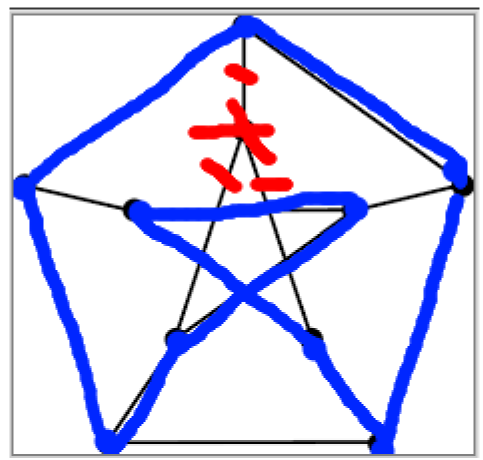
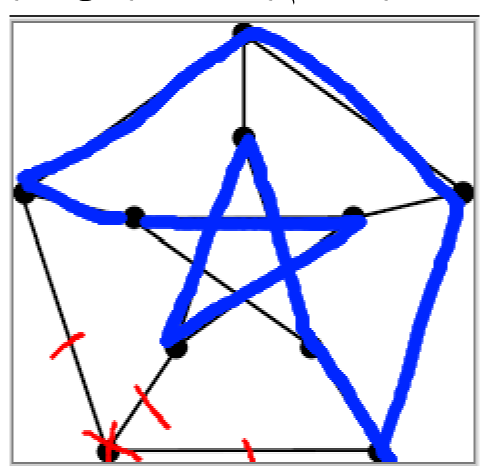
به نام خدا

علی شیخ عطار ۹۹۵۴۲۲۲۲

Q1



همانطور که مشاهده میکنیم با حذف یک راس درونی از گراف میتوان دور همیلتونی در آن رسم کرد و این به ازای تمام راس های درونی که روی ستاره ی داخلی هستند به طریق مشابه صادق است.



همانطور که میبینیم با حذف یک راس از راس های بیرونی نیز میتوان دور همیلتونی رسم کرد و به طریق مشابه برای همه ی راس های بیرونی صادق است

پس با حذف هر کدام از راس ها (درونی و بیرونی) میتوان به دور همیلتونی دست یافت در نتیجه گراف پترسون درون همیلتونی می باشد.

Q2

مجموعه راس ها را در $k5, 5$ مجموعه های {u1, u2, u3, u4, u5} و {v1, v2, v3, v4, v5} در نظر بگیرید
از v1 به u1 تا u5 یال وجود دارد و طبق اصل لانه کبوتری حداقل سه تا همرنگ هستند.
برای مثال v1u1, v1u2, v1u3 همرنگ هستند.(مثلا رنگ قرمز)
با بررسی یالهای دیگری که به راس های طرف دیگر این یال ها متصل هستند (u1, u2, u3) وجود $k2, 2$ تکرنگ را اثبات می کنیم.
یال های v2u1 v2u2 v2u3 را درنظر بگیری طبق اصل لانه کبوتری دوتا از این سه یال همرنگ هستند.
برای مثال v2u1 v2u2 همرنگ هستند.(مثلا رنگ قرمز)
پس یال های v1u1 v1u2 و v2u1 v2u2 همرنگ(قرمز) هستند و $k2, 2$ تک رنگ را تشکیل میدهند.

Q3

گراف کامل با 2k+1 راس (2k)(2k+1)/2 یال خواهد داشت که درجه ی هر راس برابر با k خواهد بود

(2k+1)(2k)/(2k+1) = 2k

با توجه به اصل لانه کبوتری در هر راس حداقل ⌈2k/3⌉ یال با رنگ مشابه هم وجود خواهند داشت و میدانیم که

⌈2k/3⌉ >= k

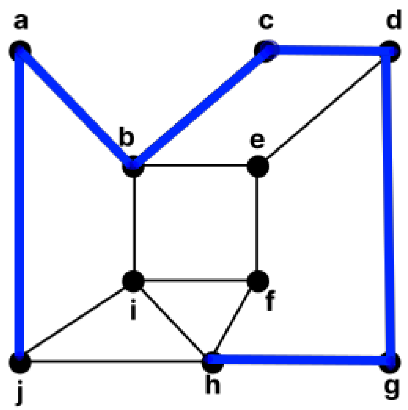
و از آنجایی که تعداد راس ها یک عدد صحیح می باشد پس همواره

⌈2k/3⌉ == k

پس زیرگراف و زیر درختی با حداقل k یال همرنگ خواهیم داشت و میدانیم که در درخت تعداد راس ها یکی بیشتر از یال ها میباشد پس در نتیجه زیر درخت تک رنگ با حداقل k+1 راس خواهیم داشت.
(n = k)

Q4

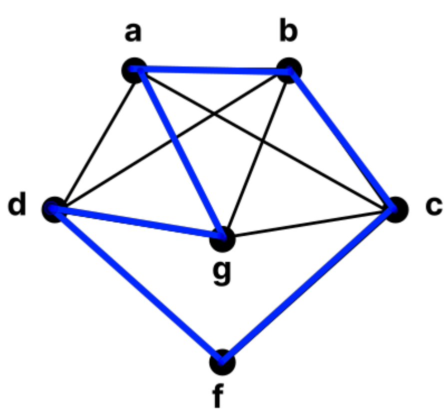
از آنجایی که درجه ی راس های a, c , g دو است پس قطعا یال های همسایه ی آن ها در دور حضور خواهند داشت پس یال های زیر قطعا در دور خواهند بود.



پس با توجه به شکل تنها راس هایی که میتوان از آن ها دور را ادامه داد (یعنی کامل ویزیت نشده اند) h, j می باشند. که با بررسی تمام حالت ها:

- از j به i تنها میتوان رفت و بعد از آن تنها به f میتوان رفت که نهایتا به e میتوان رفت اما دور ایجاد نمیشود(e,h کامل ویزیت نمیشوند.) (اگر قبل از ویزیت تمام راس های باقی مانده به h بروی بدیهی است که دور ایجاد نمیشود)
- از h میتوان به f رفت که بعد از آن میتوان به e رفت که دور ایجاد نمیشود (e,j کامل ویزیت نمیشوند و i اصلا ویزیت نمیشود)
- میتوان از f به i رفت که باز هم دور ایجاد نمیشود(e اصلا ویزیت نمیشود)
- از h میتوان به i رفت سپس به f و e که دور ایجاد نمیشود(e,j کامل ویزیت نمیشوند.) (اگر قبل از ویزیت تمام راس های باقی مانده به j بروی بدیهی است که دور ایجاد نمیشود)

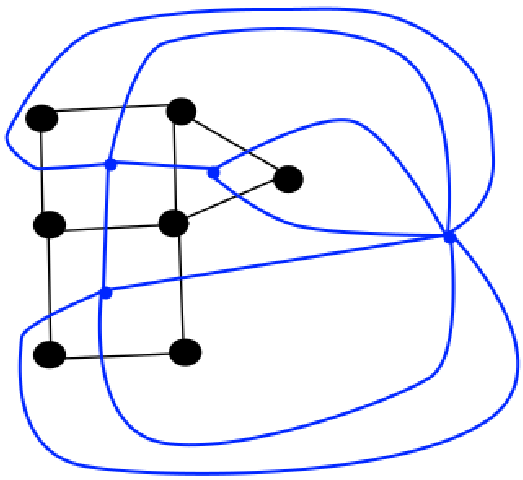
پس در هیچ از یک از حالات دور ایجاد نمیشود و نمی توان دور همیلتونی پیدا کرد پس گراف همیلتونی نیست.

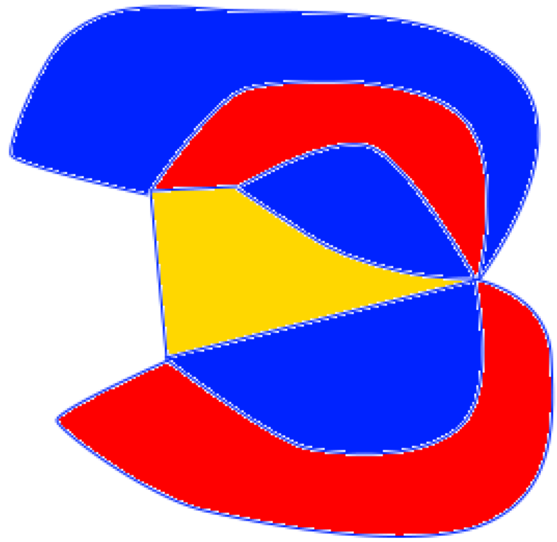


شکل دوم همیلتونی است زیرا دور همیلتونی دارد

Q5

دوال آن و Map coloring آن به صورت زیر می باشد و به حداقل 3 رنگ نیاز داریم.

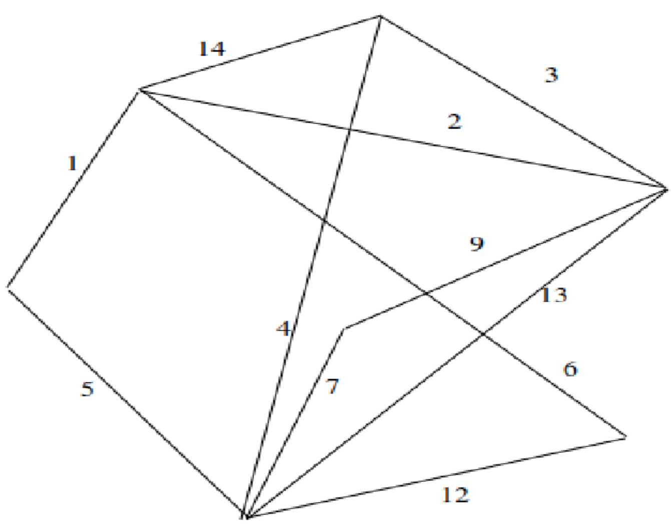




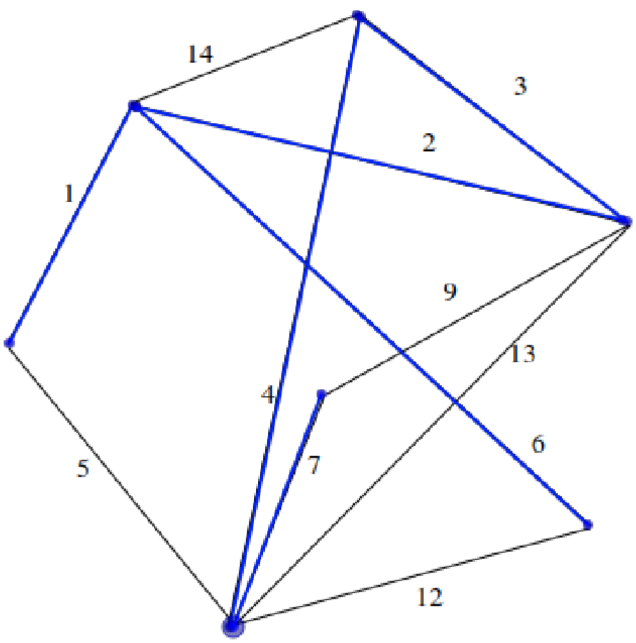
Q6

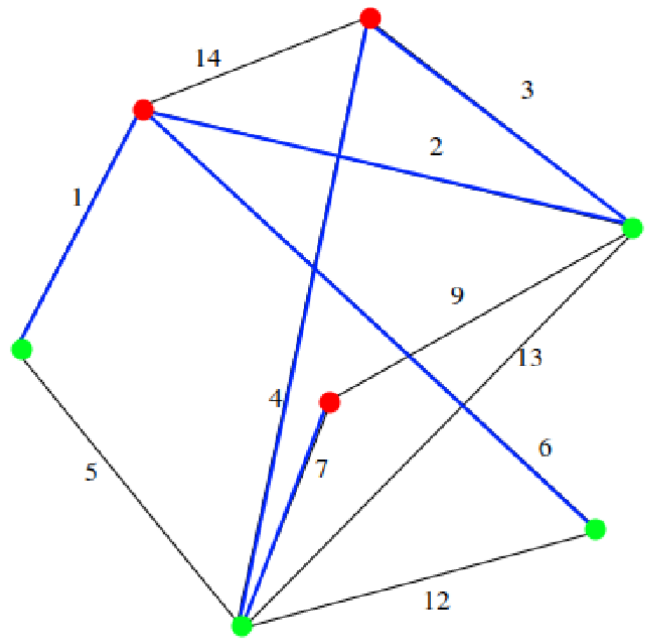
الف)

گراف به صورت زیر است.



MST آن به صورت شکل سمت چپ پایین می باشد و Graph coloring آن به صورت شکل سمت راست می باشد و به حداقل 2 رنگ نیاز داریم.





ب)

بله زیرا از آنجایی که MST یک گراف یک tree یا درخت است و تمام درخت ها دوبخشی bipartite هستند و عدد رنگی گراف bipartite برابر 2 می باشد پس عدد رنگی MST یک گراف ۲ می باشد یعنی همواره به دو رنگ برای graph coloring

MST یک درخت نیاز داریم.