

بهاره برادران سلماس

۹۷۰۰۱۵۶۲۴

طراحی الگوریتم ها

سوالات نیمسال 2 - 98 - 97

۲- مرتبه زمانی قطعه کد زیر چیست؟

$for(i = 0; i \leq n; i += 2)$

$for(j = 1; j > i; j++)$

$x++;$

۱.  $O(n^3)$

۲.  $O(n)$

۳.  $O(n \log n)$

۴.  $O(n^2)$

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۴

در بدترین حالت شرط حلقه دوم به صورت  $j > n$  خواهد بود. (ما بدترین حالت را در نظر میگیریم)

لذا حلقه اول  $n$  بار حلقه دوم را تکرار خواهد کرد (افزایش دو گام در هر اجرا تأثیری روی مرتبه زمانی ندارد)

از طرفی حلقه دوم در بدترین حالت  $n$  بار دستور خود را اجرا می کند لذا  $n * n = n^2$  بار آخرین دستور اجرا خواهد شد پس مرتبه

زمانی برابرست با  $O(n^2)$

۴- تابع پیچیدگی زمانی تابع زیر کدام است؟

$void f(int a[], int n)\{$

$if(n == 1) return a[0];$

$f(a, n - 2)$

$a[n - 1] = a[n - 2]$

$f(a, n - 2)$

$\}$

۲

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(n-2) + T(n-1) & n > 1 \end{cases} \quad .۱$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(n-2) + 1 & n > 1 \end{cases} \quad .۲$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-2) + T(n-1) + 1 & n > 1 \end{cases} \quad .۳$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-2) + 1 & n > 1 \end{cases} \quad .۴$$

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۲

همانطور که در کد مشاهده می شود در تابع  $f$ ، دو بار تابع با پارامتر  $n - 2$  فراخوانی می شود و مابین آن یک دستور اجرا خواهد شد

$$T(n) = 2T(n-2) + 1$$

لذا میتوان نوشت

۶. کدام گزینه صحیح است؟

.۱

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 \in \Theta(2^{\Pi}/2)$$

.۲

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2 \in \Theta(n^{\log 53})$$

.۳

$$T(n) = T(n-1) + 1 \in \Theta(n)$$

۳

.۴

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n \in \Theta(n^{\log n})$$

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۳

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + F(n) (F(n) \in n^k)$$

در صورتی که  $n$  یک عدد طبیعی و  $b > 1$  و  $a \geq 1$  باشد، به صورت زیر بیان می شود:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log b^a}) & a > b^k \\ \Theta(n^k \log n) & a = b^k \\ \Theta(n^k) & a < b^k \end{cases}$$

در گزینه ۲)  $f(n) = n^2, b = 5, a = 3$  لذا  $a^{b^k}$  پس  $\Theta(n^2)$

در گزینه ۴)  $f(n) = n, b = 2, a = 1$  لذا  $a < b^k$  پس  $\Theta(n)$

$$T(n) = aT(n - b) \rightarrow \Theta(a^{\frac{n}{b}})$$

$$if(a = 1) \rightarrow \Theta(n)$$

در گزینه ۱)  $a=2, b=1$  لذا  $\Theta(2^n)$

در گزینه ۳)  $a = 1$  لذا  $\Theta(n)$

۸. آرایه نه عنصری  $a$  مفروض است. اگر این آرایه به روش مرتب سازی سریع مرتب شود، خروجی تابع  $\text{partition}$  در مرحله اول

چیست؟

۹	۲	۴۱	۳۲	۵	۱۸	۷	۲۵	۱۴
---	---	----	----	---	----	---	----	----

۴

۱.

[5 9 7 2 14 32 41 18 25]

۲.

[7 5 2 9 14 25 18 32 41]

۳.

[2 5 7 9 14 18 25 32 41]

۴.

[9 7 5 2 14 32 41 18 25]

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۴

۱ در عنصر بزرگتر از ۱۴ و ۲ در عناصر کوچک تر از ۱۴ متوقف شده و عناصر تعویض می شوند.  
در مرحله اول جای ۲۵ و ۷ عوض میشود در مرحله بعدی ۲۵ ۱۸ ۵ پشت هم قرار میگیرند و جای ۲۵ و ۵ عوض میشود. و بعد جای ۱۸ و ۲ عوض میشود سپس جای جدید ۲۵ با ۹ تعویض میشود.  
زمانی که ۲ پیمایش خود را به اتمام می رساند محل عنصر ۲ با اولین خانه جا به جا میشود.  
سپس جای ۱۴ با ۹ عوض می شود.

۱۰. پیچیدگی زمانی الگوریتم mergesort چقدر است ؟

۱.  $O(\log n)$

۲.  $O(n \log n)$

۳.  $O(n^2 \log n)$

۴.  $O(n^2)$

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۲

پیچیدگی زمانی الگوریتم mergesort برابر با  $\Theta(n \log n)$  است.

۱۲. اگر برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار یک آرایه ۱۰ عنصری از الگوریتم زیر استفاده شود، تعداد مقایسه ها چقدر است

۴

```

void MaxMin(int a[], int low, int high, int min, int max){
    if(low == high) min = max = a[low];
    else if (low == high - 1){
        if (a[low] < a[high]){
            max = a[high]; min = a[low];
        }
        else{
            max = a[low]; min = a[high];
        }
    }
    else{
        int mid = (low + high)/2;
        MaxMin(a, low, mid, min, max);
        MaxMin(a, mid + 1, high, min, max);
        if(min < a[mid]) min = a[mid];
        if(max > a[mid]) max = a[mid];
    }
}

```

۵.۱

۱۰.۲

۱۲.۳

۱۳.۴

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۴

الگوریتم مربوط به پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم در لیست، مربوط به minmax می باشد. که رابطه آن به صورت  $T(n) = \frac{3n}{2} - 2$  می باشد بنابراین برای ۱۰ عنصر  $T(n) = \frac{30}{2} - 2 = 13$  مقایسه خواهیم داشت. نکته: اگر عناصر فرد باشد تعداد مقایسه ها برابر است با :  $T(n) = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

۱۴. در صورتی که متن زیر به روش هافمن کد گذاری شود، کد حرف b کدام خواهد بود؟

abaaccdbabacccc

۱. ۱۰۰

۲. ۰۰۱

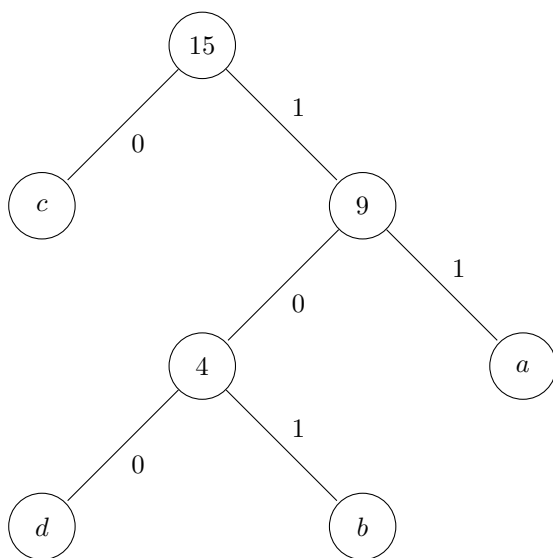
۳. ۰۱

۴. ۱۰۱

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۴

در کد هافمن، دو کاراکتر با تعداد کمتر باهم تشکیل گره ای را داده و مجموع تعداد آنها در آن گره ثبت میشود سپس عدد این گره در لیست تعداد کاراکترها قرار میگیرد. این روند را تا ریشه درخت ادامه می دهیم بعد از تشکیل درخت، از ریشه یال های سمت چپ را ۰ و یال های سمت راست را ۱ میگذاریم پس از آن برای هر کاراکتر از ریشه شروع کرده عدد بدست آمده از ریشه تا آن کاراکتر را از روی یالها می نویسیم: تعداد:  $a = 5, b = 3, c = 6, d = 1$



$d=۱۰۰, c=۰, b=۱۰۱, a=۱۱$

۱۶. تعداد حالات مختلف ضرب زنجیره ای ۵ ماتریس کدام است؟

۱. ۱۴

۲. ۵

۳. ۳۰

۱۰.۴

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۱

تعداد حالات ممکن برای ضرب زنجیره ای ماتریس ها از رابطه زیر بدست می آید.

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i) = \frac{1}{n}(2(n-1))$$

$$n-1 = \frac{1}{5}(2(5-1))$$

$$5-1 = \frac{1}{5} \frac{8!}{4!4!} = 14$$

$$\frac{2*3+4*4}{5+1} = \frac{22}{6} = 3.67 = \text{میانگین تعداد مقایسه های جستجوی ناموفق}$$

توجه کنید که از فرمول های ذیل استفاده کردیم:

$$\frac{\sum d(x)}{\text{تعداد کل گره } \rightarrow n} = \text{مجموع گره های داخلی} \rightarrow \text{میانگین تعداد مقایسه ها برای جستجوی موفق}$$

$$\frac{\sum dx}{n+1} = \text{طول مجموع گره های خارجی} \rightarrow \text{میانگین تعداد مقایسه ها برای جستجوی ناموفق}$$

۱۸. مرتبه زمانی مسئله کوله پشتی صفر و یک با استفاده از روش برنامه نویسی پویا چقدر است؟

$$1. \Theta(n)$$

$$2. \Theta(n^n)$$

$$3. \Theta(2^n)$$

$$4. \Theta(n^2)$$

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۳

مرتبه زمانی کوله پشتی صفرویک در بدترین حالت  $\Theta(2^n)$  می باشد.۲۰. دو رشته  $X=ABCBDAB$  و  $Y=BDCABA$  را در نظر بگیرید. اگر برای یافتن طولانی ترین زیر رشته مشترک بین  $X$  و  $Y$ از روش برنامه نویسی پویا استفاده شود،  $b[3][3]$  چقدر است ؟

۱. ۰

۲. ۱

۸

۲.۳

۳.۴

۲۲- گرافی با ماتریس مجاورت زیر مفروض است. برای رنگ آمیزی این گراف با سه رنگ چند پاسخ وجود دارد ؟

$$\begin{bmatrix} 000 \\ 000 \\ 000 \\ 000 \end{bmatrix}$$

۳.۱

۲.۲

۱.۳

۰.۴

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۴

چون همه رئوس بر هم منطبق هستند و وزن یال بین رئوس ۰ است لذا نمی توان گراف را طوری رنگ آمیزی کرد که هیچ دو راس مجاوری همرنگ نباشد.

۲۴. در مساله کوله پشتی صفر و یک مقدار  $\text{Bound}, \text{profit}, \text{weight}$  در یک گروه مفروض به ترتیب معادل گزینه است؟

۱. حد بالایی از بهره قابل دستیابی ، حاصل جمع ارزش قطعات و حاصل جمع اوزان قطعات

۲. حاصل جمع ارزش قطعات ، حد بالایی از بهره قابل دستیابی و حاصل جمع اوزان قطعات

۳. حد بالایی از بهره قابل دستیابی ، حاصل جمع اوزان قطعات و حاصل جمع ارزش قطعات

۴. حاصل جمع اوزان قطعات، حد بالایی از بهره قابل دستیابی و حاصل جمع ارزش قطعات

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۱

profit: حاصل جمع ارزش قطعات

bound: حد بالا از بهره قابل دستیابی

weight: حاصل جمع اوزان قطعات

### سوالات تشریحی

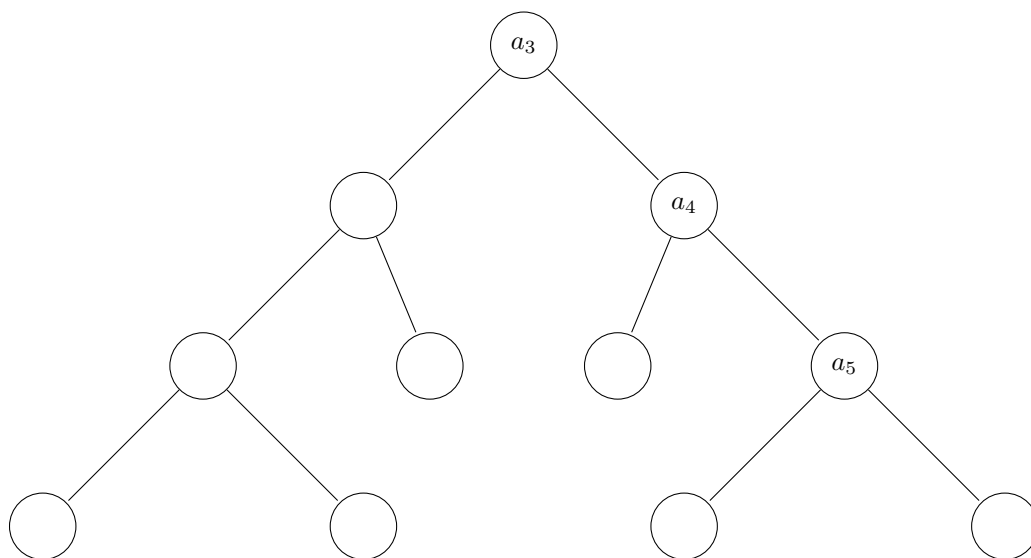
۲- در الگوریتم جستجوی دودویی، متوسط تعداد مقایسه ها در جستجوی موفق و ناموفق برای یک آرایه ۵ عنصری را به کمک درخت



تصمیم گیری بدست آورید.

**حل:**

در صورتی که الگوریتم جستجوی دودویی را برای جستجوی عناصر آرایه  $A[ ] = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  به کار ببریم، میانگین تعداد مقایسه ها در جستجوی موفق و جستجوی ناموفق را به دست می آوریم: برای محاسبه میانگین جستجوی موفق تعداد گره های پر هر سطح، را در شماره سطح آن ضرب میکنیم و جمع می نماییم سپس بر تعداد گره های پر تقسیم میکنیم:



$$\frac{1+2*2+2*3}{5} = \frac{11}{5} = 2.2 = \text{میانگین مقایسه های جستجوی موفق}$$

برای محاسبه میانگین جستجوی ناموفق تعداد گره های خالی هر سطح را در شماره سطح آن ضرب میکنیم و جمع می نماییم سپس بر تعداد گره های پر تقسیم میکنیم

۴- در مساله حاصل جمع زیر مجموعه ها، اگر  $n=5$  و  $w=12$  باشد، برای  $w_i$  های داده شده زیر، با استفاده از تکنیک عقبگرد چند جواب وجود دارد؟ درخت فضای حالت آن را رسم کنید.

$$w_1 = 2, w_2 = 5, w_3 = 7, w_4 = 10, w_5 = 12$$

**حل:**

در مسئله حاصل جمع زیر مجموعه ها،  $n$  عدد مثبت و صحیح  $w_i$  (وزن ها) و یک عدد صحیح مثبت  $w$  داده شده و هدف، یافتن همه زیرمجموعه هایی از این اعداد صحیح است که حاصل جمع آنها برابر  $w$  بشود، مسلماً اگر این مسئله را به مسئله دزد و کوله پشتی تشبیه کنیم، تنها یافتن یک جواب کافی خواهد بود. اگر weight مجموع وزن های جمع آوری شده تاکنون و  $w_{i+1}$  وزن قطعه بعدی، total مجموع وزن های پیمایش نشده (باقی مانده) باشد داریم:

شروط امید بخش بودن مسئله حاصل جمع زیر مجموعه ها:

$$weight + W_{i+1} \leq W$$

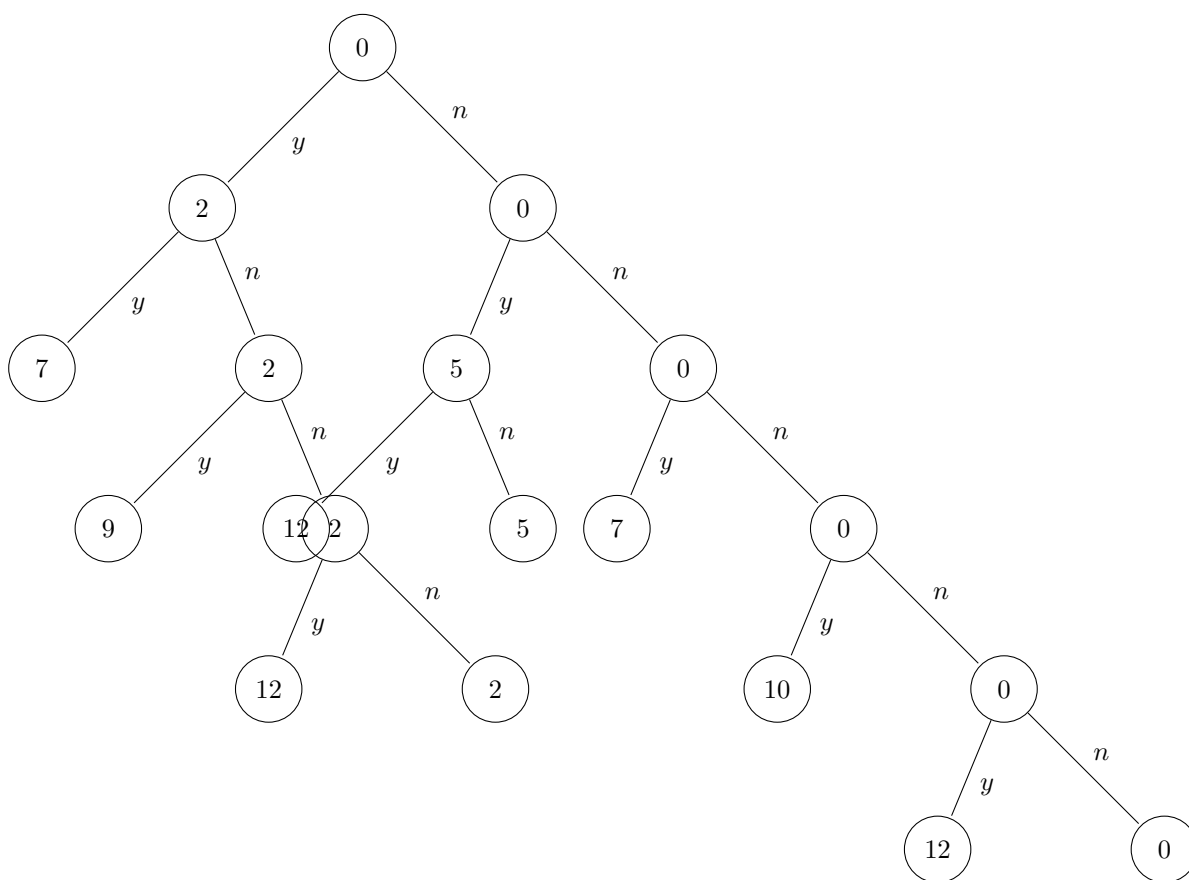
$$weight + total \geq W$$

شروط نا امید بخش بودن مسئله حاصل جمع زیر مجموعه ها:

$$weight + W_{i+1} > W$$

$$weight + total < W$$

برای رسم درخت فضای حالت: اگر از ریشه به طرف چپ برویم یعنی  $w^1$  را انتخاب کرده ایم و اگر به سمت راست برویم یعنی  $w^2$  را انتخاب کرده ایم. به طریق مشابه اگر از یک گره در سطح ۱ به سمت چپ رفتیم به این معنی خواهد بود که  $w^2$  را انتخاب کرده ایم و اگر به طرف راست رفتیم آن را انتخاب نکرده ایم و... هر مسیر از ریشه به برگ معرف یک زیرمجموعه است.



y=yes

n=no

$$w_1 = 2$$

$$w_2 = 5$$

$$w_3 = 7$$

$$w_4 = 10$$

$$w_5 = 12$$

#### سوالات تابستان 94

۱- از میان سه رابطه زیر چه تعداد درست است؟

$$5n + 10\log n^4 \in o(n^2)$$

$$n^3 2^n + 6n^2 3^n \in o(n^4 2^n)$$

$$\log 2^n \in \Omega(\log n^{\sqrt{n}})$$

۱. صفر

۲. ۱

۳. ۲

۴. ۳

۳- مرتبه اجرای قطعه کد زیر کدام است؟

```

i = n;

while(i ≥ 1){

    j = i;

    while(j ≤ n){

        j = j * 2;

    }

    i = i - 2;

}

```

$$\Theta((\log n)^2).^۱$$

$$\Theta(n \log n).^۲$$

$$\Theta(n^2).^۳$$

$$\Theta(n + \log n).^۴$$

حل:

پاسخ صحیح : گزینه ۴

تحلیل را به صورت زیر انجام می دهیم، فرض کنیم  $n = 2^k$  پس

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \log_2^1 + 1 + \log_2^2 + 1 + \log_2^4 + 1 + \dots + \log_2^n + 1 \\
 &= (\log_2^1 + \log_2^2 + \log_2^4 + \dots + \log_2^n) + (1 + 1 + \dots + 1) \\
 &= (0 + 1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \\
 \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{1}{2}(\log_2^n + 1)(\log_2^2 + 2) \in \Theta((\log_2^n)^2)
 \end{aligned}$$

۵- مرتبه اجرای الگوریتم بازگشتی زیر چیست؟

```

int func(int n, int m){
    if(n == 2)
        return n - m;
    else
        return m * func(n - 2, m - 1) + 1;
}

```

۱.  $o(\sqrt{n})$ ۲.  $o(n)$ ۳.  $o(n^2)$ ۴.  $o(n \log n)$ 

۷- مرتبه رابطه بازگشتی زیر چیست؟

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

۱.  $\Theta(n^{2/3})$ ۲.  $\Theta(n^{3/2})$ ۳.  $\Theta(\log n)$ ۴.  $\Theta(n \log n)$ 

۹- اگر برای مرتب سازی آرایه زیر از الگوریتم **Sort Quick** استفاده کرده و عنصر اول را به عنوان عنصر محور انتخاب کنیم،

خروجی مرحله اول الگوریتم چه خواهد بود؟

۱۵	۲۰	۷	۱۲	۲۲	۱۶	۱۰	۳	۲۰
----	----	---	----	----	----	----	---	----

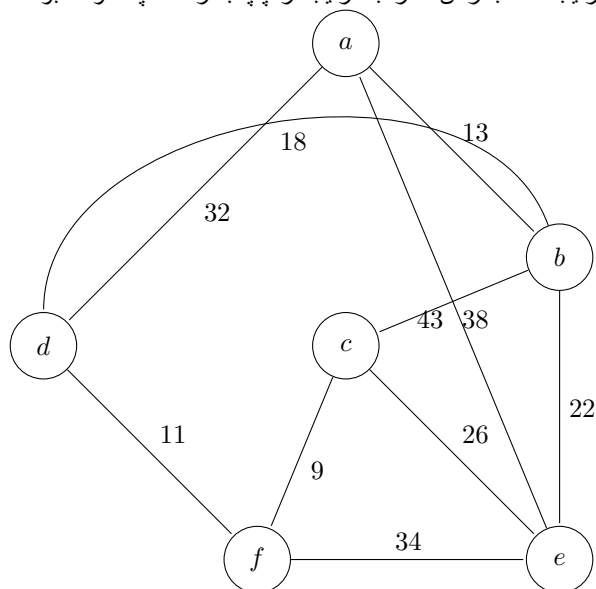
۱. 10, 7, 12, 3, 15, 22, 20, 16, 20

3, 7, 12, 10, 15, 20, 16, 22, 20.۲

10, 7, 3, 12, 15, 16, 20, 22, 20.۳

3, 7, 12, 10, 15, 16, 20, 22, 20.۴

۱۱. اگر در استفاده از الگوریتم پریم برای بدست درخت پوشای بهینه گراف زیر، راس  $a$  را به عنوان راس شروع در نظر بگیریم، ترتیب انتخاب راس ها را به ترتیب از چپ به راست چه خواهد بود؟



۱.  $a \cdot b \cdot d \cdot c \cdot f \cdot e$

۲.  $a \cdot b \cdot d \cdot f \cdot c \cdot e$

۳.  $a \cdot b \cdot d \cdot e \cdot f \cdot c$

۴.  $a \cdot b \cdot e \cdot c \cdot f \cdot d$

۱۳. چنانچه مجموعه قطعات شامل هفت قطعه با وزن و قیمت زیر باشد. در مساله کوله پشتی کسری با حداکثر ظرفیت برابر با ۱۰، سود بهینه چقدر است؟

وزن	۲	۳	۵	۷	۱	۴	۱
قیمت	۱۰	۶	۱۵	۷	۶	۱۸	۳

۳۴.۱

۵۳.۲

۴۹.۳

۴۳.۴

۱۵- اگر زنجیره ضرب ماتریس ها شامل چهار ماتریس به شکل زیر باشد، پراگتار گذاری بهینه به چه صورت خواهد بود؟

$$A_{5 \times 10} \times B_{10 \times 8} \times C_{8 \times 2} \times D_{2 \times 20}$$

$$1. (A \times B) \times (C \times D)$$

$$2. (A \times (B \times C)) \times D$$

$$3. ((A \times B) \times C) \times D$$

$$4. (A \times (B \times C)) \times D$$

۱۷- اگر ماتریس مجاورت (w) برای یک گراف به صورت زیر باشد، در محاسبه کوتاه ترین مسیر ها به کمک الگوریتم فلوید، مقادیر اولین سطر ماتریس  $D^{(4)}$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ 50 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & \infty & 0 & 15 \\ 15 & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1. [0 \ 5 \ \infty \ \infty]$$

$$2. [0 \ 5 \ 15 \ 10]$$

$$3. [0 \ 5 \ 20 \ 10]$$

$$4. [0 \ 5 \ \infty \ 10]$$

۱۹- مرتبه هزینه زمانی  $T(n)$  و مرتبه هزینه حافظه مصرفی  $M(n)$  برای مسئله فروشنده دوره گرد در یک گراف n راسی کدام است؟

1.  $M(n) \in \Theta(n2^n), T(n) \in \Theta(n2^n)$
2.  $M(n) \in \Theta(n2^n), T(n) \in \Theta(n^22^n)$
3.  $M(n) \in \Theta(n^22^n), T(n) \in \Theta(n2^n)$
4.  $M(n) \in \Theta(n^22^n), T(n) \in \Theta(n^22^n)$

۲۱- کدام یک از عبارات زیر در مورد راهبرد پویا درست است؟

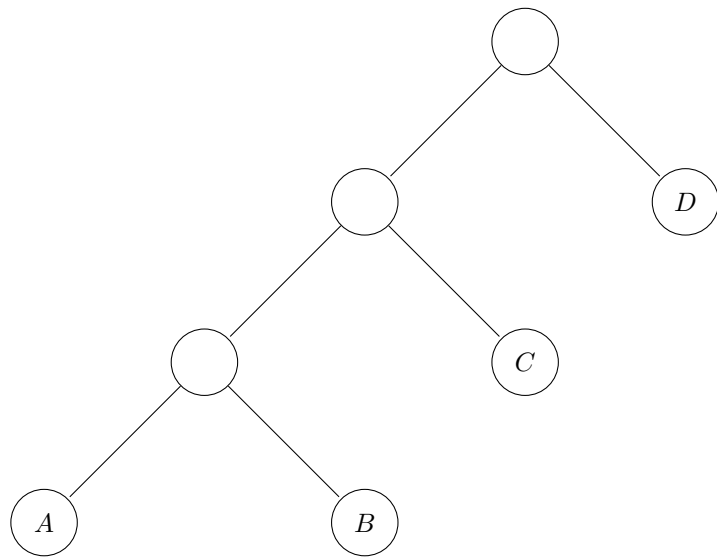
۱. اغلب مسائل راهبرد پویا مسائل بهینه سازی هستند
۲. راهبرد برنامه نویسی پویا یک راهبرد بالا به پایین است.
۳. میزان حافظه مصرفی در الگوریتم های راهبرد پویا متر از راهبرد تقسیم و حل است.
۴. زمان اجرای الگوریتم محاسبه جمله  $n$  ام سری فیبوناچی در راهبرد پویا بیشتر از راهبرد تقسیم و حل است.

۲۳- الگوریتم عقبگرد برای مسئله مدار های همپلتونی از کدام مرتبه زمانی است؟

1.  $\Theta(2^n)$
2.  $\Theta(n2^n)$
3.  $\Theta(n^n)$
4.  $\Theta(n!)$

۲۵- در حل مسئله کوله پشتی صفر و یک در راهبرد انشعاب و تحدید، اگر بخشی از درخت فضای حالت به صورت زیر باشد، با توجه به قطعات داده شده، در مرحله بعد کدام گره باید توسعه یابد؟ (ظرفیت کوله پشتی = ۱۶)





قطعه	۱	۲	۳	۴
وزن	۲	۵	۱	۵
قیمت	۴۰	۳۰	۵	۱

۱.A

۲.B

۳.C

۴.D

### سوالات تشریحی

۱- رابطه بازگشتی زیر را حل کنید.

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\sqrt{n}) + n^2 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

حل:

$$T(2^k) = 2T(2^{\frac{k}{2}}) + 4^k$$

$$S(k) = 2S(\frac{k}{2}) + 4^k$$

$$S(k) \in \Theta(4^k)$$

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

۳- چنانچه متنی شامل کاراکتر های A،B،C،D،E،F،G با نرخ تکرار زیر باشد، پس از رسم درخت هافمن، کد مربوط به هر کاراکتر را بدست آورده و طول فایل کد شده را نیز محاسبه کنید.

کاراکتر	A	B	C	D	E	F	G
نرخ تکرار	۸	۱۴	۲۸	۳۵	۱۰	۱۲	۲۳

حل:

$$A=1100$$

$$B=001$$

$$C=01$$

$$D=10$$

$$E=1101$$

$$F=000$$

$$g=111$$

طول کل :

$$23 * 3 + 12 * 3 + 10 * 4 + 35 * 2 + 28 * 2 + 14 * 3 + 8 * 4 = 345$$

۵- الف) در مساله n وزیر، شرط اینکه دو وزیر مورد حمله یکدیگر قرار گیرند چیست؟  
 ب) الگوریتم عقبگرد برای مسئله n وزیر را نوشته و پیچیدگی زمانی آنرا تحلیل نمایید؟

ج) تابع امید بخشی این الگوریتم آن را نیز بنویسید.

**حل:**