



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۱ - بهار ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری اول

ابهامات و مشکلات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران طراح، آقایان شه‌پرست و افصحی مطرح کنید.

@Hmnafs ، @Pourya_Shahparast

۱ عملگرهای ماتریسی (۲۵ نمره)

به ازای بردارهای $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. نرم‌های یک، دو و بی‌نهایت بردار \vec{v} را به دست آورید و برقراری نابرابری بین نرم‌ها را بررسی کنید.
۲. ضرب داخلی بین دو بردار را بدست آورید و برقراری نابرابری مثلث و کوشی-شوارتز را بررسی کنید.
۳. دترمینان، اثر و معکوس ماتریس A را بدست آورید.
۴. حاصل ضرب ماتریسی Bu را به دو روش بدست آورید.
۵. حاصل ضرب ماتریسی AB را به چهار روش بدست آورید.
۶. اثر ماتریس BA را بدست آورید.

۷. دترمینان ماتریس بلوکی $C = \begin{bmatrix} (A+B)^2 & B^3 \\ 0_{3 \times 3} & A^2 B \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

۲ ماتریس‌های خاص (۲۰ نمره)

به ازای ماتریس یکین $Q_{n \times n}$ ، ماتریس هرمیتی $A_{n \times n}$ و ماتریس‌های متقارن $B_{n \times n}$ و $C_{n \times n}$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. اگر ستون i ام Q را با q_i نشان دهیم ثابت کنید:

$$q_i^H q_j = \delta_{ij} \quad , \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

به عبارتی ستون‌های ماتریس یکین متعامد یک‌ه هستند. راجع به سطرها چه می‌توان گفت؟ برای ادعاهای خود دلیل بیاورید.

۲. ثابت کنید این ماتریس طول را حفظ می‌کند. یعنی: $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

۳. نشان دهید ماتریس $P = q_i q_i^H$ خودتوان و منفرد است.

۴. دترمینان A حقیقی است.

۵. اگر $A^2 = I$ باشد، آیا می‌توان گفت $A = \pm I$ ؟

۶. مشخص کنید هر کدام از موارد زیر متقارن هستند یا نه:

(a) $B^2 - C^2$

(b) $(B + C)(B - C)$

(c) ABA

(d) $ABAB$

۳ ماتریس بلوکی (۱۵ نمره)

ماتریس بلوکی $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، که در آن A و B غیرمنفرد هستند.

۱. معکوس ماتریس X را بدست آورید.

۲. به ازای $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ معکوس ماتریس را بدست آورید.

۴ نرم ماتریس (۲۰ نمره)

الف) به ازای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ نرم یک، دو و بی‌نهایت را بدست آورید.

ب) ثابت کنید: $\|A\|_F^2 = \text{tr}(AA^T)$

۵ جبر ماتریسی (۲۰ نمره)

الف) ماتریس‌های A و B ای را پیدا کنید که خواص زیر را داشته باشند:

۱. $AB \neq BA$

۲. $B^2 = 0$, $b_{ij} \neq 0$

۳. $A^2 = -I$

ب) نشان دهید برای ماتریس‌های دو در دو هیچ A و B ای پیدا نمی‌شوند که $AB - BA = I$