نیمسال دو ۹۷-۹۶

۲) کدام گزینه رابطه بازگشتی مسئله برج هانوی را نشان می دهد؟

۳)

۱. $T(n)=2^n-1$, $T(n)=2T(n-1)+1$
۲. $T(n)=2^{n-1}$, $T(n)=2T(n-1)+1$
۳. $T=\log n$, $T(n)=2(n)+1$
۴. $T=n+\log n$, $T(n)=2(n)+1$

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

هدف ما ارائه الگوریتمی است که کمترین توالی حرکت‌ها را برای انتقال دیسک‌ها به ما بدهد. مثلاً اگر n= ۲ باشد، توالی حرکت به صورت زیر است :

دیسک ۱ را به میله B منتقل می‌کنیم.

دیسک ۲ را به میله C منتقل می‌کنیم.

دیسک ۱ را به میله C منتقل می‌کنیم.

برای اینکه مسئله‌ای بتواند با روش بازگشتی حل شود باید یک ویژگی اساسی داشته باشد. مسئله اصلی قابل خرد شدن به زیر مسئله‌هایی از همان نوع مسئله اصلی باشد، به شرطی که اندازه زیر مسئله‌های ایجاد شده کمتر باشد. آنگاه می‌توان آن را به طور بازگشتی حل کرد. ویژگی در مورد مسئله برج هانوی صدق می‌کند. ایده اصلی این است که توجهمان را به جای حرکت بالاترین دیسک، روی پایین‌ترین دیسک میله متمرکز کرده، و مراحل زیر را طی می‌کنیم:

n-1 دیسک بالایی را با شرایط ذکر شده و به کمک میله C به میله B منتقل می‌کنیم. بزرگترین دیسک را از میله مبدأ به میله مقصد حرکت می‌دهیم. n-1 دیسک را که هم‌اکنون در میله B هستند با شرایط داده شده به میله مقصد انتقال می‌دهیم. می‌بینیم که توانستیم عملیات جابجا کردن n دیسک را به دو عملیات مشابه ولی با اندازه کمتر و یک عملیات ساده تقسیم کنیم. واضح است که جابجا کردن n-1 قرص راحتتر از جابجا نمودن n قرص است.

حال به مسئله مرتبه اجرایی مسئله می‌پردازیم:

فرض کنیم T(n) تعداد حرکت‌های لازم جهت انتقال n دیسک به مقصد باشد. بر اساس توضیحات فوق T(n-1) حرکت برای انتقال n-1 دیسک به میله کمکی، یک حرکت برای انتقال بزرگترین دیسک به میله مقصد، و باز T(n-1) حرکت برای انتقال n-1 دیسک موجود در میله کمکی به میله مقصد نیاز است. پس می‌توان نوشت :

$T(n)=2T(n-1)+1$

با حل این رابطه بازگشتی داریم :

$T(n)=2^n-1$

---

۱) تابع بازگشتی زیر را در نظر بگیرید (n اوانی از ۲ است) زمان اجرا فوق چیست؟

۲)

```
Int F (int n)
{
If (n<=return 1);
Else return (F+)
}
```

۱. O(log n)
۲. O(n)
۳. O(n log n)
۴. O(n) + 1

جواب: گزینه ۱ درست است.

---

۳) جواب رابطه بازگشتی کدام یک از گزینه های زیر است؟

۴)

۱. $\theta(n^2 \log n)$ ۲. $\theta(n \log n)$ ۳. $\theta(n)$ ۴. $\theta(n^2)$ $T(n)=9T(n/3)+n$

جواب: گزینه ۴ درست است.

---

۵) الگوریتم Quick sort یک رشته n تایی را در حالت متوسط با چه سرعتی مرتب می کند؟

۶)

۱. O(nlogn) ۲. O(n) ۳. $O(n^2)$ ۴. O(logn)

جواب: گزینه ۱ درست است.

روش مرتب‌سازی سریع (Quick Sort) یکی از الگوریتم‌های مشهور مرتب‌سازی داده‌ها است. این الگوریتم طی مراحل بازگشتی زیر یک روش تقسیم و غلبه برای مرتب کردن داده‌ها ارائه می‌نماید :

۱ -انتخاب عنصر محوری: یکی از عناصر آرایه به عنوان عنصر محوری - (pivot) به عنوان مثال عنصر اول - انتخاب می‌شود .

۲ -تقسیم آرایه: چینش عناصر آرایه به قسمی تغییر داده می‌شود که تمامی عناصر کوچکتر یا مساوی محور در سمت چپ آن، و تمامی عناصر بزرگتر در سمت راست آن قرار بگیرند. این دو قسمت زیر آرایه‌های چپ و راست نامیده می‌شوند .

۳ -مرتب‌سازی بازگشتی: زیرآرایه‌های چپ و راست به روش مرتب‌سازی سریع مرتب می‌شوند .

مرتب‌سازی سریع چه در پیاده‌سازی عادی و چه در پیاده‌سازی احتمالی در حالت متوسط در زمان اجرای O(nlogn) اجرا می‌شود

---

۷) بدترین حالت الگوریتم های تقسیم و حل، برای n ورودی کدام گزینه است؟

۸)

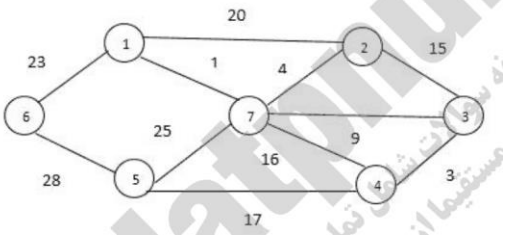
۱. مسئله به تعدادی زیر مسئله تقسیم شود.
۲. مسئله به قسمت های مساوی تقسیم شود.
۳. مسئله به سه قسمت تقسیم شود.
۴. مسئله به n قسمت تقسیم شود.

جواب: گزینه ۴ درست است.

در این روش، داده‌ها به دو یا چند دسته تقسیم شده و حل می‌شوند .سپس با ترکیب مناسب نتایج به دست آمده از این زیرمسئله‌ها، مسئله‌ی اصلی حل می‌شود .در صورتی که زیرمسئله خود به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، می‌توان از همین روش برای حل آن استفاده کرد . تقسیمات متوالی زیرمسئله‌ها تا جایی ادامه پیدا می‌کند که به اندازه‌ی کافی کوچک شده باشند و بتوان آنها را با روش‌های دیگر به راحتی حل نمود.

---

۹) هزینه درخت پوشای مینیمم (Minimum Spanning Tree) گراف زیر چیست؟



۱۰)

۱. 68 ۲. 57 ۳. 41 ۴. 81

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

---

۱۱) کدام یک از الگوریتم های زیر حریصانه نیست؟

۱۲)

۱. Kruskal ۲. Floyd ۳. Huffman ۴. Dijkstra

جواب: گزینه ۲ صحیح است و جز الگوریتم حریصانه نمی باشد.

---

۱۳) $G=(V,E)$ یک گراف بدون جهت و همبند و وزن دار است و a و b دو راس مجزا در آن فرض کنید p_1 مسئله پیدا کردن کوتاه ترین مسیر بین a و b و p_2 مسئله پیدا کردن بلندترین مسیر ساده بین a و b باشد. کدام یک از گزینه های زیر در مورد p_1 و p_2 درست است؟

۱۴)

۱. p_1 و p_2 را می توان در زمان چند جمله ای حل کرد.
۲. p_1 و p_2 را نمی توان در زمان چند جمله ای حل کرد.
۳. P_1 را می توان در زمان چند جمله ای حل کرد اما p_2 نمی توان حل کرد.
۴. P_2 را می توان در زمان چند جمله ای حل کرد اما p_1 نمی توان حل کرد.

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

---

۱۵) کدام یک از الگوریتم های زیر بر اساس روش برنامه نویسی پویا نیست؟

۱۶)

۱. پویا - حریصانه ۲. تقسیم و حل
۳. تقسیم و حل - حریصانه ۴. پویا – تقسیم و حل

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

---

۱۷) روش ..... برای حل مسائلی استفاده می شود که در آن ها یک دنباله از اشیاء از یک مجموعه مشخص انتخاب می شود. به طوری که این دنباله ملاکی در بر می گیرد؟

۱۸)

۱. شاخه و قید ۲. عقبگرد ۳. تقسیم و حل ۴. حریصانه

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

---

۱۹) راهبرد عقبگرد، کدام مسئله را بسیار بهبود می بخشد و بسیار مناسب است؟

۲۰)

۱. ضرب ماتریس ها ۲. کوله پشتی ۳. دور همیلتونی ۴. کوله پشتی صفر و یک

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

---

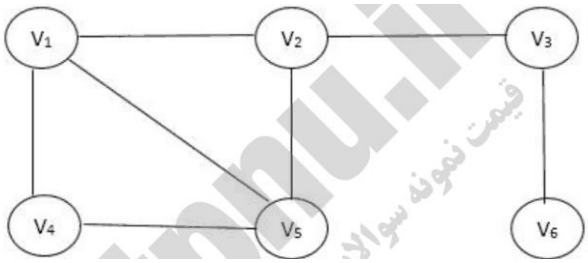
۲۱) الگوریتم شاخه و قید را در نظر بگیرید کدام گزینه صحیح است؟

۱. تکامل یافته ای از روش حریصانه است.
۲. تکامل یافته از روش پویا است.
۳. بهترین روش برای حل مسائل حریصانه است.
۴. تکامل یافته از روش عقبگرد است.

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

سوالات تشریحی

سوال ۲) از الگوریتم عقبگرد برای مسئله رنگ آمیزی گراف، برای یافتن همه رنگ آمیزی های ممکن گراف زیر با سه رنگ قرمز، سبز و آبی استفاده نمایید. عملیات را مرحله به مرحله نشان دهید.



سوال ۴) الف- روش کار الگوریتم ادغام (merge) را برای ادغام دو آرایه مرتب شرح دهید.

ب- پیچیدگی زمانی مرتب سازی ادغامی (merge sort) را در بدترین حالت تحلیل نمایید.

الف)

برای ادغام۲ آرایه یا لیست مرتب چندین الگوریتم وجود دارد.

الگوریتم اول

یک الگوریتم ساده اما طولانی این است که همانند روشی که برای دو لیست عمل کردیم، با شروع از ابتدای همه لیست‌ها، کمینه را پیدا کرده و آن را به آرایه جواب اضافه نموده و این عمل تا زمانی که کل لیست‌ها خالی شوند، تکرار می‌کنیم. زمان اجرای این الگوریتم، O(2n) است.

الگوریتم دوم

برای سریع‌تر انجام دادن این عملیات، از هرم کمینه استفاده می‌کنیم. ابتدا با استفاده از عضو اول همهٔ لیست‌ها، یک هرم کمینه می‌سازیم. این عمل می‌تواند در زمان اجرای O(n) انجام شود. سپس هربار کمینه که عضو اول هرم است را خروجی داده و عضو بعدی آرایه شامل آن را جایگزینش می‌کنیم (اگر عضو بعدی نداشت، بی‌نهایت را جایگزین آن می‌کنیم). سپس باید دوباره هرم را به هرم کمینه تبدیل کنیم که این کار زمان اجرای O(log(2)) را داراست. اگر در کل n عدد در کل لیست‌ها داشته باشیم، کل عملیات دارای زمان O(log2) اجرای خواهد بود.

ب)

در مرتب کردن n تا عنصر مرتب‌سازی ادغام در حالت میانگین و بدترین حالت دارای زمان اجرای nlogn می‌باشد. اگر زمان اجرای مرتب‌سازی ادغام برای یک لیست به طول n ، T(n) باشد بنابراین رابطه بازگشتی T(n)=2T(n/2)+n از تعریف الگوریتم پیروی می‌کند. در این الگوریتم هر دفعه لیست را به دو زیرلیست تقسیم می‌کنیم و در هر مرحله n تا گام برای ادغام کردن لازم می‌باشد.

مرتب‌سازی ادغام همیشه تعداد مقایسه‌های کمتری را نسبت به مرتب‌سازی سریع احتیاج دارد، به جز در حالتی که تمام عناصر ورودی برابر باشند جایی که بدترین حالت مرتب‌سازی ادغام همراه با بهترین حالت مرتب‌سازی سریع پیدا می‌شود. پیچیدگی مرتب‌سازی ادغام در بدترین حالت O(nlogn) می‌باشد که با بهترین حالت مرتب‌سازی سریع برابر می‌باشد اما در بهترین حالت تعداد مقایسه‌ها نصف تعداد مقایسه‌ها در بدترین حالت می‌باشد .در پیاده‌سازی بازگشتی مرتب‌سازی ادغام در بدترین حالت 2n-1 بار تابع مرتب‌سازی ادغام صدا زده می‌شود در حالی که در مرتب‌سازی سریع تابع مورد نیاز n بار صدا زده می‌شود.

تابستان ۹۵

۱) مرتبه زمانی اجرای الگوریتم زیر کدام است؟

۲)

```
(i<100000 {
    For i=1;
while (j=1;j<I; j++)
        j*=2;
    i*=3;
}
```

۱. O(1) ۲. O(n) ۳. $O(\log_3 n * \log_2 n)$ ۴. $O(n^2)$

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

---

۳) زمان متوسط اجرا در الگوریتم جستجوی خطی کدام است؟

۴)

۱. $\frac{n}{2}$ ۲. $\frac{n+1}{2}$ ۳. n ۴. Log n + 1

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

در بهترین حالت: وقتی داده مورد نظر (x) را می‌خواهیم جستجو کنیم در ابتدای آرایه وجود دارد .پیچیدگی زمانی آن برابر O(n) می‌شود .

در حالت متوسط: وقتی داده مورد نظر (x) را می‌خواهیم جستجو کنیم در وسط آرایه وجود دارد .پیچیدگی زمانی آن برابر $O(\frac{n}{2})$ می‌شود .

در بدترین حالت: وقتی داده مورد نظر (x) را می‌خواهیم جستجو کنیم در انتهای آرایه وجود دارد .پیچیدگی زمانی آن برابر O(n) می‌شود .

---

۵) تابع بازگشتی زیر بر روی درخت دودویی T چه کاری انجام می دهد؟

۶)

```
int f(Node* T){
   if (T == NULL)   return 1;
   if (T→left == NULL && T→right==NULL) return 1;
else
   return 1+f(T→left) +f (T→right);
}
```

۱. شمارش تعداد گره های برگ درخت ۲. شمارش تعداد گره های دو فرزندی درخت

۳. شمارش تعداد گره های غیر برگ درخت ۴. شمارش تعداد کل گره های درخت

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

بر اساس این تابع گره ها رو شمارش می کند و در صورتی که گره ای وجود نداشت عدد یک را بر میگرداند.

---

۷) مرتبه زمانی رابطه بازگشتی زیر کدام است؟

۸)

$T(n) = T(\frac{n}{3}) + d$

۱. $\theta(1)$ ۲. $\theta(n)$ ۳. $\theta(\log n)$ ۴. $\theta(n\log n)$

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

$d = n^{\log_3 d}$

---

۹) چه تعداد مقایسه برای جستجوی عدد ۸۴ به روش دودویی در آرایه زیر نیاز است؟

۱۰)

11	12	18	20	21	23	27	40	75	80	85

۱. ۴ ۲. ۵ ۳. ۳ ۴. ۲

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

در مرحله اول آرایه وسط را پیدا می کنیم که در اینجا عدد ۲۳ است و چون ۸۴ بزرگتر است در نیمه دوم جستجو می کنیم و دوباره عدد ۷۵ می باشد و ۸۴ بزرگ تر از آن است بنابراین نیمه دوم که ۸۰ می باشد و ۸۴ بزرگتر از ۸۰ می باشد و در مرجله آخر جستجو ععد ۸۴ موجود نمی باشد

---

۱۱) برای حل مساله ای به اندازه n به کمک روش تقسیم و حل، هر مسئله بزرگ به ۳ زیر مساله به اندازه n-1 تقسیم می شود. الگوریتم شکستن و ادغام دارای زمان $O(1)$ است. مرتبه بزرگی این الگوریتم کدام است؟

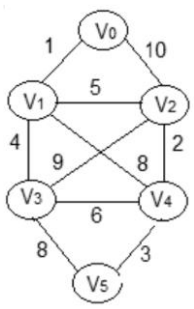
۱۲)

۱. $O(2^n)$ ۲. $O(n^2)$ ۳. $O(n^3)$ ۴. $O(3^n)$

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

---

۱۳) گراف زیر را در نظر بگیرید. برای یافتن درخت پوشای مینیمم این گراف به کمک الگوریتم پریم، کدال یال در مرحله سوم انتخاب می شود؟ (شروع از V_0)



۱۴)

۱. V_2V_4	۲. V_1V_2	۳. V_3V_4	۴. V_4V_5

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

---

۱۵) رمان لازم برای حل مساله زمانبندی با مهلت به روش حریصانه در بدترین حالت چقدر است؟

۱۶)

۱. $\theta(2^n)$ ۲. $\theta(n)$ ۳. $\theta(n \log n)$ ۴. $\theta(n^2)$

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

---

۱۷) کدام گزینه صحیح است ؟

۱۸)

۱. هر مساله بهینه سازی را می توان با استفاده از روش برنامه نویسی پویا حل کرد.
۲. در روش برنامه نویسی پویا، برای حل مساله سطح L تنها از مسائل سطح L-1 استفاده می شود.
۳. در روش برنامه نویسی پویا، مسائل از بالاترین سطح به پایین ترین سطح حل می شود.
۴. معمولا حل مسائل به روش تقسیم و جل بازدهی کمتری نسبت به روش برنامه نویس پویا دارد.

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

گزینه اول غلط است برای تمام مسائل بهینه‌سازی را نمی‌توان با برنامه‌نویسی پویا حل کرد چرا که باید اصل بهینگی در مسئله صدق کند. اصل بهینگی در یک مسئله صدق می‌کند اگر یک حل بهینه برای نمونه ای از مسئله، همواره حاوی حل بهینه برای همه زیر نمونه‌ها باشد. گزینه سوم غلط است مسائل از پایین به بالاترین سطح حل می شود.

---

۱۹) اگر الگوریتم فلوید برای یافتن کوتاهترین مسیرهای گرافی با ماتریس مجاورت زیر بکار رود، $D^{(2)}[3][5]$ کدام است؟

۲۰)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

۱. ۴ ۲. ۶ ۳. ۷ ۴. ∞

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

---

۲۱) در مساله حاصل جمع زیر مجموعه ها با ۴ عدد صحیح، تعداد گره ها در درخت فضای حالت چقدر است؟

۲۲)

۱. ۳۳	۲. ۹	۳. ۳۱	۴. ۷

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

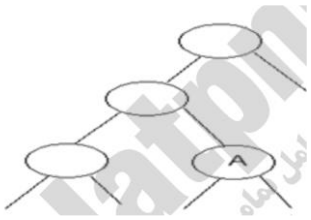
---

۲۳) در مساله کوله پشتی صفر و یک، فرض کنید n=5 ، W=40 و داشته باشیم:

۲۴)

i	1	2	3	4	5
P_i	8	5	15	10	20
W_i	16	15	25	8	15

اگر از تکنیک عقبگرد برای حل ایم مساله استفاده شود، مقدار profit و bound در گره A از درخت فضای حالت چقدر است؟



۱. Profit= 30
Bound= 40.2

۲. Profit= 20
Bound= 35

۳. Profit= 10
Bound= 28.5

۴. Profit= 13
Bound= 18.4

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

---

۲۵) کدام یک از مسائل در کلاس P قرار می گیرد؟

۱. فروشنده دوره گرد ۲. رنگ آمیزی گراف ۳. کوله پشتی صفر و یک ۴. مرتب سازی آرایه ها

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

تشریحی

۱) آرایه زیر را به روش مرتب سازی سریع صعودی مرتب نمایید. (عملیات را مرحله به مرحله نشان دهید)

۲)

17	20	10	25	11	8	18	23

جواب:

---

۳) با استفاده از روش برنامه نویسی پویا ضریب دو جمله ای $\binom{6}{4}$ را محاسبه نمایید.

۴)

جواب:

---

۵) از الگوریتم عقبگرد برای حل مساله ۴ وزیر استقاده نموده و عملیان را مرحله به مرحله نشان دهید. درخت فضای حالت هرس شده ای را نشان دهید که این الگوریتم تا نقطه رسیدن به حل نخست ایجاد می کند.

از تکنیک عقبگرد Backtracking برای حل مسائلی استفاده می‌شود که در آن‌ها دنباله‌ای از اشیاء از یک مجموعه مشخص انتخاب می‌شود، به‌طوری‌که این دنباله، ملاکی را در بر می‌گیرد. عقبگرد حالت اصلاح شدهٔ جستجوی عمقی یک درخت است. این الگوریتم همانند جستجوی عمقی است، با این تفاوت که فرزندان یک گره فقط هنگامی ملاقات می‌شوند که گره امید بخش باشد و در آن گره حلی وجود نداشته باشد .با توجه به اینکه هیچ ۲ وزیری نباید همدیگر را گارد کنند و در یک سطر نمی‌توانند باشند، تعداد کل حالت‌ها برای n=۴ برابر ۴*۴*۴*۴=۲۵۶ است .در شطرنج یک وزیر می‌تواند به مهره‌هایی که در خانه‌های عمود یا مورب به وی قرار دارند حمله کند. یا به عبارت ریاضی، اگر ردیفها و ستونهای شطرنج را از یک تا هشت شماره‌گذاری کنیم و وزیر در خانه(i ، j) قرار داشته باشد، مهره‌هایی که در خانه‌های(i ، m) یا (m ، j) یا (i ± m ، j ± m) قرار دارند توسط وزیر تهدید می‌شوند .

برای سادگی تشریح این مسئله با استفاده از روش بازگشت به عقب، فرض می‌کنیم که خانه‌های شطرنج ۴x۴ و تعداد وزیرها نیز ۴ باشد. سپس بعد از یافتن راه حل برای این مسئله ساده شده، اقدام به نوشتن الگوریتم برای مسئله اصلی می‌کنیم .
مراحل جستجو برای یافتن جواب را به این صورت دنبال می‌کنیم که :وزیر اول را در ردیف اول و ستون اول قرار می‌دهیم .
در ردیف دوم از اولین ستون به جلو رفته و به دنبال خانه‌ای می‌گردیم که مورد تهدید وزیر اول نباشد و وزیر دوم را در این خانه قرار می‌دهیم .
همانند قبل، در ردیف سوم از اولین ستون به جلو رفته و به دنبال خانه‌ای می‌گردیم که مورد تهدید وزیران اول و دوم نباشد. می‌بینیم که چنین خانه‌ای موجود نیست .پس به عقب یعنی ردیف دوم برگشته و وزیر دوم را به خانه‌ای دیگر از ردیف دوم منتقل می‌کنیم که مورد تهدید وزیر اول نباشد .
دوباره در ردیف سوم اولین خانه‌ای را میابیم که مورد تهدید دو وزیر قبلی نباشد. این بار خانه را می‌یابیم و وزیر سوم را در آن قرار می‌دهیم .
همانند قبل، در ردیف چهارم به دنبال اولین خانه‌ای می‌گردیم که مورد تهدید وزیران پیشین نباشد. چنین خانه‌ای موجود نیست .به ردیف قبل یعنی ردیف سوم باز می‌گردیم تا خانه‌ای دیگر برای وزیر سوم بیابیم. خانه دیگری وجود ندارد .به ردیف قبل یعنی ردیف دوم بر می‌گردیم تا خانه دیگری برای وزیر دوم پیدا کنیم. به آخرین ستون رسیده‌ایم و خانه دیگری نیست .به ردیف قبل یعنی ردیف اول بر می‌گردیم و وزیر اول را یک ستون به جلو می‌بریم .
در ردیف دوم اولین خانه‌ای را میابیم که مورد تهدید وزیر اول نباشد و وزیر دوم را در آن خانه قرار می‌دهیم .
در ردیف سوم اولین خانه‌ای را میابیم که مورد تهدید وزیران اول و دوم نباشد و وزیر سوم را در آن خانه می‌گذاریم .
در ردیف چهارم اولین خانه‌ای را میابیم که مورد تهدید وزیران پیشین نباشد. این بار خانه را می‌یابیم و وزیر چهارم را در آن خانه قرار می‌دهیم .
به یک جواب می‌رسیم. حال اگر فرض کنیم که این خانه جواب نیست و به مسیر خود ادامه دهیم، احتمالاً" می‌توانیم جوابهای دیگری نیز بیابیم .