باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۱ - بهار ۰۳-۱۴۰۲

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری ششم

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران، آقایان ولائی و دهقان مطرح کنید.

@ amirrezavelae , @ armin_dh

---

۱ چند رابطه پر کاربرد (۱۵ نمره)

روابط زیر را ثابت کنید:

آ) $\sigma_{max}(A)\sigma_{max}(A^{-1}) \geq 1$

ب) $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

ج) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{rank(A)}\|A\|_2$

د) $\sigma_{max}(AB) \leq \sigma_{max}(A)\sigma_{max}(B)$ when $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

ه) $\sigma_{max}(A+B) \leq \sigma_{max}(A) + \sigma_{max}(B)$ when $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

۲ تجریه QH (۱۰ نمره)

نشان دهید هر ماتریس وارون پذیر دلخواه A را میتوان به صورت QH نوشت که در آن Q یک ماتریس orthogonal و H یک ماتریس PD و متقارن است.

راهنمایی: از تجزیه SVD استفاده کنید.

۳ ماتریس با ستون‌های متعامد (۲۰ نمره)

فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ یک ماتریس 4×4 با ستون های متعامد است، طوری که $\|a_1\| = 2$، $\|a_2\| = 1$، $\|a_3\| = 3$ و $\|a_4\| = 2$ باشد.

۱.۳

یک پاسخ عمومی و کامل برای معادله $Ax = b$.

راهنمایی: از تجزیه SVD استفاده کنید.

۲.۳

ماتریس A را به صورت جمع چهار ماتریس با رنک یک بنویسید.

۳.۳

اگر داشته باشیم $A\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}=B$ ، حاصل $\forall x\neq 0 \quad \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$ را بیابید.

۴.۳

تجزیه مقدار تکین ماتریس A را بیابید.

۴ شبه معکوس (۱۵ نمره)

ویژگی های $A^\dagger$ را بررسی کنید :

۱. برای هر y در $\mathbb{R}^m$ ، $AA^\dagger y$ یک $orthogonal\ projection$ از y در $Col(A)$ است .

۲. برای هر x در $\mathbb{R}^n$ ، $A^\dagger Ax$ یک $orthogonal\ projection$ از x در $Row(A)$ است .

۳. $AA^\dagger A = A$

۴. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$

۵ تجزیه به مقادیر تکین (۱۵ نمره)

با تعریف تجزیه به مقادیر تکین به صورت زیر ، موارد داده شده را اثبات کنید :

$$A^{m\times n} = U^{m\times m} \quad \Sigma^{m\times n} \quad V^{T\ n\times n}$$

۱. $Rank(A) = Rank(\Sigma) = r$

۲. فضای ستونی A توسط r ستون اول U اسپن می‌شود .

۳. فضای پوچی A توسط $n-r$ ستون آخر V اسپن می‌شود .

۴. فضای سطری A توسط r ستون اول V اسپن می‌شود .

۵. فضای پوچی A^T توسط $m-r$ ستون آخر U اسپن می‌شود .

۶ کاربردی از تجزیه به مقادیر تکین (۱۰ نمره)

با استفاده از تجزیه به مقادیر تکین به پرسش های زیر پاسخ دهید :

۱. ماتریس مثبت نیمه معین $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را می‌توان به صورت $A = BDB^T$ نوشت که $D = diag(d1, ..., d_n)$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ است . ماتریس های B و D چه شرط هایی باید داشته باشند ؟

۲. تجزیه Polar یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به صورت $A = UP$ تعریف می‌شود که $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس متعامد بوده و $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس مثبت نیمه معین است . نشان دهید برای هر ماتریس حقیقی مربعی حتما تجزیه Polar وجود دارد .

۷ حداقل مربعات (۵ نمره)

ثابت کنید اگر A ماتریس رتبه کامل باشد ، جواب مسئله

$$min_x \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$$

برابر $x = V\Sigma^{-1}U^Tb$ است . $(A = U\Sigma V^T)$

۸ بهترین تقریب رتبه $\mathbf{k}$ (۱۰ نمره)

ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ با رتبه r را در نظر بگیرید :

۱. نشان دهید که نرم فروبینیوس بر حسب مقادیر تکین به صورت $||A||_F^2 = tr(A^TA) = \Sigma_{i=1}^r \sigma_i^2$ بدست می‌اید .

۲. بهترین تقریب رتبه k از این ماتریس با معیار نرم فروبینیوس را با A_k نمایش می‌دهیم. یعنی به ازای هر ماتریس دلخواه B با رتبه k داریم : $||A - A_k||_F \leq ||A - B||_F$. نشان دهید که سطر ها و (و ستون های) A_k به ترتیب برابر نگاشت سطر ها (و ستون های) متناظر A بر زیر فضای پوشش داده شده توسط بردار های تکین $v_1, ..., v_k$ (و $u_1, ..., u_k$) هستند .