

بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: فایزه صیدی

شماره دانشجویی: 970164219 کارشناسی مهندسی کامپیوتر

عنوان درس: تحلیل و طراحی الگوریتم

نیمسال دوم 94-95 سوالات فرد

1- در الگوریتم Insertion sort ، اگر  $t$  متوسط تعداد مقایسه های لازم برای درج عنصر  $k$  ام در یک آرایه  $n$  عنصری باشد،  $t_k$  برابر کدام گزینه است؟

1.  $n$       2.  $k$       3.  $\frac{k+1}{2}$       4.  $\frac{n+1}{2}$

برای درج عنصر  $k$  ام در یک آرایه  $n$  عنصری باید به مکانی که عنصر در آن قرار می گیرد توجه کنیم که می تواند اولین مکان ، دومین مکان و یا  $k$  امین مکان باشد. مکانی که عنصر باید در آن قرار بگیرد  $i$  می نامیم. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} t_{k=k-i-1} \\ t_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{1}{k} (k-i-1) \right) \\ &= \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

3- از بین سه مورد داده شده کدام مورد صحیح است؟

مورد 1:  $n! \in o(n^n)$

مورد 2:  $\frac{n^2}{n \log n} \in \Omega(n^2)$

مورد 3:  $n^{2^n} + 6 \times 2^n \in \Omega(2^n)$

1. موارد 2 و 1      2. مورد 1      3. موارد 3 و 1      4. موارد 1 و 2 و 3

پاسخ صحیح : گزینه 3

موارد 1 و 3 صحیح است اما مورد 2 نادرست است زیرا اصل رابطه  $O(n^2) = \frac{n^2}{\log n}$  برقرار است.

5- تابع زیر بر روی درخت T چه کاری انجام می دهد؟

```
int test (node* tree){  
  
if(tree==null)  
  
return 0;  
  
els  
  
return 1+ max (test (tree→left),test (tree→right));  
  
}
```

1. محاسبه تعداد گره های داخلی درخت      2. محاسبه تعداد برگ های درخت  
3. محاسبه عمق درخت      4. محاسبه تعداد گره های دو فرزندی درخت

پاسخ صحیح : گزینه 3

زیرا تابع `return 1+ max (test (tree→left),test (tree→right));`

عمق درخت را به دست می آورد.

7- جواب کلی رابطه بازگشتی زیر کدام است ؟

$$T(n) = 2T(n-1) + 3T(n-2)$$

$$\begin{array}{ll} T(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n & .2 \\ T(n) = C_1(-1)^n + C_2(3)^n & .4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} T(n) = C_1(1)^n + C_2(3)^n & .1 \\ T(n) = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n & .3 \end{array}$$

پاسخ صحیح: گزینه 4

با در نظر گرفتن  $T(n) = x^n$  ، معادله مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$x^n = 2x^{n-1} + 3x^{n-2} \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

$$T(n) = C_1(-1)^n + C_2(3)^n$$

9- با توجه به الگوریتم مرتب سازی سریع ، نتیجه اجرای تابع partition، بر روی آرایه زیر کدام است؟

12	1	25	3	28	47	10	8	52
----	---	----	---	----	----	----	---	----

1	3	8	1	12	25	28	47	52
---	---	---	---	----	----	----	----	----

.2

8	1	3	10	12	47	25	28	52
---	---	---	----	----	----	----	----	----

.1

8	1	3	10	12	25	28	47	52
---	---	---	----	----	----	----	----	----

.4

3	1	10	8	12	25	28	47	52
---	---	----	---	----	----	----	----	----

.3

پاسخ صحیح: گزینه 1

در این روش یک عنصر به عنوان عنصر محور انتخاب می شود . عناصر کوچکتر از محور در یک بخش لیست و عناصر بزرگتر از عنصر محور ، در بخش دوم لیست قرار می گیرند. برای این کار از تابع partition استفاده می کنیم . کار این تابع دو بخش کردن لیست ، طبق دستور بالا می باشد.

11- برای یافتن ماکسیمم و مینیمم عناصر یک آرایه با استفاده از روش تقسیم و حل ، پس از تقسیم مساله به زیر مساله مساوی و یافتن کوچکترین و بزرگترین عنصر در هر زیر لیست ، عناصر بدست آمده از زیر لیست ها را برای یافتن بزرگترین و کوچکترین عناصر نهایی با هم مقایسه می نماییم. تعداد مقایسه های انجام شده در این الگوریتم کدام گزینه است؟

1.  $2n - 1$       2.  $N - 1$       3.  $\frac{3n}{2} - 2$       4.  $2n$

پاسخ صحیح :گزینه 3

اگر تعداد عناصر لیست را توانی از 2 در نظر بگیریم یعنی  $n=2^k$  باشد در این صورت عبارت زیر حاصل می شود.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 2 & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

که در نتیجه:  $2^{k-1} + 2^k - 2 = \frac{3n}{2} - 2$

13- کدام گزینه در مورد الگوریتم های پریم و کروسکال صحیح است؟

1. الگوریتم پریم همواره از الگوریتم کروسکال سریع تر است.
2. الگوریتم کروسکال با انتخاب نزدیکترین گره در هر مرحله ، درخت پوشای کمینه را پیدا می کند.
3. الگوریتم کروسکال در بدترین حالت دارای پیچیدگی زمانی است .

4. الگوریتم کروسکال در گراف متراکم سریع تر از الگوریتم پریم است.

پاسخ صحیح: گزینه 4

در صورتی که گراف متراکم باشد الگوریتم کروسکال زمان  $\theta(n \log n)$  را صرف می کند. یعنی سریع تر از الگوریتم پریم عمل میکند. ولی در صورتی که گراف کامل باشد. الگوریتم پریم سریعتر عمل می کند.

15- در مساله کوله پشتی ، اگر آیتم ها به صورت جدول زیر باشند وظرفیت کوله پشتی 13 باشد ، بیشترین ارزش به دست آمده به روش حریصانه کدام است؟

i	$P_i$	$W_i$
1	35	7
2	30	5
3	20	2
4	12	3
5	3	1

80 .4

70 .3

68 .2

65 .1

پاسخ صحیح :گزینه 4

در این جدول  $p_i$  سود و  $w_i$  وزن شی I ام است.

برای کسب سود ماکزیمم قطعات 1و3و4و5 را انتخاب می کنیم وزن کل این قطعات برابر است:

$$7+2+3+1=13$$

$$35+20+12+3=70$$

17- در ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌های  $A_{10 \times 20} \times B_{20 \times 50} \times C_{5 \times 10} \times D_{1 \times 100}$  ، ترتیب پرانتز گذاری بهینه برای حداقل اعمال ضرب کدام است؟

1.  $((A \times (B \times C) \times D)$   
2.  $((A \times B) \times C) \times D)$   
3.  $(A \times ((B \times C) \times D))$   
4.  $((A \times B)(C \times D))$

پاسخ صحیح: گزینه 1

ابتدا 50 که بزرگترین عدد مشترک است را محور قرار می دهیم و BC بدست می آید وبعد با محاسبه گزینه های 1 و 3 به جواب 1 میرسیم.

19- یافتن بزرگترین زیر رشته مشترک دورشته X و Y که هر کدام دارای طول n هستند ، دارای چه مرتبه زمانی است؟

1.  $\theta(n)$       2.  $\theta(n^2)$       3.  $\theta(n^2 \log n)$       4.  $\theta(n^3)$

پاسخ صحیح : گزینه 2

ابتدا بین

X و Y طولانی ترین زیر رشته مشترک را به دست می آوریم که هزینه پیدا کردن طولانی ترین دنباله مشترک از دو دنباله به طول N,M برابر با  $O(nm)$  است و چون در اینجا X و Y به طول n است پس مرتبه زمانی برابر است با  $O(n^2)$

21- تعداد کل گره های درخت فضای حالت در روش عقب گرد برای حل مسئله حاصل جمع زیر مجموعه ها به ازای n عدد صحیح کدام است؟

1.  $2^n$  2.  $2^n - 1$  3.  $2^{n+1}$  4.  $2^{n+1} - 1$

پاسخ صحیح : گزینه 4

$$1 + 2 + 2^n + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

23- از بین موارد زیر کدام مورد یا موارد صحیح است؟

مورد 1: در روش شاخه و حد جست وجوی درخت فضای حالت به صورت عمقی انجام می شود.

مورد 2: روش شاخه و حد برای مسائل بهینه سازی مورد استفاده قرار می گیرد.

1. فقط مورد 1 2. فقط مورد 2 3. مورد 1 و 2 4. هیچکدام

پاسخ صحیح : گزینه 2

شاخه و حد یک الگوریتم عمومی برای پیدا کردن راه حل های بهینه مسائل مختلف است، بهخصوص در بهینه سازی گسسته و ترکیبی .

این الگوریتم تمام راه حل های یک مسئله را شمارش می کند که در این بین راه حل های بی ثمر بسیاری هستند که می توان با حذف آن ها با تخمین مرز های بالایی و پایینی ، بهینه شود. در روش شاخه و حد جست وجوی درخت فضای حالت به صورت سطحی است زیرا با جست وجوی سطح اول میتواند پاسخ بهینه را پیدا کند.

25- کدام یک از موارد زیر به طور قطع صحیح است ؟

1.  $P \subseteq NP$  2.  $P = NP$  3.  $P \neq NP$  4.  $NP \subseteq P$

پاسخ صحیح: گزینه 1

در بیان یک الگوریتم نا معین لزومی ندارد از همه دستورها و تابع های ذکر شده استفاده شود . بنا براین هر الگوریتم معین توسط یک کامپیوتر نا معین قابل اجرا است. پس  $P \subseteq NP$

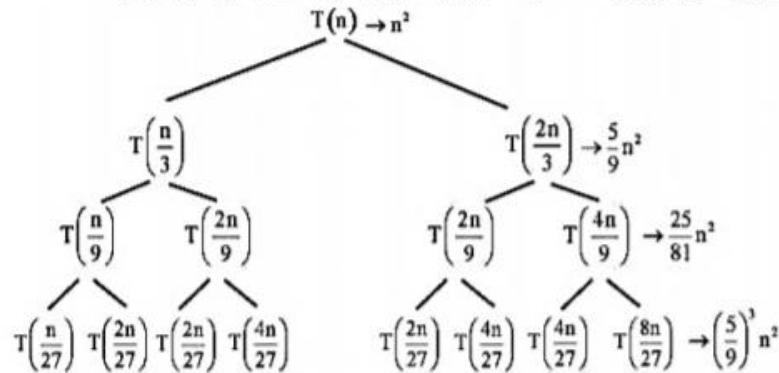
## سوالات تشریحی

1- درخت بازگشت را برای رابطه بازگشتی  $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$  رسم کنید و مرتبه زمانی این رابطه رت به دست آورید.

پاسخ:

درختی برای رابطه بازگشتی تشکیل می شود که در آن ریشه درخت ، مقدار اولیه عبارت غیر بازگشتی را دارا باشد.

برای حل این سوال از روش اصلی نمی توان استفاده کرد، اما اگر درخت این رابطه را بکشیم به صورت زیر می شود:



بنابراین به سادگی می توان نتیجه گرفت که:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_3^2} \left(\frac{5}{9}\right)^i \cdot n^2 = n^2 \sum_{i=0}^{\log_3^2} \left(\frac{5}{9}\right)^i$$

که سری فوق یک سری هندسی با قدر نسبت  $\frac{5}{9} < 1$  می باشد، پس  $T(n) = n^2$ .



3-هفت کار با مهلت ها و بهره ها مطابق با جدول زیر داده شده است . مطابق الگوریتم حریصانه زمانبندی بهینه را برای این مجموعه کارها به دست آورید.

سود	مهلت	کار
15	3	1
50	1	2
10	1	3
5	2	4
60	3	5
30	1	6
20	2	7

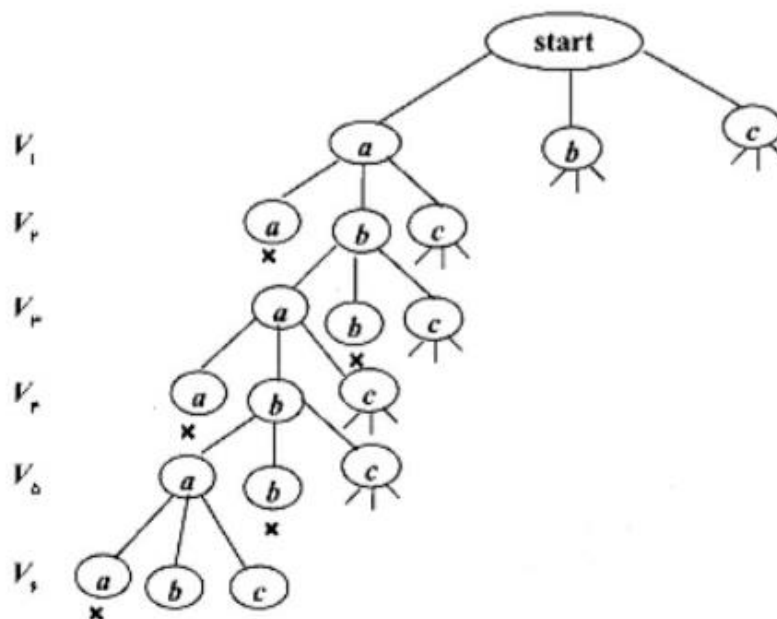
پاسخ:در مسئله زمان بندی ، هر کاری در یک واحد زمانی به پایان میرسد و دارای یک مهلت و سود معین است . اگر هر کاری پیش از مهلت معین یا در آن مدت انجام شود ، سود مورد نظر به دست می

زمان بندی	سود کل
[1,5]	$15+60=75$
[2,1]	$50+15=65$
[3,1]	$10+15=25$
[4,1]	$5+15=20$
[2,5]	$50+60=110$
[3,5]	$10+60=70$
[4,5]	$5+60=65$
[6,1]	$30+15=45$
[6,5]	$30+60=90$
[7,1]	$20+15=35$
[7,5]	$20+60=80$

آید. هدف، زمان بندی کارها به نحوه ای است که سود بیشینه به دست آید ، لازم نیست همه کارها زمان بندی شوند.بنا براین زمان بندی ها و سود های ممکن عبارت است از:

که با توجه به جدول سودهی ، مطابق با الگوریتم حریصانه زمان بندی بهینه در زمان [2,5] بیشترین سوددهی را داریم.

پاسخ: زنگها را  $a, b, c$  می نامیم. علامت ضربدر، گره های غیر امید بخش را مشخص می کنند و هر گاهی که به سه خط ختم می شود یعنی مانند گره هم تراز خود ادامه می یابد.


$$\begin{array}{cccccc} V_1 \rightarrow a & V_p \rightarrow b & V_{\mu} \rightarrow a & V_{\pi} \rightarrow b & V_{\omega} \rightarrow a & V_{\eta} \rightarrow b \\ V_1 \rightarrow a & V_p \rightarrow b & V_{\mu} \rightarrow a & V_{\pi} \rightarrow b & V_{\omega} \rightarrow a & V_{\eta} \rightarrow c \end{array}$$