



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۱ - بهار ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری دوم

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران، آقایان کوچک زاده و یداللهی مطرح کنید.

@akmg166 , @Yadollahi123

## ۱ حالت‌های متفاوت دستگاه معادلات (۵ نمره)

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ x + 7y - 6z = 6 \\ 3y + qz = t \end{cases}$$

۱. به ازای چه مقدار  $q$  دستگاه معادلات تکین است؟

۲. به ازای کدام مقدار  $t$  دستگاه معادلات بالا بیشمار جواب دارد؟

۳. یک جواب به ازای مقدار  $z = 1$  بیابید.

## ۲ وارون ماتریس (۲۰ نمره)

۱. وارون دو ماتریس زیر را با استفاده از روش حذفی گاوس - جردن بیابید.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 9 \\ c & b & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲. به ازای هر سه مقدار غیر صفر برای  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  وارون ماتریس  $D$  را بیابید.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

۳. ماتریس  $A = LDU$  را در نظر بگیرید. باتوجه به وارون ماتریس‌هایی که در قسمت‌های قبل یافته‌اید وارون این ماتریس را محاسبه کنید.

**۳ روش حذف گاوس به صورت ستونی (۱۵ نمره)**

فرض کنید می‌خواهیم الگوریتم حذف گاوس را به جای سطرهای ماتریس روی ستون‌های ماتریس اجرا کنیم.  
۱. الگوریتم حذف گاوس (به روش ستونی) را روی ماتریس زیر پیاده کنید. تمامی مراحل کار را نمایش دهید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۲. مراحل الگوریتم انجام شده در بالا را به صورت ماتریسی بیان کنید.

**۴ حل دستگاه معادلات (۱۰ نمره)**

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ -4x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

۱. به ازای چه مقداری از  $\lambda$  در الگوریتم حذف گاوس، نیاز به جابه جایی سطر دوم و سطر سوم است؟ به ازای مقدار به دست آمده، دستگاه را حل کنید.

۲. به ازای چه مقداری از  $\lambda$  ماتریس حاصل، تکین است؟

**۵ تجزیه LU و حل دستگاه معادلات (۲۰ نمره)**

ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 6 & 20 & 20 \\ 12 & 42 & 49 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید و موارد زیر را محاسبه کنید:

۱. ماتریس‌های مقدماتی لازم برای تبدیل  $A$  به فرم بالامثلی را بیابید و با استفاده از آنها تجزیه LU ماتریس  $A$  را محاسبه کنید.

۲. تجزیه LDU معادل را نیز به دست آورده و با استفاده از آن مثبت معین بودن ماتریس  $A$  را بررسی نمایید.

۳. با استفاده از تجزیه LU محاسبه شده در قسمت ۱، دستگاه معادلات  $Ax = b$  را برای  $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$  حل نمایید.

۴. در صورتیکه بخواهیم دستگاه‌هایی به فرم  $Ax = b_k$  را برای  $b_k$  های مختلف، به صورت مکرر حل کنیم، از بین روشهای حذف گاوسی و تجزیه LU کدام روش را انتخاب میکنید؟ چرا؟

**۶ تجزیه LU و تعداد پاشنه‌ها (۲۰ نمره)**

۱. (آ) ماتریس‌های  $L$  و  $U$  را برای ماتریس متقارن  $A$  محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(ب) چهار شرط برای  $a, b, c, d$  بیابید به طوری که  $A = LU$  چهار پاشنه داشته باشد.

۲. (آ) ماتریس  $L$  ماتریس نامتقارن زیر با ماتریس قسمت قبل یکسان است. ماتریس  $U$  آن را بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(ب) چهار شرط برای  $a, b, c, d, r, s, t$  بیابید به طوری که  $A = LU$  چهار پاشنه داشته باشد.

## ۷ پاسخ دستگاه معادلات (۱۰ نمره)

دستگاه معادلات زیر از ۵۱۲ معادله خطی و ۵۱۲ متغیر  $x_1, x_2, \dots, x_{512}$  تشکیل شده است.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \dots + x_{511} + x_{512} = 513 \\ x_1 + x_3 + \dots + x_{511} + x_{512} = 514 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{510} + x_{512} = 1023 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{510} + x_{511} = 1024 \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب یکتا دارد؟ چرا؟