Ali Nikkhah 99102445 HW2 MMIE

Date: Sub: 1.1

1.(5)

$$\begin{cases} x+4y-2z=-1 \\ x+7y-6z=6 \\ 3y+9z=t \end{cases}$$

1. فرض می‌کنیم که تکین در این سوال به معنای singular یا در عبارت $A\underline{x}=\underline{b}$ به معنای تکین

بودن ماتریس A می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} x_1+4x_2-2x_3 \\ x_1+7x_2-6x_3 \\ 3x_2+9x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=0 \\ x_1+7x_2-6x_3=0 \\ 3x_2+9x_3=0 \longrightarrow (1)\ x_3=-\frac{3}{9}x_2 \end{cases}$$

(2) $3x_2-4x_3=0 \longrightarrow \boxed{x_3=\frac{3}{4}x_2}$ $\qquad \boxed{9=-4}$

$x_1+4x_2-2\times\frac{3}{4}x_2=0 \longrightarrow x_1+4x_2-\frac{3}{2}x_2=0$

$x_1+\frac{5}{2}x_2=0 \longrightarrow x_1=-\frac{5}{2}x_2$

$-\frac{5}{2}x_2+7x_2-6\times\frac{3}{4}x_2=0$

1.1

Date:　　　　Sub:

در معادلات صفحه قبل اثبات کردیم ، شرط $A\underline{x} = 0$ مستقیماً نتیجه می‌دهد که $\underline{x}=0$ ، در نتیجه به ازای هیچ بردار x این رابطه برقرار نبوده و ماتریس A تکین نیست . با این تعریف البته .

تعریف دوم : دستگاه معادلات همگن تکین است که $|A|=0$: در این صورت داریم

$$\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ x+7y-6z=6 \\ \quad 3y+qz=t \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & q \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A) = (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 12 + 3q = 0 \Rightarrow \quad q = -4$$

پس طبق این تعریف ثانوی ، به ازای $q=-4$ دستگاه معادله تکین است . از نظر هندسی ابرصفحه های ساخته شده در این معادلات صداکثر دارای یک جفت موازی هستند و از نظر جبر خطی دو معادله ضریب هم هستند که باعث می‌شود دترمینان صفر باشد

Date: Sub:

2. c- به ازای کدام مقدار t دستگاه معادله بی‌شمار جواب دارد؟

با اجرای این بخش ابتدا $|A|=0$ را مقایسه می‌کنیم تا دستگاه معادلات تکین باشه.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 9 = -4$$

برای بی‌شماری جواب دستگاه معادلات، تعداد معادلات باید کمتر از مجهولات باشد یا به تعبیری معادلات موازی داشته باشیم.

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \longrightarrow P=1 \\ x + 7y - 6z = 6 \xrightarrow{m=1} \text{diagonalization} \\ 3y - 4z = t \rightarrow m=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3y - 4z = 5 \rightarrow P=3 \\ 3y - 4z = t \longrightarrow m=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3y - 4z = 5 \\ 0 = t - 5 \longleftrightarrow \text{for } t=5 \text{ we have } 0=0 \end{cases}$$

or trivial equation, meaning:

$$\forall z, \ (0 z_a = 0) \ ; \ 3y_0 - 4z_0 = 5 \ ; \ x_0 + 4y_0 - 2z_0 = 1$$

$\boxed{\text{به ازای } t=5 \text{ بی‌نهایت سه‌تایی } x_i, y_i, z_i \text{ پیدا می‌شود که در معادله صدق کند}}$

Elipon

1.3

3. یک جواب به ازای $z=1$ بیابید!

$$\begin{cases} x+4y-2z=1 \rightarrow P=1 \\ x+7y-6z=6 \rightarrow m=1 \\ 3y+4z=t \rightarrow m=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ 3y-4z=5 \rightarrow P=3 \\ 3y-4z=5 \rightarrow m=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ 3y-4z=5 \\ 0=0 \longrightarrow z=1 \end{cases}$$

$3y-4=5 \rightarrow y=3$

$x+12-2=1 \rightarrow x=-9$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یکی از جواب های معادلات، با مشخص کردن $z=1$ به صورت روبرو است

Date: Sub: 2.1

2.(20)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{bmatrix}$$

×c ×a

① $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & b & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to P=1 \\ \to m=a \\ \to m=c \end{array}$

×b

② $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & -c & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to P=1 \\ \to m=b \end{array}$

$I_{3\times3}$ L^{-1}

③ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +ab-c & -b & 1 \end{array}\right]$

$[A, I] \longrightarrow [I, A^{-1}]$

$Ax = b$

$[A, b] \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} [I, A^{-1}b]$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \hat{a} & \hat{c} \\ 0 & 1 & \hat{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{a} & \hat{a}\hat{b}-\hat{c} \\ 0 & 1 & -\hat{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \hat{a} & \hat{c} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hat{b} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to P=1 \\ \to P=1 \\ \to P=1 \end{array}$

② $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \hat{a} & 0 & 1 & 0 & -\hat{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\hat{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$I_{3\times3}$

③ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\hat{a} & \hat{a}\hat{b}-\hat{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\hat{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \qquad d_1, d_2, d_3 \neq 0$$

Approach I: Augmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/d_3 \end{array}\right] \qquad \boxed{D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{bmatrix}}$$

Approach II: adjugate matrix

$$\det(D) = d_1 d_2 d_3$$

$$D^{-1} = \frac{\overbrace{\begin{bmatrix} d_2 d_3 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 d_2 \end{bmatrix}}^{adj(A)}}{\det(A)} = \boxed{\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{bmatrix}}$$

Date: Sub: 2.3

$A = LDU$

calculate A^{-1} using L^{-1}, D^{-1} and U^{-1}

شرط تجزیه LDU:

$$A = \underset{n\times n}{L}\ \underset{n\times n}{D}\ \underset{n\times n}{U}$$

L: پایین مثلثی ✓ — D: قطری ✓ — U: بالا مثلثی

$$|A| = |L|\,|D|\,|U| \longrightarrow$$ شرط معکوس پذیری نامنفرد بودن تمام پاشنه‌هاست

$$AA^{-1} = I \longrightarrow (LDU)(U^{-1}D^{-1}L^{-1}) =$$

$$= LD\,I\,D^{-1}L^{-1}$$

$$= L\,L^{-1}$$

$$= I_{n\times n}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{a} & \hat{a}\hat{b}-\hat{c} \\ 0 & 1 & -\hat{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & -\frac{\hat{a}}{d_2} & \frac{\hat{a}\hat{b}}{d_3} - \frac{\hat{c}}{d_3} \\ 0 & \frac{1}{d_2} & -\frac{\hat{b}}{d_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & \frac{-\hat{a}}{d_2} & \frac{\hat{a}\hat{b}-\hat{c}}{d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ ab-c \end{bmatrix} = \frac{1}{d_1} + \frac{a\hat{a}}{d_2} + \frac{(\hat{a}\hat{b}-\hat{c})(ab-c)}{d_3}$$

$$a_{12} = \frac{-\hat{a}}{d_2} + \frac{b\hat{c} - \hat{a}\hat{b}b}{d_3}$$

$$a_{13} = \frac{\hat{a}\hat{b}-\hat{c}}{d_3}$$

2.3

Date: Sub:

$$a_{21} = -\frac{a}{d_2} + \frac{\hat{b}c - ab\hat{b}}{d_3}$$

$$a_{22} = \frac{1}{d_2} + \frac{b\hat{b}}{d_3}$$

$$a_{31} = \frac{ab-c}{d_3}$$

$$a_{32} = \frac{-b}{d_3}$$

$$a_{33} = \frac{1}{d_3}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} + \frac{a\hat{a}}{d_2} - \frac{(ab-c)(\hat{a}\hat{b}-\hat{c})}{d_3}, & -\frac{a_2}{d_2} + \frac{b\hat{c} - ab\hat{b}}{d_3}, & -\frac{\hat{c}-\hat{a}\hat{b}}{d_3} \\ -\frac{a}{\hat{d}_2} - \frac{\hat{b}(ab-c)}{d_3}, & \frac{1}{d_2} + \frac{\hat{b}b}{d_3}, & -\frac{\hat{b}}{d_3} \\ \frac{ab-c}{d_3}, & -\frac{b}{d_3}, & \frac{1}{d_3} \end{bmatrix}$$

3.1

Date: Sub:

3 (15 pt)

column based elimination

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

می خواهیم ماتریس روبرو را به فرم بالا مثلثی تبدیل کنیم تا اینبار این عملیات را به صورت ستونی انجام دهیم.

$$① \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m=-1 & m=0 & P=3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow P=1 \\ \leftarrow m=2 \\ \leftarrow m=-1 \end{array}$$

$$② \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m=\frac{11}{3} & P=7 & \\ \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -3 & 2 \\ \frac{11}{3} & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\overset{27}{9\times 3} - 77 = 50$

231

$x - \frac{3}{77} \Rightarrow -3 \times -\frac{3}{77} - \frac{1}{3} = \frac{9}{77} - \frac{1}{3} = \frac{-50}{231}$

$$③ \quad \boxed{A = \begin{bmatrix} -\frac{50}{231} & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

ماتریس بالا مثلثی شده با ستون

البته نکته حائز به اهمیت این است که برای حذف گاوس می توان تنها از روش سطری یا ستونی استفاده کرد (استفاده همزمان از هر دوی آنها ممکن نیست

اگر عملیات را سطری انجام می دادیم:

→ ماتریس روبروی رسیدیم

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix}$$

Elipon

بیان ماتریسی عملیات کاهش ستونی :

ما در این عملیات ماتریس اولیه A را به A' تبدیل کردیم $A \longrightarrow A'$
که بالامثلثی است) . همچنین می‌دانیم هر عملیات سطری به صورت ضرب A در سمت چپ در ماتریس E_i و هر عملیات ستونی به صورت ضرب A در سمت راست در ماتریس E_i قابل نمایش است یعنی داریم:

$$A' = AE_1E_2E_3 \longrightarrow \boxed{A = A'E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1}}$$

حال می‌توان گفت :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \times 0 \quad \times \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 2\times\frac{1}{3} - 1 \\ 5\times\frac{1}{3} + 2 \\ 3\times\frac{1}{3} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -3 & 2 \\ \frac{11}{3} & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}} \; E_1$$

$$\times -\frac{3}{77}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{50}{231} & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -3 & 2 \\ \frac{11}{3} & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{77} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \; E_3$$

$\boxed{\text{ماتریس } E_2 \text{ برابر ماتریس همانی یا I است}}$

Date: Sub: 4.1

4 (10 pt)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ -4x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

1. for what value of lambda, it is needed to change (2nd, 3rd) row?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} P = 2 \\ m = 1 \\ m = -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times -\frac{1}{2} \\ \\ \times 2 \end{array} \quad \text{I}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right] \quad \text{II}$$

اگر در این معادله $0 = \lambda + \frac{1}{2}$ آنگاه نیاز به جابجایی داریم پس !

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$

$-\frac{5}{2} z = -\frac{1}{2} \rightarrow z = 5$

$y + 5z = 2 \rightarrow y = 2 - 10 = -8$

$2x - y + 3z = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(1 - 3z + y)$

$= \frac{1}{2}(1 - 15 - 8) = -11$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \lambda = -\frac{1}{2}}$$

2. for what value of λ the matrix is <u>singular</u>?

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ -4x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

-5 $\cancel{-1-4}$

$$2\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{+1}{\cancel{(-1)(-1)}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$2(\cancel{3}-\lambda) + (\cancel{-5}) + 3(\cancel{3}+4\lambda) = 0$$

$$6 - 5 + 9 - 2\lambda + 12\lambda = 0 \rightarrow 10\lambda = -10 \qquad \boxed{\lambda = -1}$$

درنتیجه ماتریس به ازای ۱- = λ تکین خواهد بود، دترمینان صفر نشان می‌دهد معکوس
ناپذیر نیست و بی‌نهایت یا صفر جواب خواهد داشت

Date: Sub:

5. (20pts)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 6 & 20 & 20 \\ 12 & 42 & 49 \end{bmatrix}$$

L U

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 20 & 20 \\ 12 & 42 & 49 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 42 & 49 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} P = 3 \\ m = 6 \\ m = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} -2 \\ -4 \end{array}$$

$R_2 = R_2 - 2R_1$

$R_3 = R_3 - 4R_1$

$R_3 = R_3 - \frac{9}{4} R_2$

↓ Gaussian Elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 & 13 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} P = 8 \\ m = 18 \end{array} \quad -9/4$$

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix}} \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}}$$

L_{3x3} U_{3x3}

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9/4 & 1 \end{bmatrix}$$

2\. $PD \Longleftrightarrow \forall P_i > 0 \quad (3, 8, 8.5) > 0$

درنتیجه ماتریس PD است زیرا تمامی پاشنه های آن مثبت هستند. روش دیگر ارزیابی مثبت معین بودن، به شرح زیر است که تمامی مقادیر ویژه آن مثبت هستند

$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow \lambda = 0.027, 3.18, 68.78$

5.3

Date: Sub:

$A = LDU^*$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 20 & 20 \\ 12 & 42 & 49 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$L = L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DU_0 = U \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}}$$

برای تعیین مثبت معین بودن ماتریس A، علامت pivot ها را بررسی می کنیم که 3، 8، 8.5 همگی مثبت هستند پس ماتریس PD است.

Date: Sub:

$Ax = \underline{b}$ where $A = LU$

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} \rightarrow$

$Ax = \underline{b}$

$\underset{3\times3}{LU}\underset{3\times1}{x} = \underline{b}$

گام اول :

$L\underline{c} = \underline{b}$

$L \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

$L \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{2}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

گام دوم

$\boxed{L\underline{c} = \underline{b} \rightarrow}$

$c_1 = 9$

$2c_1 + c_2 = 6 \qquad c_2 = -12$

$4c_1 + \frac{2}{4}c_2 + c_3 = -6$

$36 + \cancel{\frac{2}{4} \times -12} + c_3 = -6$

-18

$18 \qquad c_3 = -24$

$\boxed{\underline{c} = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ -24 \end{bmatrix}}$

$\boxed{U\underline{x} = \underline{c}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ -24 \end{bmatrix}$

گام سوم

$x_3 = -24$

$x_2 + \frac{1}{4}x_3 = -12 \rightarrow x_2 = -12 - \cancel{\frac{1}{4} \times -24} = -6$ (6)

Elipon

$$\boxed{[x_1\ x_2\ x_3]^T = \begin{bmatrix} 93 \\ -6 \\ -24 \end{bmatrix}}$$

5.4

درصورتی که بخواهیم دستگاه های به فرم $Ax = \underline{b}_k$ را حل کنیم، از میان روش های حذفی گاوس و تجزیه LU، روش دوم را انتخاب می کنیم زیرا Ax به صورت مستقل پردازش و تجزیه می شود و ساده تر به جواب می رسیم:

$$A x = \underline{b}_k$$

$$A = LU$$

$$LUx = \underline{b}_k$$

$$\boxed{L\underline{c}} = \underline{b}_k \longrightarrow U\underline{x} = \underline{c} \longrightarrow \underline{x}$$

یکبار تعیین می گردد. محاسبه می شود

درحالی که در روش گاوس داریم:

روش گاوس:

$$A\underline{x} = b_k \longrightarrow [A, b_k] \longrightarrow [I, A^{-1}b_k]$$

$$A[x_1, \ldots, x_n] = [e_1\ e_2, \ldots, e_n] \qquad \underline{x} = A^{-1}b_k$$

$$Ax_i = e_i$$

برای هر b_k ها به طور مجزا محاسبه می شود.

$$[A, \underline{b}_k] \Rightarrow [A, e_1, e_2, \ldots, e_n]$$

Date: Sub:

6. (20pt)

1. LU decomposition of $A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}} \quad -1 \quad -1 \quad -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس نهایی } L} \underbrace{\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس نهایی } U}$$

2. برای اینکه A پشتدار باشیم (یا معکوس پذیر باشیم) داریم

$$a \neq 0 \;\&\; b \neq a \;\&\; c \neq b \;\&\; d \neq c \rightarrow \boxed{a \neq 0 \;\&\; a \neq b \neq c \neq d}$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow |U| \neq 0 \rightarrow (a) \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-c \end{vmatrix} \neq 0 \; \boxed{(a)(b-a)(c-b)(d-c)} \neq 0$$

که معادل همان شرط بالاست.

Elipon

Date: Sub:

6.2.A

$$B = LU \longrightarrow \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = LU$$

با فرض یکسان بودن ماتریس $L_{4\times4}$ با کیس قبل ادامه می‌دهیم؛

ماتریس U ما

$$\begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & 0 & c-s & t-s \\ 0 & 0 & 0 & d-t \end{bmatrix}}$$

می‌توان به صورت مستقیم و با استقرا حاصل را بدست آورد یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a \longrightarrow x = a$$

به همین شکل سطر اول بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b \longrightarrow r + x = b \longrightarrow x = b - r$$

و برای سطر بعدی هم به همین شکل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s-r \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = c \longrightarrow \cancel{r} + s - \cancel{r} + x = c \qquad x = c - s$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s-r \\ t-s \\ x \end{bmatrix} = d \longrightarrow \cancel{r} + \cancel{s} - \cancel{r} + t - \cancel{s} + x = d$$

$$x = d - t$$

Date: Sub:

6.2. B

$|A| \neq 0 \rightarrow |U| \neq 0$ مانند قسمت قبل داریم:

$$(a)(b-r)(c-s)(d-t) \neq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a \neq 0 & \& \; b \neq r \\ & c \neq s \\ & d \neq t \end{array}}$$

Date: Sub: 7.1

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_{512} = 513 \rightarrow E_1 \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_{512} = 514 \rightarrow E_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{511} = 1024 \rightarrow E_{512} \end{cases}$$

$$A x = \underline{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 513 \\ \vdots \\ 1024 \end{bmatrix}$$

if we write equations denoted as E_1 to E_{512} we have

$$\rightarrow E_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_{512} = 513$$

$$E_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=512} x_i = 512 + j$$

$$\sum_{j=1}^{512} E_j = \sum_{j=1}^{512} 512 + j = 512 \sum_{j=1}^{512} 1 + \sum_{j=1}^{512} j = 512^2 + \frac{512 \times 513}{2}$$

$$= 512\left(512 + \frac{513}{2}\right)$$

$$E_j = \sum_{i=1}^{512} x_i - x_j$$

$$= 512\left(\frac{1024 + 513}{2}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{512}\left(\sum_{i=1}^{512} x_i\right) - x_j = \sum_{j=1}^{512} - x_j + \sum_{j=1}^{512} \sum_{i=1}^{512} x_i \quad \boxed{511 \sum_{x_i=1}^{512} x_i = (256)(1537)}$$

Elipon

7.1

$$E = \sum_{i=1}^{512} x_i = \frac{256 \times 1537}{511} = c_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} E - E_1 &= x_1 = c_1 - 513 \\ E - E_2 &= x_2 = c_1 - 514 \\ E - E_3 &= x_3 = c_1 - 515 \\ &\vdots \\ E - E_{512} &= x_{512} = c_1 - 1024 \end{aligned}}$$

با انجام این عملیات مشاهده میکنیم که ماتریس A به یک ماتریس قطری تبدیل میشود که معکوس پذیر است :

$$A_{diag} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = A = I \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{512} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - 513 \\ c - 514 \\ c - 515 \\ \vdots \\ c - 1024 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Ax &= \hat{b} \\ x &= A^{-1}\hat{b} = \hat{b} \end{aligned}}$$

درنتیجه ما اثبات کردیم که ① دستگاه معادلات جواب یکتا دارد
② پاسخ دستگاه معادلات را بدست آوردیم