جلسه اول

یکشنبه ۲۵ شهریور

سیگنال ها و سیستم ها

مرجع اصلی   Signals & Systems, by A.V. oppenheim, etc.

سرفصل مطالب

فصل اول   سیگنال ها و سیستم ها

فصل دوم تحلیل سیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان   گسسته زمان   Discrete time

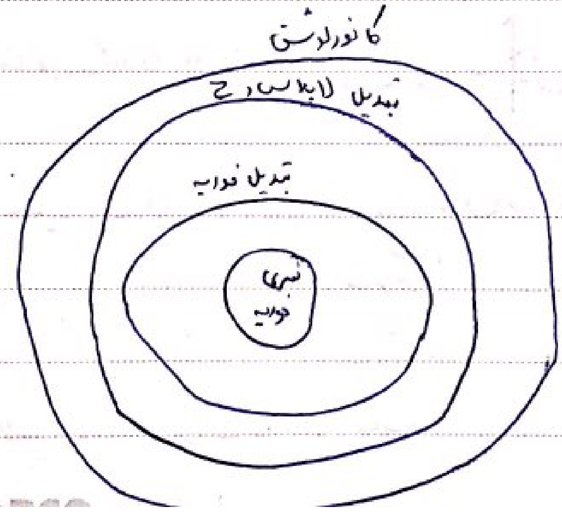
پیوسته زمان   Continuous time

فصل سوم   سری فوریه و تبدیل فوریه سیگنال های پیوسته زمان

فصل چهارم   سری فوریه و تبدیل فوریه سیگنال های گسسته زمان

فصل پنجم   تبدیل لاپلاس

فصل ششم   تبدیل Z



نمره دهی

- میان ترم ۴۰٪
- پایان ترم ۵۰٪
- تکالیف (تمرین ها، کامپیوتری) ۱۰٪

فصل اول مقدمه

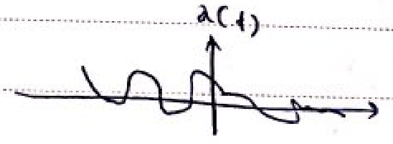
۱-۱- سیگنال ها
- تعاریف و مثال
- توان و انرژی سیگنال
- تبدیل خطی متغیر مستقل
- سیگنال های خاص ضربه، پله، ...

۱-۲- سیستم ها
- تعاریف و مثال ها
- دسته بندی سیستم ها

۱-۱- سیگنال ها:

تعریف سیگنال: از نظر ریاضی سیگنال تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است و حاوی نوعی از اطلاعات است

مثال: سیگنال صوت

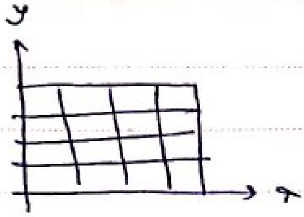


متغیر مستقل: زمان، مکان، فشار، حجم، دما

مسیر حرکت

فشار آب

جمعیت ایران در سال های مختلف



brightness (x,y) تصویر

از نظر ماهیت متغیر مستقل گسسته باشد یا پیوسته دو نوع سیگنال داریم. سیگنال های گسسته زمان

سیگنال های پیوسته زمان.

- متغیر مستقل گسسته زمان را معمولاً به n نشان می‌دهیم. متغیر وابسته را با $x[n]$ نشان می‌دهیم

سیگنال های گسسته زمان

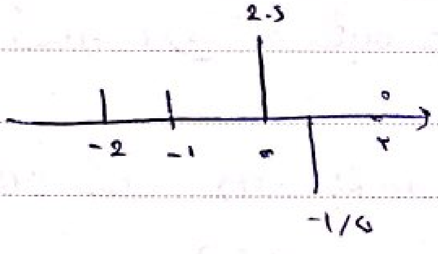
Discrete time $n \in \mathbb{Z}$

- متغیر مستقل پیوسته زمان را معمولاً با t نشان می‌دهیم. متغیر وابسته را با $x(t)$ نشان می‌دهیم.

سیگنال های پیوسته زمان

Continuous time $t \in \mathbb{R}$

- سیگنال های دیجیتال
هم متغیر مستقل هم متغیر وابسته گسسته هستند.



سیگنال های گسسته زمان
یا ماهیت گسسته زمان دارند
جمعیت سالانه کشور ایران
از روی نمونه برداری یک سیگنال پیوسته زمان بدست آمده.

جلسه دوم

سه‌شنبه ۲۷ شهریور

فصل اول

توان و انرژی سیگنال

در بسیاری از انواع سیگنال ها، سیگنال ها به یک پارامتر فیزیکی مربوط هستند لذا دارای توان و انرژی هستند

خازن انرژی الکتریکی

$$\overset{+\quad v(t)\quad -}{\xrightarrow[i(t)]{}\ R}$$

$$p(t) = i(t)\, v(t) = \frac{v^2(t)}{R} = i^2 R$$

توان یک سیگنال با مربع آن سیگنال متناسب است.

توان لحظه‌ای سیگنال $x(t)$ را به صورت کلی

$$p(t) = |x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

$x[n]$

$$p[n] = |x[n]|^2 = x[n] \cdot x^*[n]$$

$$(a+bj)^* = a-bj$$

$$(a+bj)(a+bj)^* = a^2+b^2$$

انرژی در یک بازه‌ی زمانی $t_1 \rightarrow t_2$

$n_1 \rightarrow n_2$

$$E_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$$

$$E_{n_1 \to n_2} = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} p[n] = \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

متوسط توان در بازه‌ی t_1 تا t_2 $\quad P_{ave\, t_1 \to t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$ ⊛

متوسط توان در بازه‌ی n_1 تا n_2 $\quad P_{ave\, n_1 \to n_2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n=n_2} |x[n]|^2$

⊛ $\frac{E_{t_1 \to t_2}}{t_2 - t_1}$ $\qquad = \frac{E_{n_1 \to n_2}}{n_2 - n_1 + 1}$

متوسط توان کل (در بازه‌ی بی‌نهایت) $\quad P_{ave\,\infty} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$

$$P_{ave\,\infty} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N - 1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

انرژی در بازه‌ی بی‌نهایت $= E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$

انرژی در بازه‌ی بی‌نهایت $= E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$

$$E_\infty = \infty \Rightarrow P_{ave\,\infty} = ?$$

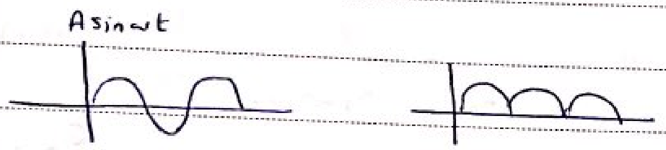
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$E_\infty =$ محدود $\Rightarrow P_{ave\,\infty} = 0$

$P_{ave\,\infty} =$ محدود $\neq 0 \Rightarrow E_\infty = \infty$

مثال: $x(t) = A\sin\omega_0 t$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \sin^2 \omega_0 t \, dt = \infty$$



$$P_{ave\,\infty} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2 \sin^2 \omega t \, dt = \dots = \frac{A^2}{2}$$

توان را بخواهیم ببریم بالا ، باید دامنه را زیاد کنیم به فرکانس مربوط نیست

تبدیل های خطی متغیر مستقل:

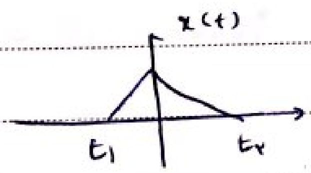
Time-shift شیفت زمانی

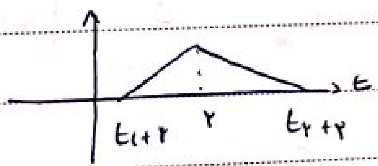
Time-Reverse انعکاس زمانی

Scaling ترکیب شیفت و مقیاس‌بندی

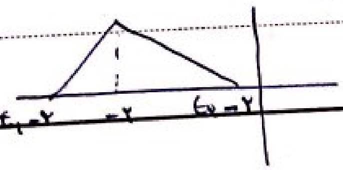
1) Time-shift شیفت زمانی

$x(t) \rightarrow x(t - t_0)$ $x_1(t) = x(t-2)$





$x(t-(-2)) = x(t+2)$



PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

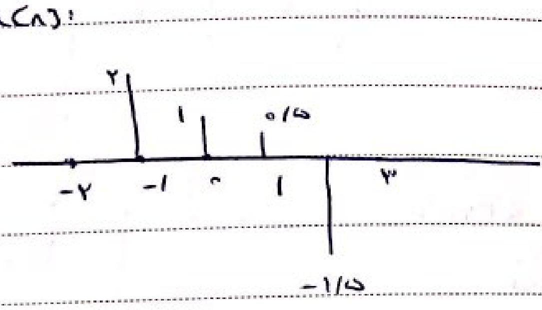
Delayed version = شیفت به سمت راست $t_0 > 0$, $n_0 > 0$ $x(t-t_0)$

Advanced version = شیفت به سمت چپ $t_0 < 0$, $n_0 < 0$ $x[n-n_0]$

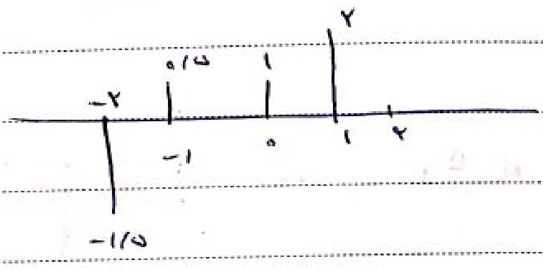
۲) Time Reverse

$x(t) \to x(-t)$

$x[n] \to x[-n]$

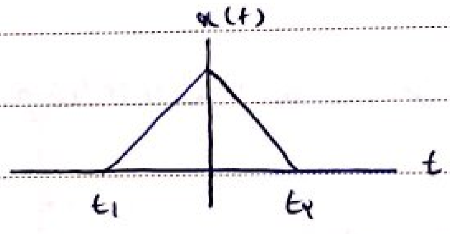


$x_1[n] = x[-n]$

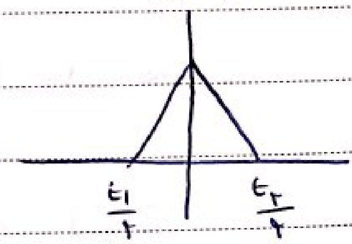


۳) Time _ Scaling تغییر مقیاس

$x(t) \to x(\alpha t)$

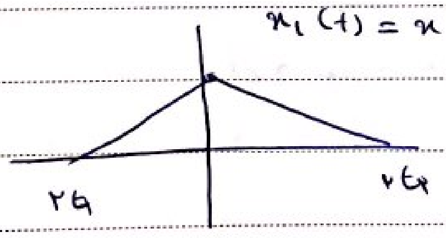


$x_1(t) = x(2t)$



فشرده

$x_1(t) = x(\frac{t}{2})$



گسترده

PAPCO

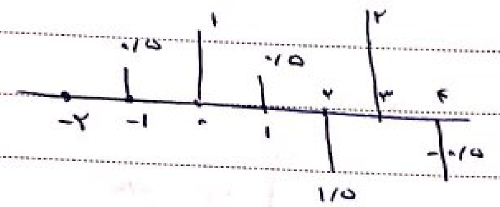
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$|\alpha|>1$ ⇐ فشردگی

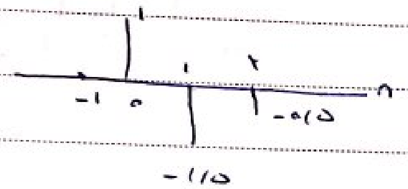
$|\alpha|<1$ ⇐ گستردگی

$x(\alpha t)$

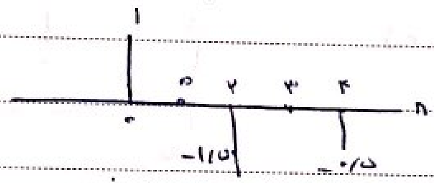
$x[n]$



$x_1[n] = x[2n]$
فشردگی



$x_2[n] = x[\frac{n}{2}]$



تعریف می‌کنیم $\triangleq \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & \text{n های زوج} \\ 0 & \text{n های فرد} \end{cases}$

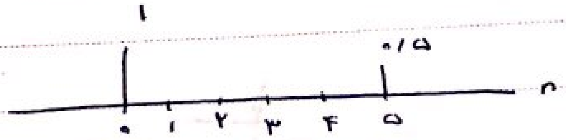
توجه شود که در سیگنال های گسسته زمان D.T در حالت گستردگی یعنی $x[\frac{n}{k}]$ باید مشخص کنیم که نقاط میانی چه مقداری داشته باشند ← قرارداد می‌کنیم نقاط میانی صفر

$x[\frac{n}{k}] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \text{اگر n مضرب صحیح از k باشد} \\ 0 & \text{اگر n مضرب صحیح از k نباشد} \end{cases}$

در واقع $k-1$ صفر میان هر دو عدد قرار می‌گیرد.

Subject
Date

$x_1[n] = x[\frac{n}{5}]$



به طور کلی در صورتی که سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ را داشته باشیم و بخواهیم سیگنال $x(at+b)$ یا $x[an+b]$ را ترسیم کنیم.

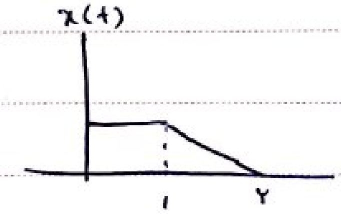
① $x_1(t) = x(at) \to x_2(t) = x_1(t+\frac{b}{a}) = x(at+\frac{ab}{a}) = x(at+b)$

ابتدا به اندازه a ، scale کنیم و سپس به اندازه $\frac{b}{a}$ شیفت می‌دهیم.

② $x_1(t) = x(t+b) \to x_2(t) = x_1(at) = x(at+b)$

ابتدا به اندازه b شیفت می‌دهیم و سپس به اندازه a ، scale کنیم

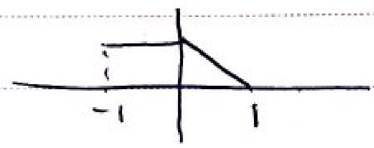
دو روش فوق برای CT کاربرد دارد ولی برای حالت گسسته زمان فقط روش دوم کاربرد دارد.
چون در روش اول $\frac{b}{a}$ شیفت داریم که ممکنه غیرصحیح باشه.



$\to x(-2t+1)$

شیفت

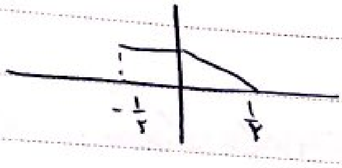
$x_1(t) = x(t+1)$

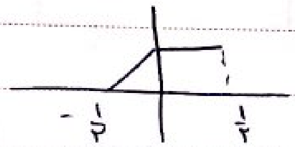


Subject
Date

$x_2(t) = x_1(+2t)$

$x_3(t) = x_2(-t) = x(-2t+1)$





قسمت های زوج و فرد سیگنال

تابع زوج

$x(t) = x(-t)$

$x[n] = x[-n]$

تابع فرد

$x(t) = -x(-t)$

$x[n] = x[-n]$

$$x_e(t) = Ev(x(t)) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_o(t) = Od(x(t)) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Subject:
Year.　Month.　Date.　(　)

جلسه سوم

یکشنبه ۱ مهر

مقدمه تعریف

تبدیل خطی

توان و انرژی

سیگنال های خاص
- سیگنال های متناوب
- نمایی مختلط
  - پیوسته زمان
  - گسسته زمان

سیگنال های متناوب

T یک دوره تناوب $x(t)$ است　　$x(t)=x(t+T)\ ;\ \forall t$

N یک دوره تناوب $x[n]$ است　　$x[n]=x[n+N]\ ;\ \forall n$

دوره تناوب اصلی به کوچکترین زمان تناوب (T یا N) که در رابطه فوق صدق کند

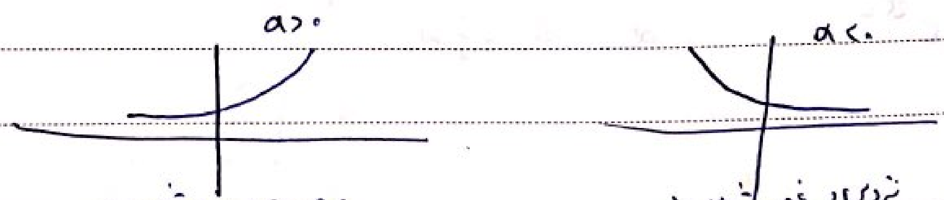
سیگنال های نمایی مختلط پیوسته زمان

یک سیگنال نمایی مختلط زمان پیوسته در حالت کلی complex exponensial

c و α در حالت کلی اعداد مختلط هستند و　$x(t)=ce^{\alpha t}$

حالت خاص ۱　c و a اعداد حقیقی باشند

$x(t)=ce^{\alpha t}$



صعودی و غیرمتناوب　　　نزولی و غیرمتناوب

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سیگنال های متناوب

حالت خاص ۲ $x(t) = ce^{j\omega t}$

یک عدد موهومی خالص

$x(t) = e^{j\omega t} \overset{\text{اویلر}}{=} \cos\omega t + j\sin\omega t$

سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ همیشه متناوب است با دوره تناوب $\frac{2\pi}{|\omega|}$

تعریف هارمونیک های یک سیگنال (سیگنال های از نظر هارمونیک مرتبط با هم): مجموعه‌ای از سیگنال‌ها که

Harmonically-related signals

دارای یک تناوب مشترک N_0 ، T_0 هستند

سیگنال های نمایی مختلط هم هارمونیک

Harmonically related complex exponensial

همه سیگنال های نمایی مختلط به صورت $e^{jk\omega_0 t}$ دارای تناوب مشترک $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ هستند

$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ دوره تناوب $T_0 = \frac{2\pi}{|k\omega_0|}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

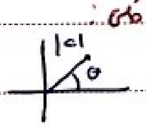
ϕ_k ها یک مجموعه سیگنال های نمایی مختلط متناوب پیوسته زمان هستند که دارای تناوب مشترک

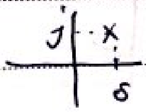
$\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ هستند و هم فرکانس های آن ضریب صحیحی از ω_0 است

سیگنال نمایی مختلط در حالت کلی:

c و α مختلط هستند $c = |c|e^{j\theta}$

$x(t) = ce^{\alpha t}$; $\alpha = \delta + j\omega$





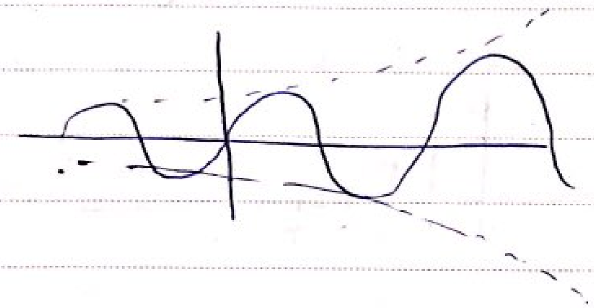
Subject
Date

$$x(t) = |c|\, e^{j\theta} e^{\sigma t} e^{j\omega t} = \underbrace{|c|\, e^{\sigma t}}_{\text{حالت خاص ۱}} \; \underbrace{e^{j(\omega t+\theta)}}_{\text{حالت خاص ۲}}$$

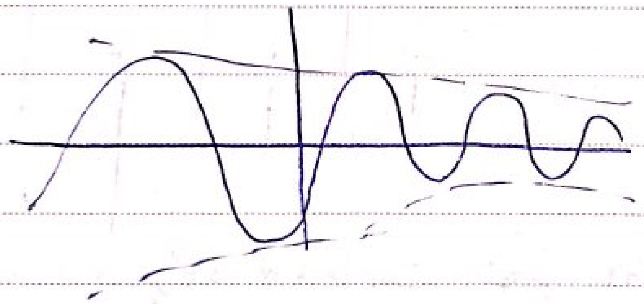
$$= |c|\, e^{\sigma t} \left(\cos(\omega t+\theta) + j \sin(\omega t+\theta) \right)$$

غیرمتناوب است

$|c|\, e^{\sigma t} \cos(\omega t+\theta) \qquad \sigma > 0$



$|c|\, e^{\sigma t} \cos(\omega t+\theta) \qquad \sigma < 0$



سیگنال های نمایی مختلط گسسته زمان :

درحالت کلی به صورت $x[n] = c\alpha^n$ که c و α اعداد مختلط هستند. اگرچه می‌توان

(تابع نمایی مختلط گسسته زمان را به صورت $x[n] = ce^{\beta n}$ نمایش داد که در آن $\alpha = e^{\beta}$)

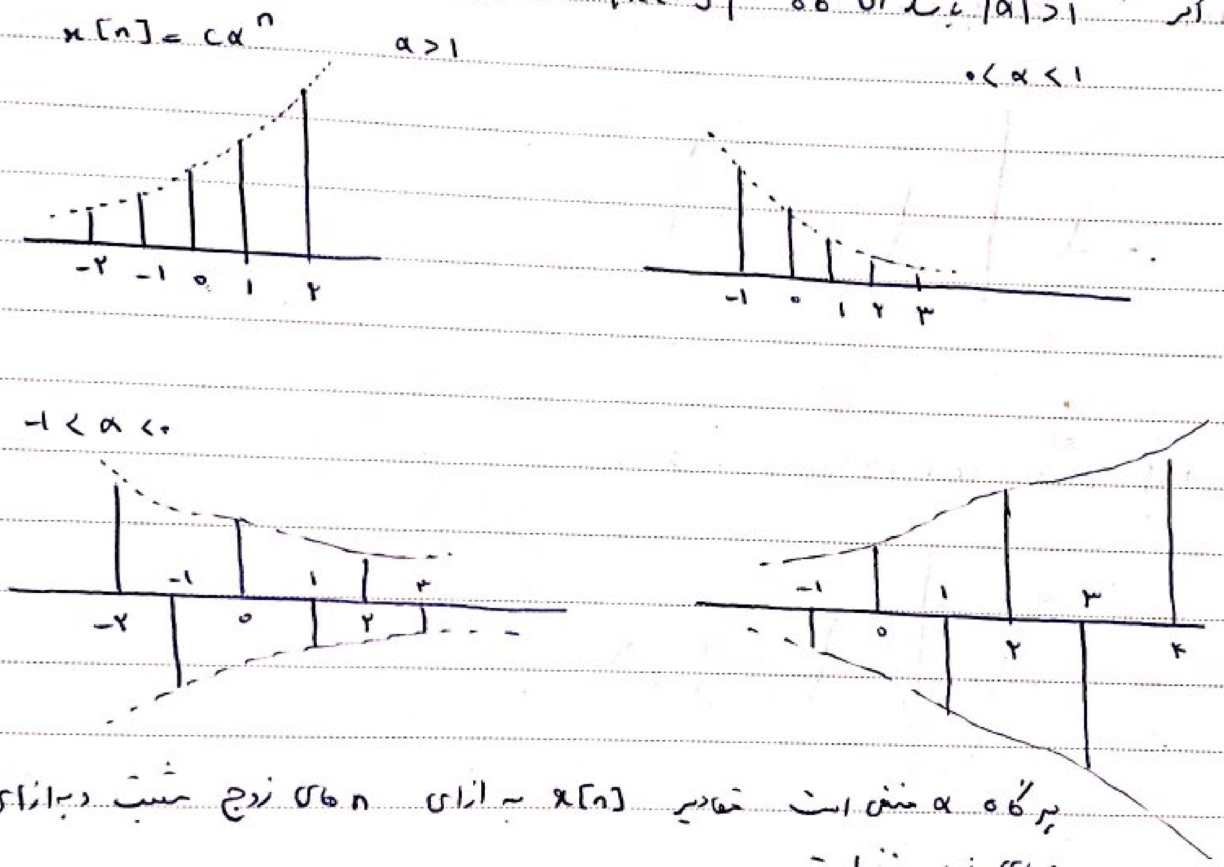
Subject
Date

۱.۱ فرمت $x[n] = c\alpha^n$ معمولاً است

حالت خاص (۱): α و c اعداد حقیقی هستند

اگر $|\alpha|<1$ باشد آنگاه $|x[n]|$ نزولی است

اگر $|\alpha|>1$ باشد آنگاه $|x[n]|$ صعودی است



هرگاه α منفی است مقادیر $x[n]$ به ازای n های زوج مثبت و به ازای n های فرد منفی است.

حالت خاص (۲): $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

خاصیت تناوبی سیگنال های نمایی مختلط گسسته زمان:

با وجود شباهت های بسیار میان سیگنال های نمایی مختلط گسسته زمان و پیوسته زمان تفاوت های

PAPCO

Subject
Date

بیا رهی باهم دارند :

یادآوری از سیگنال های مختلط پیوسته زمان $e^{j\omega_0 t}$ — با افزایش ω_0 فرکانس سیگنال (تغییرات سیگنال در واحد زمان) افزایش پیدا می کند

همیشه متناوب است و دوره تناوب آن $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$

سؤال : آیا در دو ویژگی فوق در سیگنال های های مختلط گسسته_زمان $e^{j\omega_0 n}$ نیز وجود دارد؟

در سیگنال های های مختلط $e^{j\omega_0 n}$، لزوماً با افزایش ω_0، فرکانس سیگنال (تغییرات در واحد زمان) افزایش پیدا نمی کند.

$$\cos \omega_0 t \neq \cos(\omega_0 + 2\pi) t$$
$$\cos \omega_0 t + 2\pi t$$

$$\cos \omega_0 n = \cos(\omega_0 + 2\pi) n$$
$$= \cos(\omega_0 n + 2\pi n)$$

$$e^{j\omega_0 n} \boxed{=} e^{j(\omega_0 + 2\pi) n} = e^{j\omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi n}}_{\cos 2\pi n + j \sin 2\pi n = 1} = e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 t} \boxed{\neq} e^{j(\omega_0 + 2\pi) t} = e^{j\omega_0 t} \underbrace{e^{j2\pi t}}_{\cos 2\pi t + j\sin 2\pi t}$$

Subject
Date

در واقع سیگنال های گسسته-زمان $e^{j\omega_0 n}$ و $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ یکی هستند. در حالت کلی

سیگنال های نمایی مختلط گسسته-زمان با فرکانس های ω_0 ، $\omega_0 \pm 2\pi$ ، $\omega_0 \pm 4\pi$

سیگنال های یکسانی هستند (برعکس سیگنال های نمایی مختلط پیوسته-زمان)

به همین دلیل بازه ی فرکانسی مستقل برای سیگنال های $e^{j\omega_0 n}$ را میان ۰ الی 2π یا

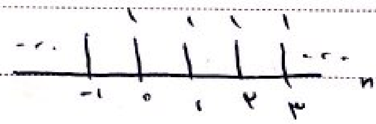
$-\pi$ تا π در نظر میگیریم.

برای سیگنال های نمایی مختلط گسسته زمان $e^{j\omega_0 n}$ فرکانس های حول مضارب فرد π

فرکانس های بالا و فرکانس های حول مضارب زوج π فرکانس های پایین هستند

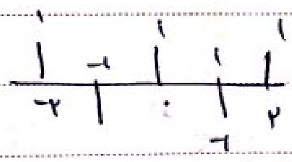
$\omega_0 = 2\pi$

$$x[n] = e^{j2\pi n} = \cos 2\pi n + j\sin 2\pi n = 1$$



$\omega_0 = \pi$

$$x[n] = e^{j\pi n} = \cos \pi n + j\underbrace{\sin \pi n}_{=0} = (-1)^n$$



فرکانس های (تغییرات سیگنال در واحد زمان) در سیگنال زیر را تحقیق کنید.

Subject
Date

$$x_1[n] = \sin \frac{41}{3}\pi n$$

$$x_2[n] = \sin \frac{51}{7}\pi n$$

$$\left|\frac{5}{3}\pi - \pi\right| \ \square \ \left|\frac{9}{7}\pi - \pi\right| \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{3} \ \boxed{>} \ \frac{2\pi}{7}$$

$$\left|\frac{41}{3}\pi - \pi\right|$$

$$\frac{41}{3}\pi \triangleq \frac{41}{6}2\pi - 6\times 2\pi = \frac{5}{6}2\pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$\frac{51}{7}\pi \triangleq \frac{51}{14}2\pi - 3\times 2\pi = \frac{9}{14}2\pi = \frac{9}{7}\pi$$

فرکانس سیگنال $x_2[n]$ به π نزدیک‌تر است (در مقایسه با x_1). لذا فرکانس

سیگنال $x_2[n]$ از $x_1[n]$ بیشتر است.

سوال: آیا سیگنال $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ همیشه متناوب است؟

یک عدد طبیعی N وجود داشته باشد

شرط تناوب

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

$$= e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow e^{j\omega_0 N} = \underbrace{1}_{e^{j2\pi m}} \qquad \omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$$

m عدد صحیح

P4PCO

Subject

Date

لذا شرط متناوب بودن $e^{j\omega_0 n}$ این است که $\frac{2\pi}{\omega_0}$ برابر با یک کسر گویا باشد

به عبارت دیگر ω_0 مضربی از π باشد در غیر این صورت $e^{j\omega_0 n}$ متناوب نیست

$$x[n] = \sin \frac{3\pi}{7} n$$

سه‌شنبه ۱۴:۳۰ - ۱۲:۳۰ کلاس ۲۰۴

جلسه چهارم

سه‌شنبه ۳ مهر

سیگنال های نمایی مختلط متناوب پیوسته زمان $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

فرکانس سیگنال با افزایش ω_0 افزایش می‌یابد

به ازای هر مقدار ω_0 $e^{j\omega_0 t}$ متناوب با دوره $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ متناوب

• گسسته زمان $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

• فرکانس های مستقل در بازه با طول 2π قرار دارد

فرکانس بالا : $e^{j\omega_0 n}$ با ω_0 نزدیک

به مضارب فرد π

فرکانس پایین : $e^{j\omega_0 n}$ با ω_0 نزدیک

به مضارب زوج π

•• به ازای هر مقدار ω_0 $e^{j\omega_0 n}$ لزوماً متناوب نیست

شرط متناوب بودن $e^{j\omega_0 n} \Leftarrow \frac{N}{m} =$ کسر گویا $= \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftarrow$ در صورتی که

$\frac{2\pi}{\omega_0}$ برابر با کسر گویای $\frac{N}{m}$ باشد و $1 = (N, m)$ ب.م.م آنگاه دوره تناوب برابر N است

مثال : $\sin 2t$ متناوب و $T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\sin \frac{3\pi}{5} t$ متناوب و $T_0 = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{10}{3}$

$\sin 2n \Rightarrow \frac{2\pi}{2} = \pi \neq$ کسر گویا $\Leftarrow$ متناوب نیست

$\sin \frac{3}{5}\pi n \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{3}{5}\pi} = \frac{10}{3} =$ کسر گویا متناوب است

تناوب باید عدد صحیح باشد

اگر ب.م.م صورت و مخرج ۱ باشد ، عدد بالایی .

مجموعه سیگنال های از نظر هارمونی مرتبط با هم با دوره تناوب N_0 :

$$\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

شرط متناوب بودن $\quad \dfrac{2\pi}{k\frac{2\pi}{N_0}} = \dfrac{N_0}{k} = $ کسر گویا $\quad$ متناوب است با دوره تناوب N_0

$$\phi_{k+N_0} = e^{j(k+N_0)\frac{2\pi}{N_0}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}\, e^{j\frac{2\pi}{N_0}n} = \phi_k[n]$$

$\phi_k[n]$ ها از هم مستقل نیستند و کلاً N_0 تا ϕ_k متمایز وجود دارد:

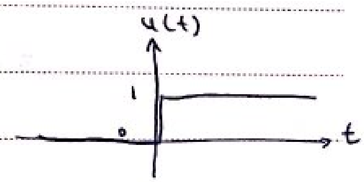
$$\phi_0[n], \dots, \phi_{N_0-1}[n]$$

$$\underbrace{e^{j\times 0\cdot\frac{2\pi}{N_0}n}, \; e^{j\frac{2\pi}{N_0}n}, \; \dots, \; e^{j(N_0-1)\frac{2\pi}{N_0}n}}_{N_0 \text{ تا}}$$

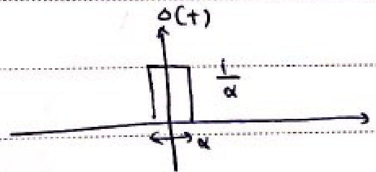
در پیوسته زمان بی‌نهایت تا وجود داشت.

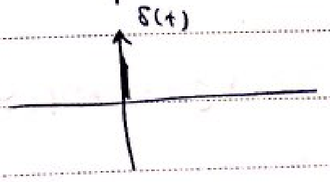
تابع ضربه و تابع پله

پیوسته زمان $\quad$ تابع پله : $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



تابع ضربه $\quad \delta(t) = \lim\limits_{\alpha \to 0} \Delta(t)$





ویژگی $\quad \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$

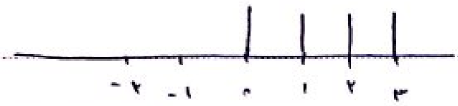
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\, dt'$$

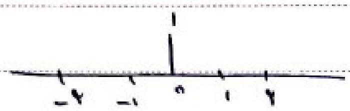
Subject
Date

گسسته زمان

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

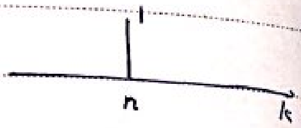


$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



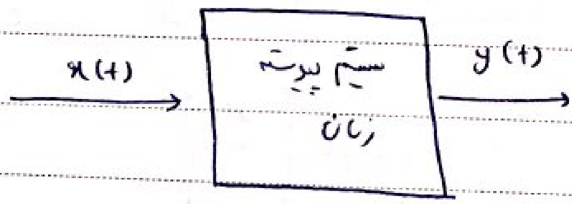
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

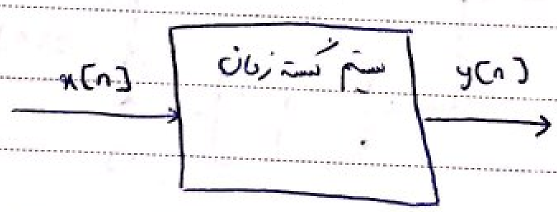
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \underset{k=n-m}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$



۱-۲- سیستم ها ← تعاریف
اتصال سیستم ها
ویژگی های سیستم ها و دسته بندی آن ها

سیستم: مجموعه‌ای از عناصر که یک هدف را دنبال می‌کند. هر سیستم حداقل یک ورودی و یک خروجی دارد
که می‌تواند هر دو پیوسته زمان یا گسسته زمان یا یکی پیوسته زمان و دیگری گسسته زمان باشد

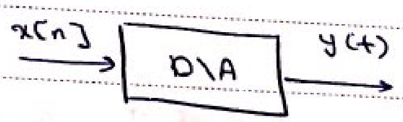


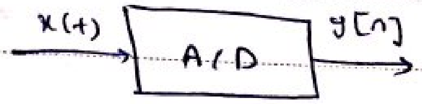


Date

Single input Single output   سیستم های تک ورودی ـ تک خروجی
(SISO)

سیستم های چند ورودی ـ چند خروجی (MIMO)

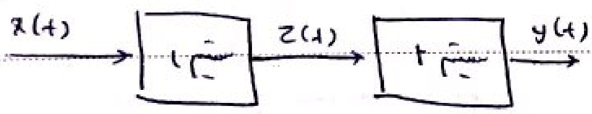




مثال سیستم: ـ ویدیو پروژکتور
ـ اتومبیل
ـ سیستم سرمایشی ـ گرمایشی
ـ سیستم بهبود تصویر

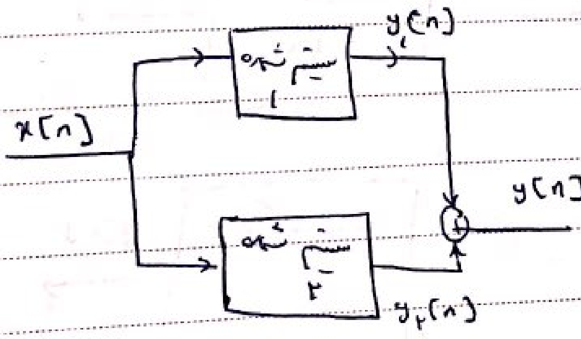
اتصال سیستم ها   سری
موازی
فیدبک دار
ترکیبی

① اتصال سری:



Cascade interconnection

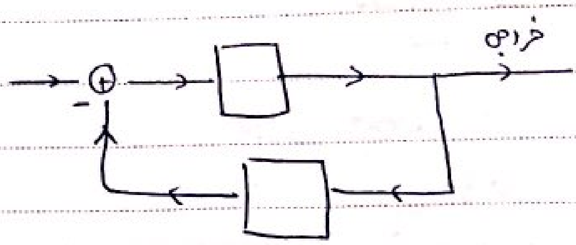
② اتصال موازی:

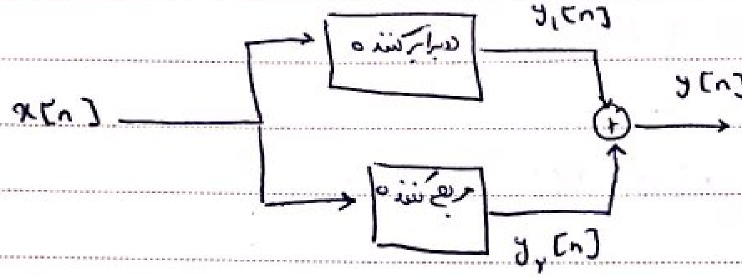


PAPCO

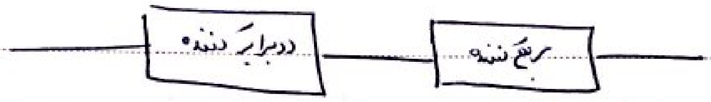
Subject
Date

② فیدبک دار





$y[n] = 2x[n] + (x[n])^2$



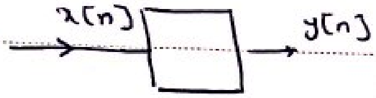
ویژگی های سیستم ها

- سیستم های با حافظه و بدون حافظه
- سیستم های معکوس پذیر و معکوس ناپذیر
- سیستم های علی و غیر علی
- پایدار و ناپایدار
- تغییر پذیر با زمان و تغییر ناپذیر با زمان
- خطی و غیرخطی

سیستم های بدون حافظه: یک سیستم بی حافظه است اگر خروجی آن در هر نقطه t_0 فقط به مقدار ورودی آن در همان نقطه t_0 بستگی داشته باشد

PAPCO

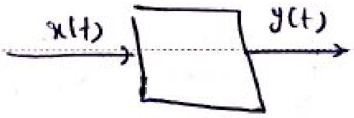
مثال



$y[n] = x[n-1] - x[n]$ با حافظه

$y[n] = x[n^2]$ با حافظه

$y[n] = (x[n])^2$ بدون حافظه



$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')\, dt'$ با حافظه

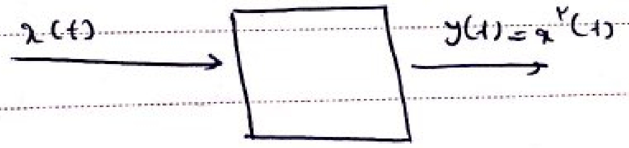
$y(t) = \sin(t-1)\, x(t)$ بدون حافظه

$y(t) = t^2\, x(t)$ بدون حافظه

$y(t) = x(t-1)$ حافظه دار

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ با حافظه

سیستمی معکوس پذیر است که بتوان با مشاهده ی خروجی (همه ی نقاط) ورودی (همه ی نقاط) را تعیین کرد. به عبارت دیگر سیستمی که در آن ورودی های مختلف خروجی های مختلف ایجاد کنند سیستم معکوس پذیر است.

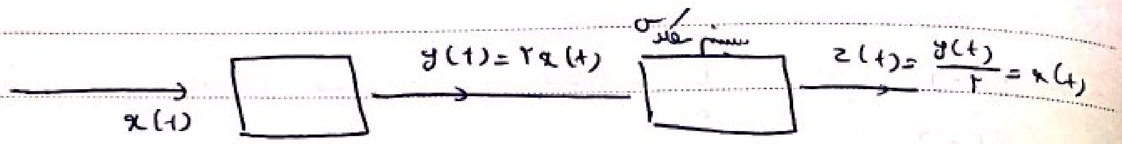


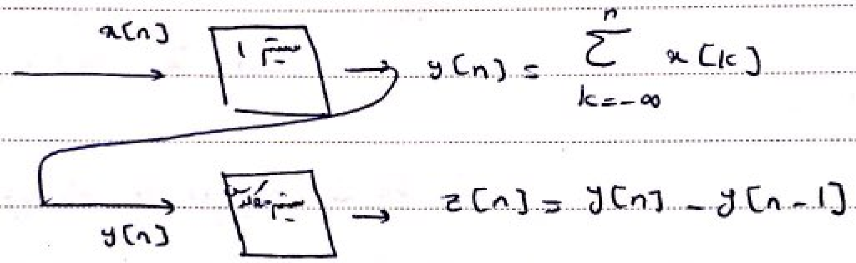
معکوس ناپذیر

Subject
Date

$y(t) = 2x(t)$ معکوس پذیر

اگر سیستمی معکوس پذیر باشد سیستم معکوس آن وجود دارد به گونه‌ای که اگر با سیستم سری شود ورودی برابر با خودش می‌شود





معکوس پذیر

جلسه

سه‌شنبه ۱۰ مهر

علّی بودن

یک سیستم علّی (causal) است اگر در هر لحظه‌ی t_0 (n_0) خروجی $y(t_0)$ ($y[n_0]$) تنها به مقدار ورودی در لحظه‌ی t_0 و یا لحظات قبل از t_0 وابسته باشد

یک سیستم بی‌حافظه علّی است

یک سیستم با حافظه می‌تواند علّی یا غیر علّی باشد

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\quad\quad\quad} \longrightarrow y[n] = \frac{x[n+1] + x[n-1]}{2}$$

با حافظه
غیر علّی

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\quad\quad\quad} \longrightarrow y[n] = \frac{1}{2M} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad\quad\quad} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')\,dt'$$ علّی است با حافظه و معکوس پذیر

$$i(t) \longrightarrow \boxed{\dashv\vdash} \longrightarrow q = cv, \quad v(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = c\frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \frac{1}{c}\int i\,dt$$

اگرچه سیستم‌های علّی از نظر عملی بسیار مهم هستند اما این بدان معنی نیست که سیستم‌های غیرعلّی

Subject

Date

عمل می‌کنند. به عنوان مثال در سیستم‌هایی که متغیر مستقل زمان نیست (تصویر)، سیستم تخمین تعداد

ارزش دلار، طلا و...

پایداری stable

سیستمی پایدار است که برای هر ورودی با اندازه‌ی محدود خروجی با اندازه‌ی محدود تولید کند

$$\text{if } |x(t)| < N \ ; \ \forall t \Rightarrow \exists M \text{ so that } |y(t)| < M \ ; \ \forall t$$

$$\text{if } |x[n]| < N \ ; \ \forall n \Rightarrow \exists M \text{ so that } |y[n]| < M \ ; \ \forall n$$

مثال: • $y(t) = 2x(t)$ $\quad x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = 2x(t)$

$$\text{if } |x(t)| < N \Rightarrow |y(t)| = 2|x(t)| < \underbrace{2N}_{M}$$

• $y(t) = e^{x(t)}$ سیستم پایدار

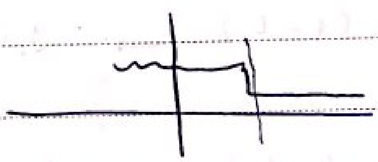
$$|x(t)| < N \Rightarrow e^{x(t)} < \underbrace{e^{N}}_{M}$$

•

$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = n\,x[n]$ ناپایدار

$n \to \infty$

• $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ ناپایدار

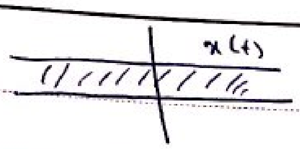


• $y(t) = \begin{cases} t\,x(t) & |t| < 1 \\ 2x(t) & |t| > 1 \end{cases}$ پایدار

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date



• انتگرال ناپایدار

Time-invariant تغییرناپذیری با زمان

اگر ورودی به اندازه‌ی t_0 (n_0) شیفت پیدا کند ($x_1(t)=x(t-t_0)$) آن گاه خروجی نیز به

$x_1[n]=x[n-n_0]$

اندازه‌ی t_0 (n_0) شیفت پیدا کند ($y_1(t)=y(t-t_0)$)

$y_1[n]=y[n-n_0]$

$x[n]$ → [سیستم شماره ۱] → $y[n]$

$x_1[n]=x[n-n_0]$ → [سیستم شماره ۱] → if $y_1[n]=y[n-n_0]$ ⇒ سیستم تغییرناپذیر با زمان

• $y[n]=2x[n]$

$x[n]\to y[n]=2x[n]$ تغییرناپذیر با زمان

$x_1[n]=x[n-n_0] \longrightarrow y_1[n]=2x_1[n]=2x[n-n_0] \boxed{\overset{?}{=}} y[n-n_0]=2x[n-n_0]$

• $y[t]=tx[t]$

$x(t) \to \boxed{} \to y(t)=tx(t)$

$x_1(t)=x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t)=tx_1(t)=tx(t-t_0) \boxed{\overset{\times}{=}}$

تغییرپذیر با زمان

$y(t-t_0)=(t-t_0)x(t-t_0)$

Subject
Date

- $y[n] = x[n^2]$

$$x[n] \to \boxed{} \to y[n] = x[n^2]$$

$$x_1[n] = x[n-n_0] \to \boxed{} \to y_1[n] = x_1[n^2] = x[n^2-n_0] \quad \boxed{\neq}$$

تغییرپذیر با زمان

$$y[n-n_0] = x[(n-n_0)^2]$$

- $y(t) = \begin{cases} 2x(t) & |t|>1 \\ 3x(t) & |t|<1 \end{cases}$ تغییرپذیر با زمان

- $y[n] = x[2n]$ تغییرپذیر با زمان

خطی بودن

سیستم خطی است که دو ویژگی زیر را داشته باشد

① ویژگی همگنی : $x(t) \to y(t)$

$$x_1(t) = \alpha x(t) \to y_1(t) \boxed{\stackrel{?}{=}} \alpha y(t)$$

② ویژگی جمع پذیری:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{array}\right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \longleftrightarrow y_3(t) \stackrel{?}{=} y_1(t) + y_2(t)$$

دو ویژگی فوق را می‌توان در قالب یک ویژگی زیر بیان کرد

اگر $\left\{\begin{array}{l} x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \end{array}\right. \Rightarrow x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to y_3(t)$

if $y_3(t) \stackrel{?}{=} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Subject
Date

- $y(t) = 2x(t) + 3$ نه درگی همگن نه جمع پذیری

دیرگی همگن $x(t) \rightarrow y(t) = 2x(t) + 3$

$x_1(t) = \alpha x(t) \rightarrow y_1(t) = 2x_1(t) + 3 = 2\alpha x(t) + 3$

$\overset{?}{=} \alpha y(t) = 2\alpha x(t) + 3\alpha$ ویژگی همگن ندارد

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow 2x_1(t) + 3 = y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow 2x_2(t) + 3 = y_2(t) \end{cases}$$

$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow 2x_3(t) + 3 = 2(x_1(t) + x_2(t)) + 3$

$\boxed{\overset{\times}{=}}$ $y_1(t) + y_2(t) = 2x_1(t) + 3 + 2x_2(t) + 3$

- $y[n] = n\,x[n]$

- $y(t) = e^{x(t)}$

- $y[n] = Re\{x[n]\}$

PAPCO

Subject
Date

جلسه

یکشنبه ۱۵ مهر

فصل دوم: تحلیل سیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان Linear Time Invarient (LTI)

سیستمی که هر دو ویژگی ① تغییر ناپذیری با زمان ② خطی بودن را داشته باشد یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI) می گوییم.

دلایل اهمیت سیستم های LTI:

- سیستم های LTI به دلیل ویژگی های که دارند با جزئیات قابل توجه و به صورت سیستماتیک قابل تحلیل است
- بسیاری از فرآیند های فیزیکی ویژگی LTI را دارند

سیستم های LTI دارای خاصیت جمع آثار (super position) است لذا اگر بتوانیم هر ورودی دلخواه سیستم های LTI را به صورت ترکیب خطی از یک مجموعه سیگنال خاص (که به آن ها سیگنال های پایه (basic signals) بگوییم) آن گاه می توانیم خروجی سیستم به آن ورودی دلخواه را براساس خروجی سیستم به سیگنال های پایه بنویسیم.

پاسخ

Subject
Date

رویکرد تحلیل سیستم های LTI

① انتخاب سیگنال های پایه و توصیف یک سیگنال دلخواه به صورت ترکیب خطی از سیگنال های پایه

② خروجی سیستم به ورودی دلخواه را بر اساس ترکیب خطی خروجی سیستم به سیگنال های پایه

معیار و ویژگی انتخاب سیگنال های پایه

- سیگنال های پایه باید به گونه ای انتخاب شوند که بتوانند گستره وسیعی از سیگنال های دلخواه را توصیف کنند
- خروجی سیستم به سیگنال پایه به سادگی به دست آید

فرض کنیم مجموعه سیگنال های پایه Φ_i ها باشند و پاسخ سیستم به سیگنال های پایه برابر با Ψ_i باشد

مجموعه سیگنال های پایه $= \{\Phi_i\}$

$$\Phi_i(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \Psi_i(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow y(t) = \sum_i \alpha_i \Psi_i(t)$$

$$x(t) = \sum_i \alpha_i \Phi_i(t)$$

PAPCO

Subject

Date

نام ابزار	سیگنال های پایه
کانولوشن	سیگنال ضربه impulse
فوریه، لاپلاس	سیگنال نمایی مختلط
⋮	⋮

ابزار کانولوشن

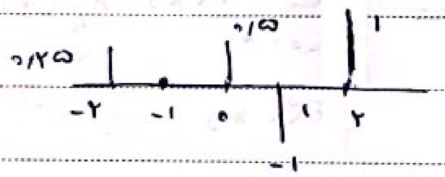
سیگنال پایه پیشنهادی : ضربه

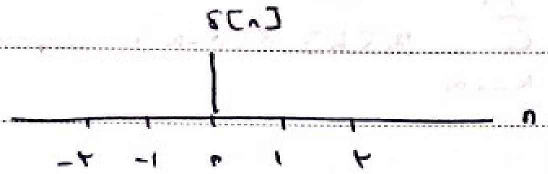
۱-۲- تحلیل سیستم های LTI گسسته زمان — توصیف سیگنال گسسته زمان دلخواه برحسب ترکیب خطی سیگنال ضربه

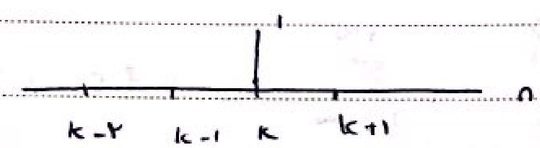
پاسخ سیستم ورودی دلخواه برحسب پاسخ ضربه

خروجی سیستم - ورودی ضربه

توصیف سیگنال گسسته زمان دلخواه $x[n]$ برحسب ترکیب خطی $\delta[n]$







$$x[n] = \dots + 0.25\,\delta[n+2] + 0 \times \delta[n+1] + 0.5\,\delta[n] + (-1)\,\delta[n-1] + 1 \times \delta[n-2] + \dots$$

در حالت کلی $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

پاسخ سیستم گسسته زمان به ورودی دلخواه $x[n]$

صورت مسئله: فرض کنید $x[n]$ ورودی یک سیستم LTI است که می‌خواهیم خروجی ناشی از آن را (پاسخ سیستم به آن ورودی) به دست آوریم

رابطه‌ی خروجی سیستم برحسب ورودی را در اختیار نداریم و تنها چیزی که از سیستم می‌دانیم خروجی سیستم به ازای سیگنال ضربه که آن را با $h[n]$ نمایش می‌دهیم.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI سیستم}} \longrightarrow y[n]$$

$$\xrightarrow[\delta[n]]{\text{معلوم}} \boxed{\quad\quad} \xrightarrow[h[n]]{\text{معلوم}}$$

اطلاعاتی که داریم

$$\delta[n] \xrightarrow{LTI} h[n]$$

به دلیل خطی بودن

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, \underbrace{h_k[n]}_{\text{پاسخ سیستم به } \delta[n-k]} =$$

اگر سیستم تغییرناپذیر با زمان باشد $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

فرض کنیم $\delta[n-k] \longrightarrow h_k[n] \overset{\text{تغییرناپذیری با زمان}}{=} h[n-k]$

Subject
Date

$\delta[n] \longrightarrow h[n]$

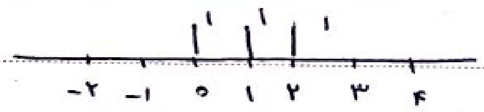
$$x[n] \xrightarrow{LTI} \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]} = x[n] * h[n]$$

جمع کانولوشن

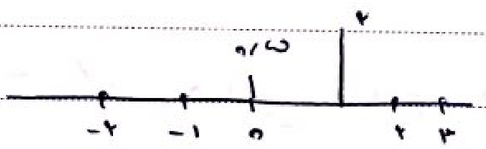
اگر یک سیستم LTI باشد و پاسخ ضربه آن $h[n]$ باشد آن گاه، خروجی سیستم به هر ورودی دلخواه $x[n]$ از رابطه‌ی جمع کانولوشن بدست می آید

$x[n] \longrightarrow$ سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ $\longrightarrow$ $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$

مثال: یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ در اختیار داریم. پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ را بیابید:



$h[n]$ $\longrightarrow$ سیستم $\longleftarrow$ $h[n]$

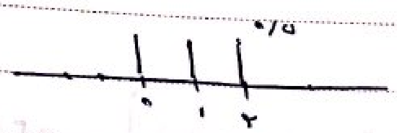


$x[n] \longrightarrow \square \longrightarrow y[n] = ?$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = 0/5 \times h[n] + 2 \times h[n-1]$$

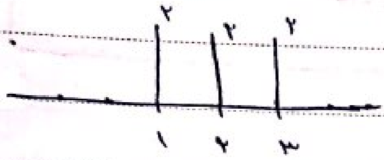
Subject
Date

$0/5\,h[n]$

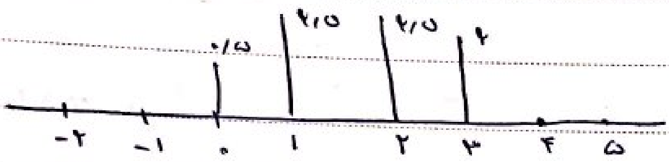


$\oplus$

$2\times h[n-1]$



$y[n]$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$ روش دیگر جمع کانولوشن به صورت تصویری

① n را به k تبدیل می‌کنیم $x[k], h[k]$ را به صورت تابعی از k ترسیم می‌کنیم

② از روی $h[k]$ ، $h[n-k]$ را ترسیم می‌کنیم (به عنوان تابعی از k) — $h[k]$ را به $h[-k]$ تبدیل می‌کنیم

$h[-k]$ را به اندازه n (که متغیر حلقه بیرونی است) شیفت می‌دهیم — برای n های مثبت شیفت به راست خواهد بود

برای n های منفی شیفت به چپ خواهد بود

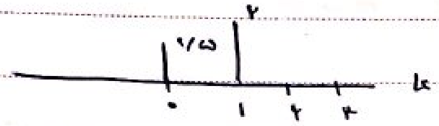
③ آنگاه n را تغییر می‌دهیم و به ازای هر مقدار n ، $y[n]$ را از حاصلضرب

$x[k]$ و $h[n-k]$ به دست می‌آوریم.

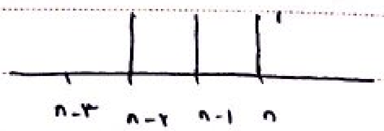
Subject

Date

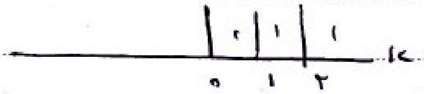
$x[k]$



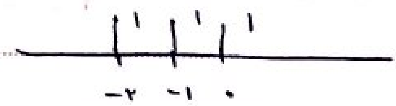
$\times$ $h[n-k]$



$h[k]$

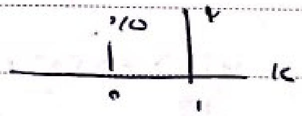


$h[-k]$

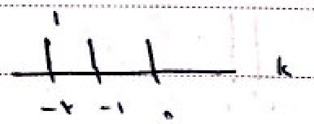


① $n<0 \Rightarrow x[k]\,h[n-k]=0 \Rightarrow y[n]=\sum x[k]\,h[n-k]=0$

② $n=0$



$\times$



$y[n]=0.5\times 1=0.5$

③ $n=1$ $\quad y[n]=0.5\times 1+2\times 1=2.5$

④ $n=2$ $\quad y[n]=0.5\times 1+2\times 1=2.5$

⑤ $n=3$ $\quad y[n]=2\times 1=2$

⑥ $n\geq 4$ $\quad y[n]=0$

Date

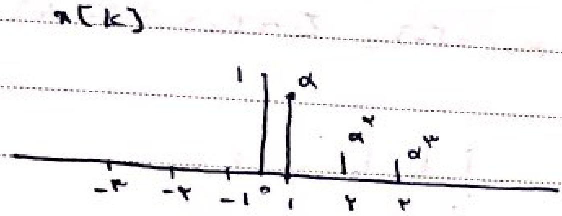
جلسه

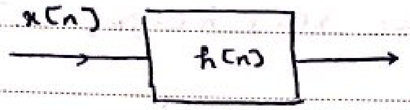
سه‌شنبه ۱۷ مهر

مثال ۲: پاسخ یک سیستم LTI که پاسخ ضربه آن $h[n]$ است به ورودی $x[n]$ را به دست آورید.

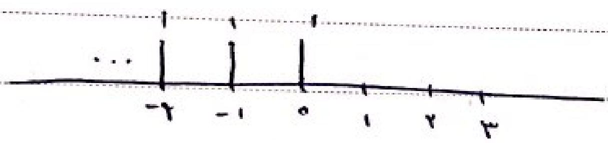
$x[n] = \alpha^n u[n] \qquad 0 < \alpha < 1$

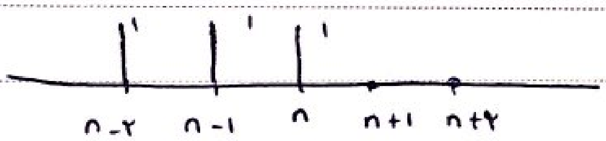
$h[n] = u[n]$





$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$





① $n < 0 \Rightarrow \quad x[k]\, h[n-k] = 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = 0$

② $n \geq 0 \Rightarrow \quad x[k]\, h[n-k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \alpha^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases} \Rightarrow$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k =$$

Subject
Date

یادآوری! مجموع تصاعد هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت q

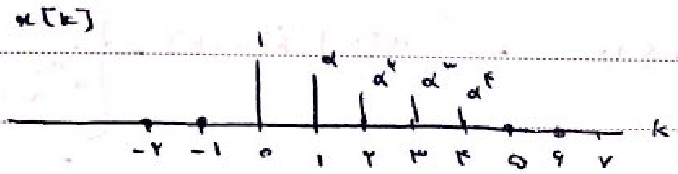
$$\underbrace{t_1 + t_1 q + t_1 q^2 + \dots + t_1 q^{n-1}}_{n \text{ جمله}} = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$$

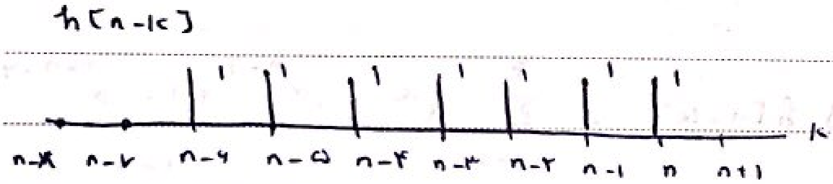
$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

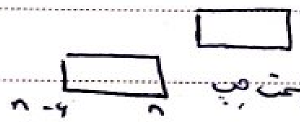
مثال ۳:

$$x[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

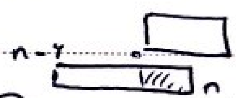






غیرهم پوشانی از سمت چپ

① $n < 0 \Rightarrow x[k]\,h[n-k] = 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = 0$



② $0 \leq n \leq 4 \Rightarrow x[k]\,h[n-k] = \begin{cases} 0 & k<0 \\ \alpha^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k>n \end{cases} \Rightarrow$

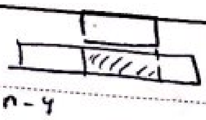
نیمه هم پوشانی از سمت راست

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Subject

Date

③

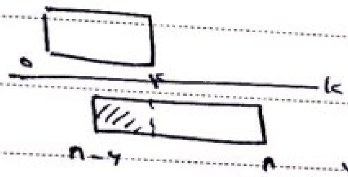


هم پوشانی کامل

$$\underbrace{n > 4 \ \& \ n-6 \leq 0}_{4 < n \leq 6} \Rightarrow x[k]\,h[n-k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \alpha^k & 0 \leq k \leq 4 \\ 0 & k > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^k = \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}$$

④



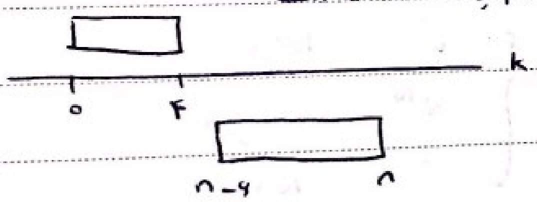
نیمه هم پوشانی از سمت چپ

$$\underbrace{n-6 > 0 \ \& \ n-6 \leq 4}_{n > 6 \ \& \ n \leq 10} \Rightarrow 6 < n \leq 10 \Rightarrow x[k]\,h[n-k] = \begin{cases} 0 & k < n-6 \\ \alpha^k & n-6 \leq k \leq 4 \\ 0 & k > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{n-6}^{4} \alpha^k = \frac{\alpha^{n-6}\left(1-\alpha^{4-n+6+1}\right)}{1-\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^{n-6}\left(1-\alpha^{(11-n)}\right)}{1-\alpha}$$

⑤ عدم پوشانی از سمت راست



$$n-6 > 4 \Rightarrow n > 10 \qquad x[k]\,h[n-k] = 0 \Rightarrow y[n] = 0$$

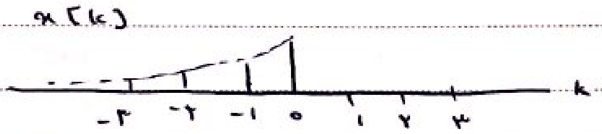
حل:

$$x[n] = 2^n u[-n]$$

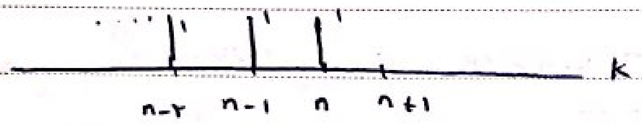
$$h[n] = u[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

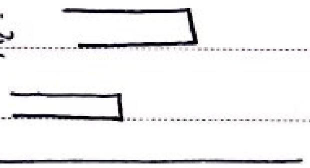
$x[k]$



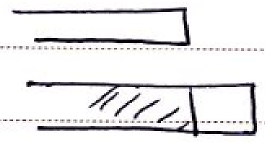
$$h[n-k] = u[n-k]$$



نیمه همپوشانی



همپوشانی کامل



① $n \leq 0$

$$x[k]\, h[n-k] = \begin{cases} 2^k & -\infty < k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{-\infty}^{n} 2^k = \sum_{k'=+\infty}^{-n} 2^{-k'} = \sum_{-n}^{+\infty} 2^{-k'}$$

$$\frac{2^n \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n}{\frac{1}{2}} = 2^{n+1}$$

(۲) $n>0 \Rightarrow x[k]\,h[n-k] = \begin{cases} 2^k & -\infty < k \le 0 \\ 0 & k>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{0}^{-\infty} 2^k = 2$$

$$y[n] = \begin{cases} 2 & n>0 \\ 2^{n+1} & n<0 \end{cases}$$

۲_۲ _ تحلیل سیستم های LTI پیوسته زمان

توصیف سیگنال دلخواه پیوسته _ زمان برحسب تابع ضربه پیوسته _ زمان

یافتن پاسخ سیستم به ورودی دلخواه $x(t)$ برحسب پاسخ ضربه سیستم

یادآوری گسسته زمان $\quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

داریم $\quad x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

اثبات کنیم $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

$$= x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

صورت مسئله: یک سیستم LTI پیوسته زمان داریم و تنها اطلاعاتی که از این سیستم در اختیار

Subject
Date

پاسخ این سیستم به ورودی ضربه $\delta(t)$ است که آن را با $h(t)$ نمایش می دهیم.

می خواهیم پاسخ سیستم به ورودی دلخواه $x(t)$ را بیابیم.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h(t)$$ پاسخ ضربه

$$x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow$$

$$y(t) \underset{\text{خطی بودن}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \underbrace{h_t(\tau)}_{} \,d\tau$$

پاسخ سیستم به ورودی $\delta(t-\tau)$

$$\overset{\text{تغییرناپذیری با زمان}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow$$ اگر سیستم TI باشد آن گاه $h(t-\tau)$

قضیه: اگر یک سیستم LTI باشد با پاسخ ضربه $h(t)$ داشته باشیم آن گاه پاسخ سیستم به ورودی دلخواه $x(t)$ برابر است با

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$ انتگرال کانولوشن

PAPCO

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Date

روش ترسیمی محاسبه انتگرال

① ترسیم $x(\tau)$ برحسب τ

② ترسیم $h(t-\tau)$ برحسب τ — ترسیم $h(\tau)$

شیفت $h(-\tau)$ به اندازه‌ی t

③ یافتن نواحی جداگانه محاسبه $\int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

جلسه

یکشنبه ۳/۲۲

فصل دوم

_ گسسته زمان

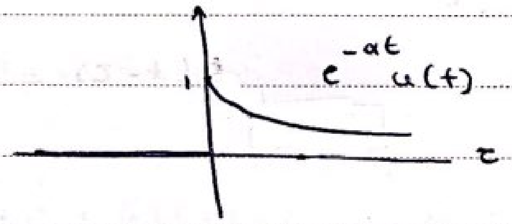
_ پیوسته زمان

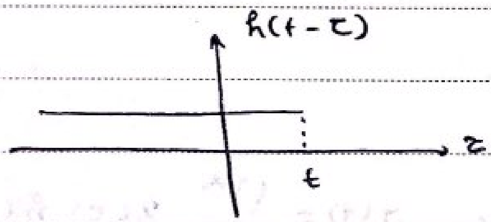
$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)}_{LTI} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

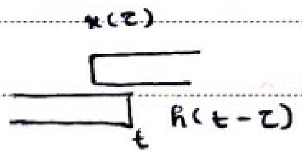
مثال: یک سیستم LTI با پاسخ ضربه h(t) داریم. پاسخ سیستم به ورودی x(t) را بیابید.

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$h(t) = u(t)$$



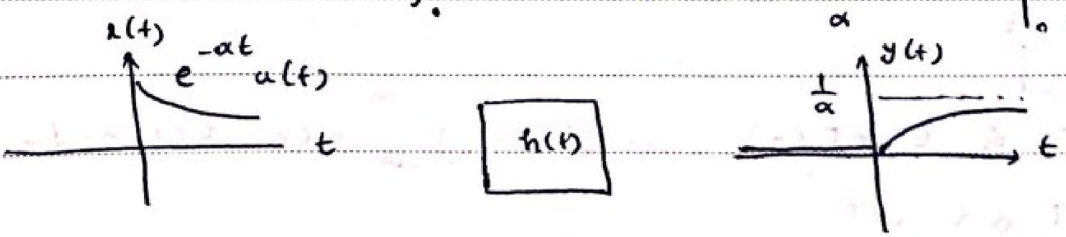




① غیرهم پوشان (از سمت چپ) $\quad t<0 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$

② هم پوشان از سمت چپ $\quad t>0 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$

$$\int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

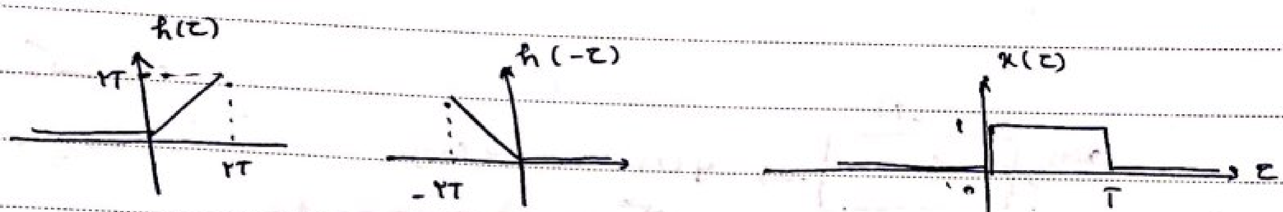


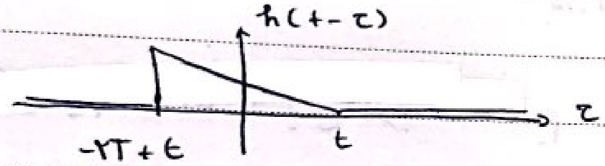
Subject
Date

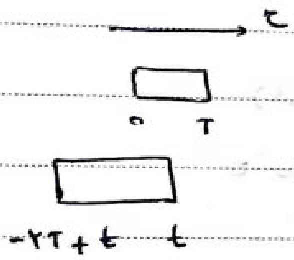
مثال: یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ داریم. پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ را بیابید:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & o.w \end{cases}$$





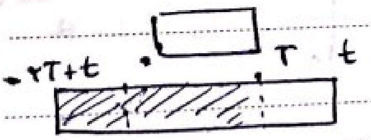


$$h(t-\tau) = \begin{cases} t-\tau & \underbrace{0 < (t-\tau) < 2T}_{} \\ & -2T < -t+\tau < 0 \\ & -2T+t < \tau < t \\ 0 & o.w \end{cases}$$

① $t < 0 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$

② $0 < t < T \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t (t-\tau)\, d\tau =$

$$t\tau - \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$



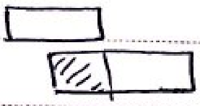
③ $(t > T \;\&\; t-2T < 0) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$

$T \leq t < 2T$

P4PCO

$$\int_0^T (t-\tau)\,d\tau = t\tau - \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^T = tT - \frac{T^2}{2}$$

۴



$(t-2T>0 \;\&\; t-2T<T) \Rightarrow y(t)=\int_{t-2T}^{T} (t-\tau)\,d\tau = t\tau - \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-2T}^{T}$

$(t>2T \;\&\; t<3T)$

$(2T<t<3T)$

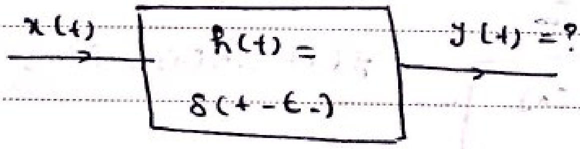
$$\left(tT-\frac{T^2}{2}\right) - \left(t(t-2T) - \frac{(t-2T)^2}{2}\right)$$

۵ $\quad t-2T>T \Rightarrow t>3T$

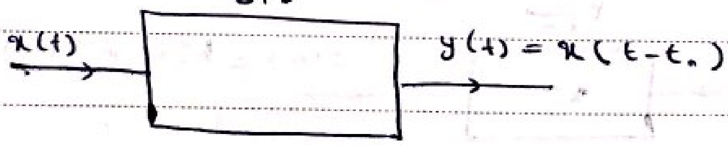
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = 0$$

مثال: مطلوب است محاسبه $x(t) * \delta(t-t_0)$

LTI



LTI



پاسخ ضربه $= h(t)$

$x(t)=\delta(t) \Longrightarrow h(t)=\delta(t-t_0)$

هروقت یک طرف کانولوشن δ بود از روش مستقیم نرید.

Date

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \\ h(t) = \delta(t-\omega) \end{cases} \qquad y(t) = e^{-\alpha t} u(t) * \delta(t-\omega) = e^{-\alpha(t-\omega)} u(t-\omega)$$

۲-۳: ویژگی های کانولوشن

Commutative جابجایی

Associative شرکت پذیری

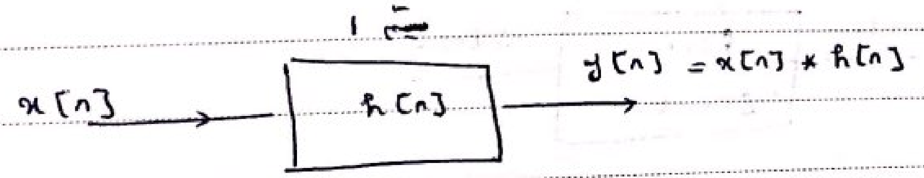
distributive توزیعی (پخشی)

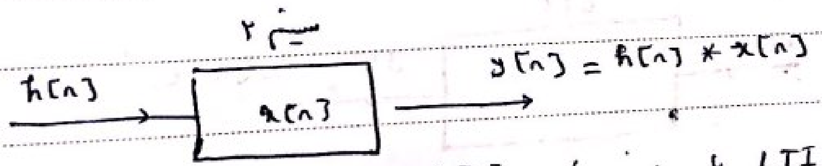
الف: جابجایی

$$\begin{cases} x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \\ x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \end{cases}$$

اثبات: $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] \overset{r=n-k}{=}$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n-r]\, h[r] = h[n] * x[n]$$



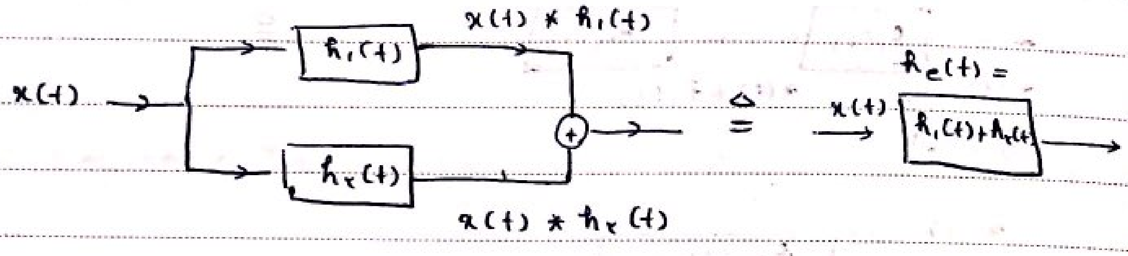


پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ به ورودی $x[n]$ برابر است با پاسخ یک سیستم LTI دیگر با پاسخ ضربه $x[n]$ به ورودی $h[n]$.

ب: ویژگی توزیعی

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



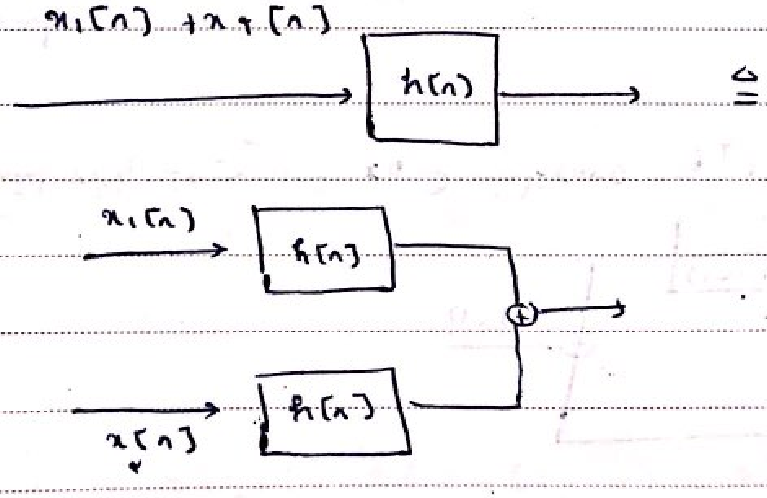
پاسخ ضربه یک سیستم معادل برای اتصال موازی دو سیستم با پاسخ ضربه h_1 و h_2 برابر است

با حاصل جمع پاسخ ضربه ها.

مثال: $h(t) = e^{-\alpha t} u(t) + \delta(t)$ $\quad x(t) = u(t)$

با استفاده از ویژگی جابجایی و توزیعی

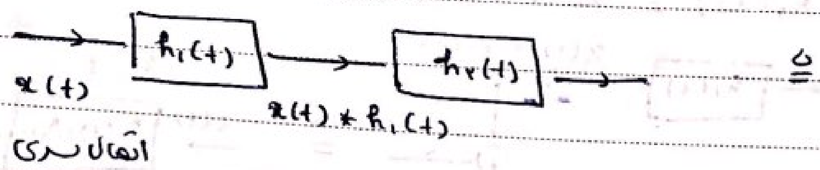
$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

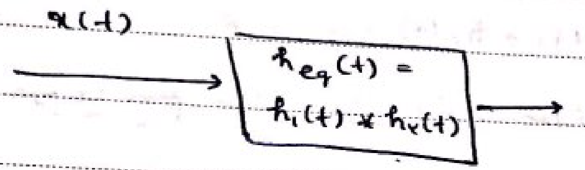


ج : ویژگی شرکت پذیری

$$(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$

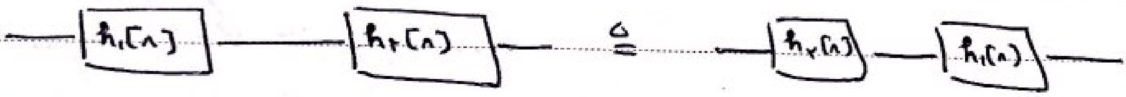
$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$



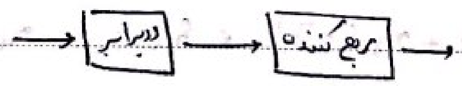


پاسخ ضربه سیستم معادل اتصال سری دو سیستم با پاسخ های ضربه h_1 و h_2 برابر است با $h_1 * h_2$

تذکر: در اتصال سری سیستم های LTI ترتیب سیستم ها مهم نیست

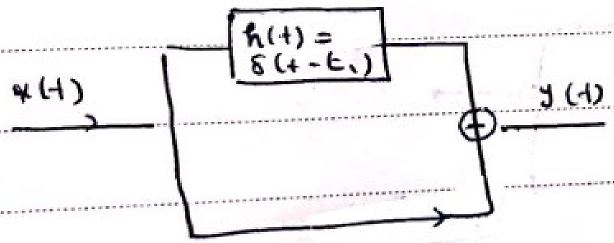


مثال:



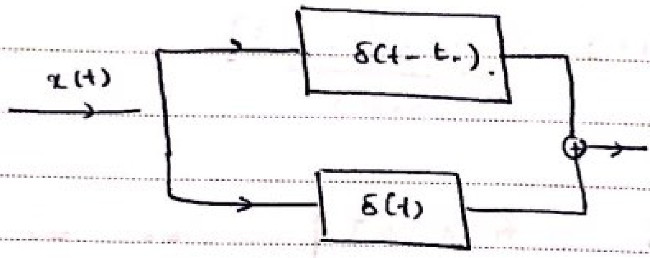
ترتیب اتصال مهم است

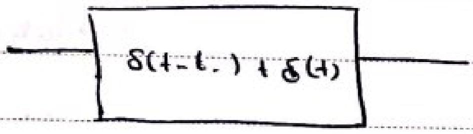
سیستم معادل سیستم زیرا بدست آورید و پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = \sin 2\pi \times 10^6 t$ را بدست آورید.



Subject
Date

$\triangleq$





$y(t) = (\sin 2\pi \times 10^{9} t) * (\delta(t-t_0) + \delta(t)) =$

$\sin 2\pi \times 10^{9}(t-t_0) + \sin 2\pi \times 10^{9} t$

۲-۴: بررسی ویژگی های سیستم های LTI با استفاده از پاسخ ضربه

حافظه دار بودن

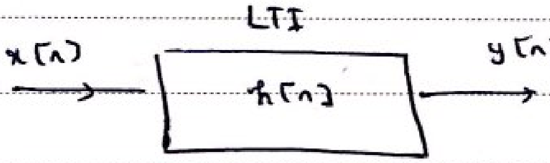
معکوس پذیری

پایداری

علی

۲-۴-۱: بی حافظه بودن

یک سیستم بی حافظه است اگر خروجی در هر نقطه t_0 (n_0) تنها به مقدار ورودی در نقطه t_0 (n_0) بستگی داشته باشد.



$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$

$y[n_0] = \dots + x[n_0-1]\, \underbrace{h[n_0-(n_0-1)]}_{h[1]} + x[n_0]\, \underbrace{h[n_0-n_0]}_{h[0]} +$

PAPCO

$$+ x[n_0+1]\ h[\underbrace{n_0-(n_0+1)}_{h[-1]}]$$

شرط بی حافظه بودن $\quad h[n_0-k]\Big|_{k\neq n_0}=0 \Rightarrow h[n]\Big|_{n\neq 0}=0$

شرط بی حافظه بودن

یک سیستم LTI بی حافظه است اگر و فقط اگر $h[n]\Big|_{n\neq 0}=0$ به عبارت دیگر $h[n]=k\delta[n]$

به طور مشابه برای پیوسته زمان داریم سیستم بی حافظه است اگر و فقط اگر $h(t)\Big|_{t\neq 0}=0$

Subject
Date

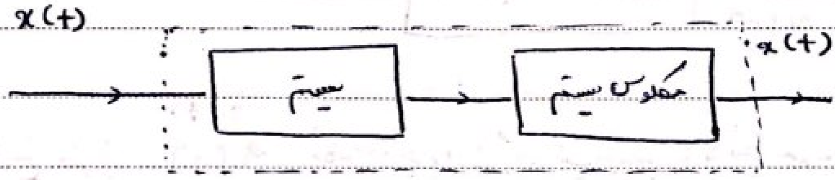
جلسه

سه‌شنبه ۲۴ مهر

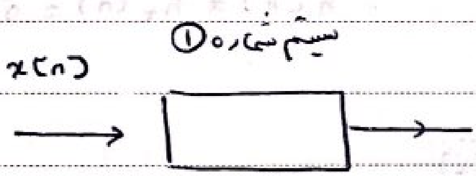
۲-۴ بررسی ویژگی‌های سیستم LTI با استفاده از پاسخ ضربه

① بی حافظه بودن

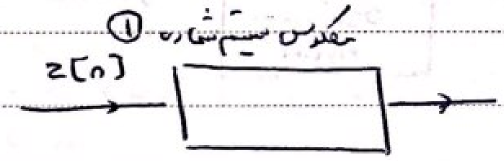
② معکوس پذیری



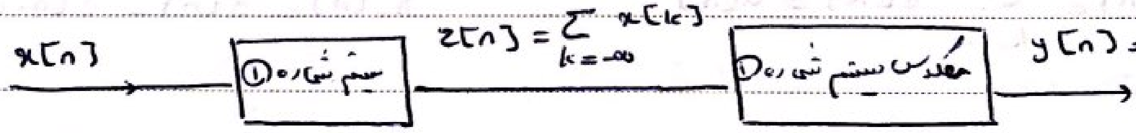
مثال:



$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$



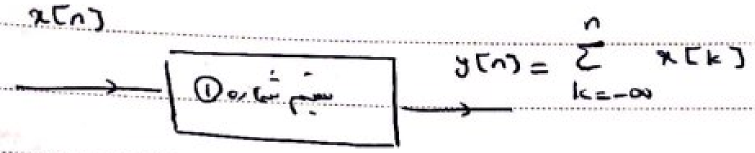
$$y[n] = z[n] - z[n-1]$$



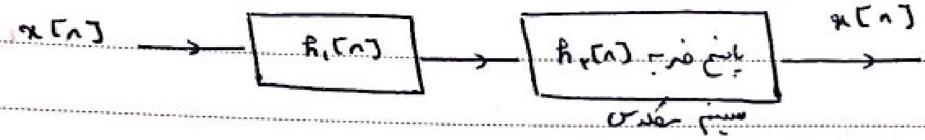
هر دو سیستم LTI هستند حال فرض کنید که تنها اطلاعاتی که از سیستم شماره ① پاسخ ضربه آن

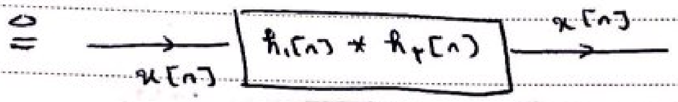
است (رابطه صریح نداریم)

Subject
Date



سیستم شماره ① پاسخ ضربه $h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$

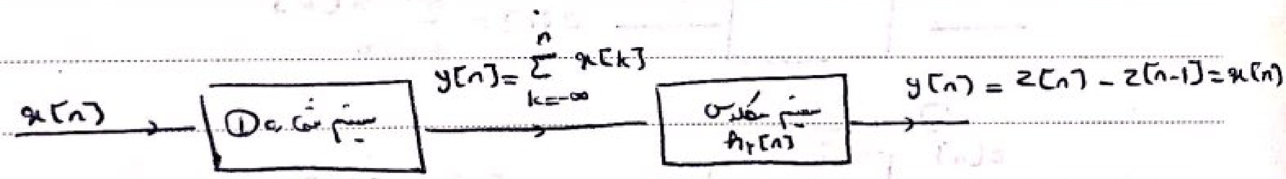




$h_2(t)$ $h_1(t)$

سیستمی با پاسخ ضربه $h_1[n]$ معکوس پذیر است اگر یک سیستم با پاسخ ضربه $h_2[n]$ وجود داشته باشد

$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$ $\qquad$ $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$



پاسخ ضربه سیستم شماره ① $h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$ $\qquad$ $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

$h_1[n] * h_2[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] * \delta[n] -$

$u[n] * \delta[n-1] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$ ✓ معکوس هم هست

PAPCO

Subject
Date

مثال: سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ داریم سیستم معکوس را به دست آورید.

$$\longrightarrow \boxed{h(t)=e^{-\alpha t}u(t)} \longrightarrow \boxed{h_I(t)=?} \longrightarrow$$

Find $h_I(t)$ s.t $h(t) * \underbrace{h_I(t)}_{\text{مجهول}} = \delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, h_I(t-\tau)\, d\tau = \delta(t)$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\, h_I(t-\tau)\, d\tau = \delta(t)$$

روش سیستماتیکی برای حل این مجهول نداریم.

دوباره به این سوال برخواهیم گشت (فوریه) کانولوشن به ضرب تبدیل می‌شود.

③ علی بودن: خروجی سیستم در لحظه t_0 / n_0 فقط و فقط به ورودی در لحظه t_0 / n_0 و ماقبل آن بستگی دارد.

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{h[n]} \longrightarrow \quad y[n]=x[n] * h[n]$$

$$y[n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n_0-k]$$

شرط علی بودن $h[n_0-k]\Big|_{k>n_0}=0 \Rightarrow h[n]\Big|_{n<0}=0$

شرط علی بودن

به طور مشابه برای سیستم های پیوسته زمان شرط علی بودن $h(t)\Big|_{t<0}=0$

در واقع پاسخ ضربه یک سیستم LTI علی قبل از آن که ضربه رخ دهد ($t<0$ / $n<0$)، باید صفر باشد.

مثال: $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ علی است

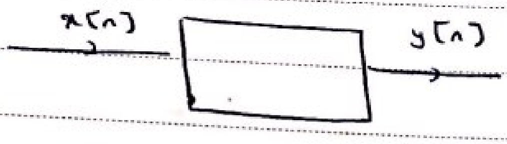
$h[n]=\delta[n]+\delta[n+1]$ $h[-1]$ مقدار دارد علی نیست

Subject
Date

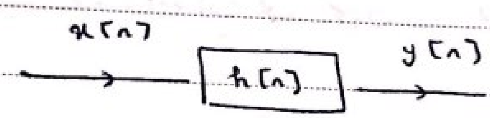
$h(t) = u(t)$ علّی است

$h(t) = e^{\alpha t} u(-t)$ علّی نیست

④ پایداری: هر ورودی با اندازه‌ی محدود باعث تولید خروجی با اندازه محدود شود.



if $|x[n]| < M \Rightarrow \exists\ N>0$ s.t $|y[n]| < N \Rightarrow$ سیستم پایدار است



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$|x[n]| < M \Rightarrow |y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] \right| \boxed{\leq}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|\, |h[n-k]| \boxed{\leq}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} M\, |h[n-k]|$$

شرط کافی (ولازم) برای پایداری: $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty}$ محدود باشد

شرط کافی برای پایداری سیستم های CT: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty}$

مثال:

$$h(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2t}|\, u(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$ پایدار

Date

$h[n] = u[n]$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] = \infty$ شرط کافی برای پایداری ندارد

(ناپایدار است)

کافی اگر برقرار بود مطمئن ایم برقراره اگه نباشه و برقرار باشه

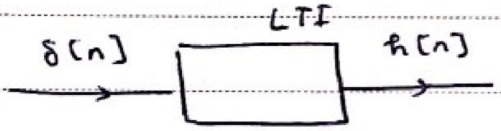
$h(t) = e^{-2t} \cos t \, u(t)$

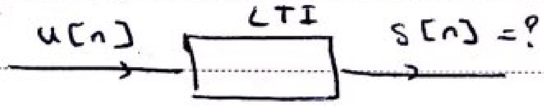
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} |\cos t| \, u(t) \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t} |\cos t| \, dt \leq \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

پایدار است

مثال: نشان دهید که اگر $h(t)$ (پاسخ ضربه سیستم) متناوب باشد، حتماً سیستم غیرعلی و ناپایدار است.

رابطه‌ی بین پاسخ ضربه و پاسخ پله





پاسخ پله

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k] h[n-k] \overset{\text{جابجایی}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k] h[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \implies$ اگر پاسخ پله را داشته باشیم. $s[n]$ معلوم باشد و بخواهیم پاسخ ضربه را به دست آوریم $\implies \boxed{h[n] = s[n] - s[n-1]}$

PAPCO

Date

به طور مشابه در سیستم های CT

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h(t)$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow s(t)$$

$$\begin{cases} s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \\ h(t) = \dfrac{d\, s(t)}{dt} \end{cases}$$

مثال: یک سیستم LTI داریم که پاسخ پله آن برابر است با: $s[n] = \delta[n]$

آیا این سیستم پایدار است؟ علّی است؟ پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = \delta[n-1]$ را محاسبه کنید

آیا سیستم معکوس دارد؟

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

پایدار است $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k] - \delta[k-1] = 0$: پایدار است

جلسه

یکشنبه ۲۹ مهر

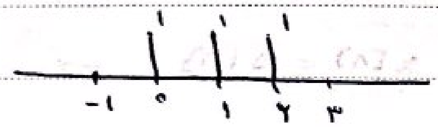
نکته: خواصی که تاکنون بررسی شده است، مختص سیستم های LTI است:

یک سیستم LTI به صورت منحصر به فردی توسط پاسخ ضربه توصیف می‌شود

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

مثال: فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI برابر است با $h[n] = u[n] - u[n-3]$

$$= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$



تنها یک سیستم LTI وجود دارد که پاسخ ضربه آن به صورت فوق است. (آیا می‌توانید توصیف صریح آن را بیابید) هیچ سیستم LTI دیگری وجود ندارد که پاسخ ضربه آن برابر با فوق باشد

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

اما عکس این تعداد بسیار زیادی سیستم غیر LTI وجود داشته باشد که پاسخ ضربه آن برابر با $h[n]$ باشد.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n-2])^2$$

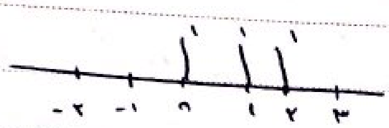
این سیستم خطی نیست

Subject
Date

پاسخ ضربه این سیستم غیرخطی :

$x[n] = \delta[n]$

$\Rightarrow h[n] = (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2])^2 = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

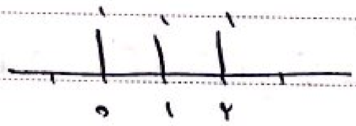


برای این سیستم غیرخطی پاسخ ضربه توصیف کننده کامل سیستم نیست.

(مثال: نمی‌توانیم پاسخ به سیستم را براساس پاسخ ضربه به دست آوریم.)

$x[n] \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y[n] = \max(x[n], x[n-1], x[n-2])$

$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$



سیستم فقط خطی باشد، ورودی را براساس $x[n]$ که داریم می‌نویسیم تا بتوانیم خروجی را به دست آوریم

۲.۶ توصیف سیستم‌های LTI با استفاده از معادلات دیفرانسیل و تفاضلی.

روش‌های توصیف یک سیستم — روش صریح : explicitle _description

$y[n] = 2x[n] + x[n-2]$

رابطه خروجی ($y[n]$ یا $y(t)$) را برحسب ورودی به صورت صریح می‌نویسیم

روش ضمنی : implicite _ description

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t-5)$

بوسیله‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیلی یا تفاضلی (رابطه حاکم بر خروجی و مشتقات آن و ورودی و مشتقات آن) بیان می‌شود

Subject
Date

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\quad\quad} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{cases} f(t) - k\,y(t) = \dfrac{M\,d^2 y(t)}{dt^2} \\[2ex] \dfrac{M\,d^2 y(t)}{dt^2} + k\,y(t) = f(t) \end{cases}$$

نکته: اگر سیستم LTI باشد پاسخ ضربه نیز یکی از روش های توصیف سیستم است (مرجع بیشتر)

الف: توصیف ضمنی سیستم های LTI پیوسته زمان با استفاده از معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

مثال: فرض کنید رابطه خروجی و ورودی یک سیستم با معادله زیر توصیف شود

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad\quad} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) + \frac{4\,d\,y(t)}{dt} = x(t) + \frac{3\,dx(t)}{dt}$$

از درس معادلات دیفرانسیل به یاد داریم حل معادله دیفرانسیل با مقادیر [?] $y(t)$ برای یک ورودی داده شده $x(t)$ شامل دو بخش است

پاسخ همگن یا عمومی $y_h(t)$

پاسخ خاص $y_p(t)$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$y_h(t)$ ، ورودی را برابر با صفر می‌گذاشتیم و $y(t)$ را به دست می‌آوردیم

$y_p(t)$ ، خروجی متناسب با ورودی در نظر می‌گرفتیم و معادله را حل می‌کردیم

مثال: پاسخ سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل فوق را برای $x(t)=u(t)$ حساب کنید.

Subject
Date

$$x(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow y(t) \qquad \frac{2\,dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t): \quad \frac{2\,dy(t)}{dt} + 4y(t) = 0 \qquad y(t) = Ae^{-2t}$$

$$2s + 4 = 0$$

$$y_p(t): \quad y_p(t) = k\,u(t) \qquad 4k\,u(t) = u(t) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{4}u(t)$$

$y(t) = (Ae^{-2t} + \frac{1}{4})\,u(t)$ مقدار A را از روی شرایط اولیه بدست می‌آوریم

$$y(t)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow A + \frac{1}{4} = 0 \qquad A = -\frac{1}{4}$$

به طور کلی یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت از مرتبه N به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

اگر شرایط اولیه برابر با صفر باشد این معادله دیفرانسیل خطی توصیف کننده ضمنی یک سیستم

$y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 0$ (N تا شرط اولیه نیاز داریم)

LTI است.

توصیف سیستم های LTI گسسته زمان با استفاده از معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت:

در حالت کلی یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به صورت (از مرتبه N)

$$x[n] \rightarrow \boxed{} \rightarrow y[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

Subject
Date

به طور خلاصه با معادلات دیفرانسیل $\quad y[n] = y_h[n] + y_p[n] \qquad y_h[n] = A\alpha^n$

$y_p[n] = k\,x[n]$

مثال: در یک سیستم LTI توصیف شده با معادله تفاضلی زیر پاسخ ضربه را به دست آورید.

$x[n] \rightarrow \boxed{} \rightarrow y[n] \quad : \quad y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$

شرط اولیه: $y[-1] = 0$

$$h[n] - \frac{1}{2} h[n-1] = \delta[n] \quad \Rightarrow \quad h[n] = \frac{1}{2} h[n-1] + \delta[n]$$

$n=-1 \Rightarrow h[-1] = 0$

$n=0 \Rightarrow h[0] = \frac{1}{2} h[-1] + \delta[0] = 1$

$n=1 \Rightarrow h[1] = \frac{1}{2} h[0] + \delta[1] = \frac{1}{2} \times 1$

$n=2 \Rightarrow h[2] = \frac{1}{2} h[1] + \delta[2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2$

$h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

پاسخ ضربه براساس طول $h[n]$

Finite impulse response FIR

برای بازه محدود از n دارای مقادیر است

Infinite impulse response IIR

برای بازه نامحدود از n دارای مقادیر است

$h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \qquad$ IIR

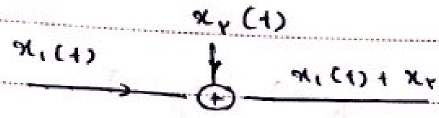
$$h[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & 0 \le n \le 4 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad \text{FIR}$$

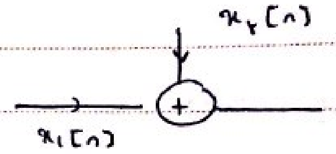
نمایش معادلات دیفرانسیل و تفاضلی به وسیله بلوک دیاگرام

Subject

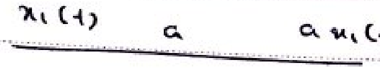
Date

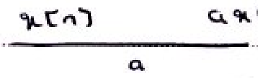
جمع

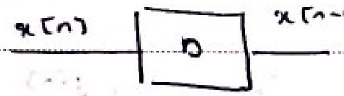


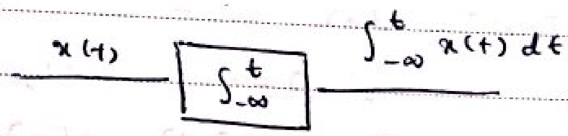


ضرب



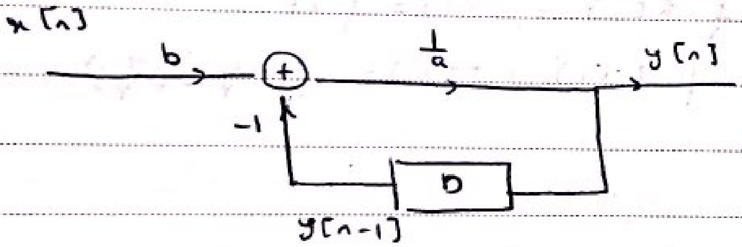






$$y[n-1] + a\, y[n] = b\, x[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{a}\left[b\, x[n] - y[n-1] \right]$$



P4PCO

Subject
Date

جلسه

سه‌شنبه ۱ آبان

معیار انتخاب سیگنال های پایه

پاسخ سیستم به سیگنال پایه به راحتی به دست آید

گستره‌ی وسیعی از سیگنال های دلخواه را بتوان به صورت ترکیب خطی سیگنال های پایه بنویسیم

پیشنهاد آقای فوریه برای سیگنال پایه : نمایی مختلط متناوب $\cos\omega_k t + j\sin\omega_k t = e^{j\omega_k t}$

فرض کنیم سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ داریم

$$e^{j\omega_k t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = e^{j\omega_k t} * h(t)$$

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega_k t} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{j\omega_k (t-\tau)}\, d\tau =$$

$$e^{j\omega_k t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega_k \tau}\, d\tau = e^{j\omega_k t} \times H(\omega_k) \,;$$

ویژگی اول را دارد ☒ $\quad H(\omega_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega_k \tau}\, d\tau$

Subject
Date

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه سیگنال های دلخواه $x(t)$ را براساس ترکیب خطی $e^{jw_k t}$ ها

بنویسیم

سری فوریه : توصیف سیگنال های متناوب دلخواه براساس ترکیب خطی سیگنال پایه

تبدیل فوریه : توصیف سیگنال های نامتناوب دلخواه براساس ترکیب خطی سیگنال پایه

۳-۲ سری فوریه پیوسته زمان :

(مقدمه کلی)

فرض کنید سیگنال های پایه Q_i ها هستند ... $x(t) = a_1 Q_1(t) + a_2 Q(t) + \dots$

برای آن که a_i ها را بدست آوریم Q_i ها باید برهم عمود باشند

$$\int Q_i(t)\, Q_j^*(t) = T\,\delta[i-j] = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ T & i = j \end{cases}$$

آن گاه برای بدست آوردن a_n:

$$\int x(t)\, Q_n^*(t) = \int a_1 Q_1(t)\, Q_n^*(t) + \int a_2 Q_2(t)\, Q_n^*(t) + \dots$$

$$+ \underbrace{a_n \int Q_n(t)\, Q_n^*(t)\, dt}_{a_n T} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int x(t)\, Q_n^*(t)\, dt$$

$$T = \int Q_n(t)\, Q_n^*(t)\, dt$$

Subject
Date

ضرایب سری فوریه پیوسته زمان

فرض کنیم یک سیگنال متناوب دلخواه $x(t)$ داریم $\forall t$ ؛ $x(t+T_0)=x(t)$ که در آن

T_0 دوره تناوب و $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ فرکانس زاویه‌ای است می‌خواهیم این سیگنال متناوب

را بر اساس ترکیب خطی سیگنال های پایه‌ای نمایی مختلط متناوب بنویسیم

سیگنال های نمایی مختلط متناوبی که تناوب آن ها T_0 است باید انتخاب شوند

چه سیگنال هایی به صورت $e^{j\omega_k t}$ وجود دارند که تناوب آن ها T_0 است؟

$x(t)=\sum$ سیگنال های نمایی مختلط متناوب

$$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{k2\pi}{T_0}}=\frac{T_0}{k} \qquad \phi_k(t)=e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$$

همه سیگنال های به صورت دارای تناوب T_0 هستند

$k=0, \pm1, \pm2, \dots$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

a_k ها چگونه بدست می‌آیند؟

اثبات

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\int_0^{T_0}\sum a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}=$$

PAPCO

Subject

Date

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_0} a_k \, e^{j(k-n)\omega_0 t} \overset{①}{=} a_n T_0$$

① کافیست بنویسیم $\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} = \int_0^{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t \, dt +$

$$j \int_0^{T_0} \sin(k-n)\omega_0 t \, dt = T_0 \, \delta[n-k] = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

اگر $x(t)$ متناوب با دوره‌ی تناوب T_0 باشد

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \oint_{T_0} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

بازه انتگرال باید دارای طول T_0 باشد

مثال $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$ $\int_0^{T_0}$

$[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ یا $[0, T_0]$

نکات:

① با توجه به قاعده کلی و خاصیت عدد بودن $e^{jk\omega_0 t}$ ها فرم فوق تنها فرم ممکن برای سری فوریه نیست. سری فوریه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject
Date

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

$$\begin{cases} c_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t \, dt \; ; \; c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\ b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin k\omega_0 t \, dt \end{cases}$$

② درحالت کلی $x(t)$ می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد. البته ما در این درس $x(t)$ را حقیقی فرض می‌کنیم. برای سیگنال های $x(t)$ حقیقی ضرایب سری فوریه a_k ها ممکن است مختلط باشند.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

③ ضریب a_k در رابطه $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ میزان شارکت هارمونی k ام ($e^{jk\omega_0 t}$) در تولید سیگنال $x(t)$ را مشخص می‌کند. به عبارتی هر چه $|a_k|$ بزرگتر باشد میزان حضور هارمونی k ام در تولید $x(t)$ بیشتر می‌شود.

ضریب a_{-1} و a_1 مربوط به هارمونی اصلی است ($e^{-j\omega_0 t}$, $e^{j\omega_0 t}$)

ضریب a_0 مولفه DC (Direct constant component)

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \, dt$$ متوسط سیگنال در یک دوره تناوب

PAPCO

Subject
Date

مثال ۱- ضرایب سری فوریه سیگنال های زیر را بدست آورید.

$x(t) = \sin \omega_0 t$

$$x(t) = \sin \omega_0 t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

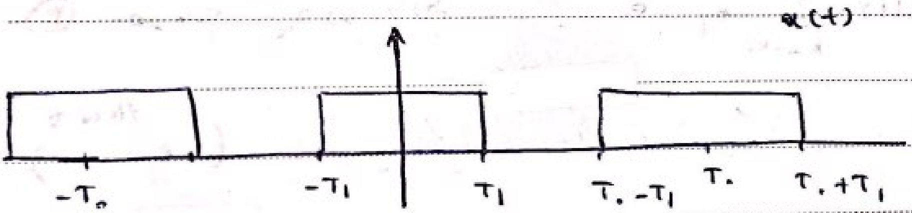
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T} \sin \omega_0 t \, e^{-jk\omega_0 t} dt = \dots$$

روش دوم

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0 \ , \ k \neq 1, -1$$



$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$\frac{1}{T_0} \frac{-1}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \qquad a_k = \frac{1}{T_0 jk\omega_0}\left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1} \right]$$

$$a_k = \frac{1}{T_0 jk\omega_0} \cdot 2j \sin k\omega_0 T_1$$

PAPCO

Subject
Date

جلسه دوازدهم

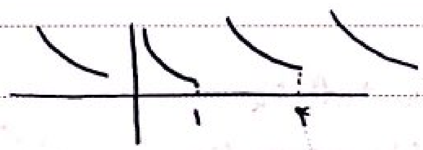
یکشنبه ۶ آبان

همگرایی سری فوریه

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \end{cases}$$

قضیه: اگر سیگنال متناوب $x(t)$ شرایط زیر را داشته باشد

۱) $\int_T |x(t)| dt < \infty$: انتگرال سیگنال در بازه تناوب محدود باشد   مثال نقض



$x(t) = \frac{1}{t}$ $0 < t < 1$ $\int_0^1 \frac{1}{t} dt = \infty$

$T_0 = 1$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \, dt = \infty$

۲) در هر بازه‌ی محدود زمانی $x(t)$ دارای تعداد محدودی max و min کلی باشد

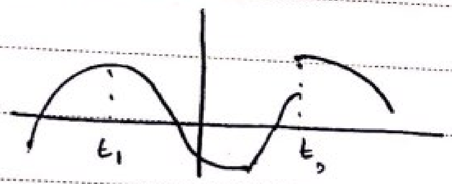
مثال نقض: $x(t) = \sin \frac{2\pi}{t}$ $0 < t < 1$ $\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \frac{2\pi}{t} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$t = \frac{4}{2k+1}$ $[2, +\infty)$

۳) در هر بازه‌ی زمانی محدود تعداد ناپیوستگی ها محدود باشد.

Subject
Date

آن گاه سری فوریه سیگنال $x(t)$ یعنی $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ در نقاطی که $x(t)$ پیوسته است به $x(t)$ میل می‌کند و در نقاطی که $x(t)$ ناپیوسته است به متوسط حد چپ و راست $x(t)$ در آن نقطه میل می‌کند



$$\sum a_k e^{jk\omega_0 t}\Big|_{t=t_0} = \frac{x(t_0^+) + x(t_0^-)}{2}$$

ویژگی های سری فوریه

$x(t) \xrightarrow{F.S} a_k$ معرفی عادی a_k ها ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ است

① خطی بودن

$$x_1(t) \longrightarrow a_k$$
$$x_2(t) \longrightarrow b_k$$
$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow c_k = \alpha a_k + \beta b_k$$

فرض کنید $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ متناوب باشد با دوره تناوب T_0

$x_1(t)$ و $x_2(t)$ دوره تناوب T_0 داشته باشند

② شیفت زمانی Time shift

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$
$$x(t-t_0) \longleftrightarrow b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

اثبات: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$\Rightarrow x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 (t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(a_k e^{-jk\omega_0 t_0}\right) e^{jk\omega_0 t}$$

P4PCO

روش دوم $\quad b_k = \frac{1}{T_0}\int x(t-t_0)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

$|b_k| = |e^{-jk\omega_0 t}|\,|a_k|$ شیفت زمانی اندازه ضرایب سری فوریه را تغییر نمی‌دهد

$|b_k| = |a_k|$

③ انعکاس زمانی time - reverse

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x(-t) \longleftrightarrow \boxed{b_k = a_{-k}}$

اثبات: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} \overset{k=-k'}{=} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} a_{-k'} e^{jk'\omega_0 t}$$

نکته: اگر $x(t)$ زوج باشد $x(t) = x(-t) \Leftarrow a_k = a_{-k}$

ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب زوج نسبت به k زوج است

نکته: اگر $x(t)$ فرد باشد $x(t) = -x(-t)$ آنگاه داریم $-a_k = a_{-k}$

④ مقیاس بندی زمانی Time - scale $\quad x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x(\alpha t) \longleftrightarrow b_k =$

$x(t)$ متناوب با دوره تناوب T_0 و فرکانس زاویه‌ای $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

آنگاه $x(\alpha t)$ نیز متناوب است با دوره تناوب $\frac{T_0}{\alpha}$ و فرکانس زاویه‌ای $\frac{2\pi}{\frac{T_0}{\alpha}} = \frac{\alpha 2\pi}{T_0} = \alpha\omega_0$

Date

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\alpha\omega_0 t}$$

مقیاس بندی (فشردگی یا گستردگی سیگنال) اثری روی ضرایب سری فوریه ندارد و تنها فرکانس اصلی و هارمونی های آن را تغییر می دهد. اگر هارمونی های با فرکانس زاویه ای ω_0 ، $\pm 2\omega_0$ ، $\pm 3\omega_0$ در شکل $x(t)$ حضور دارند در مقابل هارمونی های با فرکانس زاویه ای $\alpha\omega_0$ ، $\pm 2\alpha\omega_0$ ، $\pm 3\alpha\omega_0$ در شکل $x(\alpha t)$ حضور دارند.

⑤ ضرب و کانولوشن در حوزه زمان

$x_1(t) \longleftrightarrow a_k$

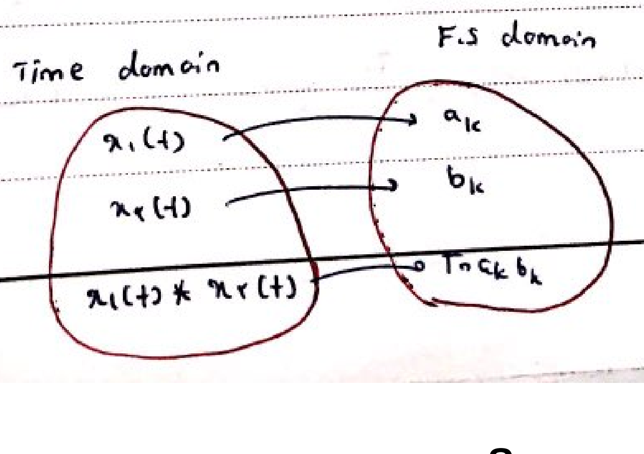
$x_2(t) \longrightarrow b_k$

تعریف می کنیم $y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{T_0} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$

کانولوشن دایروی

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow c_k = T_0 a_k b_k$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{l-k} = a_k * b_k$$



Date

۶ Conjugation (مزدوج) در حوزه زمان

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x^*(t) \longleftrightarrow b_k = a^*_{-k}$

نتیجه گیری: اگر $x(t)$ حقیقی باشد آن گاه $x(t) = x^*(t)$ ولذا برای سیگنال های حقیقی داریم

$$a_k = a^*_{-k} \Rightarrow \begin{cases} Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} & \text{بخش حقیقی نسبت به } k \text{ زوج} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} & \text{بخش موهومی نسبت به } k \text{ فرد} \end{cases}$$

نتیجه گیری: * اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد

$a_k = a^*_{-k}$ حقیقی بودن

$a_k = a_{-k}$ زوج بودن

$$\begin{cases} Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \\ Im\{a_k\} = Im\{a_{-k}\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Im\{a_k\} = 0 \\ Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \end{cases}$$

آن گاه a_k فقط دارای بخش حقیقی است و نسبت به k زوج است

* اگر $x(t)$ فرد باشد و حقیقی

$a_k = a^*_{-k}$ حقیقی بودن

$a_k = -a_{-k}$ فرد بودن

$$\begin{cases} Re\{a_k\} = 0 \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \end{cases} \Leftarrow$$

آن گاه a_k فقط دارای بخش موهومی است (a_k موهومی خالص است) و نسبت به k فرد.

۷ مشتق گیری و انتگرال گیری در حوزه زمان

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject

Date

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow b_k = jk\omega_0 a_k$$

اثبات: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \sum a_k jk\omega_0 e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t')\,dt' \longrightarrow c_k = \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

سوال: به نظر شما مشتق‌گیر حضور هارمونی‌های با فرکانس بالا را تقویت می‌کند یا تضعیف؟

عملاً فرکانس‌های بالا (kهای زیاد) در مقایسه با فرکانس‌های پایین بیشتر تقویت می‌شوند.

Date

جلسه

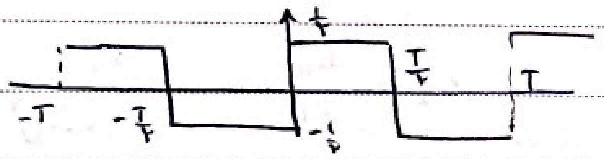
یکشنبه ۱۳ آبان

۸_ رابطه پارسوال parseval's theorem

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt}_{\text{توان متوسط}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

توان متوسط یک سیگنال در بازه تناوب آن برابر است با جمع توان متوسط هارمونیک های آن

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال های زیر را بدست آورید



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right] =$$

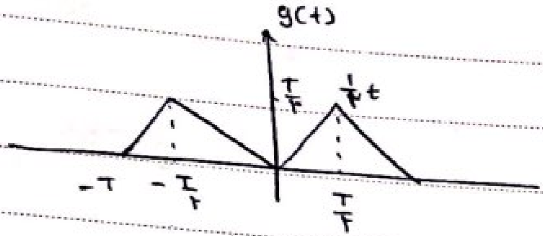
$$\frac{1}{2T}\left[\left.\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}\right|_{-\frac{T}{2}}^{0} - \left.\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}\right|_{0}^{\frac{T}{2}}\right] =$$

$$\frac{1}{2Tjk\omega_0}\left[\underbrace{\left(1-e^{jk\omega_0\frac{T}{2}}\right)+\left(1-e^{-jk\omega_0\frac{T}{2}}\right)}_{2-2\cos k\omega_0\frac{T}{2}}\right] \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{1-\cos k\pi}{2jk\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ is even} \quad \text{زوج} \\ \frac{1}{jk\pi} & k \text{ is odd} \quad \text{فرد} \end{cases}$$

سیگنال فرد است، ضرایب سری فوریه برای k زوج صفر شد، برای فرد موهومی می شد.

Date



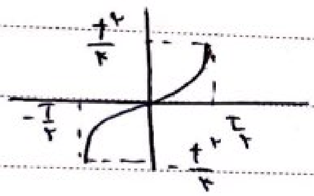
$\rightarrow b_k = ?$

روش اول
$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

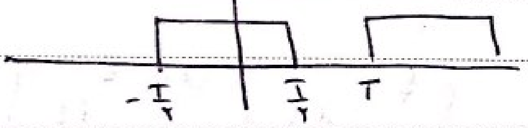
روش دوم
$$\frac{d\,g(t)}{dt} = x(t) \Rightarrow x(t) \longrightarrow a_k = jk\omega_0 b_k$$
$$g(t) \longrightarrow b_k = \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

$$= \frac{1-\cos k\pi}{2jk\pi} \times \frac{1}{jk\omega_0} = \frac{1-\cos k\pi}{2\pi k\,\frac{2\pi}{T}\,k} = \frac{(1-\cos k\pi)\,T}{(2k\pi)^2}$$

وقتی انتگرال می‌گیریم هارمونی‌های فرکانس بالا را تضعیف می‌کنیم.



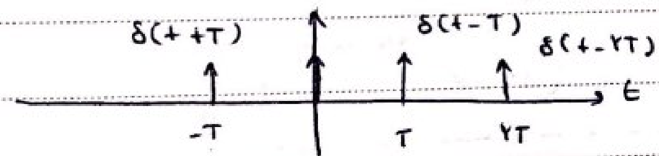
$$z(t) \longrightarrow c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{a_k}{(jk\omega_0)^2}$$



$\longrightarrow d_k =$ معلوم

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$ را به دست آورید.

$$= \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \dots$$



سیگنال متناوب است با دوره تناوب T

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, g(t)\, dt = g(0)$$

$$= \frac{1}{T}\, e^{-jk\omega_0 \times 0} = \frac{1}{T}$$

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \delta(t-\tau)\, g(t)\, d\tau = g(\tau)$$

ب) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t-kT)$

سیگنال $x(t)$ با مشخصات زیر را بیابید

۱) $x(t)$ real است.

۲) for $|k|>1$ ، $a_k=0$ که a_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ است. a_0 ، a_1 ، a_{-1} را داریم

۳) دوره تناوب آن $T=4$ است.

۴) سیگنال متناوب با ضرایب سری فوریه $b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} \times a_{-k}$ فرد است.

۴-۳ سری فوریه: پاسخ سیستم‌های LTI به ورودی متناوب دلخواه

سیگنال پایه $e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow e^{j\omega_0 t} H(\omega_0)$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow y(t)$ $\quad H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

قدم اول ✓

قدم دوم: پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ که متناوب است براساس پاسخ سیستم به $e^{j\omega_0 t}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j\omega_0 2t} + \dots$$

ویژگی خطی بودن در سیستم های LTI

$x(t)$ پاسخ سیستم به: $y(t) = \dots + a_{-2}\,($پاسخ سیستم به $e^{-j2\omega_0 t}) + a_{-1}\,($پاسخ سیستم به ورودی $e^{-j\omega_0 t})$

$+ a_0\,($پاسخ به ورودی $1) + a_1\,($پاسخ به ورودی $e^{j\omega_0 t}) + \dots$

از قبل می دانیم پاسخ سیستم به ورودی

$$e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow e^{jk\omega_0 t} H(k\omega_0)\ ;$$

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t k}\, dt$$

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$y(t)$ نیز متناوب است با ضرایب سری فوریه $b_k = a_k H(k\omega_0)$

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

مثال: ضرایب سری فوریه خروجی (پاسخ) سیستم LTI به ورودی $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n)$ را به دست آورید.

پاسخ ضربه سیستم نیز $h(t) = e^{-t}u(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = ?$$

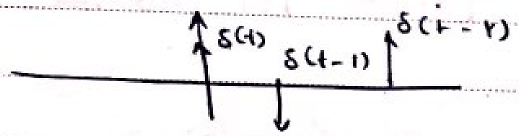
$x(t) \longrightarrow a_k$

$y(t) \longrightarrow b_k = a_k H(k\omega_0)$

① $H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

$x(t)$ باید ضرب بشه در $h(t)$

$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = -\frac{e^{-t(1+jk\omega_0)}}{1+kj\omega_0}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+jk\omega_0}$



$T_0 = 2$

② $a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (\delta(t) - \delta(t-1))\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{2}(1 - e^{-jk\omega_0}) = \frac{1}{2} e^{-jk\frac{\omega_0}{2}} \left(2j \sin\frac{k\omega_0}{2}\right) =$

$j e^{-jk\frac{\omega_0}{2}} \sin\left(\frac{k\omega_0}{2}\right)$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$

$\omega_0 = \pi \rightarrow a_k = \frac{1}{2}(1 - e^{-jk\pi})$

①, ② $\Rightarrow b_k = a_k H(jk\omega_0) = \frac{1}{2}(1 - e^{-jk\pi}) \frac{1}{1+jk\omega_0}$

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\pi t}$

۴ آذر سه‌شنبه ۲/۳۰ بعدازظهر

حل

سه‌شنبه ۱۵ آبان

۲-۳- تبدیل فوریه CT (CT FT)

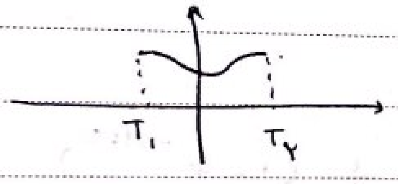
سری فوریه: بیان (نمایش) یک سیگنال متناوب با تناوب T_0 و فرکانس زاویه‌ای $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

برحسب ترکیب خطی با هارمونی‌های با فرکانس مضرب صحیح از ω_0 $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots \; k\omega_0)$

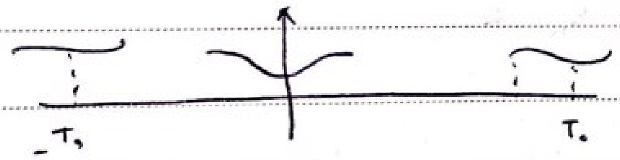
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0}$$

حال یک فراهم سیگنال‌های نامتناوب را در نظر بگیریم:

سیگنال $x(t)$ را داریم که لزوماً متناوب نیست



سیگنال $x(t)$ را می‌توان به صورت یک سیگنال متناوب با $T_0 \to \infty$ در نظر گرفت. در این حالت



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to 0$

در نتیجه هارمونی‌های با فرکانس‌های $k\omega_0$، بسیار به هم نزدیک می‌شوند که در حالت حدی فرکانس

هارمونی‌ها پیوسته می‌شوند و $\sum$ به $\int$ تبدیل می‌شود لذا می‌توان گفت محتوای فرکانسی برای
مجموع

سیگنال‌های غیرمتناوب پیوسته است.

Date

از روی سیگنال غیرمتناوب $x(t)$، سیگنال $\tilde{x}(t)$ را بدست می‌آوریم که در یک بازه‌ی T_0 برابر با $x(t)$ است.

در یک دوره تناوب $\quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$; $\tilde{x}(t) = x(t)$

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t)$$

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \end{cases}$$

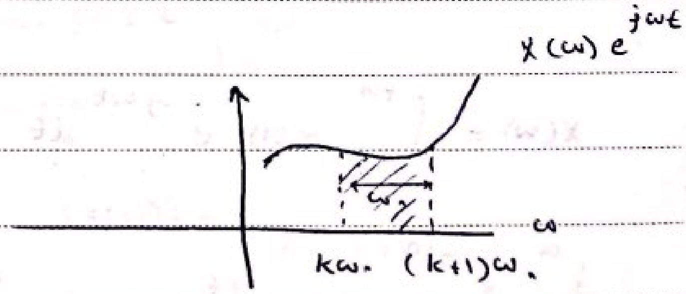
$$\frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

تعریف تبدیل فوریه: $\quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \Rightarrow \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \underset{\substack{\downarrow \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



معکوس تبدیل فوریه

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \\ X(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \end{cases}$$

تبدیل فوریه $x(t)$

time domain پیوسته t $\xrightarrow{F.T}$ $X(\omega)$ Frequency domain

$x(t)$

متغیر مستقل ω : پیوسته

محتوای فرکانسی یک سیگنال پیوسته در حالت کلی پیوسته است (ω پیوسته است)

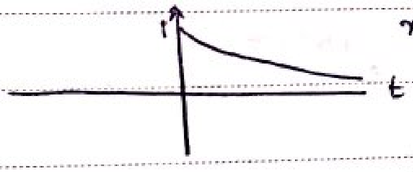
شرط همگرایی تبدیل فوریه:

① $x(t)$ to be absolutely integrable $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

② در هر بازه‌ی زمانی مقدار max و min آن محدود باشد

③ در هر بازه‌ی زمانی تعداد ناپیوستگی ها آن محدود باشد

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ را بدست آورید.
$a>0$



محتوای فرکانسی این سیگنال چه قدر است؟

از بی‌نهایت منفی ω تشکیل شده است.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}\, dt = -\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha+j\omega}\Bigg|_{0}^{+\infty} \overset{\alpha>0}{=} \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

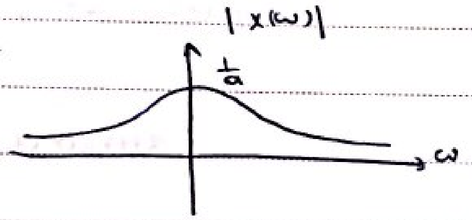
Subject
Date

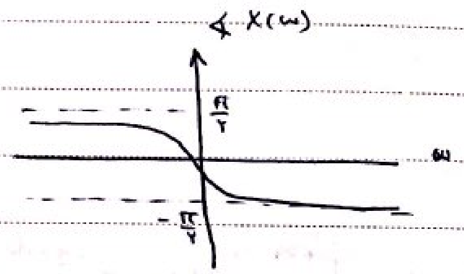
$$X(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

برای رسم دو راه داریم . جدا کردن real و imaginary
رسم نقطه زاویه و اندازه

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

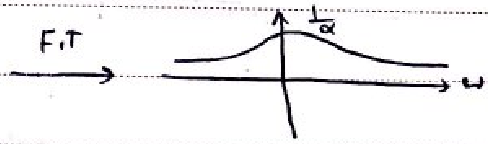
$$\measuredangle X(\omega) = -\measuredangle(\alpha + j\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$





x عدد مختلط $= re^{j\theta}$

محتوای فرکانسی : $+\infty$ اما فرکانس های پایین بیشتر حضور دارند.



$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

مثال: تبدیل فوریه $x(t) = e^{-a|t|}$ را به دست آورید $\alpha > 0$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{\alpha - j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha + j\omega}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty} =$$

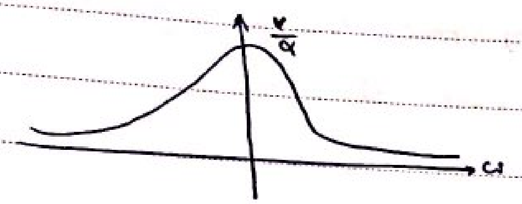
$$\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \qquad |X(\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\measuredangle X(\omega) = 0$$

PAPCO

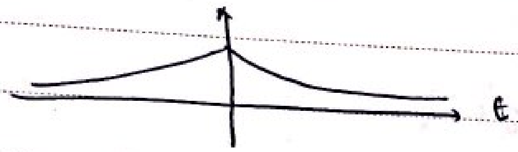
Scanned with CamScanner

Date



هردو low frequency هستند

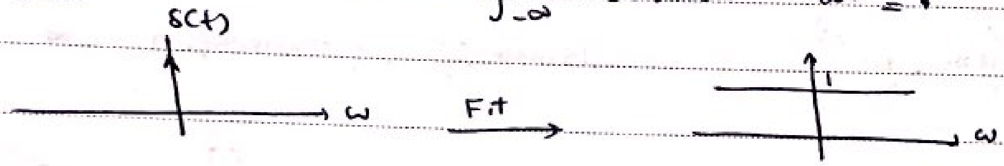
فرکانس های پایین حضور بیشتری از بالایی دارند



تغییرات سیگنال تند بیشتر است با فرکانس های بالا حضور بیشتری دارند

مثال $x(t)=\delta(t)$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=1$$

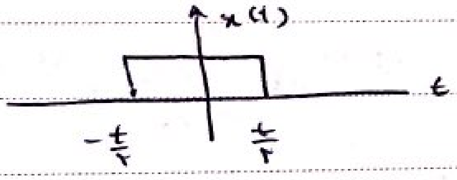


نویز سفید با $\delta(t)$ شبیه‌سازی می‌شود

همه فرکانس‌ها به یک اندازه در شکل $\delta(t)$ حضور دارند

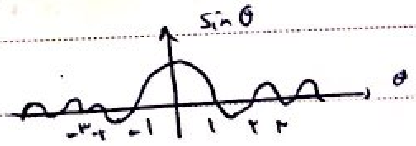
مثال

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{T}{2}\\ 0 & o.w\end{cases}$$



$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t}\,dt=-\frac{1}{j\omega}\,e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{1}{j\omega}\left[e^{(j\omega\frac{T}{2})}-e^{(-j\omega\frac{T}{2})}\right]=\frac{1}{j\omega}\,2j\,\sin\omega\frac{T}{2}=\frac{2\sin\omega\frac{T}{2}}{\omega}$$



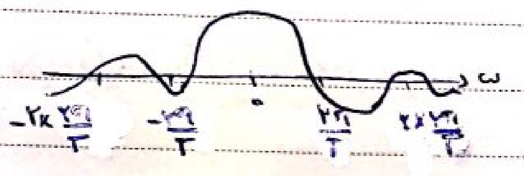
lets define $\operatorname{sinc}\theta=\dfrac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}$

Date

$$= ۲\,\frac{T}{۲}\,\frac{\sin \omega \frac{T}{۲}}{\omega \frac{T}{۲}} = T\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{\pi}\,\frac{T}{۲} = \text{عرض پالس} \times \mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{\pi}\ \text{نصف عرض پالس}$$

$\frac{\omega T}{۲\pi} = k \Rightarrow$ تبدیل فوریه پالس متقارن با عرض T

$\omega = k\,\frac{۲\pi}{T}$



مثال $X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$ $\Leftarrow$ $x(t) = ?$ تبدیل فوریه معکوس

$$x(t) = \frac{1}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\frac{1}{۲\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{-W}^{W} = \frac{1}{۲\pi}\,\frac{(e^{jWt} - e^{-jWt})}{jt} =$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi}\,\frac{\sin Wt}{Wt} = \frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}\,\frac{Wt}{\pi}$$

P4PCO

جلسه

یکشنبه ۲۰ آبان

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب

یک سیگنال غیر متناوب $x(t)$ داریم از روی آن سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ می سازیم:

در یک تناوب: $\tilde{x}(t) = x(t) \; ; \; -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

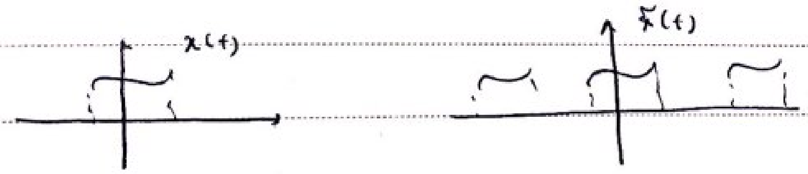
$$\begin{cases} \tilde{x}(t) \xleftrightarrow[\text{سری فوریه}]{F.S} a_k \\ x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \end{cases}$$

اثبات کرده بودیم در اثبات تبدیل فوریه $a_k = \frac{1}{T} X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$

اما حالا می خواهیم تبدیل فوریه برای حالتی که $x(t)$ متناوب است بدست آوریم.
فرض تغییر کرده است

$$x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = ?$$



چون فرض کرده ام $x(t)$ متناوب است $\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow X(\omega) = ?$

؟: تبدیل فوریه معکوس $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ برابر است با

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

Subject
Date

$= e^{j\omega_0 t}$

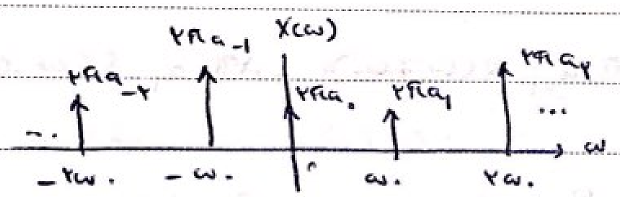
$e^{j\omega_0 t} \overset{F.T}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \Rightarrow \underset{\text{سری فوریه}}{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow$

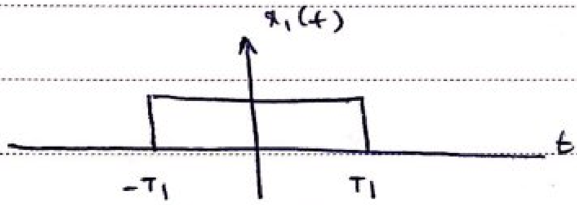
$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$ تبدیل فوریه سیگنال های متناوب

نکته ۱: برای سیگنال های متناوب اول ضرایب سری فوریه را به دست آورده و بعد از فرمول بالا استفاده می کنیم.

تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب $x(t)$ با ضرایب سری فوریه $\{a_k\}$ به صورت قطاری از ضربه ها

در فرکانس های $\pm\omega_0$ ، $\pm 2\omega_0$ و $\pm 3\omega_0$ ، ... ، $k\omega_0$ است با اندازه $2\pi a_k$

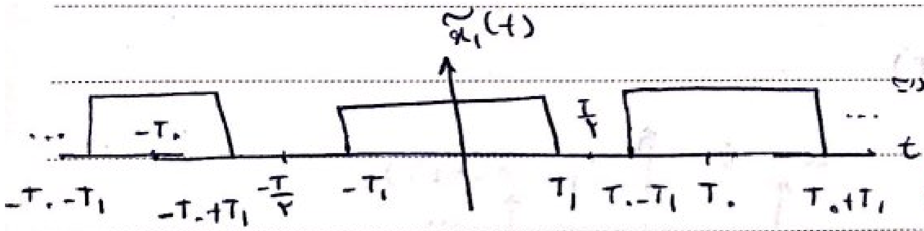




$\xrightarrow{F.T}$ شکل جزء

$X(\omega) = $ ارتفاع پالس $\times$ عرض پالس $\times \operatorname{sinc}\frac{\omega}{\pi}$ نصف عرض پالس

$= 2T_1 \operatorname{sinc}\frac{\omega}{\pi} T_1$



سری فوریه

$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \sin \frac{k\omega_0}{\pi} T_1 =$

تبدیل فوریه

$\frac{1}{T_0} X(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{T_0} 2T_1 \operatorname{sinc}\frac{k\omega_0}{\pi} T_1$

$\tilde{x}(t)$ تبدیل فوریه $\tilde{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \times \frac{2T_1}{T_0} \operatorname{sinc} \frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\,\delta(\omega-k\omega_0)$

PAPCO

مثال: تبدیل فوریه سیگنال های زیر را بدست آورید

الف) $x(t) = \sin \omega_0 t$

ب) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

الف) $x(t) = \sin \omega_0 t$ متناوب است => اول a_k را بدست می آوریم

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

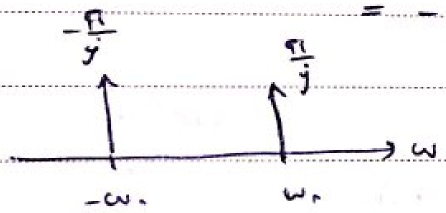
$$a_1 = \frac{1}{2j} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0 \quad k \neq 1, -1$$

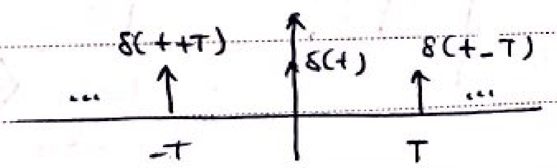
$$x(t) = \sin \omega_0 t \xleftrightarrow{F.T} X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) =$$

$$2\pi a_{-1} \delta(\omega + \omega_0) + 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0)$$

$$= -\frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0)$$

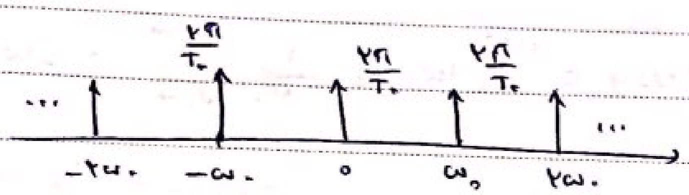


ب) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$



متناوب است با دوره تناوب T_0 => $a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$

$$\Rightarrow X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \, \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$



ویژگی های تبدیل فوریه

معنی نماد $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ را با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

$$x(t) \xrightarrow{F.T} X(\omega)$$

$$X(\omega) = F\{x(t)\}$$

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\}$$

① خطی بودن

$$x_1(t) \longrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \longrightarrow X_2(\omega)$$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)$$

② شیفت زمانی

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

شیفت در حوزه‌ی زمان تنها منجر به تغییر فاز در حوزه‌ی فرکانس می‌شود

③ معکوس زمانی : Time_reverse

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

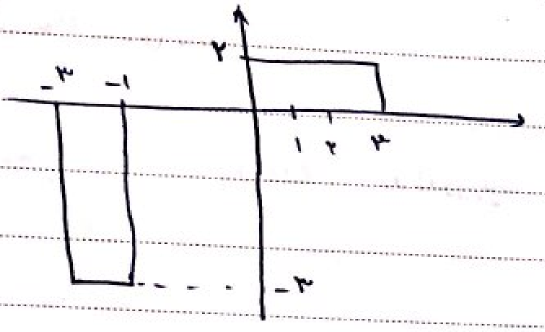
$$x(-t) \longrightarrow X(-\omega) \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \, dt$$

Date

$$x(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega \overset{\omega\to-\omega}{=}$$

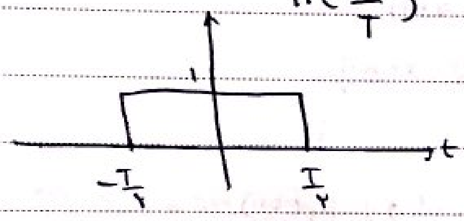
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(-\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

مثال



نماد پالس مستطیلی با عرض پالس T

$\Pi(\frac{t}{T})$



$\longrightarrow X(\omega)=T\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{\pi}\,\frac{T}{2}$

$$x(t)=2\Pi\left(\frac{t-1.5}{3}\right)-3\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow X(\omega)=2e^{-j\omega(1.5)}\times 3\,\mathrm{sinc}\frac{\omega}{\pi}\times 1.5-3\times e^{j\omega 2}\times 2\,\mathrm{sinc}\frac{\omega}{\pi}$$

$$=6e^{-j1.5\omega}\,\mathrm{sinc}\frac{\omega}{\pi}\times 1.5-6e^{j2\omega}\,\mathrm{sinc}\frac{\omega}{\pi}$$

مثال $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT-t_0)$

۴ تزویج در حوزه زمان

$x(t)\longleftrightarrow X(\omega)$

$x^*(t)\longleftrightarrow X^*(-\omega)$

Subject
Date

اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی باشد $x(t) = x^*(t)$ $X(\omega) = X^*(-\omega)$

$$Re\{X(\omega)\} = Re\{X(-\omega)\}$$

①

$$Im\{X(\omega)\} = -Im\{X(-\omega)\}$$

برای سیگنال‌های حقیقی $Re\{X(\omega)\}$ زوج

$Im\{X(\omega)\}$ فرد نسبت به ω

اگر سیگنال $x(t)$ زوج باشد $x(t) = x(-t)$ از $x(t) \to X(\omega)$

$x(-t) \to X(-\omega)$

$\Leftarrow$ $X(\omega) = X(-\omega)$

$$X(\omega) = X(-\omega) = \begin{cases} Re\{X(\omega)\} = Re\{X(-\omega)\} \\ Im\{X(\omega)\} = Im\{X(-\omega)\} \end{cases}$$ ②

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد آنگاه از ① و ② داریم $Re\{X(\omega)\} = Re\{X(-\omega)\}$

$Im\{X(\omega)\} = 0$

$X(\omega)$ فقط دارای بخش حقیقی است و زوج نسبت به ω

اگر $x(t)$ فرد باشد

موهومی است و فرد نسبت به ω

⑤ مقیاس بندی time-scaling

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Subject
Date

فشردگی در حوزه‌ی زمان منجر به گسترش در حوزه‌ی فرکانس می‌شود.

$|a|>1$ در فرکانس‌های بالا هم مقدار خواهد داشت

تغییرات در حوزه زمان کاهش می‌یابد.

گسترش در حوزه زمان فشردگی در حوزه فرکانس

$|a|<1$

⑥ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در حوزه زمان

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = j\omega X(\omega)$$

با مشتق‌گیری در حوزه‌ی زمان فرکانس‌های بالا در مقایسه با فرکانس‌های پایین بیشتر تقویت می‌شوند

یا به عبارت دیگر فرکانس‌های پایین بیشتر تضعیف می‌شوند

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d(\tau) \longrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\, \delta(\omega)$$

$$= \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) X(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

سیگنال DC $\quad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$

PAPCO

Subject
Date

مثال $x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{j\omega t}\, dt = 1$

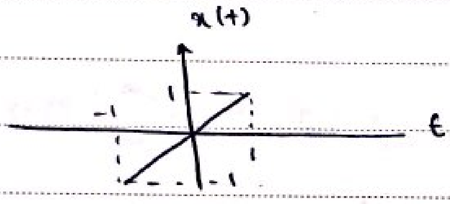
$\Rightarrow \delta(t) \longrightarrow 1$

$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\, \delta(\omega) =$

$\frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)$

$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$



Date

جلسه

سه‌شنبه ۲۲ آبان

دوگانی Duality

حوزه زمان t — حوزه فرکانس ω

$$f(t) \xleftrightarrow{F.T} g(\omega)$$

$$g(t) \xleftrightarrow{F.T} 2\pi f(-\omega)$$

$$f(t) \longleftrightarrow g(\omega) \Rightarrow g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \overset{\substack{t \to \omega \\ \omega \to t}}{\Longrightarrow}$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \overset{\omega \to -\omega}{=}$$

یادآوری: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} 2\pi f(-\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi f(-\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

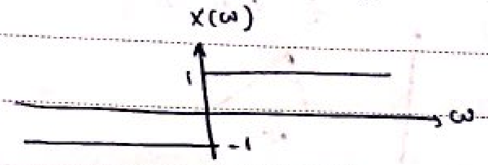
مثال: تبدیل فوریه $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ را بیابید.

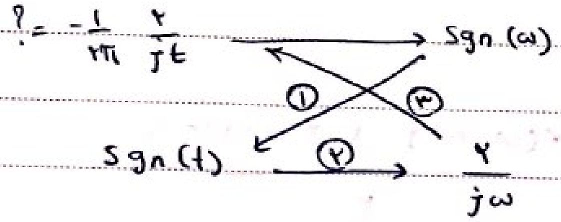
$$\frac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

$$\pi e^{-|t|} \longrightarrow \frac{2\pi}{1+\omega^2}$$

یادآوری: $e^{-a|t|} \longrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

مثال تبدیل فوریه معکوس $X(\omega) = sgn(\omega)$ را به دست آورید





$$sgn(t) = u(t) - u(-t) \xrightarrow{F.T} F\{u(t)\} - F\{u(t)\}\Big|_{\omega \to -\omega} =$$

$$= \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right) - \left(-\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(-\omega)\right) = \frac{2}{j\omega}$$

۸ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در حوزه فرکانس

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

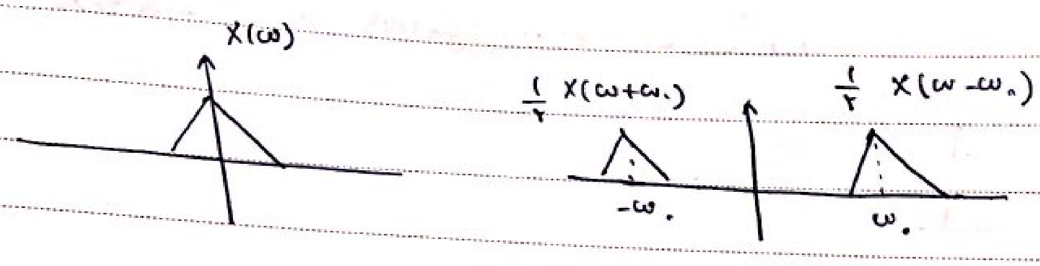
$$-jt\, x(t) \longleftrightarrow \frac{d\,X(\omega)}{d(t)}$$

$$-\frac{1}{jt}\, x(t) + \pi\, x(0)\, \delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(\eta)\, d\eta$$

۹ شیفت در حوزه فرکانس

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t}\, x(t) \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$



$$\cos\omega_0 t \;\; x(t) \longleftrightarrow$$

$$x(t)\left(\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) \longleftrightarrow \frac{X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)}{2}$$

۱۰ قضیه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

بیاریم

۱۱ کانولوشن در حوزه‌ی زمان

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$h(t) \longleftrightarrow H(\omega)$$

$$x(t) * h(t) \longleftrightarrow X(\omega) \cdot H(\omega)$$

سیستم های LTI و تبدیل فوریه (کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل سیستم های LTI)

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \longrightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

time-domain

↓

frequency-domain

کانولوشن یک ابزار تحلیلی در time-domain است.

$$X(\omega) \qquad H(\omega) \qquad Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Subject
Date

ابزار تبدیل فوریه یک ابزار قوی برای تحلیل سیستم های LTI در حوزه ی فرکانس است

تعریف در سیستم های LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ به تبدیل فوریه $h(t)$ پاسخ

فرکانسی سیستم گفته می شود

Frequency
Response

$$H(\omega) = F\{h(t)\}$$

پاسخ فرکانسی سیستم

همان طوری که می توانیم سیستم LTI را با پاسخ ضربه توصیف کنیم
" " با پاسخ فرکانسی "

$$H(\omega) = \begin{cases} = F\{h(t)\} \\ = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)} \end{cases}$$

شرط وجود تبدیل فوریه پاسخ ضربه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$ (برای سیستم های پایدار تبدیل فوریه کار می کند)

این شرط معادل شرط پایداری سیستم است

$\Downarrow$

تبدیل فوریه یک ابزار مناسب برای سیستم های LTI پایدار است. به عنوان مثال برای

تعیین پاسخ یک سیستم به ورودی دلخواه می توانیم این سوال را در حوزه فرکانس حل کنیم

Date

(تبدیل خروجی سیستم را ابتدا به دست آوریم و سپس تبدیل فوریه معکوس آن را می‌گیریم)

مثال سیستم LTI با توصیف های زیر را در نظر بگیرید پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید

الف

توصیف با پاسخ ضربه

$$\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$$
$$= \delta(t-t_0)$$

$$H(\omega) = F\{h(t)\}$$

$$h(t) = \delta(t-t_0) \xrightarrow{FT} H(\omega) = F\{\delta(t-t_0)\} = F\{\delta(t)\} e^{-j\omega t_0}$$
$$= e^{-j\omega t_0}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) = e^{-j\omega_0 t}\, X(\omega)$$

ب

$$\xrightarrow[x(t)]{} \boxed{} \longrightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$h(t) = \frac{d\,\delta(t)}{dt} = \delta'(t)$$

$$H(\omega) = F\left\{\frac{d\,\delta(t)}{dt}\right\} = j\omega\, F\{\delta(t)\} = j\omega$$

$$Y(\omega) = j\omega\, X(\omega)$$

ج

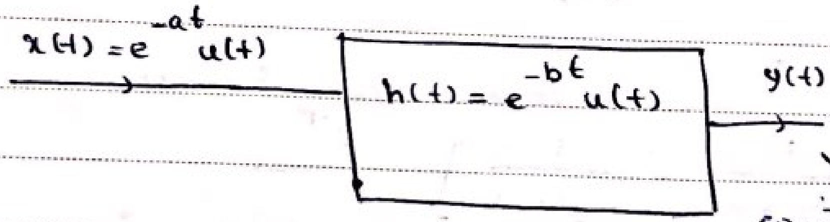
$$\xrightarrow[x(t)]{} \boxed{} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$

$$H(\omega) = F\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$$

مثال پاسخ سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}u(t)$ به ورودی $x(t)=e^{-at}u(t)$

را بیابید. $(a,b>0)$



روش اول $x(t) * h(t)$

روش دوم

در حوزه فرکانس

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega+a} \qquad a>0$$

$$h(t) = e^{-bt}u(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{j\omega+b} \qquad b>0$$

$y(t) = ?$

ابتدا $Y(\omega)$ را محاسبه می‌کنیم و سپس از آن تبدیل فوریه معکوس می‌گیریم

$$Y(\omega) = X(\omega)\,H(\omega) = \frac{1}{j\omega+a} \times \frac{1}{j\omega+b}$$

برای تبدیل فوریه معکوس از روش تجزیه به کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم در این روش

تبدیل فوریه را به صورت مجموع ترم هایی می‌نویسیم که تبدیل فوریه معکوس آن را می‌دانیم

$$e^{-at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{j\omega+a}$$

Date

$$Y(\omega) = \frac{A}{j\omega+a} + \frac{B}{j\omega+b}$$

$$A = \lim_{j\omega \to -a} (j\omega+a)\, Y(\omega) = \lim_{j\omega \to -a} (j\omega+a) \frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+b)} = \frac{1}{b-a}$$

$$B = \lim_{j\omega \to -b} (j\omega+b)\, Y(\omega) = \frac{1}{a-b}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{j\omega+a} - \frac{1}{j\omega+b}\right] \xrightarrow{F^{-1}}$$

$$y(t) = \frac{1}{b-a}\left[e^{-at} - e^{-bt}\right] u(t)$$

با فرض $a \neq b$

اگر $a=b$ باشد

$$Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

$$y(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{(j\omega+a)^2}\right\}$$

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+a}$$

$$-jt\,e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{d}{d\omega}\frac{1}{j\omega+a}$$

$$-jt\,e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{-j}{(j\omega+a)^2}$$

$$y(t) = t\,e^{-\alpha t}u(t)$$

Subject
Date

$$t e^{-at} u(t) \longrightarrow \frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

به طریق ث.ب $\quad \frac{t^2 e^{-at}}{2} u(t) \longrightarrow \frac{1}{(j\omega+a)^3}$

روش غیر رسمی

$$\lim_{a \to b} y(t) = \frac{1}{b-a} \left(e^{-at} - e^{-bt} \right) u(t) = t e^{-at} u(t)$$

پاسخ ضربه سیستم معکوس را به دست آورید

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

$$e^{-at} u(t) * h_I(t) = \delta(t) \longrightarrow$$

$$H(\omega) \cdot H_I(\omega) = 1 \Rightarrow H_I(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega+a}} =$$

$$j\omega + a \xrightarrow{F^{-1}} H_I(t) = \delta'(t) + a\,\delta(t)$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject

Date

جلسه

یکشنبه ۲۷ آبان

مثال یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t)-2e^{-t}u(t)$ در نظر بگیرید:

اگر به این سیستم ورودی $x(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$ اعمال شود خروجی $y(t)$ را به

دست آورید. پاسخ ضربه سیستم معکوس را نیز به دست آورید.

$$x(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)=?$$

$$h(t)=\delta(t)-2e^{-t}u(t)$$

$$\begin{cases} X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}-\dfrac{1}{j\omega+2}=\dfrac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)} \\ H(\omega)=F\{h(t)\}=1-\dfrac{2}{j\omega+1}=\dfrac{j\omega-1}{j\omega+1} \end{cases}$$

$$Y(\omega)=H(\omega)\,X(\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}\times\frac{(j\omega-1)}{j\omega+1}=$$

$$\frac{j\omega-1}{(j\omega+1)^2(j\omega+2)}=\frac{A}{(j\omega+1)}+\frac{B}{(j\omega+1)^2}+\frac{C}{(j\omega+2)}$$

$$y(t)=\left(Ae^{-t}+Bte^{-t}+Ce^{-2t}\right)u(t)$$

پاسخ ضربه سیستم معکوس

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \boxed{h_I(t)} \longrightarrow x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) * h_I(t)} \longrightarrow x(t)$$

Find $h_I(t)$ s.t: $h(t) * \underbrace{h_I(t)}_{?} = \delta(t)$

$$H(\omega) \cdot H_I(\omega) = 1 \Rightarrow H_I(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = \frac{j\omega+1}{j\omega-1} =$$

$$1 + \frac{2}{j\omega-1} \xrightarrow{\times} 2e^{t}u(t)$$

اجازه‌ی رفتن به حوزه‌ی فرکانس را نداریم

$$h_I(t) = F^{-1}\{H_I(\omega)\} = \delta(t) + 2e^{t}u(t)$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+\alpha}$$

* ورودی مشخص داده شده، خروجی هم داده شده، اول $H(\omega)$ را از روی آن به دست آورده بعد بقیه‌ی سؤال

مثال: یک سیستم LTI معکوس پذیر با پاسخ پله $s(t) = (1-e^{-\frac{t}{2}})u(t)$ درنظر بگیرید.

پاسخ ضربه سیستم معکوس را به دست آورید

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow s(t) = (1-e^{-\frac{t}{2}})u(t)$$

$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ یا پاسخ پله را از آن مشتق بگیریم

پاسخ ضربه به دست بیاید.

پاسخ فرکانسی برای یک سیستم LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت از مرتبه N

Date

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$F\{\qquad\} = F\{\qquad\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال: یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیلی $ay(t) + y'(t) = x(t)$ داریم.

پاسخ فرکانسی را بدست آورید

$$y'(t) + a y(t) = x(t)$$

$$j\omega Y(\omega) + a Y(\omega) = X(\omega)$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{j\omega + a} \xrightarrow{\boxed{a>0}} h(t) = e^{-at} u(t)$$

الف) اگر به سیستم ورودی $x(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$ اعمال شود خروجی $y(t)$ را بدست آورید.

ب) پاسخ به ورودی $x(t) = e^{2t}$ را بدست آورید.

$$y(t) = h(t) * x(t) = e^{2t} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{2(t-\tau)} d\tau =$$

$$e^{2t} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-2\tau} d\tau} = e^{2t} \ldots$$

$$\boxed{H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt}$$

Subject
Date

$x(t) = e^{-2t}u(t)$ ورودی را بدست آورید. پاسخ به ورودی $x(t)=e^{2t}u(t)$

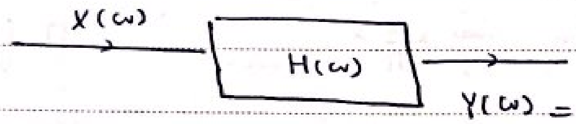
$x(t) = e^{-j2t}$ ورودی را بدست آورید. $x(t) = e^{2t}u(-t)$

کاربردهای تبدیل فوریه
۱- فیلترینگ
۲- مدلاسیون و دمدلاسیون

Modulation / Demodulation

۳- نمونه برداری

۱- فیلترینگ



$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$

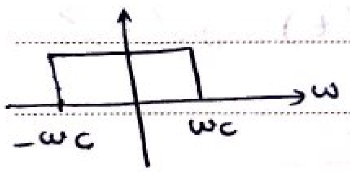
پاسخ فرکانسی

$$\cos\omega_c t = \frac{1}{2}\left[\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega+\omega_c)\right]$$

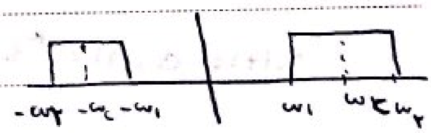
در بسیاری از کاربردها نیاز داریم اندازه‌ی مولفه‌های فرکانسی یک سیگنال را تغییر داده و یا طیف (Spectrum)

حتی برخی از آن‌ها را حذف کنیم ← فیلتر کردن

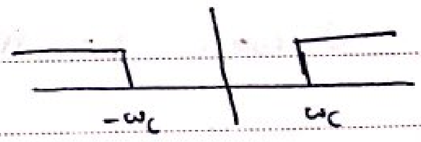
فیلترهای ایده‌آل: فیلتر پایین‌گذر low pass filter



فیلتر میان‌گذر band pass filter

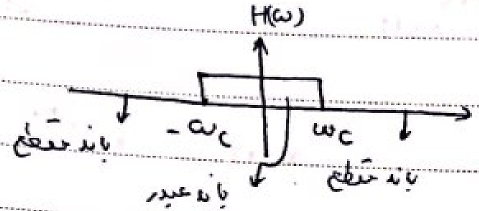


فیلتر بالاگذر High pass filter



Subject
Date

$$H_L(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$



$H_L(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\text{عرض باند}}\right)$ ؛ $\text{عرض باند عبور} = 2\omega_c$

$\Pi\left(\frac{t}{\text{عرض پالس}}\right) \longrightarrow \text{عرض پالس}\ \text{sinc}\left(\text{نصف عرض پالس}\ \frac{\omega}{\pi}\right)$

$\frac{1}{2\pi}\ \text{عرض پالس} \times \text{sinc}\ \text{نصف عرض پالس} \times \frac{t}{\pi} \longleftrightarrow \Pi\left(\frac{\omega}{\text{عرض پالس}}\right)$

$$h_L(t) = \frac{2\omega_c}{2\pi}\ \text{sinc}\ \omega_c \frac{t}{\pi} = \frac{\omega_c}{\pi}\ \text{sinc}\ \omega_c \frac{t}{\pi}$$

مثال: فرض کنید ورودی به سیستم مجموع دو سیگنال زیر است.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \cos 2\pi \times 10^3 t + \cos 2\pi \times 10^6 t$$

فیلتری را طراحی کنید که خروجی برابر با $y(t) = \cos 2\pi \times 10^3 t$ را تولید کند. به عبارت دیگر سیگنال $(\cos 2\pi \times 10^6 t)$ را حذف کند.

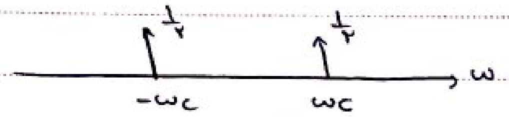
$$x(t) = \cos 2\pi \times 10^3 t + \cos 2\pi \times 10^6 t \longrightarrow \boxed{h(t) = ?} \longrightarrow y(t) = \cos 2\pi \times 10^3 t$$

حوزه زمان: $(\cos 2\pi \times 10^3 t + \cos 2\pi \times 10^6 t) * h(t) = \cos 2\pi \times 10^3 t$

(با * خیلی سخته نمیشه کار کرد)

Subject
Date

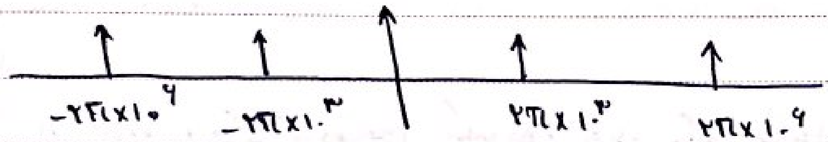
یادآوری: $\cos \omega_c t \longleftrightarrow \frac{۱}{۲}[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]$



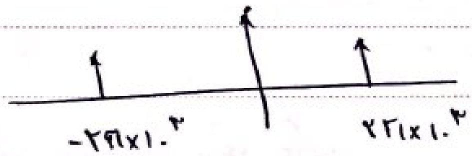
$x(t)=\cos ۲\pi\times۱۰^{۳}t+\cos ۲\pi\times۱۰^{۴}t \longleftrightarrow$

$\frac{۱}{۲}[\delta(\omega-۲\pi\times۱۰^{۳})+\delta(\omega+۲\pi\times۱۰^{۳})]+$

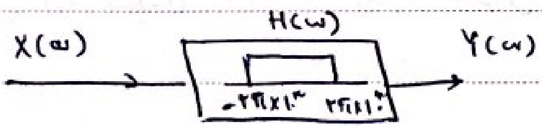
$\frac{۱}{۲}[\delta(\omega-۲\pi\times۱۰^{۴})+\delta(\omega+۲\pi\times۱۰^{۴})]$



$y(t)=\cos ۲\pi\times۱۰^{۳}t \longrightarrow Y(\omega)=\frac{۱}{۲}[\delta(\omega-۲\pi\times۱۰^{۳})+\delta(\omega+۲\pi\times۱۰^{۳})]$



پایین گذر $H(\omega)=\begin{cases}۱ & |\omega|<۲\pi\times۱۰^{۳}+\varepsilon\\ ۰ & |\omega|>۲\pi\times۱۰^{۳}+\varepsilon\end{cases}$



$h(t)=?$

Date

جلسه

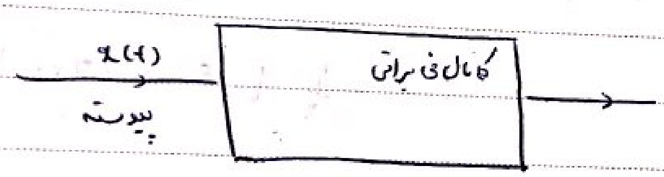
سه‌شنبه ۲۹ آبان

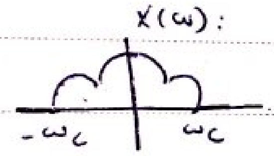
کاربردهای تبدیل فوریه:
- فیلترینگ
- مدولاسیون
- نمونه برداری

مدولاسیون

صورت مسأله:

فرض کنیم سیگنال صوتی داریم که به وسیله‌ی میکروفون تبدیل به یک سیگنال الکتریکی شده است



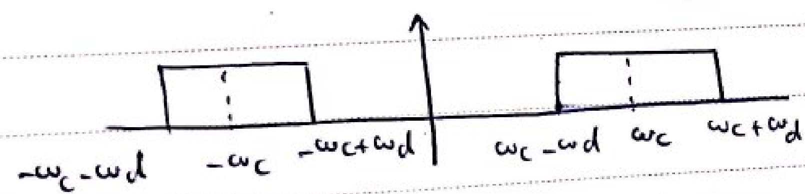


هوا مثل یک فیلتر میان‌گذر عمل می‌کند

طیف فرکانسی سیگنال $x(t)$ را به صورت زیر فرض می‌کنیم

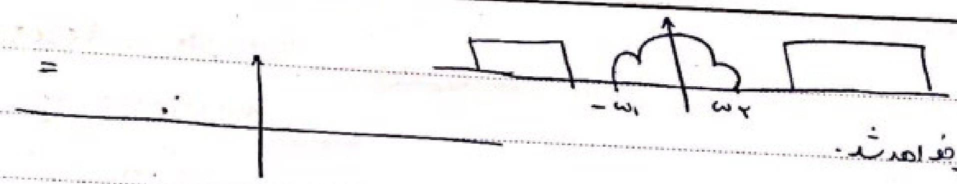
فرض کنیم می‌خواهیم این سیگنال را از یک کانال مخابراتی بگذرانیم که به صورت یک فیلتر میان‌گذر

به صورت زیر است



خروجی چه خواهد بود؟

Date



خروجی صفر خواهد شد.

مدولاسیون تفکیک فرکانسی می‌دهد بین کانال و سیگنال ورودی.

برای آنکه سیگنال $X(\omega)$ از کانال عبور کند باید طیف فرکانسی سیگنال ورودی کانال با باند عبور

کانال مطابقت داشته باشد.

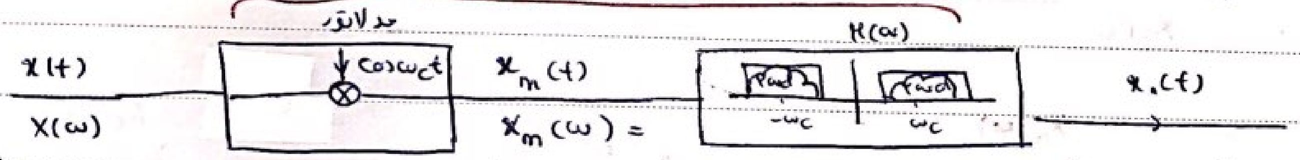
فرض: $2\omega_d >> |\omega_2-\omega_1|$

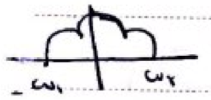
↓
modulation

پس طیف $X(\omega)$ باید شیفت فرکانسی پیدا کند این شیفت باید حول فرکانس ω_c قرار گیرد.

یادآوری خاصیت: $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$$x(t)\cos\omega_c t \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)\right]$$

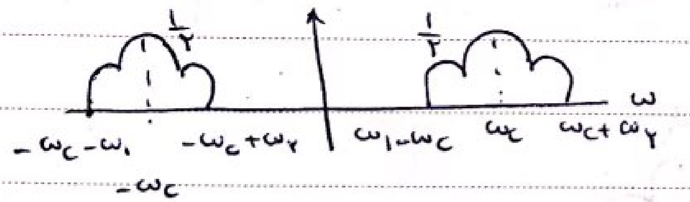




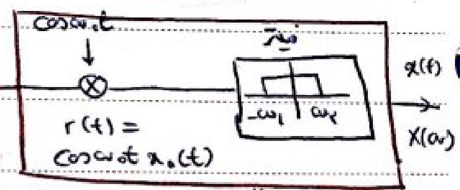
$X_m(\omega)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)\right)$

$X_0(\omega)=X_m(\omega)$

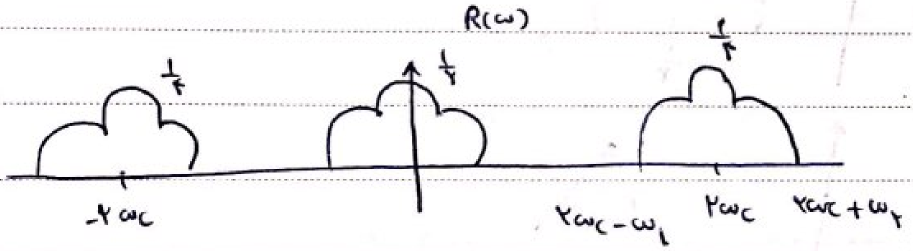


دمدولاتور



فیلتر پایین‌گذر

گیرنده



P4PCO

Scanned with CamScanner

Date

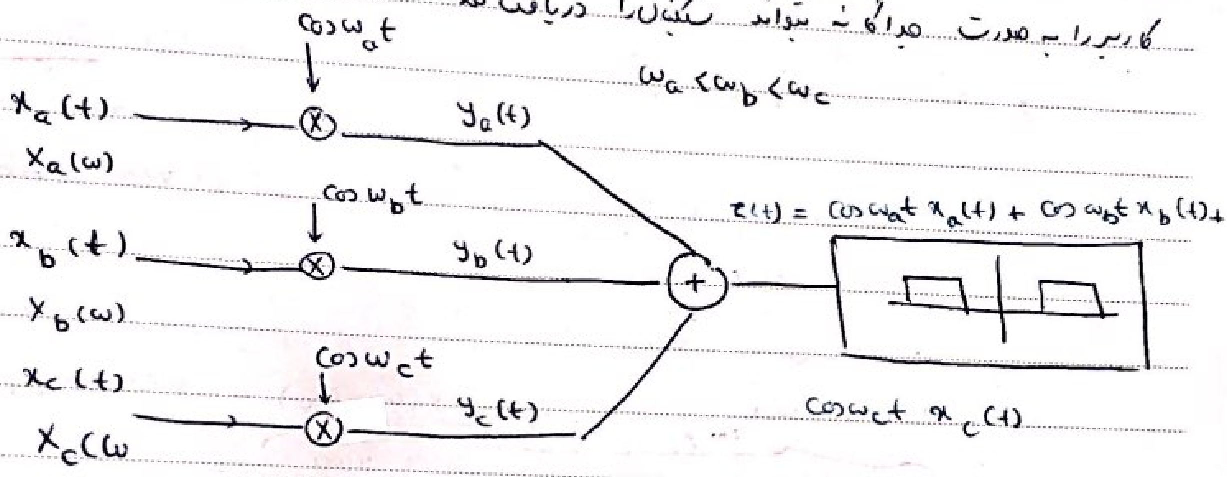
Multiple - Access

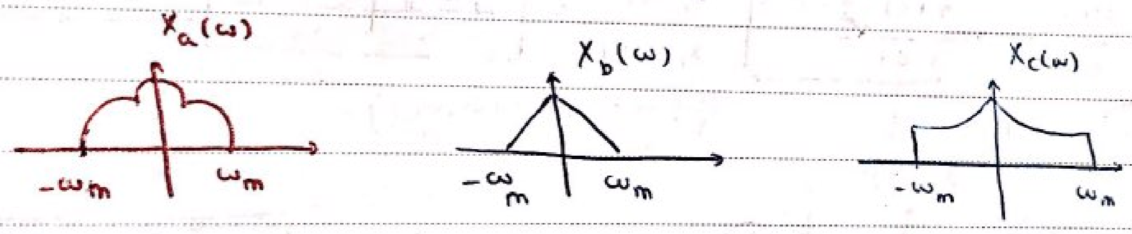
multiplexing

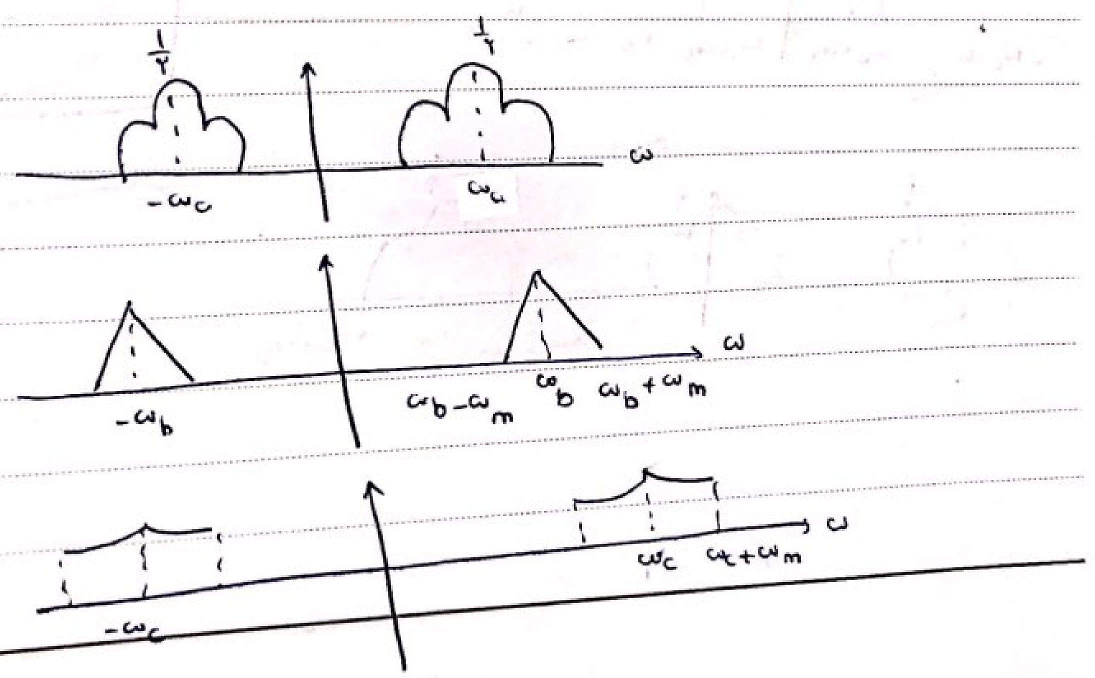
دسترسی چندگانه

می خواهیم سیگنال مربوط به چند کاربر را از یک کانال مخابراتی عبور دهیم به نحوی که گیرنده هر کاربر را به صورت جداگانه بتواند سیگنال را دریافت کند

$\omega_a < \omega_b < \omega_c$

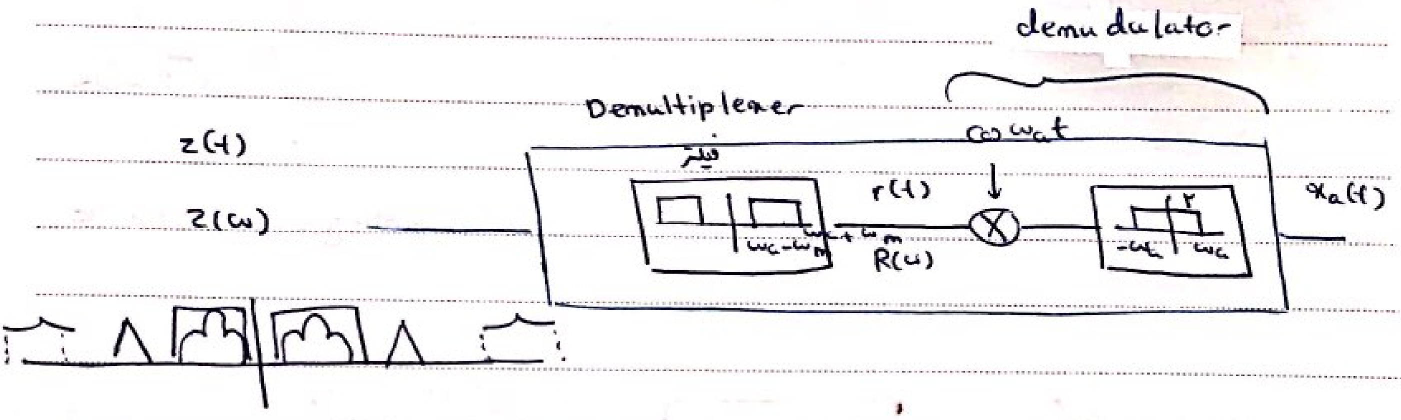






PAPCO

Frequency Devision Multiple Access (FDMA)

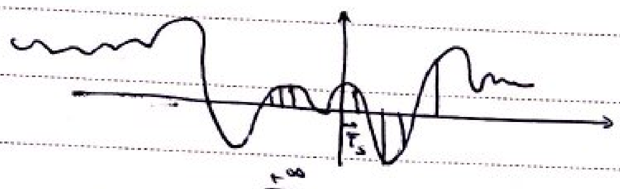


جلسه

سه‌شنبه ۶ آذر

نمونه برداری : Sampling

سیگنال پیوسته زمان → سیستم نمونه برداری کننده → سیگنال نمونه برداری شده $x_p(t)$



هر T_s ثانیه یک نمونه برمی‌داریم

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_s)\; x(t)$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_s)$$

$x(t)$ → ⊗ → $x_p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_s)$

معادل است

$x(t)$ — T_s — $x_p(t)$ $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\delta(t-kT_s)$

$$= p(t) \cdot x(t)$$

صورت مسئله:

T_s : تناوب نمونه برداری

f_s : فرکانس نمونه برداری $\quad f_s = \frac{1}{T_s} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

بزرگترین T_s ای که سیگنال را بتوان به صورت کامل ساخت

بزرگترین تناوب نمونه برداری یا کمترین فرکانس نمونه برداری چه تعداد به طوری که بتوانیم از روی سیگنال $x_p(t)$ سیگنال $x(t)$ را به طور کامل بازیابی کنیم.

Subject

Date

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) \Rightarrow X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_s) \xrightarrow{F.T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \, \delta(\omega - k\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$, a_k = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t)\, e^{-jk\omega_s t} = \frac{1}{T_s}$$

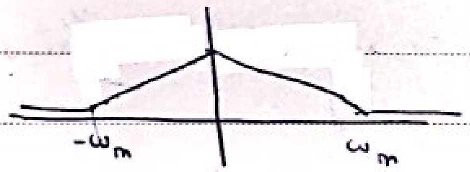
$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

تبدیل فوریه $p(t)$

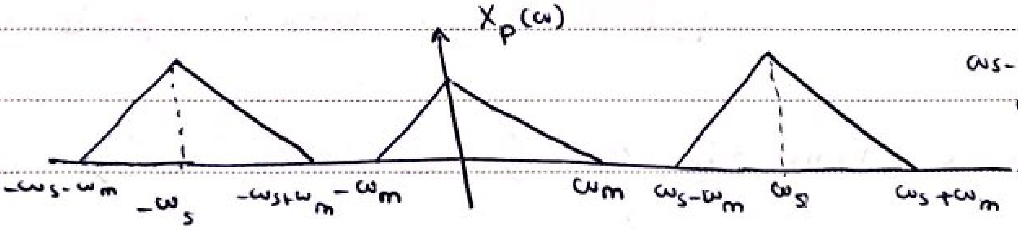
$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s}\left(X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)\right) = ⊛$$

فرض کنیم تبدیل فوریه $x(t)$ یعنی $X(\omega)$ Band-limited باشد یعنی $X(\omega)=0 \; ; for \; |\omega|>\omega_m$



$$⊛ \; \frac{1}{T_s}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s)\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_s)$$



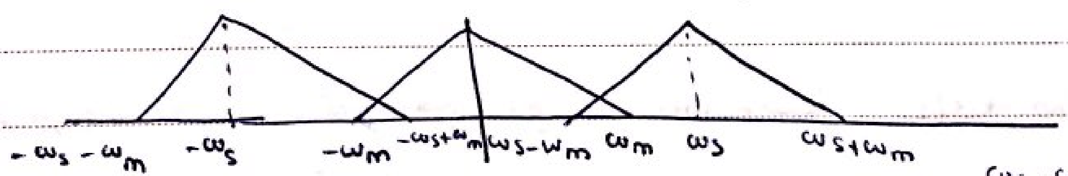
شرط: $\omega_s-\omega_m > \omega_m$

$\omega_s > 2\omega_m$

①

بسته به مقادیر ω_s و ω_m دو حالت داریم

②



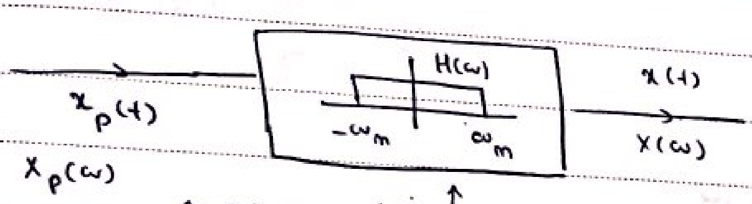
شرط: $\omega_s - \omega_m < \omega_m$

$\omega_s < 2\omega_m$

Date

شرط

در حالت ① می‌توان از روی $x_p(t)$ سیگنال $x(t)$ را بازیابی کرد. چگونه؟



شرط $\omega_s > 2\omega_m$

(کمترین مقدار ω_s = $2\omega_m$ خواهد بود)

قضیه نمونه‌برداری نایکویست

اگر $x(t)$ یک سیگنال Band-limited باشد یعنی $|\omega| > \omega_m$; for $|X(\omega)| = 0$

آنگاه $x(t)$ به صورت منحصر به فردی توسط نمونه‌های آن یعنی $x(kT_s)$ $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

samples

تعیین می‌شود اگر $\omega_s > 2\omega_m$ باشد ($\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) به بیان دیگر در صورتی که فرکانس

نمونه‌برداری ω_s از دو برابر ω_m (بزرگترین فرکانس موجود در طیف فرکانسی $x(t)$) بیشتر

باشد می‌توانیم از روی نمونه‌ها، خود سیگنال را بازیابی کنیم.

مثال: فرض کنید سیگنال صحبت دارای فرکانس‌های حداکثر 4 kHz است حداقل نرخ نمونه‌برداری

را مشخص کنید.

$$\omega_s > 2 \times 4\,kHz = 8\,kHz$$

اگر هر نمونه را با ۸ بیت نمایش دهیم نرخ تولید داده برحسب bit/s چه مقدار است؟

PAPCO

در هر ثانیه ← ۸۰۰۰ نمونه
هر نمونه ← ۸ بیت

در یک ثانیه = ۸۰۰۰ × ۸

۶۴۰۰۰ bps = ۶۴ kbps

هر نمونه با ۷ بیت ← ۵۶ kbps

Date

جلسه

یکشنبه ۱۱ آذر

فصل چهارم: سری فوریه و تبدیل فوریه گسسته زمان

توصیف سیگنال های ورودی دلخواه براساس ترکیب خطی

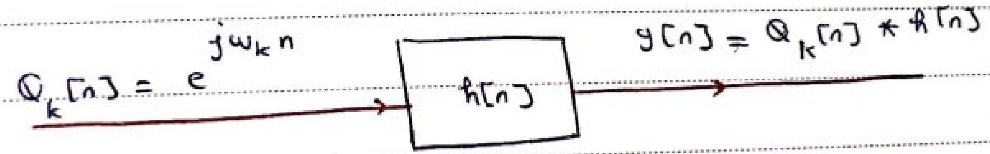
تحلیل سیستم های LTI سیگنال های پایه

سری فوریه گسسته زمان توصیف سیگنال های متناوب گسسته زمان

تبدیل فوریه گسسته زمان توصیف سیگنال های غیر متناوب گسسته زمان

یافتن مجموعه ی پاسخ سیستم به ورودی دلخواه براساس پاسخ سیستم به سیگنال های پایه مفهوم پاسخ فرکانسی

سیگنال پایه پیشنهادی $\varphi_k[n] = e^{j\omega_k n}$



$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r]\,\varphi_k[n-r] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_k (n-r)}\, h[r] =$$

$$e^{j\omega_k n} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r]\, e^{-j\omega_k r} = e^{j\omega_k n} H(\omega_k)$$

بعدها خواهیم دید $H(\omega_k)$ همان تبدیل فوریه گسسته زمان است و با نماد $H(e^{j\omega_k})$ نمایش داده شود

PAPCO

Subject
Date

$y[n] = e^{j\omega_k} H(\omega_k)$ $\qquad H(\omega_k) = \sum h[r] \cdot e^{-j\omega_k r}$

$\phi_k[n] = e^{j\omega_k n}$ شرط اول سیگنال های پایه را دارد (پاسخ $\phi_k[n]$ به راحتی به دست می آید) حال می خواهیم

روش توصیف هر سیگنال ورودی دلخواه برحسب $\phi_k[n]$ ها را تشریح کنیم

سری فوریه و تبدیل فوریه DT بسیار شبیه سری فوریه و تبدیل فوریه CT است تفاوت آن ها

ریشه در تفاوت $e^{j\omega t}$ و $e^{j\omega n}$ دارد.

یادآوری

$e^{j\omega_0 t}$: همیشه متناوب است با دوره تناوب $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

با افزایش ω_0 فرکانس و تغییرات سیگنال در واحد زمان افزایش می یابد

$e^{j\omega_0 n}$: متناوب است اگر و فقط اگر $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$ = گویا که اگر

$(N,m)=1$ ب.م.م آنگاه N تناوب است

$e^{j\omega_0 n}$ و $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ یکی هستند ولذا بازه ی

فرکانس های مختلف به طول 2π است $(0, 2\pi)$ و یا $(-\pi, \pi)$

۴-۱ سری فوریه گسسته زمان

سیگنال DT متناوب $x[n]$ را در نظر بگیرید $\qquad x[n] = x[n+N] \; ; \; \forall n \in \mathbb{Z}$

سؤال سیگنال های غیر مختلط گسسته زمان متناوب با دوره تناوب N کدامند؟

Subject
Date

$$\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$T_{\text{مشترک}} = \frac{2\pi}{k\frac{2\pi}{N}} = \frac{N}{k}$$ = سیگنال متناوب با دوره تناوب که در کسر گویا است N

سؤال: چه تعداد سیگنال متناوب متمایز نمایی مختلط با دوره تناوب N وجود دارد؟

$$e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\underbrace{e^{jN\frac{2\pi}{N}n}}_{1} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

پاسخ: N تا سیگنال متمایز به صورت $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ وجود دارد.

یادآوری: در حوزه سیگنال های پیوسته زمان، بی نهایت سیگنال نمایی مختلط متناوب به صورت $e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$ وجود دارد.

لذا برای توصیف یک سیگنال متناوب گسسته زمان با دوره تناوب اصلی N، تنها N سیگنال متمایز نمایی مختلط متناوب در اختیار داریم یعنی سیگنال های $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ برای $k=0,1,2,\dots,N-1$

یا هر مقادیر پشت سرهم برای k که طول آن N باشد مثلاً

$k=1,2,\dots,N$ یا $k=-1,0,1,2,\dots,N-2$

سری فوریه DT

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

این عبارت یعنی N تا عدد صحیح پشت سرهم است.

Subject
Date

اثبات می‌شود $\Rightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\omega_0 n}$$

سری فوریه

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$$

دوره تناوب $x[n]$

ضرایب سری فوریه

$$a_k = a_{k+N} \Rightarrow a_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = a_k$$

می‌دانیم که ضرایب سری فوریه نسبت به k متناوب است.

$x[n]$ متناوب با دوره تناوب N — $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T_0

$e^{jk\omega_0 n}$ هم نسبت به ω_0 و هم نسبت به k متناوب است — $e^{jk\omega_0 t}$ نسبت به k متناوب نیست

a_k نسبت به k متناوب است — a_k نسبت به k متناوب نیست

$a_k = a_{k+N}$

$\sin\frac{2\pi}{5}n$, $\sin\frac{4\pi}{7}n$

مثال ضرایب سری فوریه $x[n] = \sin\omega n$ را به دست آورید.

شرط آن که سیگنال $x[n] = \sin\omega n$ متناوب باشد: $\frac{2\pi}{\omega} =$ گویا $= \frac{N}{m}$

فرض کنیم ب.م.م $(N, m) = 1$ $\leftarrow$

$$\sin\omega n = \frac{e^{j\omega n} - e^{j\omega n}}{2j}$$

P4PCO

Subject
Date

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{m} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi \frac{m}{N}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\sin \omega_0 n = \frac{e^{j\frac{2\pi m}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}}{2j}$$

$$a_m = \frac{1}{2j}$$

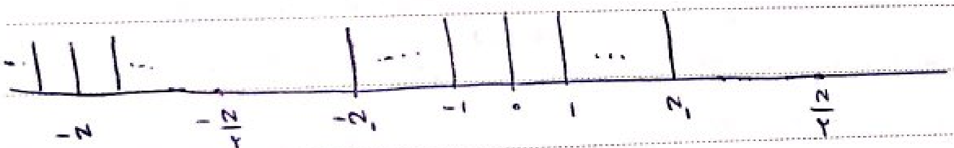
$$a_{-m} = -\frac{1}{2j} \qquad a_{k+N} = a_k$$

مثال: ضرایب سری فوریه $x[n]$ را بدست آورید.

$x[n]$ با دوره تناوب N که در یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

با فرض $N > 2N_1$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

یادآوری $t_1 + t_1 q + \dots + t_1 q^{n-1} = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$

$$= \frac{1}{N}\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \underbrace{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}\right)}}}_{1} \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2}} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2}}}$$

Subject
Date

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{k\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin \frac{k\pi}{N}}$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] = \frac{2N_1+1}{N}$$

ویژگی های سری فوریه گسسته_زمان

① خطی بودن

$x_1[n] \longrightarrow a_k$ با دوره تناوب N

$x_2[n] \longrightarrow b_k$ با دوره تناوب N

$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \longrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$ متناوب با دوره تناوب N

② حقیقی بودن

اگر $x[n]$ حقیقی باشد $\Leftarrow$ $a_k = a^*_{-k}$ $\quad Real\{a_k\} = Real\{a_{-k}\}$

$Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\}$

③ ضرب و کانولوشن

$x_1[n] \rightarrow a_k \quad ; N$

$x_2[n] \rightarrow b_k \quad ; N$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1[n]\, x_2[n] \longleftrightarrow \sum_{l=\langle N \rangle} a_l\, b_{k-l} \\ \sum_{k=\langle N \rangle} x_1[k]\, x_2[n-k] \longleftrightarrow N a_k b_k \end{cases}$$

④ شیفت زمانی

Subject
Date

$x[n] \rightarrow a_k$

$x[n-n_0] \rightarrow e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} a_k$

⑤ Difference

$x[n] \rightarrow a_k$

$x[n]-x[n-1] \rightarrow a_k - e^{-jk\frac{2\pi}{N}} a_k = (1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}) a_k$

⑥ جمع انباره‌ای

$x[n] \rightarrow a_k \ ; N$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow \frac{a_k}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

بشرط $x[n]$ فاقد
مؤلفه DC باشد یعنی

$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[k] \ , \ a_0 = 0$

⑦ جابجایی فرکانسی

$x[n] \rightarrow a_k$

$x[n] e^{jM\omega_0 n} \rightarrow a_{k-M}$

مثال $(-1)^n x[n] \rightarrow \boxed{?}$

$x[n] \times e^{j\frac{N_0}{2} \times \frac{2\pi}{N_0} n} \rightarrow a_{k-\frac{N_0}{2}}$

شرط متناوب بودن $\longrightarrow$ $(-1)^n x[n]$ این است که N زوج باشد

Subject
Date

جلسه

سه‌شنبه ۱۳ آذر

⑧ مزدوج در حوزه‌ی زمان

$x[n] \rightarrow a_k$

$x^*[n] \rightarrow a^*_{-k}$

اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد ← a_k حقیقی و زوج نسبت به k

اگر $x[n]$ حقیقی و فرد باشد ← a_k موهومی خالص و فرد نسبت به k

⑨ انعکاس زمانی

$x[n] \rightarrow a_k$

$x[-n] \rightarrow a_{-k}$

⑩ انبساط زمانی (گستردگی در حوزه زمان)

اگر سیگنال $x[n]$ در حوزه زمان گسترده شود، تعدادی صفر بین نمونه‌ها اضافه می‌شود.

$x[n] \rightarrow a_k$

$x_{(m)}[n] \rightarrow \frac{1}{m} a_k$

دقت کنید دوره تناوب سیگنال گسترده شده mN_0 است و فرکانس زاویه‌ای آن $\frac{2\pi}{mN_0} = \frac{\omega_0}{m}$ به اندازه m گسترده شده است. $(m-1)$ تا صفر بین هر دو نمونه متوالی قرار گرفته است.

Subject
Date

مثال ضرایب سری فوریه $x[n]=\cos\frac{\pi}{6}n\,\sin\frac{\pi}{4}n$ را بدست آورید

$$x[n]=\cos\frac{\pi}{6}n\,\sin\frac{\pi}{4}n=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}n}+\underbrace{\sin\left(+\frac{\pi}{2}n\right)}\Big]$$

$$N_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12 \qquad N_2=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{6}n}-e^{-j\frac{\pi}{6}n}}{2j}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}-e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2j}\right] \qquad N=12$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\frac{2\pi}{12}n}-e^{-j\frac{2\pi}{12}n}}{2j}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j3\frac{2\pi}{12}n}-e^{-j3\times\frac{2\pi}{12}n}}{2j}\right]$$

$$a_1=\frac{1}{4j} \qquad a_{-1}=-\frac{1}{4j} \qquad a_3=\frac{1}{4j} \qquad a_{-3}=-\frac{1}{4j}$$

$$a_k=a_{k+12}$$

سری فوریه گسسته زمان ← رابطه ریاضی

ویژگی های سری فوریه

سری فوریه و سیستم های LTI

$$e^{j\omega n}\longrightarrow\boxed{\quad}\longrightarrow e^{j\omega n}\underbrace{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}h[r]\,e^{-j\omega r}}_{H(e^{j\omega})}$$

$$e^{jk\omega_0 n}\longrightarrow\boxed{\quad}\longrightarrow e^{jk\omega_0 n}\,H(e^{jk\omega_0})$$

شدوب $\quad x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\,e^{jk\omega_0 n}\longrightarrow\boxed{\quad}\longrightarrow y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\,e^{jk\omega_0 n}$

$$H(e^{jk\omega_0})=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\,H(e^{jk\omega_0})\,e^{jk\omega_0 n}$$

$y[n]$ شدوب است با ضرایب سری فوریه $a_k\,H(e^{jk\omega_0})$ که

Subject
Date

$$H(e^{jk\omega_0}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r]\, e^{-jk\omega_0 r}$$

$$\xrightarrow{x[n]\ \text{متناوب}} \boxed{LTI} \longrightarrow y[n]$$

ضرایب سری فوریه a_k ضرایب سری فوریه خروجی $a_k H(e^{jk\omega_0})$

مثال: سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \alpha^n u[n]$ داریم. سیگنال $x[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n$ را به عنوان ورودی اعمال می‌کنیم. ضرایب سری فوریه خروجی را به دست آورید.

$$x[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n \longrightarrow \boxed{h[n] = \alpha^n u[n]} \longrightarrow y[n] =$$

a_k ① $H(e^{jk\omega_0})$ ② $b_k = a_k H(e^{jk\omega_0})$

$$x[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n = \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{2} \qquad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = a_{k+N}$$

$$H(e^{jk\omega_0}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r]\, e^{-jk\omega_0 r}$$

$$= \sum_{r=0}^{+\infty} \alpha^r e^{-jk\frac{2\pi}{N}r} = \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\alpha e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^r \underset{|\alpha|<1}{=}$$

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \qquad \begin{cases} b_1 = a_1 H(e^{j\omega_0}) \\ b_{-1} = a_{-1} H(e^{-j\omega_0}) \end{cases}$$

P4PCO

Scanned with CamScanner

۴_۲ تبدیل فوریه گسسته زمان

رابطه ریاضی

ویژگی های تبدیل فوریه

کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل سیستم های LTI

فرض می‌کنیم سیگنال غیر متناوب $x[n]$ را داریم و می خواهیم آن را برحسب ترکیب خطی

سیگنال های $e^{j\omega_0 n}$ بنویسیم.

از روی $x[n]$ یک سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ می‌سازیم $\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n] & -N_1 \leq n \leq N_1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

در یک تناوب

$$\tilde{x}[n] \longrightarrow a_k$$

$$x[n] = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \oint_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

در یک بازه به طول 2π

$$\omega = \frac{2\pi}{N} \to 0$$

تبدیل فوریه $x[n]$
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\omega}$$

تبدیل فوریه معکوس
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

Time-domain — Frequency domain

n متغیر گسسته — ω متغیر پیوسته

$$x[n] \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

- بازه انتگرال در رابطه‌ی تبدیل فوریه معکوس 2π است $(0, 2\pi)$ یا $(-\pi, \pi)$

Subject
Date

- $X(e^{j\omega})$ نسبت به ω ها متناوب است $\qquad X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

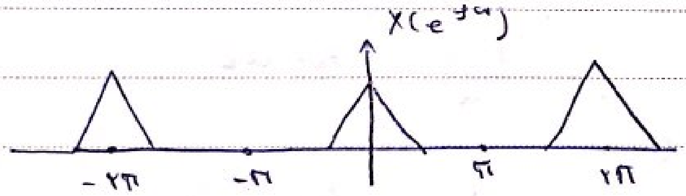
پیوسته زمان $\begin{cases} X(\omega) \\ X(j\omega) \end{cases}$

$\{ X(e^{j\omega})$

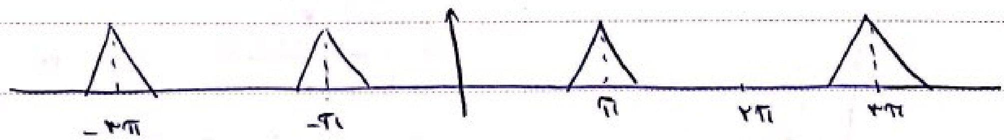
دلیل استفاده از عبارت $X(e^{j\omega})$ نیز به خاطر تأکید بر متناوب بودن $X(e^{j\omega})$ نسبت به ω است $\quad e^{j\omega} = e^{j(\omega+2\pi)}$

طیف فرکانسی یک سیگنال گسسته زمان به وسیله‌ی $X(e^{j\omega})$ مشخص می‌شود با این توضیح که فرکانس های حول مضارب فرد π $\Leftarrow$ فرکانس های بالا

فرکانس های حول مضارب زوج π $\Leftarrow$ فرکانس های پایین.



سیگنال فرکانس پایین



سیگنال فرکانس بالا

$$H(e^{jk\omega_0}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r]\, e^{-jk\omega_0 r}$$

یکشنبه ۱۳:۳۰ - ۱۲:۱۵

Subject
Date

جلسه

یکشنبه ۱۸ آذر

شرط همگرایی $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$

مثال: $x[n] = a^n u[n]$ تبدیل فوریه؟

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n$$

$$\overset{|\alpha|<1}{=} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

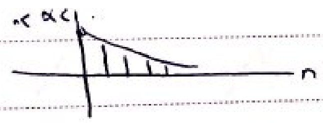
$$x[n] = a^n u[n] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

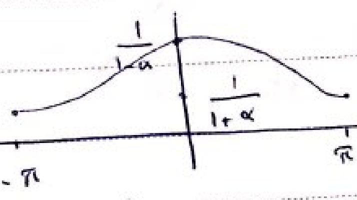
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha\cos\omega)^2 + (\alpha\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}$$

$\measuredangle X(e^{j\omega}) =$ زاویه صورت − زاویه مخرج $= 0 - tg^{-1}\dfrac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{for } \omega=0 \\ \dfrac{1}{1+\alpha} & \text{for } \omega=\pi \end{cases}$$

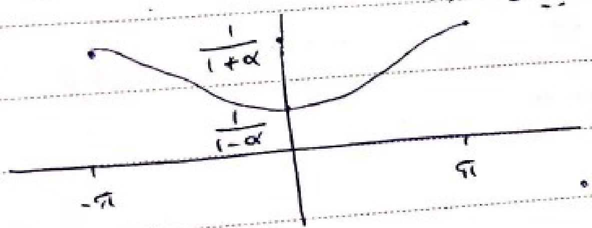
نسبت به ω متناوب است.





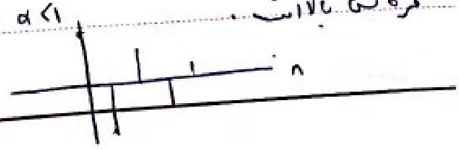
$0 < \alpha < 1$

حول مضرب زوج π یعنی فرکانس های ω پایین در مقایسه با فرکانس های بالا حضور بیشتری دارند



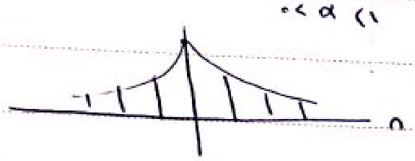
$-1 < \alpha < 0$

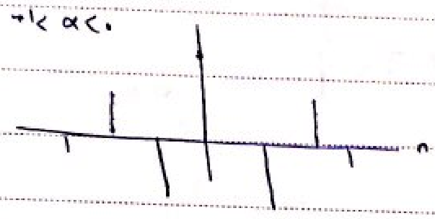
به ازای $-1 < \alpha < 0$ سیگنال ω فرکانس بالاست.



Subject
Date

مثال: سیگنال $x[n]=\alpha^{|n|}$ ، $|\alpha|<1$ تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ ؟





$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-jn\omega}+\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n}e^{-jn\omega}$$

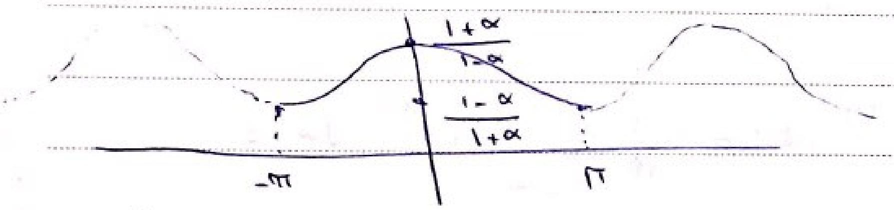
$$=\sum_{m=1}^{+\infty}(\alpha e^{j\omega})^m+\sum_{0}^{+\infty}(\alpha e^{-j\omega})^n=\frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}}+\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}=$$

$$\frac{\alpha e^{j\omega}-\alpha^2+1-\alpha e^{j\omega}}{(1-\alpha e^{j\omega})(1-\alpha^{-j\omega})}=\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha e^{j\omega}-\alpha e^{-j\omega}+\alpha^2}=\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

$$|X(e^{j\omega})|=\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}\begin{cases}\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} & \text{for } \omega=0\\[2mm]\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} & \text{for } \omega=\pi\end{cases}$$

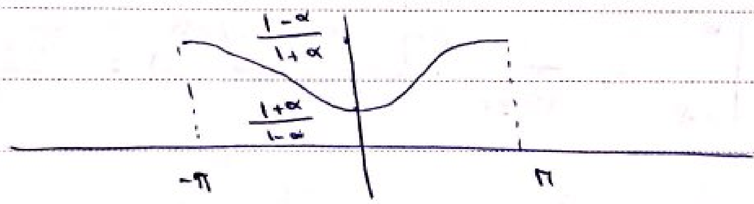
$0<\alpha<1$

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}>\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$



$-1<\alpha<0$

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}<\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$



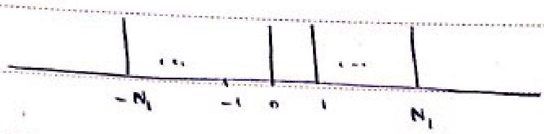
PAPCO

Subject

Date

مثال:

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$



$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{-N_1}^{N_1}e^{-jn\omega}=\frac{e^{jN_1\omega}\left(1-e^{-j\omega(2N_1+1)}\right)}{1-e^{-j\omega}}$$

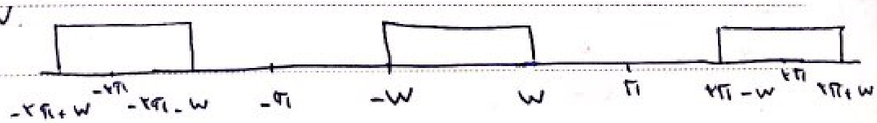
$$=\frac{e^{jN_1\omega}\,e^{-j\omega\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\;\frac{\left(e^{+j\omega\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}-e^{-j\omega\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}\right)}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}=$$

$$\frac{\sin\omega\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

مثال: اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه $x[n]$ باشد در یک بازه‌ی تناوب به صورت زیر تعریف شود.

فیلتر پایین‌گذر

$$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|\le W\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$



$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{jn\omega}\,d\omega=$$

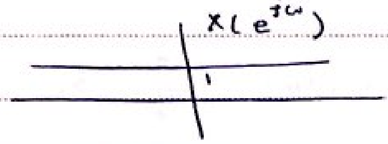
$$\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{jn\omega}}{jn}\right|_{-W}^{W}=\frac{1}{2\pi jn}\left(e^{jnW}-e^{-jnW}\right)=\frac{\sin nW}{n\pi}$$

Subject
Date

$$\frac{\sin nW}{n\pi} \xrightarrow{F.T} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le W \\ 0 & o.\omega \end{cases}$$

مثال : $x[n] = \delta[n]$

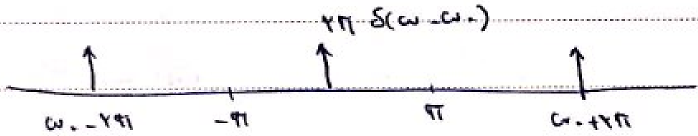
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega} = 1$$



حالت خاص مثال قبل : $\frac{\sin nW}{n\pi} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} W=\pi \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1 \Rightarrow \frac{\sin nW}{n\pi} = \delta[n]$

تبدیل فوریه گسسته زمان سیگنال های متناوب

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$



اثبات : $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{jn\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\, \delta(\omega-\omega_0)\, e^{jn\omega}\, d\omega$

$$= e^{jn\omega_0}$$

اگر $x[n]$ متناوب باشد با استفاده از سری فوریه داریم $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{jn\omega_0 k} = a_0 + a_1 e^{j\omega_0 n} + a_2 e^{j2\omega_0 n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\omega_0 n}$$

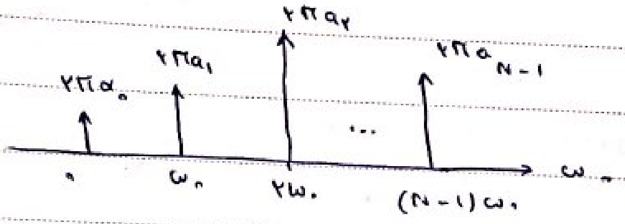
$$\xrightarrow{F.T} X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_0\, \delta(\omega - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$+ \dots + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_{N-1}\,\delta(\omega - (2N-1)\omega_0 - 2\pi l) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$x[n]$ ابتدا سری فوریه $\xrightarrow{S.F} a_k$

$$x[n] \xrightarrow{T.F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

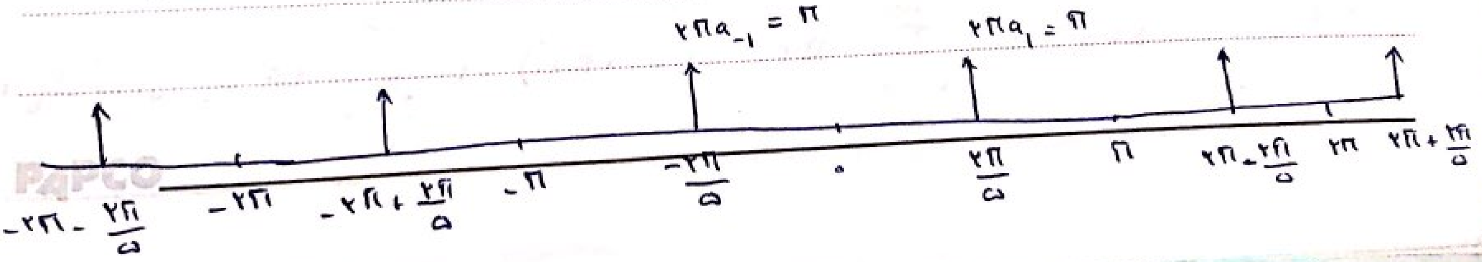


مثال: تبدیل فوریه $x[n] = \cos\frac{2\pi}{5}n$ را بدست آورید

$$\cos\frac{2\pi}{5}n \longrightarrow a_k = \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{-1} = +\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}, \ N = 5$$ مشابه با

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) =$$

$$\begin{cases} 2\pi a_1\,\delta(\omega - \frac{2\pi}{5}) + 2\pi a_{-1}\,\delta(\omega + \frac{2\pi}{5}) = & -\pi \le \omega \le \pi \\ \pi\,\delta(\omega - \frac{2\pi}{5}) + \pi\,\delta(\omega + \frac{2\pi}{5}) & \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)}) & o.w \end{cases}$$

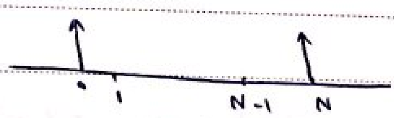


Subject
Date

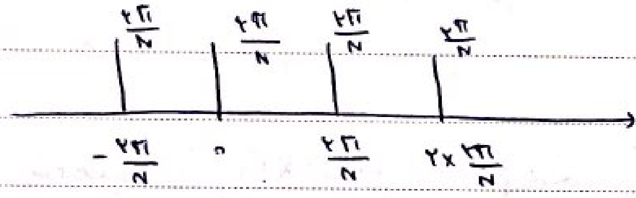
مثال: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN]$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}$$



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$



ویژگی تبدیل فوریه DT

① خطی بودن

$x_1[n] \rightarrow X_1(e^{j\omega})$

$x_2[n] \rightarrow X_2(e^{j\omega})$

$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \longrightarrow \alpha X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$

② متناوب بودن $X(e^{j\omega})$

Subject
Date

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

۳) معکوس زمانی

$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$$
$$x[-n] \rightarrow X(e^{-j\omega})$$

۴) مزدوج در حوزه زمان

$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$$
$$x^*[n] \rightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

برای سیگنال های حقیقی $x[n] = x^*[n]$

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$\begin{cases} Re\{X(e^{j\omega})\} = Re\{X(e^{-j\omega})\} \\ Im\{X(e^{j\omega})\} = -Im\{X(e^{-j\omega})\} \end{cases}$$

بخش حقیقی $X(e^{j\omega})$ نسبت به ω زوج است

بخش موهومی $X(e^{j\omega})$ نسبت به ω فرد است

سیگنال های حقیقی و زوج ← $X(e^{j\omega})$ فقط دارای بخش حقیقی است و زوج نسبت به ω

سیگنال های حقیقی و فرد ← $X(e^{j\omega})$ فقط دارای بخش موهومی است و فرد نسبت به ω

۵) شیفت زمانی و فرکانسی

$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$$

(۵-۱) $x[n-n_0] \rightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

(۵-۲) $e^{j\omega_0 n} x[n] \rightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \Rightarrow$

Subject
Date

چند حالت خاص

$$x[n]\cos\omega_0 n \rightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$(-1)^n x[n] = e^{jn\pi}x[n] \rightarrow X(e^{j(\omega-\pi)})$$

در حوزه فرکانس به اندازه π شیفت پیدا می‌کند

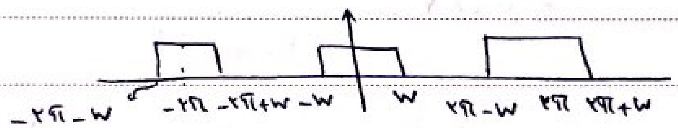
اگر low frequency باشه در $(-1)^n$ ضرب شود high frequency می‌شود

این ویژگی در واقع یک سیگنال فرکانس پایین $x[n]$ را به سیگنال فرکانس بالای $(-1)^n x[n]$

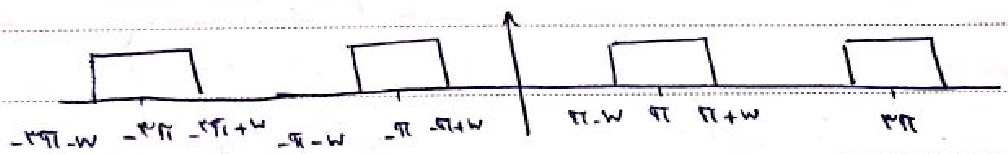
تبدیل می‌کند و برعکس.

مثال:

$$x[n]=\frac{\sin nW}{n\pi} \xrightarrow{T.F} X(e^{j\omega}) = \begin{cases}1 & |\omega|<W\\ 0 & o.w\end{cases}$$



$$(-1)^n \frac{\sin nW}{n\pi} \rightarrow$$



۶) تفاضل و جمع در حوزه زمان

$$x[n]-x[n-1] \rightarrow (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \rightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0})\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi l)$$

Subject
Date

مثال: تبدیل فوریه $u[n]$ را بدست آورید.

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \longrightarrow \frac{F\{\delta[n]\}}{1-e^{-j\omega}} + \pi F\{\delta[n]\}_{\omega=0} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-2\pi l)$$

$$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-2\pi l)$$

② مشتق در حوزه فرکانس

$$x[n] \longrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$n\,x[n] \longrightarrow j\frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

مثال: تبدیل فوریه $(n+1)\alpha^n u[n]$ را حساب کنید

$$\alpha^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$(n+1)\alpha^n u[n] = n\alpha^n u[n] + \alpha^n u[n] \longrightarrow j\frac{d}{d\omega}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$= j\frac{-j\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{\alpha e^{-j\omega} + 1 - \alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

مثال

$$(-1)^n (n+1)\alpha^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{(1-\alpha e^{-j(\omega-\pi)})^2}$$

$$(-1)^n \cos\frac{\pi}{3}n\,(n+1)\alpha^n u[n] \longrightarrow ?$$

Subject
Date

⑧ گستردگی در حوزه زمان

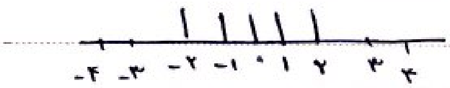
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & k \text{ مضرب } n \\ 0 & \text{بقیه } n \text{ ها} \end{cases}$$

k-1 صفر میان دو عدد متوالی

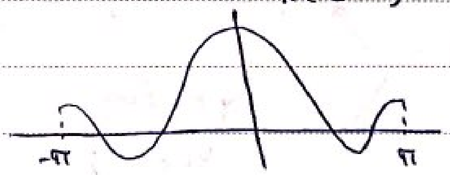
$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x_k[n] \rightarrow X(e^{jk\omega})$$

$X(e^{j\omega})$

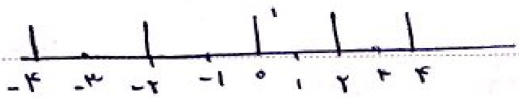


$\rightarrow$

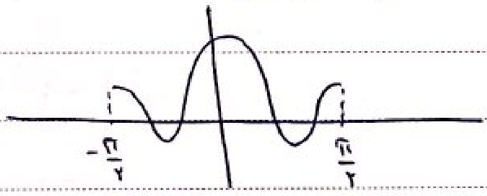


$x_{(2)}[n]$

$X(e^{j2\omega})$



$\rightarrow$



⑨ قضیه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

⑩ کانولوشن در حوزه ی زمان

$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$$

$$h[n] \rightarrow H(e^{j\omega})$$

$$x[n] * h[n] \longrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

تحلیل سیستم های LTI با استفاده از مفهوم پاسخ فرکانسی

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

Time domain

Frequency domain

$$X(e^{j\omega}) \quad H(e^{j\omega}) \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{پاسخ فرکانسی}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} = F\{h[n]\} \\ = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \end{cases}$$

شرط وجود پاسخ فرکانسی = شرط همگرایی تبدیل فوریه

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

معادل شرط پایداری سیستم است ⇐ تبدیل فوریه ابزاری برای تحلیل سیستم های LTI پایدار است.

مثال

$$\longrightarrow \boxed{h[n] = \delta[n-n_0]} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = F\{\delta[n-n_0]\} = e^{-jn_0\omega}} \longrightarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$$

Subject
Date

جلسه

سه‌شنبه ۲۰ آذر

مثال: اگر ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ی $h[n] = \beta^n u[n]$ برابر با

$x[n] = \alpha^n u[n]$ باشد آن‌گاه $y[n]$ را به دست آورید.

$x[n] = \alpha^n u[n]$ $\qquad h[n] = \beta^n u[n]$ $\qquad y[n] = \alpha^n u[n] * \beta^n u[n]$

$X(e^{j\omega})$ $\qquad H(e^{j\omega})$ $\qquad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})$

$$\begin{cases} x[n] = \alpha^n u[n] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} & |\alpha|<1 \\ h[n] = \beta^n u[n] \longrightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-\beta e^{-j\omega}} & |\beta|<1 \end{cases}$$

تبدیل فوریه خروجی

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$A = \lim_{e^{-j\omega} \to \frac{1}{\alpha}} (1-\alpha e^{-j\omega})\, Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \qquad \alpha \neq \beta$$

$$B = \frac{\beta}{\beta-\alpha} \qquad B = \lim_{e^{-j\omega} \to 1}$$

P4PCO

Subject
Date

فوریه معکوس

$$y[n] = F^{-1}\left\{\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})}\right\} = F^{-1}\left\{\frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}\right\}$$

$$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] + \frac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^n u[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right] . u[n]$$

if $\alpha = \beta \Rightarrow$ $\begin{cases} Y(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} \\ y[n] = (n+1) . \alpha^n u[n] \end{cases}$

روش رسی

روش غیر رسی $\quad y[n] = \lim \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right] u[n]$

$$y[n] = (n+1)\ \alpha^n u[n]$$

اگر پاسخ ضربه‌ی سیستم معکوس را نداشتیم ...

$$\longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \boxed{h_I[n]} \longrightarrow$$

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega}) . H_I(e^{j\omega}) = 1$$

Subject
Date

$$H_I(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = 1 - \beta e^{-j\omega}$$

$$h_I[n] = F^{-1}\{H_I(e^{j\omega})\} = \delta[n] - \beta\,\delta[n-1]$$

استفاده از مفهوم پاسخ فرکانسی برای تحلیل سیستم های LTI توصیف شده با معادلات خطی تفاضلی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

از دو طرف تبدیل فوریه بگیریم D.T

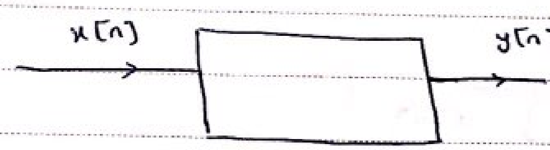
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-j\omega k}\, Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k e^{-jk\omega}\, X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

PAPCO

Subject
Date

سیستم LTI توصیف شده با معادله زیر را داریم. پاسخ فرکانسی را به‌دست آوریم



$$y[n] - a\,y[n-1] = x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) - a e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

مثال: اگر یک سیستم LTI به‌وسیله‌ی معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف شود پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی را به‌دست آورید:

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) \left[1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j\omega}\right] = 2X(e^{j\omega})$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j\omega}} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega})}$$

$$\begin{cases} A = 4 \\ B = 2 \end{cases}$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

$$H(e^{j\omega}) = \frac{۴}{1-\frac{1}{۴}e^{-j\omega}} + \frac{۲}{1-\frac{1}{۲}e^{-j\omega}}$$

$$\downarrow F^{-1}$$

$$h[n] = \left[(\tfrac{1}{۴})^{n-1} - (\tfrac{1}{۲})^{n-1} \right] \cdot u[n]$$

پاسخ سیستم به ورودی $x_1[n] = (\frac{1}{۲})^n u[n]$ ، $x_۲[n] = (\frac{1}{۳})^n u[n]$ را بیابید.

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{۲}e^{-j\omega}} \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{1}{۲}e^{-j\omega})^۲} \cdot \frac{۲}{(1-\frac{1}{۴}e^{-j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{۲}{(1-\frac{1}{۲}e^{-j\omega})^۲ (1-\frac{1}{۴}e^{-j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{۲}e^{-j\omega}} + \frac{B}{(1-\frac{1}{۲}e^{-j\omega})^۲} + \frac{C}{1-\frac{1}{۴}e^{-j\omega}}$$

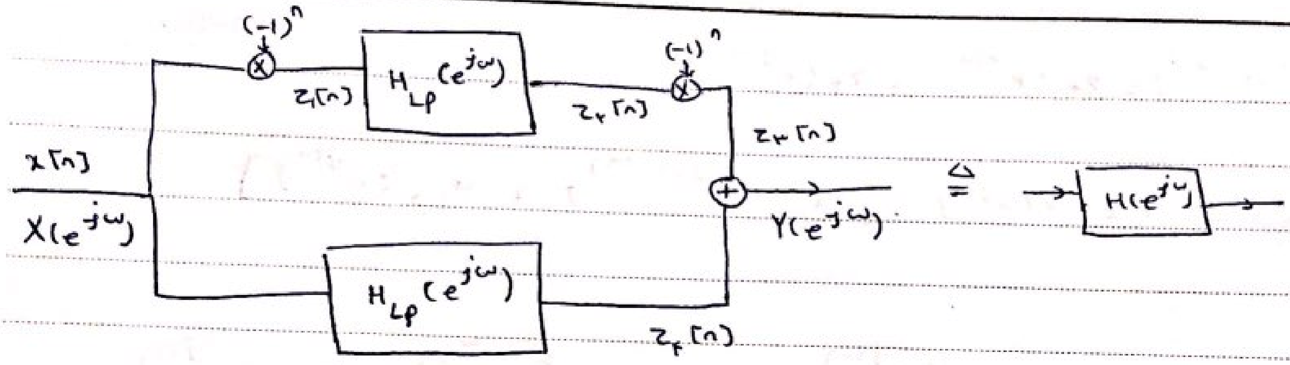
فوریه معکوس $\downarrow$

پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{۲}\delta[n-1]$ (خودتون بررسی کنید)

سوال کاربردی

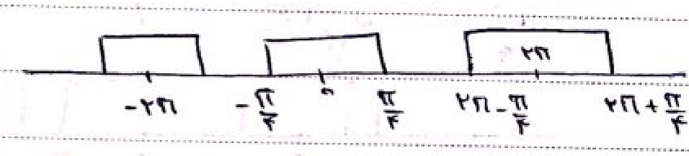
سیستم LTI زیر را درنظر بگیرید، پاسخ فرکانسی معادل سیستم زیر را به دست آورید.

Subject
Date



$H_{Lp}(e^{j\omega})$ یک فیلتر فرکانسی پایین گذر با فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$ است.

$$h_{Lp}[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} n)}{n\pi}$$



I. $z_1[n] = x[n]\cdot(-1)^n = x[n]\, e^{jn\pi} \Rightarrow Z_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$

II. $Z_2(e^{j\omega}) = Z_1(e^{j\omega})\, H_{Lp}(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)}) \cdot H_{Lp}(e^{j\omega})$

III. $z_3[n] = (-1)^n z_2[n] \rightarrow Z_3(e^{j\omega}) = Z_2(e^{j(\omega-\pi)}) \Rightarrow$

$\underline{X(e^{j(\omega-\pi)}) \cdot H_{Lp}(e^{j\omega})}$

باید شیفت بخوره دوباره

$Z_3(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi-\pi)})\; H_{Lp}(e^{j(\omega-\pi)})$

$Z_3(e^{j\omega}) = \underbrace{X(e^{j\omega})}_{\text{برمی‌گرده جای اولش}} \cdot H_{Lp}(e^{j(\omega-\pi)})$

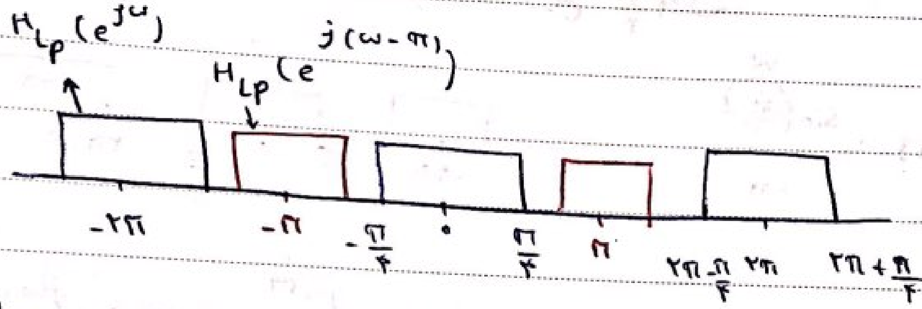
IV. $Z_4(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_{Lp}(e^{j\omega})$ تنها پایین

Date

(۷) $Y(e^{j\omega}) = z_{p}(e^{j\omega}) + z_{r}(e^{j\omega})$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \left[H_{Lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{Lp}(e^{j\omega}) \right]$$

$$H_{eq}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H_{Lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{Lp}(e^{j\omega})$$

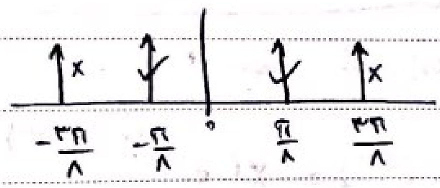


فیلتر H_{eq} هم بالاگذر هم
پایین‌گذر است میان‌ناگذر است

* سوال امتحان

ورودی هایی که در حوزه فرکانس پالس هستند را عبور می‌دهد
که تبدیل فوریه‌شون باشه قطار ضربه که داخل پالس ها بیفته

$$x[n] = \underbrace{\cos\frac{\pi}{8}n}_{\text{عبور می‌کند}} + \underbrace{\cos\frac{3\pi}{8}n}_{\text{عبور نمی‌کند}}$$



$$y[n] = \cos\frac{\pi}{8}n + \frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{n\pi} + \frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{4}n}{n\pi}$$

جلسه

یکشنبه ۲۵ آذر

معرفی رابطه ریاضی

تبدیل لاپلاس   ویژگی های تبدیل لاپلاس

کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل سیستم های LTI

شرط وجود تبدیل فوریه

$$\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$$

$$H(\omega) = F\{h(t)\}$$

معادل پایداری سیستم $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ شرط وجود پاسخ فرکانسی

تبدیل فوریه ابزار مناسبی برای تحلیل سیستم های پایدار است.

تبدیل لاپلاس تعمیم تبدیل فوریه است که برای تحلیل سیستم های ناپایدار هم استفاده می شود.

۱-۵) سیگنال پایه پیشنهادی e^{st} که s یک عدد مختلط است $s = \sigma + j\omega$

$$\xrightarrow{e^{st}} \boxed{h(t)} \longrightarrow \quad y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = e^{st} H(s)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

Subject
Date

به طور کلی تبدیل لاپلاس دو طرفه یک سیگنال پیوسته زمان به صورت زیر تعریف می شود:

متغیر ستقل t: حقیقی t   متغیر مستقل s: مختلط $s = \delta + j\omega$

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

تبدیل لاپلاس یک طرفه

(برای سیستم های علی کاربرد دارد)

$$X(s) = \int_{0^+}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

منظور از تبدیل لاپلاس، تبدیل لاپلاس دو طرفه است. (از $-\infty$ تا $+\infty$)

رابطه ی تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = X(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-\delta t}\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$F\{x(t)\, e^{-\delta t}\}$$

شرط وجود لاپلاس سیگنال $x(t)$ = شرط وجود تبدیل فوریه سیگنال $x(t)\, e^{-\delta t}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, e^{-\delta t}\, dt < +\infty$$

وجود عبارت $e^{-\delta t}$ در شرط وجود باعث می شود که عبارت داخل انتگرال بیشتر نزدیک شود به عبارت

Subject
Date

اگر ممکن است $x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر نباشد $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \to \infty$ اما بتوان

گدوده‌ای برای σ انتخاب کرد که $x(t) e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد

تبدیل لاپلاس تعمیم یافته تبدیل فوریه است

اگر $x(t)$ تبدیل فوریه داشته باشد حتماً تبدیل لاپلاس هم دارد

ممکن است $x(t)$ تبدیل لاپلاس داشته باشد اما تبدیل فوریه نداشته باشد.

بحث این که تبدیل لاپلاس به ازای برخی از σ ها وجود داشته باشد یا وجود نداشته باشد

← ناحیه همگرایی Region of convergence

تعریف ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس: گدوده‌ای از صفحه مختلط S که به ازای آن تبدیل لاپلاس

وجود دارد، ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس می‌گوییم.

تبدیل لاپلاس معمولاً یک عبارت جبری از S است:

$$X(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$$

$N(S)$: چندجمله‌ای صورت

$D(S)$: چند جمله‌ای مخرج

به ریشه‌های $N(S)$، صفرهای تبدیل لاپلاس می‌گوییم

به ریشه‌های $D(S)$، قطب‌های تبدیل لاپلاس می‌گوییم

صفرهای $X(S)$ $\quad X(S) = 0 \Rightarrow N(S) = 0 \Rightarrow S = z_1, z_2, \ldots$

قطب‌های $X(S)$ $\quad D(S) = 0 \Rightarrow S = P_1, P_2, \ldots$

مثال : سیگنال $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ را در نظر بگیرید

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$-\frac{1}{\alpha + j\omega}\, e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{e^{-\alpha t}(\cos\omega t + j\sin\omega t)}{\alpha + j\omega} \Big|_{0}^{+\infty} \overset{\alpha > 0}{=}$$

$$\frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-st}\, dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + s)t}\, dt = -\frac{1}{\alpha + s}\, e^{-(\alpha + s)t} \Big|_{0}^{+\infty} =$$

شرط وجود تبدیل لاپلاس

$\alpha + Re\{s\} > 0$

$$\frac{1}{\alpha + s}$$

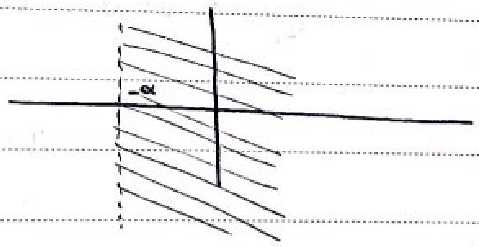
صفحه خط S

شرط وجود تبدیل لاپلاس

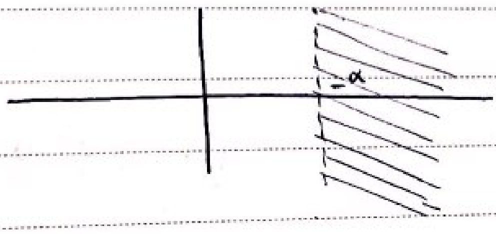
$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$

$\Rightarrow Re\{s\} > -\alpha$

$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



$\alpha = 2 \Rightarrow \quad e^{-2t} u(t) \xrightarrow{F.T} \frac{1}{\alpha + j\omega}$

$e^{-2t} u(t) \xrightarrow{L.T} \frac{1}{\alpha + s} \quad ; \quad Re\{s\} > -2$

Subject
Date

$\alpha = -2 \Rightarrow e^{2t}u(t) \xrightarrow{F.T}$ ندارد

$$e^{2t}u(t) \xrightarrow{L.T} \frac{1}{-2+s} \quad ; \quad Re\{s\} > 2$$

قطب : $s=2$

$X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}$ باید محور $j\omega$ جزء ناحیه همگرایی $X(s)$ باشد.

اگر محور $j\omega$ که معادل $Re\{s\} = \sigma = 0$ است جزء ناحیه همگرایی باشد تبدیل فوریه وجود دارد

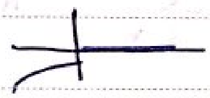
مثال: تبدیل لاپلاس $x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t)$ را بدست آورید:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha t} e^{-st}\, dt =$$

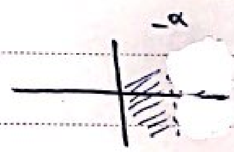
$$-\int_{-\infty}^{0} e^{-(\alpha+s)t}\, dt = \frac{1}{\alpha+s} e^{-(\alpha+s)t}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\alpha+s} - 0 = \frac{1}{s+\alpha}$$

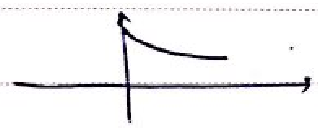
شرط $Re\{s\} + \alpha < 0$

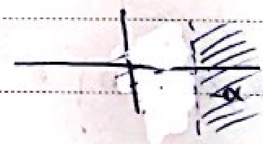


$$-e^{-\alpha t}u(-t) \xrightarrow{L.T} X(s) = \frac{1}{s+\alpha} \quad ; \quad ROC : Re\{s\} < -\alpha$$



مثال قبل $x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \xrightarrow{L.T} X(s) = \frac{1}{s+\alpha} \quad ; \quad ROC : Re\{s\} > -\alpha$





P4PCO

Subject
Date

عبارت جبری تبدیل لاپلاس هر دو سیگنال $e^{-\alpha t}u(t)$ و $-e^{-\alpha t}u(-t)$ یکسان و برابر با $\frac{1}{s+\alpha}$ است. تنها وجه تمایز آن ها نواحی همگرایی آن هاست.

لذا ناحیه همگرایی کنار عبارت جبری برای محاسبه تبدیل معکوس لاپلاس مورد نیاز است

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \begin{cases} e^{-at}u(t) & \text{if} \quad Roc: Re\{s\} > -a \\ -e^{-at}u(-t) & \text{if} \quad Roc: Re\{s\} < -a \end{cases}$$

مثال: $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$

$$\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$$

$$-\frac{4}{3}e^{-t}u(t) \longleftrightarrow -\frac{4}{3}\frac{1}{s+1} \; ; \; Roc: Re\{s\} > -1$$

$$\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} \; ; \; Re\{s\} > 2$$

$$x(t) \longleftrightarrow 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} \quad Roc: Re\{s\} > 2$$

خواص ناحیه همگرایی

① Roc تبدیل لاپلاس در صفحه s شامل یک نوار connected و موازی با محور jw است.
متصل به هم

$$|x(t)|e^{-\delta t}\,dt < +\infty$$

② Roc تبدیل لاپلاس های گویا (نسبت یک چندجمله‌ای از s به یک چندجمله‌ای از s)

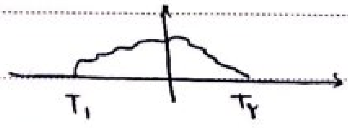
Subject
Date

هیچ قطبی را شامل نمی‌شود ⟸ قطب‌ها مرزهای ناحیه همگرایی هستند

③ اگر سیگنال $x(t)$ یک سیگنال با عرض محدود (finite Duration) و مطلقاً انتگرال‌پذیر

باشد آن گاه تبدیل لاپلاس آن دارای ناحیه‌ی همگرایی برابر با کل صفحه‌ی s است

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt < +\infty \longrightarrow \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt < +\infty$$



③، ② عبارت جبری $X(s)$ برای سیگنال‌های با عرض محدود فاقد قطب است

④ اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت راستی Right_sided باشد $[x(t)=0,\ t<T_0]$

و فقط $Re\{s\}=\sigma_0$ در Roc تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد تمام مقادیر s با

$Re\{s\}>\sigma_0$ نیز در Roc آن وجود دارد

$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L.T} \frac{1}{s+a}$

$$\text{if } \int |x(t)|\, e^{-\sigma_0 t}\, dt < +\infty \longrightarrow \int |x(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt < +\infty$$

$Roc = Re\{s\} > -a$ $\qquad \sigma > \sigma_0$

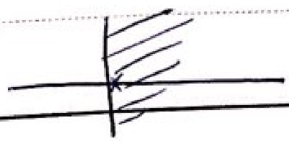
④ و ②

تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت راستی خود سمت راستی است به عبارت دیگر ناحیه‌ی همگرایی

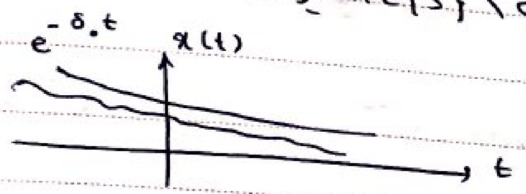
بین بزرگترین قطب (قطبی که قسمت حقیقی آن بزرگترین است، سمت راست‌ترین قطب) و $+\infty$

است

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L.T} \frac{1}{s+a} \ ; \ Roc = Re\{s\} > -a$$



⑤ اگر سیگنال $x(t)$ یک سیگنال سمت چپ باشد و خط $Re\{s\} = \sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس قرار داشته باشد آنگاه تمام مقادیر s با $Re\{s\} < \sigma_0$ نیز در ROC قرار دارد



② و ⑤ ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت چپ خود سمت چپ است یعنی بین $-\infty$ تا کوچکترین قطب

⑥ اگر $x(t)$ یک سیگنال دوطرفه (two-sided) باشد و خط $Re\{s\} = \sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد آنگاه ROC تبدیل لاپلاس نواری در صفحه S است و شامل خط $Re\{s\} = \sigma_0$ است

②,⑥ $\Leftarrow$ تبدیل لاپلاس یک سیگنال دوطرفه بین دو قطب متوالی قرار دارد:

(دو قطبی که قسمت های حقیقی آن ها متوالی باشد)

$$x(t) = \begin{cases} x_L(t) & t > t_0 \\ x_R(t) & t < t_0 \end{cases}$$

Subject
Date

جلسه

سه شنبه ۲۷ آذر

تبدیل لاپلاس $x(t) = e^{-a|t|}$ را بدست آورید.

two-sided

$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$$\begin{cases} e^{-at}u(t) \xrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+a} \; ; \; Re\{s\} > -a \\ e^{at}u(-t) \xrightarrow{LT} \dfrac{1}{s-a} \; ; \; Re\{s\} < a \end{cases}$$

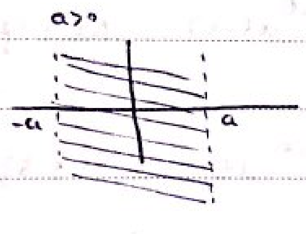
$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \xrightarrow{LT} \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-a} \quad -a < Re\{s\} < a$$

فقط اگر a مثبت باشد تبدیل لاپلاس داریم

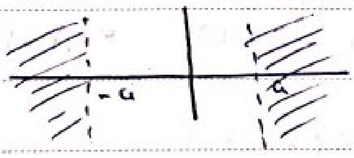
if $a<0$ $\quad ROC_1 \cap ROC_2 = \varnothing$

در حالت داریم

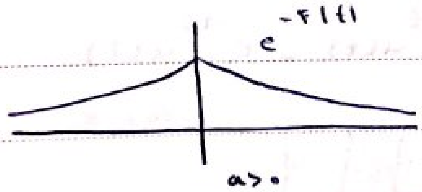
$a>0$



$a<0$

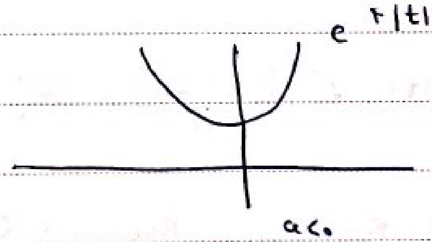


$e^{-2|t|}$



$a>0$

$e^{2|t|}$



$a<0$

لاپلاس ✗

فوریه ✗

لاپلاس ✓ شرط وجود تبدیل فوریه => محور $j\omega$ باید جزو ناحیه همگرایی باشد

فوریه ✓

می‌توان a ای پیدا کرد که تعیین کند...

محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس

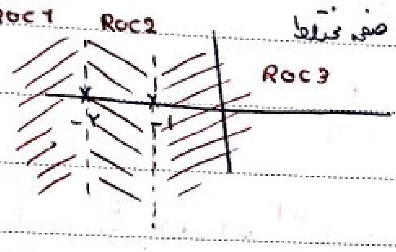
$$x(t) \rightarrow X(s)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

در عمل برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس از تکنیک کسر به کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم

مثال: برای تمام نواحی همگرایی ممکن عکس تبدیل لاپلاس را به دست آورید

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



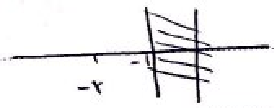
اولین کار تبدیل به کسرهای جزئیات

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \begin{cases} e^{-t}u(t) & Re\{s\} > -1 \\ -e^{-t}u(-t) & Re\{s\} < -1 \end{cases}$$

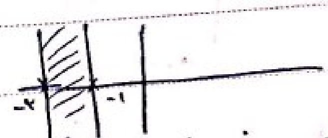
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \begin{cases} e^{-2t}u(t) & Re\{s\} > -2 \\ -e^{-2t}u(-t) & Re\{s\} < -2 \end{cases}$$

الف) ROC 3 $\quad$ Roc: $Re\{s\} > -1$



$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

ب) ROC 2: $\quad$ Roc: $-2 < Re\{s\} < -1$



محور jω جزو ناحیه همگرایی نیست تبدیل فوریه ندارد

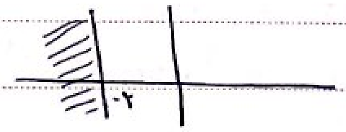
Date

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

سمت چپی　　　سمت راستی

ج) Roc 1 :　　　$Roc = Re\{s\} < -2$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$



۲-۵ - ویژگی های تبدیل لاپلاس

در ویژگی ها توجه به ناحیه‌ی همگرایی مهم است

① خطی بودن

$x_1(t) \longrightarrow X_1(s)$; Roc_1

$x_2(t) \longrightarrow X_2(s)$; Roc_2

$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$; Roc contains $Roc_1 \cap Roc_2$

$Roc_1 \cap Roc_2 \subseteq Roc$

ناحیه همگرایی ترکیب خطی چند سیگنال بزرگتر یا مساوی اشتراک نواحی همگرایی آن هاست. حذف قطب ها ممکن است منجر به بزرگتر شدن ناحیه‌ی همگرایی شود.

مثال:

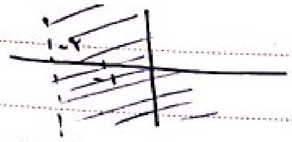
$X_1(s) = \frac{1}{s+1}$; $Re\{s\} > -1$

$X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$; $Re\{s\} > -1$

Subject
Date

$$X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+2-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

$$Re\{s\} > -1 \subseteq Re\{s\} > -2$$



در حوزه زمان چه اتفاقی افتاد؟

$$x_1(t) = e^{-t}u(t)$$

$$x_2(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

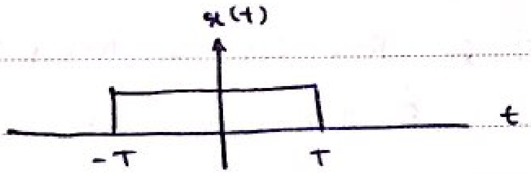
$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) = +e^{-2t}u(t)$$

② شیفت زمانی time shifting

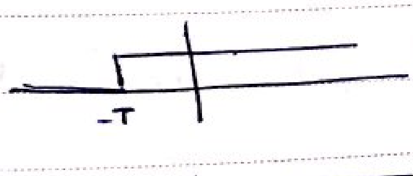
$$x(t) \longrightarrow X(s) \; ; \; Roc_1$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-st_0} X(s) \; ; \; Roc_1$$

مثال: تبدیل لاپلاس $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$



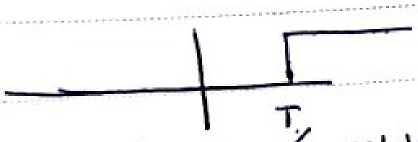
$$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = u(t+T) - u(t-T) \longrightarrow \frac{e^{sT}}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{e^{sT} - e^{-sT}}{s} *$$; Roc تمام صفحه



نکته!

$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$$

$$u(t-t_0) \longrightarrow e^{-st_0}\frac{1}{s}$$



* دقت ریشه‌ی مخرج قطب است که یک چندجمله‌ای تقسیم بر یک چندجمله‌ای دیگر باشد اما در این جا صورت چند جمله‌ای نیست.

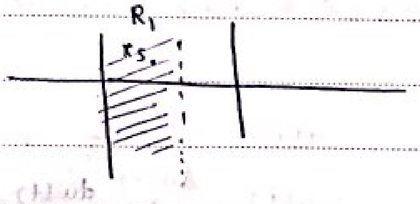
PAPCO

Subject
Date

③ شیفت فرکانسی

$x(t) \rightarrow X(s) \quad ; \quad ROC = R_1$

$e^{s_0 t} x(t) \rightarrow X(s - s_0) \quad ; \quad ROC = R_1 + Re\{s_0\}$



$e^{2+3j} x(t) \rightarrow X(s - (2+3j)) \quad ; \quad ROC = R_1 + 2$

تبدیل فوریه $\quad e^{j\omega_0 t} x(t) \rightarrow X(\omega - \omega_0)$

$\cos\omega_0 t \; x(t) \rightarrow \frac{1}{2}[X(s - j\omega_0) + X(s + j\omega_0)]$

ناحیه‌ی همگرایی رو تغییر نمی‌دهد.

④ تغییر مقیاس زمانی

$x(t) \rightarrow X(s) \quad ; \quad ROC = R_1$

$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a}) \quad ; \quad ROC = a R_1$

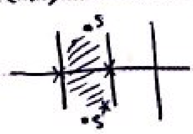
a حتماً حقیقی است چون در حوزه‌ی زمان است.

حالت خاص $\quad a = -1 \quad x(-t) \rightarrow X(-s) \quad ; \quad ROC = -R_1$

⑤ مزدوج

$x(t) \rightarrow X(s) \quad ; \quad ROC = R_1$

$x^*(t) \rightarrow X^*(s^*) \quad ; \quad ROC = R_1$



ناحیه‌ی همگرایی به مزدوج حساس نیست

P4PCO

۶ مشتق گیری در حوزه زمان

$$x(t) \longrightarrow X(s) \quad ; \quad ROC = R_1$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s) \quad ; \quad R_1 \subseteq ROC$$

ROC برابر با R_1 یا بزرگتر

وقتی $\frac{1}{s}$ داشته باشد، ممکن است با ضرب در s قطب آن از بین برود.

$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{s} \quad ; \quad Re\{s\} > 0$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \longrightarrow s \times \frac{1}{s} = 1 \quad ; \quad \text{کل صفحه } s$$

۷ مشتق گیری در حوزه s

$$x(t) \longrightarrow X(s) \quad ; \quad ROC = R_1$$

$$-t\,x(t) \longrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad ; \quad ROC = R_1$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

$$t e^{-\alpha t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{2} t^2 e^{-\alpha t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^3}$$

در حالت کلی:
$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^n}$$

مثال:
$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = A u(t) + B e^{-t}u(t) + C t e^{-t}u(t)$$

Subject
Date

جلسه

یکشنبه ۲ دی

۸) انتگرال گیری در حوزه زمان

$x(t) \longrightarrow X(s)$; $Roc = R_1$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longrightarrow \frac{X(s)}{s} \quad ; \quad R_1 \cap \{ Re\{s\} > 0\} \subseteq Roc$$

۹) کانولوشن

$x_1(t) \rightarrow X_1(s)$; R_1

$x_2(t) \rightarrow X_2(s)$; R_2

$x_1(t) * x_2(t) \longrightarrow X_1(s) . X_2(s)$; $R_1 \cap R_2 \subseteq Roc$

کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل سیستم های LTI

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Time - domain

↓

laplase - domain $X(s)$ $H(s)$ $Y(s) = X(s) . H(s)$

تابع تبدیل

transform function

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

تابع تبدیل سیستم

به کمک تابع تبدیل سیستم (عبارت جبری ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه) می‌توان علی بودن یا پایداری سیستم را بررسی کرد.

PAPCO

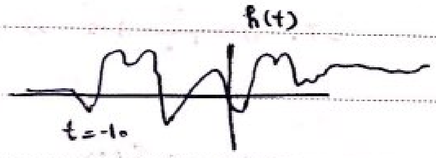
فرض کنیم سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ علی است ⇐ $h(t)\big|_{t<0}=0$ ⇐

$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$; $ROC = Re\{s\} > \sigma_0$

قضیه: اگر سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ علی باشد آن گاه ناحیه‌ی همگرایی تابع تبدیل سمت راستی است (به صورت $Re\{s\} > \sigma_0$)

سیستم علی است ⇐ ناحیه همگرایی $H(s)$ سمت راستی است.

عکس قضیه لزوما برقرار نیست اگر ناحیه‌ی همگرایی $H(s)$ سمت راستی باشد، آن گاه تنها نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که $h(t)$ نیز سمت راستی است اما علی است $h(t)$ به ازای $t<0$ به بعد مقدار داشته باشد.



عکس قضیه تنها با شرط گویا بودن $H(s)$ برقرار است.

ناحیه همگرایی $H(s)$ سمت راستی است

سیستم علی است. ⇐ $H(s)$ گویا است (تقسیم یک چندجمله‌ای برحسب s
بر یک چندجمله‌ای برحسب s)

دلیل: اگر $H(s)$ به صورت گویا باشد می‌توان $H(s)$ را به صورت ترم‌های $\frac{1}{(s+p_i)^n}$ نوشت

و هر یک از ترم‌ها در حوزه‌ی زمان معادل یک عبارت با ضریب $u(t)$ خواهد بود

$$\frac{A}{1+p_1} + \frac{B}{1+p_2} + \dots$$

فقط برای $t>0$ معتبر خواهد بود.

فرض کنیم سیستم LTI با پاسخ ضربه h(t) پایدار است ⟸ $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt<\infty$ ⟸

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,e^{-\sigma t}\,dt<\infty$ یعنی $\sigma=0$ جزء ناحیه همگرایی H(S) است (محور مجاز جزء ناحیه

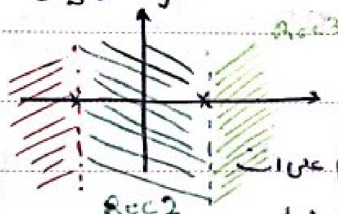
همگرایی H(S) است)

نتیجه: اگر و فقط اگر یک سیستم LTI با پاسخ ضربه h(t) پایدار باشد آنگاه ناحیه همگرایی

تابع تبدیل سیستم شامل محور مجاز است

سیستم پایدار است ⟵ ROC تابع تبدیل شامل محور مجاز است

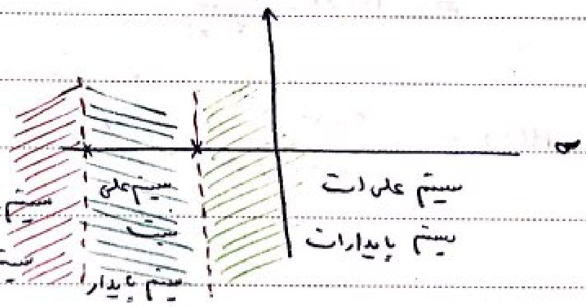
سیستم پایدار است ⟵ $H(S)=\mathcal{L}\{h(t)\}$



سیستم علی است
سیستم پایدار نیست

Roc1
سیستم علی نیست
سیستم پایدار نیست

Roc2
سیستم علی نیست
سیستم پایدار است



سیستم علی نیست
سیستم پایدار نیست

سیستم علی نیست
سیستم پایدار نیست

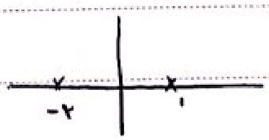
سیستم علی است
سیستم پایدار است

نتیجه: اگر یک سیستم با تابع تبدیل H(S) علی و پایدار باشد آنگاه تمام قطب های H(S)

در نیم صفحه چپ قرار دارد. عکس نتیجه همچنان برقرار است که H(S) گویا باشد.

$H(S)=\dfrac{1}{(S+2)(S+4)}$ ناپایدار

$H(S)=\dfrac{1}{(S-1)(S+2)}$ پایدار



P4PCO

Date

مثال: یک سیستم LTI با ورودی $x(t)=e^{-3t}u(t)$ و خروجی $y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

داریم در مورد علی بودن و پایداری این سیستم اظهار نظر بفرمایید.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

time domain $\quad e^{-3t}u(t) * h(t) = (e^{-t}-e^{-2t})\,u(t)$

اگر ناپایدار باشه، تبدیل فوریه نداریم.

Laplace domain $\quad \mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} \cdot H(s) = \mathcal{L}\{(e^{-t}-e^{-2t})\,u(t)\}$

$$\Rightarrow H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$$

$x(t) \rightarrow X(S) = \dfrac{1}{s+3} \quad Roc: \{Re\{s\} > -3\}$

$y(t) \rightarrow Y(S) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

$$H(S) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad Roc = Re\{s\} > -1$$

$Roc = Re\{s\} > -1$

نکته:

$X(S) \qquad H(S) \qquad Y(S) \qquad Y(S) = H(S) \cdot X(S)$

$Roc_x \qquad Roc_H \qquad Roc_y$

$$Roc_y \supseteq Roc_x \cap Roc_H$$

علی است چون ناحیه همگرایی سمت راستی است و $H(S)$ گویا است.

سیستم پایدار است ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ است.

- پاسخ به ورودی $x(t) = e^{-4t}u(t)$ یا $x(t) = e^{4t}u(-t)$ را بیابید.

- تابع تبدیل سیستم معکوس را بیابید.

$H(s)=\frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \longrightarrow H_I(s) \longrightarrow$

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t) \Rightarrow H(s)\cdot H_I(s) = 1 \Rightarrow H_I(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s+3}$$

ROC :

$Re\{s\}>-1$ مجول کل صفحه

$\boxed{Re\{s\}>-3}$

خروجی باید ورودی را تولید کند

توصیف سیستم —— پاسخ ضربه داده شده است

یک ورودی و خروجی مشخص در حوزه زمان

معادله دیفرانسیل

یک سری ویژگی ها

$H(j\omega)$ / $H(s)$

تحلیل سیستم های LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

Subject
Date

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

مثال : یک معادله دیفرانسیل سیستم LTI زیر را داریم :
(سیستم علی)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

$$(s^2 + 3s + 2)\,Y(s) = (s+3)\,X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \qquad ROC: Re\{s\} > -1$$

تبدیل لاپلاس دوطرفه هم برای سیستم های علی و هم غیر علی است

Subject
Date

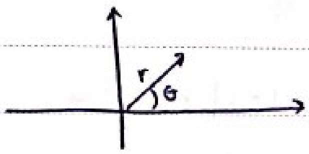
جبر

سه‌شنبه ۴ دی

تبدیل z

تبدیل z تعمیم یافته‌ی تبدیل فوریه گسسته زمان است

سیگنال پایه پیشنهادی z^n که $z = re^{j\omega} = r\cos\omega + jr\sin\omega$



$$x[n] = z_0^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = z_0^n * h[n] =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_0^{n-k} h[k] = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z_0^{-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \qquad\qquad = z_0^n H(z_0)$$

تبدیل z تعریف رابطه ریاضی

ویژگی‌ها

کاربرد تبدیل z در تحلیل سیستم‌های LTI

۶-۱ـ تعریف تبدیل ریاضی

n متغیر مستقل   z متغیر مستقل

$$x[n] \longleftrightarrow X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

PAPCO

قبلاً DFT را تعریف کردیم $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[n]\, r^{-n}}\, e^{-jn\omega} =$$

$$DFT\{x[n]\, r^{-n}\}$$

شرط وجود تبدیل فوریه D.T برای سیگنال $x[n]r^{-n}$ = شرط وجود تبدیل z برای سیگنال $x[n]$

$$\Downarrow$$

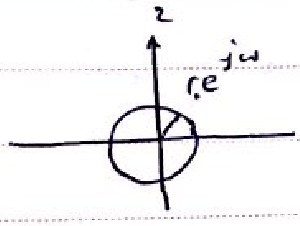
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\, r^{-n} < \infty$$

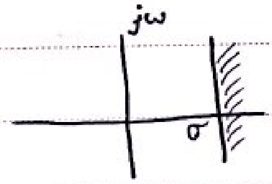
اگر سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریه باشد آنگاه $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$ و لذا تبدیل z نیز وجود دارد

(زیرا حداقل برای $r=1$ داریم $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\, r^{-n} < \infty$)

ممکن است $x[n]$ دارای تبدیل فوریه گسسته-زمان نباشد ($\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| \to \infty$) اما رابطه

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\, r^{-n} < \infty$ برای r های خاص برقرار باشد و تبدیل z وجود داشته باشد.





$$|z| \gtrless r_0$$

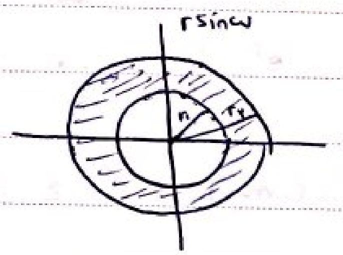
تعریف ناحیه همگرایی (ROC): محدوده‌ای از صفحه مختلط z که به ازای آن تبدیل z برای یک سیگنال

DT وجود دارد را ناحیه همگرایی تبدیل z می‌نامیم

ROC در تبدیل z به صورت یک قید روی $|z| = r$ بیان می‌شود. مرزهای ناحیه همگرایی به صورت

دایره‌ای با شعاع مشخص است

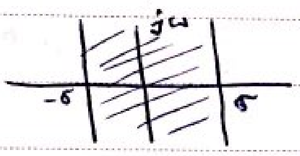
$$z = re^{j\omega}$$



$$r_1 < |z| < r_2$$

$$s = \sigma + j\omega$$

لاپلاس



تعریف صفر و قطب:

تبدیل z یک سیگنال D.T معمولاً به صورت یک تابع کسری است

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad X(z) = 0 \Rightarrow N(z) = 0 \Rightarrow z_1, z_2, \dots, z_m$$

صفرهای $X(z)$

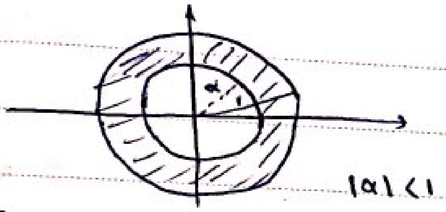
$$X(z) \to \infty \Rightarrow D(z) = 0 \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$$

قطب‌های $X(z)$

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = \alpha^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n \overset{|\alpha z^{-1}| < 1}{=} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

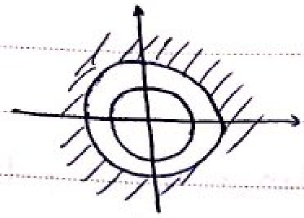
$$|\alpha z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha| \qquad \text{Roc: } |z| > |\alpha|$$



$|\alpha|<1$

دایره به شعاع یک جزء Roc است تبدیل فوریه دارد

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

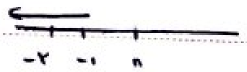


$|\alpha|>1$

تبدیل فوریه ندارد

$2^n u[n] \xrightarrow{DFT}$ وجود ندارد

$$2^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}}$$



مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = -\alpha^n u[-n-1]$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = \sum_{-\infty}^{-1} -(\alpha z^{-1})^n \overset{n \to -n}{=}$$

$$\sum_{1}^{\infty} -(\alpha z^{-1})^{-n} = \sum_{1}^{\infty} -(\alpha^{-1} z)^n = -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = \frac{z}{z-\alpha} \; : \; |z|<|\alpha|$$

$$|\alpha^{-1} z| < 1$$

$$\Rightarrow \; |z| < |\alpha|$$

تبدیل z معکوس $Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-\alpha}\right\}$

$$\begin{cases} \alpha^n u[n] & \text{if } Roc: |z| > |\alpha| \\ -\alpha^n u[-n-1] & \text{if } Roc: |z| < |\alpha| \end{cases}$$

مثال: $x[n] = \delta[n] \longrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \; ; \; Roc =$ کل صفحه z

مثال: تبدیل z سیگنال

$$x[n] = 2^n u[n] + 3^{n+1} u[-n-1]$$

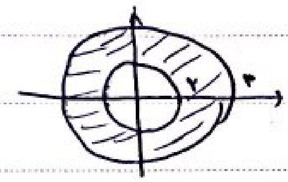
Subject
Date

$x_1[n] = 2^n u[n] \longrightarrow X_1(z) = \frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$; $Roc = |z|>2$

$x_2[n] = 3^{n+1} u[-n-1] \longrightarrow X_2(z) = -3\frac{z}{z-3} = -3\frac{1}{1-3z^{-1}}$;

$Roc = |z|<3$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow \frac{z}{z-2} - \frac{3z}{z-3} = \frac{-2z^2+3z}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z(2z-3)}{(z-2)(z-3)}$$



$Roc = 2<|z|<3$

two sided بین دو قطب متوالی

finite duration $\delta[n]$

ویژگی های ناحیه همگرایی

① Roc تبدیل z در صفحه مختلط z حلقه هایی (rings) به مرکز مبدأ مختصات می باشد

② قطب های تبدیل z در ناحیه همگرایی قرار نمی گیرند و ناحیه همگرایی یک ناحیه متصل به هم است (connected).

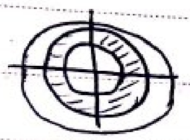
③ اگر $x[n]$ سمت راستی باشد ناحیه همگرایی به صورت $|z|>r_0$ می باشد که r_0 بزرگترین قطب $X(z)$ است.

Subject
Date

④ اگر $x[n]$ سمت چپ باشد ناحیه همگرایی به صورت $|z|<r_0$ می‌باشد که r_0 کوچکترین

قطب $X(z)$ است.

⑤ اگر $x[n]$ دو طرفه باشد ناحیه همگرایی به صورت $r_1 < |z| < |r_2|$ می‌باشد



(یعنی مابین دو قطب متوالی)

⑥ اگر $x[n]$ با عرض محدود (finite duration) باشد آنگاه ناحیه همگرایی شامل

تمام صفحه z (غیر از احتمالاً $z=0$ یا $z=\infty$)

$$x[n] = \begin{cases} n & \text{نامتناهی} \quad N_1 < n < N_2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \longrightarrow X(z) = \sum_{N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad ; \quad X(z) = 1 + z^{-1}$$

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n+1] \quad ; \quad X(z) = 1 + z$$