



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۱ - بهار ۱۴۰۲-۰۳

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری چهارم

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می‌توانید با دستیاران طراح، آقایان سلطانی و زینتی مطرح کنید.

@danialznt , @Ali_Soltani_۲۶

۱ نگاشت و تعامد (۴۰ نمره)

- (الف) نگاشت بردار $v = (6, 3, 3)$ را به صفحه $x - y - 2z = 0$ بیابید.
- (ب) ماتریس نگاشت P به صفحه $x - y - 2z = 0$ را بیابید و سپس ثابت کنید $P^2 = P$.
- (پ) ماتریس $I - P$ ، ماتریس نگاشت به چه فضایی است؟
- (ت) بردار $w = (1, -5, 3)$ را در نظر بگیرید. توضیح دهید که عبارت $Pw = w$ به چه علت برقرار است. (ماتریس P همان ماتریس نگاشت قسمت ب است)
- (ث) ماتریس A که یک ماتریس $m \times n$ است را در نظر بگیرید. فرض کنید ستون‌های ماتریس A مستقل خطی باشند. P ماتریس نگاشت به فضای ستونی ماتریس A می‌باشد. ماتریس P را بدست آورید و با استفاده از آن ماتریس نگاشت به فضای پوچی چپ را بیابید.
- (ج) فرض کنید که ماتریس‌های P و Q دو ماتریس نگاشت هستند. ثابت کنید که PQ ماتریس نگاشت است اگر و فقط اگر $QP = PQ$.
- (چ) می‌خواهیم ماتریس نگاشت به صفحه $4z - 2y + x = 0$ را بدست آوریم. ابتدا یک بردار عمود بر صفحه مانند e را بدست آورید. سپس ماتریس نگاشت به بردار e را محاسبه کنید. در نهایت ماتریس نگاشت به صفحه را بدست آورید.

۲ تجزیه QR و گرام-اشمیت (۲۵ نمره)

(الف) تجزیه QR ماتریس A را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

- (ب) با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت پایه‌های متعامد فضای \mathbb{R}^4 ، که شامل بردار $q_1 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ نیز می‌شوند را بیابید.

- (پ) با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت، فاصله نقطه $a = (0, 1, 1, 0)$ تا صفحه‌ای که با دو بردار $v_1 = (1, 1, -1, -1)$ و $v_2 = (0, 0, 1, 2)$ موازی بوده و از نقطه $b = (1, 0, 1, 0)$ می‌گذرد را بدست آورید.

۳ حداقل مربعات (۲۰ نمره)

الف) اگر \hat{x} پاسخ حداقل مربعات $Ax = b$ و \hat{y} پاسخ حداقل مربعات $Ay = c$ باشد. در صورتی که \hat{z} پاسخ حداقل مربعات $Az = b + c$ باشد، \hat{z} را بیابید.

ب) معادله بهترین منحنی درجه ۳ در صفحه xy که نقاط زیر را در این صفحه تقریب بزند، بیابید.

$$(0, 1), (1, 0), (2, 5), (3, -1)$$

پ) دو نقطه $a = (x+1, 2x-3, -x+2)$ و $b = (2y, 3y-4, 5y+1)$ روی دو خط که هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکنند قرار دارند. با استفاده از حداقل مربعات x, y را به نحوی تعیین کنید که این دو نقطه، مینیمم فاصله را داشته باشند. (توجه کنید که در این مسئله، استفاده از مشتق مجاز نیست و باید مسئله را به یک مسئله حداقل مربعات به فرم $\|Ax - b\|^2$ تبدیل کرده و آن را حل کنید.)

۴ دوباره حداقل مربعات! (۱۵ نمره)

مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2 + \delta \|x\|_2^2$$

الف) ثابت کنید مسئله فوق معادل مسئله زیر است.

$$\text{minimize } \left\| \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\delta} I \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

ب) اکنون جواب مسئله را بدست آورید.