

امتحان در خانه: برنامه‌نویسی عددی و الگوریتم‌های محاسباتی

توجه:

- لطفاً برای سوالات زیر یک فایل گزارش تهیه کنید که شامل توضیح مختصری از جواب هر سوال و خروجی نهایی مربوط به آن باشد.
- کدها حتماً دارای کامنت باشد.
- هر سوال را با فرمت `Q1_studentnumber.py` و `Q2_studentnumber.py` و `Q3_studentnumber.py` ذخیره کرده و به همراه فایل گزارش با فرمت `report_studentnumber.pdf` به صورت زیپ شده با نام `studentnumber.zip` به آدرس ایمیل a.seif@iasbs.ac.ir ارسال کنید.

سوال ۱: یافتن همه‌ی ریشه‌های یک تابع در یک بازه

✓ شرح مسئله:

یک برنامه بنویسید که برای تابع زیر، همه‌ی ریشه‌ها را در یک بازه‌ی مشخص پیدا کند:

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x + 1$$

۱. بازه‌ی $[a, b]$ و تعداد تقسیمات اولیه‌ی بازه (مثلاً ۱۰ قسمت) را از کاربر دریافت کند.

۲. با بررسی تغییر علامت تابع در هر قسمت، بازه‌هایی که ریشه در آنها قرار دارد را مشخص کند.

۳. برای هر بازه‌ای که تغییر علامت رخ داده، ابتدا از روش **تصنیف (Bisection)** استفاده کند تا مقدار تقریبی ریشه را پیدا کند.

۴. سپس از روش **نیوتن-رافسون (Newton-Raphson)** برای بهبود دقت مقدار تقریبی استفاده کند.

۵. خروجی شامل همه‌ی ریشه‌های پیدا شده باشد.

۶. بررسی همگرایی: اگر روش نیوتن-رافسون بعد از ۱۰۰ تکرار همگرا نشود، مقدار تقریبی از روش تصنیف برگردانده شود.

سوال ۲: محاسبه‌ی بزرگ‌ترین مقدار ویژه با روش گاوس-سایدل

✓ شرح مسئله:

۱. دریافت یک ماتریس مربعی A از کاربر (مثلاً 4×4 یا 5×5).

۲. انتخاب یک بردار اولیه‌ی تصادفی به عنوان بردار ویژه‌ی اولیه.

۳. استفاده از روش تکراری گاوس-سایدل برای حل دستگاه $Ax = \lambda x$

۴. محاسبه و نمایش مقدار ویژه‌ی متناظر.

۵. بررسی همگرایی: اگر روش بعد از ۱۰۰ تکرار همگرا نشود، پیغام هشدار بدهد که ممکن است ماتریس مناسب نباشد.

سوال ۳: مسئله کوله پشتی

✓ شرح مسئله:

می‌گویند دزدی برای حمل جواهراتی که می‌خواهد سرقت کند کوله پشتی‌ای به همراه دارد که حداکثر تحمل‌اشیایی به مجموع وزن W را دارد (اگر بار بیشتری داخل کوله پشتی گذاشته شود، کوله پشتی پاره می‌شود). هر یک از قطعات جواهر که دزد می‌تواند انتخاب کند وزن و قیمت مشخص دارد. مسله دزد این است که جواهراتی را انتخاب کند که مجموع وزن آنها از W بیشتر نشود و مجموع ارزش آنها بیشترین مقدار ممکن باشد! می‌خواهیم الگوریتم مناسبی (برای دزدا) طراحی کنیم. مسئله را به صورت زیر صورت‌بندی می‌کنیم:

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

$$w_i: \quad S_i \text{ وزن}$$

$$P_i: \quad S_i \text{ ارزش}$$

فرض می‌کنیم همه‌ی مقادیر w_i ها، P_i ها و W اعداد صحیح و مثبت هستند. می‌خواهیم زیر مجموعه‌ی A از S را طوری پیدا کنیم که

$$\sum_{S_i \in A} P_i$$

بیشترین مقدار ممکن شود، به شرطی که

$$\sum_{S_i \in A} w_i \leq W.$$

به عبارتی هدف این است که برنامه‌ای بنویسید که مجموعه A را از اعضای S طوری پیدا کند که مجموع وزن آن از W بیشتر نشود و بیشترین ارزش را داشته باشد.

فرض کنید که اعضای S یک فایل txt است که شامل دو ستون (ستون اول وزن و ستون دوم ارزش جواهر) و n سطر است. (مثلاً ۲۰۰۰ سطر)