باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

روش‌های ریاضی در مهندسی - ۲۵۸۷۲ گروه ۱ - بهار ۰۳-۱۴۰۲

استاد درس: دکتر امیری

تمرین سری پنجم

ابهامات و سوالات خود در مورد این تمرین را می توانید با دستیاران، آقای امانی و آقای کزازی مطرح کنید.

@Ali_reza_۳۶۱　,　@m۰hamadkaz

۱　قطری شدنی بودن ماتریس ها (۱۰ نمره)

ماتریس های $A, B \in M_n$ را که $AB = BA$ برقرار است در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید اگر ماتریس A، n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، آنگاه هر کدام از ماتریس های A, B, AB قطری شدنی هستند.

ب) نشان دهید اگر A, B قطری شدنی باشند، ماتریس معکوس پذیر X وجود خواهد داشت به گونه ای که هر دو ماتریس $D_1 = X^{-1}AX$ و $D_2 = X^{-1}BX$ قطری باشند. در این حالت A و B را قطری شدنی همزمان می نامیم. به عبارتی می توانیم هر دو ماتریس را به صورت همزمان و در یک پایه مشترک قطری کنیم. آیا عکس این رابطه نیز برقرار است؟(یعنی اگر A و B همزمان قطری شدنی باشند، می توان گفت $AB = BA$؟)

۲　قطری سازی (۱۵ نمره)

الف) با استفاده از قطری سازی ماتریس دوران $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ نشان دهید که:

$A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$ که خود ماتریس دوران است. این رابطه را تعبیر نمایید.

ب)با استفاده از قطری سازی ماتریس نگاشت، نشان دهید که ماتریس نگاشت از یک فضای n- بعدی به یک فضای r- بعدی به صورت $P = B \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{bmatrix} B^{-1}$ قابل تجزیه است. نتیجه بگیرید که ماتریس نگاشت به فضای مکمل متعامد آن به صورت $Q = I - P = B \begin{bmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} B^{-1}$ تجزیه می شود. با استفاده از تجزیه فوق نشان دهید که:

$$rank(P) = trace(P) = r$$

پ)ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قطری سازی ماتریس A^{100} را محاسبه نمایید. در مورد $\lim_{k\to\infty} A^k$ چه می توان گفت؟

۳ ماتریس بلوکی (۱۰ نمره)

اگر $A = X\Lambda X^{-1}$ آنگاه ماتریس بلوکی $B = \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ را قطری سازی کرده و مقادیر ویژه و بردار های ویژه آن را بنویسید.

۴ مقدار ویژه و بردار ویژه(۱۰ نمره)

الف) ماتریس متقارن $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید.نشان دهید λ یک مقدار ویژه ماتریس AB است اگر و تنها اگر یک مقدار ویژه ماتریس BA باشد.(توجه: حالت های مختلف $\lambda = 0$ و $\lambda \neq 0$ را به صورت مجزا تحلیل کنید.)

ب) ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید.می دانیم جمع درایه های هر ستون این ماتریس برابر با عدد حقیقی c میشود. نشان دهید c یک مقدار ویژه ماتریس A می باشد.

۵ ماتریس های مثبت (نیمه) معین(۱۵ نمره)

ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را مثبت (نیمه) معین می گویند، هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم : $x^tAx \geq 0$

الف) نشان دهید یک شرط لازم و کافی برای مثبت (نیمه) معین بودن این است که تمامی مقادیر ویژه A نامنفی باشد. (راهنمایی : هر ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه ی حقیقی است و بردار های ویژه ی آن پایه ای برای $\mathbb{R}^n$ هستند.)

ب) ماتریس دلخواه $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ مفروض است. نشان دهید ماتریسی A^TA مثبت (نیمه) معین است.

ج) به ازای چه مقادیری از s ماتریس A یک ماتریس مثبت معین است؟

$$A = \begin{pmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{pmatrix}$$

۶ درست یا غلط(۱۵ نمره)

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. برای جملات درست دلیل و برای جملات اشتباه مثال نقض بیاورید.

الف) یک ماتریس با مقادیر ویژه حقیقی و بردار ویژه های حقیقی، یک ماتریس متقارن است.

ب) یک ماتریس با مقادیر ویژه حقیقی و بردار ویژه های متعامد، یک ماتریس متقارن است.

ج) معکوس یک ماتریس متقارن نیز یک ماتریس متقارن است.

د) ماتریس بردارهای ویژه ی یک ماتریس متقارن، خود نیز یک ماتریس متقارن است.

ه) اگر A یک ماتریس متقارن باشد، آنگاه e^{iA} نیز یک ماتریس متقارن است.

و) اگر A یک ماتریس هرمیتی(Hermitian) باشد، آنگاه e^{iA} نیز یک ماتریس هرمیتی(Hermitian) است.

۷ ماتریس متقارن (۱۰ نمره)

بردار $x \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید.
الف) رنک ماتریس xx^T چند است؟
ب)آیا این ماتریس متقارن است؟
پ)ثابت کنید که خود بردار x یک بردار ویژه برای این ماتریس می باشد و مقدار ویژه متناظر با آن را بدست آورید.
ت) مقادیر ویژه این ماتریس را بدست آورید.
ث) اگر بردار x به صورت : $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ باشد. آنگاه تمام بردار های ویژه این ماتریس را بدست آورید.

۸ یک نامساوی (۱۵ نمره)

می خواهیم یک نامساوی نسبتا پیچیده را اثبات کنیم. برای این کار دو لم را اثبات می کنیم و سپس به سراغ قضیه اصلی می رویم.
لم ۱: ماتریس A یک ماتریس متقارن است و ماتریس B از حذف سطر و ستون آخر ماتریس A بدست می آید. ثابت کنید داریم:

$$\lambda_{min}(B) \geq \lambda_{min}(A)$$

لم ۲: ماتریس بلوکی متقارن A را که به صورت زیر تعریف می شود در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^T & D \end{bmatrix}$$

ثابت کنید داریم:

$$\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A) \leq \lambda_{min}(B) + \lambda_{max}(B)$$

راهنمایی: از این قضیه استفاده کنید که برای هر بردار نرمال مانند x داریم:

$$x^T A x \geq \lambda_{min}(A)$$

قضیه: ثابت کنید اگر ماتریس بلوکی متقارن A که از k^2 ماتریس کوچک تر به صورت زیر تشکیل شده است را در نظر بگیریم:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k} \\ A_{1,2}^T & A_{2,2} & \dots & A_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,k}^T & A_{2,k}^T & \dots & A_{k,k} \end{bmatrix}$$

برای $k \geq 2$ داریم:

$$(k-1)\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_{max}(A_{i,i})$$