Algorithmes d'approximation: Retranscription des exercices

Julien Delplanque

22 novembre 2018

1 Note

Ce document est issus des notes d'exercices de plusieurs étudiants de Master 1 prises lors de l'année académique 2015 - 2016.

2 TP 1

Exercice 1. *Les deux graphes n'ont pas été redessiné ici, voir les notes manuscrites...*

Écrivez P_2 sous la forme primale d'un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.

Solution 1. $\min(\sum_j w_j x_j)$ *où* $1 \leq j \leq 12$, $x_i \in \{0,1\} \forall i$ *t.q*

$$x_i = \begin{cases} 1 & si\ S_i \in I \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et $w = (6, 10, 8, 6, 5, 9, 4)$
s.l.c

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & x_1 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & & x_2 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & & x_3 & + & x_4 & \geq & 1 \\
x_1 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 1 \\
x_2 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 1 \\
 & & x_3 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & & x_1 & + & x_5 & \geq & 1 \\
x_2 & + & x_5 & + & x_6 & \geq & 1 \\
 & & x_3 & + & x_6 & \geq & 1 \\
 & & x_1 & + & x_7 & \geq & 1 \\
x_2 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 1 \\
 & & x_7 & + & x_3 & \geq & 1
\end{array}$$

$Z^*_{LP} = 22$ *avec* $x^*(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Exercice 2. *Écrivez sa forme dual et sa relaxation linéaire.*

Solution 2. $\max(\sum_i y_i)$ *où* $1 \leq i \leq 12$ *et* $y_i \in \mathbb{N}$ *(si relaxé :* $y_i \in \mathbb{R}$*)* $y_i \geq 0, \forall i$
s.l.c

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & y_1 & + & y_4 & + & y_7 & + & y_{10} & \leq & 6 \\
 & & & & y_2 & + & y_5 & + & y_8 & + & y_{11} & \leq & 11 \\
 & & & & y_3 & + & y_6 & + & y_8 & + & y_{12} & \leq & 8 \\
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & \leq & 6 \\
 & & & & y_4 & + & y_5 & + & y_7 & + & y_8 & \leq & 5 \\
 & & & & & & y_8 & + & y_9 & + & y_{11} & \leq & 9 \\
 & & & & & & y_{10} & + & y_{11} & + & y_{12} & \leq & 4
\end{array}$$

$z^*_{LP} = 22$ *avec* $(y^*)^T = (0, 6, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 7, 3, 0, 1)$

Exercice 3. *Calculez le paramètre f de l'algorithme* DET-ROUND-SC.

Solution 3.

$$\begin{aligned} f &= \max_{i\in\{1,\ldots,12\}}(f_i) \text{ où } f_i = |\{j : e_i \in S_j\}| \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc la solution sera au pire 3 fois la solution optimale : $APP \leq 3OPT$

Exercice 4. *Utilisez* DET-ROUND-SC *pour calculer une solution au problème en nombre entiers et verifiez la garantie à fortiori de l'algorithme.*

Solution 4. *On construit la solution approchée au problème* P_2 *de la manière suivante :*

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i^* < \frac{1}{f}, x^* \text{ étant la solution du problème relaxé} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, $x = (1,0,1,1,1,1,1)$*,* $APP = 38$*.*
$OPT = 23$ *est atteint en selectionnant* S_3, S_4, S_5 *et* S_7*.*

$$\frac{APP}{OPT} = \frac{38}{23}$$

La garantie à fortiori est donnée par :

$$\alpha = \frac{APP}{Z_{LP}^*} = \frac{38}{22}$$

Cela implique que $APP \leq 2OPT$

Exercice 5. *Utilisez* DUAL-ROUND-SC *et vérifiez le facteur d'approximation.*

Solution 5. *Injectons les* y_i^* *de* $(y^*)^T = (0,6,0,0,0,0,3,2,7,3,0,1)$ *dans les équations du dual de la solution de l'exercice 2.*

On va sélectionner S_j *dans la solution approchée ssi* $\sum\limits_{i \text{ t.q } v_i \in S_j} y_i = w_j$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & 0 & + & 0 & + & 3 & + & 3 & = & 6 \\ & & & & 6 & + & 0 & + & 3 & + & 0 & \leq & 11 \\ & & & & 0 & + & 0 & + & 7 & + & 1 & = & 8 \\ 0 & + & 6 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & 6 \\ & & & & 0 & + & 0 & + & 3 & + & 2 & = & 5 \\ & & & & & & 2 & + & 7 & + & 0 & = & 9 \\ & & & & & & 3 & + & 0 & + & 1 & = & 4 \end{array}$$

On obtient la même solution que pour DET-ROUND-SC *:*

$$y = (1,0,1,1,1,1,1)$$

On a bien $38 \leq 23f = 23.3 = 69$*.*

Exercice 6. *Utilisez* GREEDY-SC *pour résoudre* P_1*.*

Solution 6. ***Données :***

i	S_i
1	$\{1,4,7,10\}$
2	$\{2,5,8,11\}$
3	$\{3,6,9,12\}$
4	$\{1,2,3,4,5,6\}$
5	$\{4,5,7,8\}$
6	$\{8,9,11,12\}$
7	$\{10,11\}$

i	$\lvert S_i \rvert$	w_i
1	4	6
2	4	10
3	4	8
4	6	6
5	4	5
6	4	9
7	2	4

Init :

- $I = \{\}$
- $\widehat{S}_j = S_j, \forall j$

Itération 1 :

j	1	2	3	4	5	6	7
w_j	6	10	8	6	5	9	4
$\lvert\widehat{S}_j\rvert$	4	4	4	6	4	4	2

- $l = 4$
- $I = \{4\}$

i	$\widehat{S}_i$
1	$\{7,10\}$
2	$\{8,11\}$
3	$\{9,12\}$
4	$\{\}$
5	$\{7,8\}$
6	$\{8,9,11,12\}$
7	$\{10,11\}$

Itération 2 :

j	1	2	3	4	5	6	7
w_j	6	10	8	/	5	9	4
$\lvert\widehat{S}_j\rvert$	2	2	2	/	2	4	2

- $l = 7$
- $I = \{4,7\}$

i	$\widehat{S}_i$
1	$\{7\}$
2	$\{8\}$
3	$\{9,12\}$
4	$\{\}$
5	$\{7,8\}$
6	$\{8,9,12\}$
7	$\{\}$

Itération 3 :

j	1	2	3	4	5	6	7
w_j	6	10	8	/	5	9	/
$\lvert\widehat{S}_j\rvert$	1	1	2	/	2	3	/

- $l = 5$
- $I = \{4,7,5\}$

i	$\widehat{S}_i$
1	$\{\}$
2	$\{\}$
3	$\{9, 12\}$
4	$\{\}$
5	$\{\}$
6	$\{9, 12\}$
7	$\{\}$

Itération 4 :

j	1	2	3	4	5	6	7
w_j	/	/	8	/	/	9	/
$\lvert\widehat{S}_j\rvert$	/	/	2	/	/	2	/

— $l = 3$
— $I = \{4, 7, 5, 3\}$

i	$\widehat{S}_i$
1	$\{\}$
2	$\{\}$
3	$\{\}$
4	$\{\}$
5	$\{\}$
6	$\{\}$
7	$\{\}$

$\Rightarrow$ *La solution est donc* $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$. *$APP = 23$ et $OPT = 21$ (avec S_1, S_4 et S_6).*

Exercice 7. *Calculez le paramètre g pour la méthode précédente et vérifiez son facteur d'approximation.*

Solution 7. *Pour* GREEDY-SC, $g = \max_j |S_j$. *Ici,* $g = 6$.

GREEDY-SC *a unfacteur d'approx H_g, le $g^{ième}$ nombre harmonique (c.f. notes de cours).*

$$H_g = \sum_{i=1}^{g} \frac{1}{i} = 2.45$$