باشد و آن ناپیوستگی ها هم دارای مقدار محدود باشد

خواص سری فوریه پیوسته زمان:

- خطی بودن

$$z(t) = A\,x(t) + B\,y(t) \xleftrightarrow{FS} c_k = A a_k + B b_k$$

- time shift

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \\ x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} \end{cases} \quad \frac{1}{T}\int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

- time reverse

$$x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$$

- time scaling

دوره تناوب $\begin{cases} x(t) \longrightarrow T \\ x(\alpha T) \longrightarrow \frac{T}{\alpha} \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha \omega_0)t} \end{cases}$$

- ضرب

$$z(t) = x(t)\,y(t) \xleftrightarrow{FS} c_k = a_k * b_k$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

- مشتق

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$$

- انتگرال گیری

$$\int_{-\infty}^{t} x(t) \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{jk\omega_0} a_k$$

- مزدوج

$$x^*(t) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{اگر حقیقی باشد}} a_{-k} = a^*_k$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{حقیقی و زوج}} a_k = a^*_k$$

حقیقی و زوج

$$x(t) \xrightarrow{\text{حقیقی و فرد}} a^*_k = -a_k$$

موهومی و فرد

- رابطه پارسوال

$$\text{توان متوسط} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

- کانولوشن متناوب

$$\int_T x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{FS} T a_k b_k$$

سری فوریه: * گسسته زمان

$$\text{هارمونیک‌ها}\quad \phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$\langle N\rangle$ به صورت متناوب این N تا را انتخاب می‌کنیم یعنی روی یک دوره تناوب.

$$\xrightarrow[\sum_{n=\langle N\rangle}]{\times e^{-jr\omega_0 n}} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)\omega_0 n}$$

$$\xrightarrow{k=r} = a_r N \Rightarrow a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jr\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$a_k = a_{k+N}$$

بحث همگرایی توی سری فوریه گسسته زمان مطرح نیست.

۱۵ خواص سری فوریه گسسته زمان:

- خطی بودن
$$z[n] = Ax[n] + By[n] \xleftrightarrow{FS} c_k = Aa_k + Bb_k$$

- time shift
$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$$

- ضرب
$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$$
← کانولوشن متناوب

- پارسوال
$$\text{توان متوسط} = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

- تفاضل اول
$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{FS} (1-e^{-jk\omega_0}) a_k$$

- running sum
$$z[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{1-e^{-jk\omega_0}} a_k \quad (a_0 = 0)$$

* قطار ضربه
$$s[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN]$$

پاسخ فرکانسی:
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$\Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$
$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 n}$$
$$b_k = \overbrace{H(k\omega_0)}^{\text{پاسخ فرکانسی}} a_k$$

فیلترینگ ← تغییر نسبی دامنه فرکانس های ورودی frequency shaping

حذف یکسری از فرکانس های ورودی و عبور یکسری دیگر ~ selection

* سیستم LTI پایدار قابلیت تولید فرکانس جدید در خروجی ندارد ($a_k = 0 \Rightarrow b_k = 0$)

$$|H(\omega)| < \infty \Leftarrow \sum |h[n]| < \infty$$