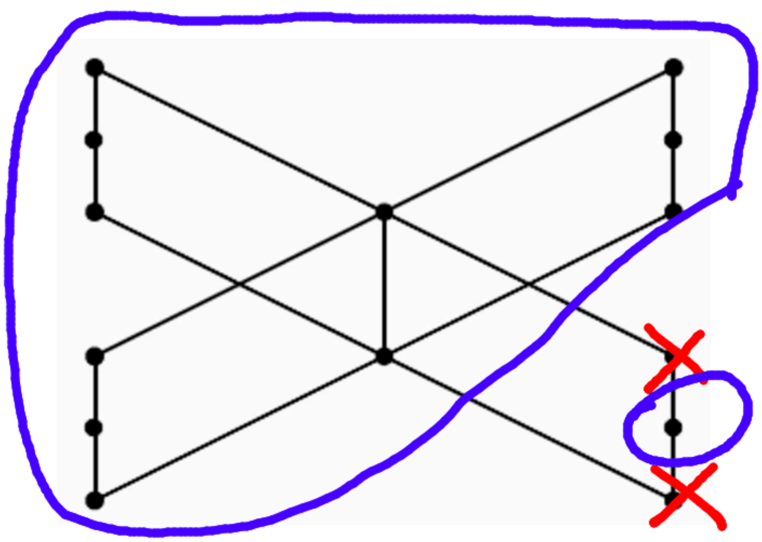
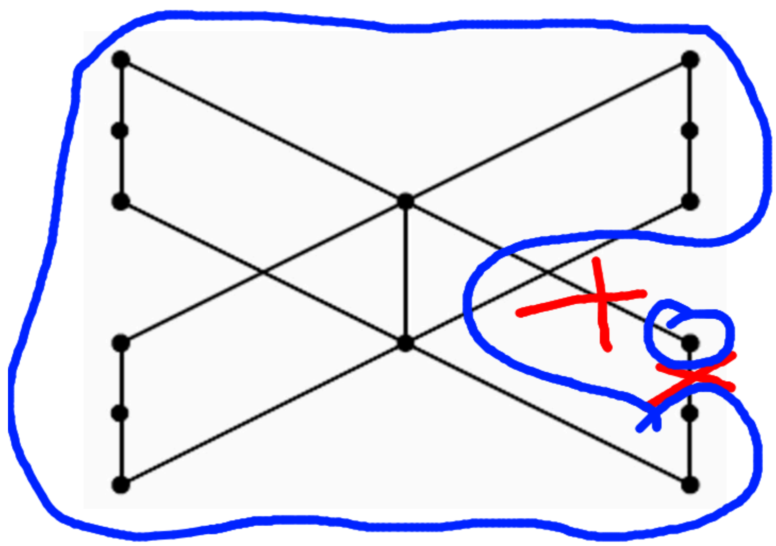
به نام خدا

علی شیخ عطار ۹۹۵۴۲۲۲۲

Q1

- راس برشی ندارد. با حذف هیچ راسی و یال های مجاور آن نمیتوان تعداد کامپوننت های گراف را افزایش داد.
- یال برشی نیز ندارد.با حذف هیچ یالی نمی توان تعداد کامپوننت های گراف را افزایش داد.
- دو یال. حداقل درجه ی هر راس دو می باشد که با حذف یال های مجاور یکی از این راس ها با درجه ی دو میتوان به این مهم رسید.
- دو راس. با استناد به دلیل قبلی با حذف راس های مجاور یکی از این راس های با درجه ی دو میتوان به این مهم رسید.





Q2

چهار رنگ است.

طبق تئوری Appel, Haken در سال ۱۹۹۷ اثبات شد که در یک گراف مسطح (Planar) میتوان تمام وجه ها را با 4 رنگ رنگ کرد به طوری که هیچ وجه مجاوری رنگ مشابه نداشته باشد.

اگر نقشه ی مسطح کره ی زمین را گراف در نظر بگیریم به طوری که کشور ها وجه های آن باشند آنگاه میتوان تمام کشور ها را به ۴ رنگ رنگ آمیزی کرد به طوری که کشورهای همسایه رنگهای یکسان نداشته باشند.

اثبات: قضیه چهار رنگ اظهار می‌کند که هر نقشه‌ای (که می‌تواند توسط یک گراف محوری شده باشد) می‌تواند با استفاده از حداکثر چهار رنگ رنگ‌آمیزی شود به گونه‌ای که هیچ دو منطقه مجاور (یا صفحات در گراف) رنگ یکسان نداشته باشند.

برای درک اینکه چرا این موضوع درست است، بیایید یک شرح مختصر از اثبات را در نظر بگیریم:

استقرای تکراری بر روی تعداد گره‌ها: می‌توانیم این قضیه را با استقرا بر روی تعداد گره‌ها در گراف اثبات کنیم. مورد پایه به سادگی قابل اثبات است زیرا گراف‌های با تعداد کمی از گره‌ها به راحتی رنگ‌آمیزی می‌شوند. فرض کنید قضیه برای تمام گراف‌هایی که دارای کمتر از n گره هستند صحیح باشد.

کاهش گراف: یک گراف محوری با n گره را در نظر بگیرید. می‌توانیم با حذف یک گره با درجه ۵ یا کمتر به همراه یال‌های متصل به آن، شروع به کاهش اندازه گراف کنیم. این حذف باعث جدا نشدن گراف می‌شود و یک گراف محوری کوچک‌تر باقی می‌ماند. این فرآیند را ادامه دهید تا تمام گره‌های باقی‌مانده دارای درجه ۶ یا بیشتر باشند. این امکان پذیر است زیرا هر گراف محوری حداقل یک گره با درجه کمتر مساوی ۵ دارد.

استفاده از فرضیه استقرا: گراف کاهش یافته همچنان شرایط لازم برای فرضیه استقرا را داراست، یعنی می‌توان آن را با چهار رنگ رنگ‌آمیزی کرد.

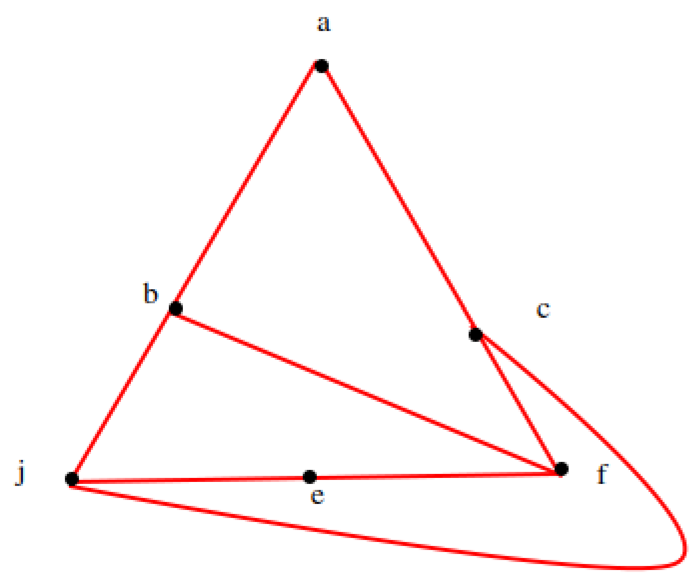
بازگرداندن گره‌های حذف شده: حال می‌توانیم گره‌های حذف شده را یکی یکی بازگردانیم. هر بار که یک گره را اضافه می‌کنیم، حداکثر با پنج گره دیگر مجاور است. از آنجا که ما چهار رنگ موجود داریم و هر یک از این گره‌های مجاور نمی‌توانند رنگ یکسانی داشته باشند، همیشه رنگی برای گره جدید موجود است.

نتیجه‌گیری: در پایان این فرآیند، ما گراف را با استفاده از حداکثر چهار رنگ رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.

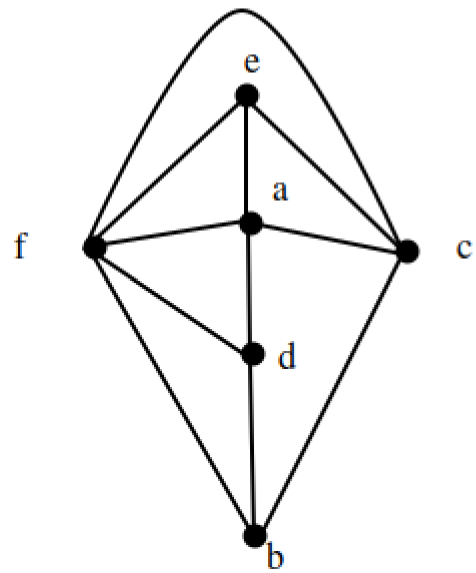
این شرح اثبات نشان می‌دهد که هر گراف محوری می‌تواند با استفاده از چهار رنگ رنگ‌آمیزی شود. نکته کلیدی در اینجا این است که می‌توانیم هر گراف محوری را به یک شکل ساده‌تر کاهش دهیم که قضیه در آن برقرار باشد، سپس به تدریج پیچیدگی را مجدداً وارد کنیم و در عین حال اطمینان حاصل کنیم که شرط چهار رنگ رعایت می‌شود.

Q3

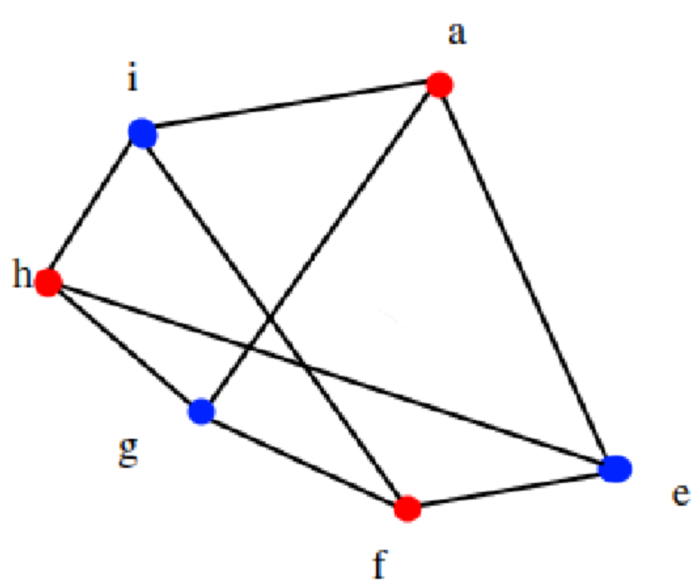
شکل سمت راست مسطح است. شیوه ی دیگر رسم آن(ایزومورف آن):



شکل وسطی مسطح است. شیوه ی دیگر رسم آن(ایزومورف آن):



شکل سمت چپ مسطح نیست.
زیر گرافی از آن را درنظر بگیرید که راس b در آن وجود ندارد.
حال با contract یال d-c و سپس contract یال e-d یال f-e بوجود می آید.
حال زیر گراف به صورت زیر در می آید که یک k3, 3 می باشد.
طبق قضیه میدانیم که اگر minor k3, 3 یا minor k5 در زیرگراف گرافی وجود داشته باشد آن گراف مسطح نیست.



Q4