



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۱ - بهار ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری سوم

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران، تینا حلیمی و کیمیا رمضان مطرح کنید.

@TinaHalimi , @kim_ramezan

۱ تغییر بردار به پایه‌های مختلف (۱۵ نمره)

فرض کنید بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ در فضای برداری \mathbb{R}^3 باشد. دو پایه متفاوت $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ و $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ را در فضای \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید.

۱. بردار \mathbf{v} را به صورت زیر در پایه B بیان کنید:

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{b}_1 + a_2 \mathbf{b}_2 + a_3 \mathbf{b}_3$$

که در آن:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲. بردار \mathbf{v} را به صورت زیر در پایه C بیان کنید:

$$\mathbf{v} = b_1 \mathbf{c}_1 + b_2 \mathbf{c}_2 + b_3 \mathbf{c}_3$$

که در آن:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳. ماتریس تغییر پایه P را به گونه‌ای بیابید که $\mathbf{v} = P\mathbf{w}$ که \mathbf{w} نمایش بردار \mathbf{v} در پایه C است.

۴. اگر P^{-1} موجود باشد، P^{-1} را بیابید و اثرگذاری را بررسی کنید که $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{w}$ باشد.

۲ فضای برداری (۱۰ نمره)

(آ) زیر مجموعه‌ای از فضای \mathbb{R}^2 بسازید که روی جمع و تفریق برداری بسته باشد ولی روی ضرب اسکالر بسته نباشد.

(ب) زیر مجموعه‌ای از فضای \mathbb{R}^2 بسازید که روی ضرب اسکالر بسته باشد ولی روی جمع و تفریق بسته نباشد.

۳ خواص فضای برداری (۱۵ نمره)

فضای برداری زیر را در نظر بگیرید و خواص گفته شده را برای آن اثبات کنید:

$$\text{Set: } C = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

$$\text{جمع برداری: } (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$$

$$\text{ضرب اسکالر: } \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1)$$

$$\text{Zero vector is: } 0 = (-1, -1) \quad (\bar{1})$$

$$\text{(ب) } \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \text{بردار } u, v \text{ و عدد اسکالر هستند.}$$

۴ چهار زیر فضای اساسی (۱۵ نمره)

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

۱. چهار زیر فضای اساسی آن را به دست آورید.

۲. رتبه ماتریس و ابعاد چهار زیر فضای اساسی آن را بدست آورید.

۳. برای هر چهار زیر فضای اساسی ماتریس، یک پایه مناسب ارائه دهید.

۴. با بررسی تعامد پایه‌ها، نشان دهید که فضای سطری بر فضای پوچی و فضای ستونی بر فضای پوچی چپ عمود هستند.

۵ ابعاد زیر فضاها اساسی (۱۵ نمره)

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $\dim(N(A)) + \text{rank}(A) = n$.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید $N(A) \perp C(A^T)$ و سپس از گزاره تساوی رتبه ستونی و سطری یک ماتریس استفاده کنید.

۶ پاسخ کامل دستگاه معادلات غیر مربعی (۲۰ نمره)

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۱. پاسخ ویژه (پایه‌ای برای فضای پوچی) را برای این ماتریس به دست آورید.

۲. اگر یک ستون تمام صفر بین ستون اول و دوم ماتریس A اضافه کنیم، پاسخ چه تغییری می‌کند؟

۳. اگر یک سطر تمام صفر بین سطر اول و دوم ماتریس A اضافه کنیم، پاسخ چه تغییری می‌کند؟

۴. پایه و ابعاد فضای ستونی ماتریس A را به دست آورید.

$$b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اگر } Ax = b \text{ معادله } \alpha \text{ مقادیر } \alpha \text{ جواب دارد؟}$$

۶. برای مقدار α به دست آمده در قسمت قبل، جواب کامل معادله $Ax = b$ را به دست آورید.

۷. از آنجایی که $N(A^T) \perp C(A)$ ، معادله $Ax = b$ زمانی جواب دارد که b عمود بر پایه $N(A^T)$ باشد. پایه فضای پوچی چپ A را به دست آورده و نشان دهید b که در بخش‌های قبل محاسبه کردید بر آن عمود است.

۷ تعداد جواب دستگاه معادلات (۱۰ نمره)

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را با رnk r در نظر بگیرید. همه رابطه‌هایی که بین r, m, n برقرار است را برای هر یک از حالت‌های زیر در دستگاه معادلات $Ax = b$ مشخص کنید.

۱. معادله برای بعضی b ها جواب ندارد.
۲. بینهایت جواب برای هر b دارد.
۳. دقیقاً یک جواب برای بعضی b ها دارد و برای بقیه b ها جواب ندارد.
۴. دقیقاً یک جواب برای هر b دارد.