

# Formulaire et résumé de Traitement du Signal

Gaëtan Staquet

Année académique 2018-2019

## **Résumé**

Ce document est un formulaire/résumé du cours de Traitement du Signal donné par Thierry Dutoit en l'année académique 2018-2019. Il est distribué sous licence MIT. Il ne vise pas à expliquer le cours mais tente de rendre le cours plus compact (en ignorant les parties purement théoriques).

Le premier chapitre est un formulaire brut, c'est-à-dire que les formules et résultats sont donnés tels quels. Les chapitres suivants résument chacun un chapitre du cours.

Pour rappel, le chapitre 5 du cours ne concerne pas les étudiants de la Faculté des Sciences.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Formulaire</b>	<b>1</b>
1.1	Signaux usuels . . . . .	1
1.2	Systèmes numériques . . . . .	2
1.2.1	Stabilité . . . . .	2
1.2.2	Convolution . . . . .	2
1.2.3	Transformée en $Z$ . . . . .	2
1.3	Opérations sur les signaux . . . . .	2
1.3.1	Opérations élémentaires . . . . .	2
1.3.2	Produit scalaire . . . . .	3
1.3.3	Convolution . . . . .	3
1.3.4	Convolution circulaire . . . . .	3
1.4	Transformée de Fourier (temps continu) . . . . .	4
1.4.1	Fonctions non périodiques . . . . .	4
1.4.2	Fonctions périodiques . . . . .	4
1.5	Transformée de Fourier à temps discret . . . . .	5
1.5.1	Fonctions non périodiques . . . . .	5
1.5.2	Fonctions périodiques . . . . .	5
1.6	Fonction de réponse en fréquence $H(\varphi)$ . . . . .	5
1.7	Echantillonnage . . . . .	5
1.7.1	Théorème de Shannon . . . . .	5
1.7.2	Décimer . . . . .	5
1.7.3	Interpoler . . . . .	6
1.7.4	Théorème de Shannon généralisé . . . . .	6
1.8	Transformée de Fourier Discrète . . . . .	6
1.8.1	Fenêtres usuelles . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Systèmes numériques</b>	<b>9</b>
2.1	Systèmes (non) récurrents . . . . .	9
2.1.1	Représentation graphique (graphe de fluence) . . . . .	10
2.2	Réponse impulsionnelle . . . . .	10
2.3	Réponse forcée à une entrée quelconque . . . . .	10
2.3.1	Stabilité et réponse impulsionnelle . . . . .	10
2.4	Transformée en $Z$ - Pôles et zéros d'un SLI . . . . .	11
2.4.1	Stabilité et pôles . . . . .	11
2.4.2	Inverse d'un SLI . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Analyse fréquentielle des signaux et systèmes numériques</b>	<b>13</b>
3.1	Analyse fréquentielle des signaux analogiques . . . . .	13
3.1.1	Transformée de Fourier d'un signal d'énergie finie . . . . .	13
3.1.2	Transformée de Fourier d'une fonction périodique . . . . .	14

3.1.3	Notation en $\omega$ . . . . .	14
3.2	Analyse fréquentielle des signaux à temps discret . . . . .	15
3.2.1	Transformée de Fourier à temps discret . . . . .	15
3.2.2	TFTD d'une fonction périodique . . . . .	16
3.3	Réponse en fréquence d'un SLI numérique . . . . .	17
3.3.1	Réponse à une exponentielle imaginaire . . . . .	17
3.3.2	Lien entre $H(z)$ et $H(\varphi)$ . . . . .	17
3.3.3	Interprétation géométrique . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Echantillonnage</b> . . . . .	<b>19</b>
4.1	Recouvrement spectral (aliasing) . . . . .	19
4.2	Théorème de Shannon . . . . .	20
4.3	Reconstruction du signal à temps continu . . . . .	20
4.4	Changement de fréquence d'échantillonnage . . . . .	20
4.4.1	Décimation . . . . .	20
4.4.2	Interpoler . . . . .	21
4.5	Filtre de garde réel et sur-échantillonnage (oversampling) . . . . .	21
4.6	Filtre de lissage réel et sur-échantillonnage (oversampling) . . . . .	21
4.7	Théorème de Shannon généralisé . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Transformée de Fourier Discrète</b> . . . . .	<b>23</b>
5.1	Transformée de Fourier Discrète . . . . .	23
5.1.1	Interprétation géométrique . . . . .	23
5.1.2	Interprétation spectrale . . . . .	23
5.1.3	Convolution circulaire . . . . .	23
5.1.4	Propriétés . . . . .	24
5.2	Transformée de Fourier Rapide . . . . .	24
5.3	Observation spectrale . . . . .	24
5.3.1	Signal périodique . . . . .	25
5.3.2	Signal non-périodique . . . . .	25
5.3.3	Calcul de la TFTD sur $N_{TFD}$ points en fréquence . . . . .	26
5.3.4	Pondération par une fenêtre . . . . .	26
5.3.5	Analyse à court-terme . . . . .	27
5.4	Convolution linéaire . . . . .	27
5.5	Conclusion . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Synthèse des filtres numériques</b> . . . . .	<b>29</b>
6.1	Cellule du second degré . . . . .	29
6.1.1	Résonateur du second degré . . . . .	29
6.1.2	Filtre coupe-bande du second degré . . . . .	30
6.1.3	Implémentation d'une cellule du second degré . . . . .	30
6.2	Synthèse des filtres IIR . . . . .	32
6.2.1	Butterworth - Chebyshev - Cauer . . . . .	32
6.2.2	Le problème de la quantification des coefficients . . . . .	32
6.2.3	Le problème du bruit de calcul . . . . .	32
6.3	Synthèse des filtres FIR . . . . .	32
	<b>Index</b> . . . . .	<b>35</b>
	<b>Liste des symboles</b> . . . . .	<b>37</b>

# Chapitre 1

## Formulaire

### 1.1 Signaux usuels

Par convention, quand  $n$  est la variable, le temps est discret tandis que, quand  $t$  est la variable, le temps est continu. Pour les signaux usuels, il est facile de passer du temps discret au temps continu.

*Remarque 1.1.1.* Les graphiques ne sont pas donnés ici mais sont présents dans le cours.

— Impulsion de Dirac :  $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

— Train d'impulsions de Dirac (ou peigne de Dirac) :  $\delta_{n_0}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = k n_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

— Echelon unité :  $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$

— Rectangle :  $rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

— Triangle :  $tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

— Exponentielle imaginaire (ou phaseur) :  $Ae^{j\omega_0 t}$  où  $A$  est une constante complexe donnant le rayon de l'hélice et  $\omega_0$  est la vitesse angulaire.

— Sinus cardinal (ou fonction pieuvre) :  $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ . Ce signal est complexe.

— Signal sinusoïdal :  $a \cos(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $a$  la valeur de crête,  $\omega_0$  la pulsation (en  $rad/s$ ) et  $\varphi$  la phase à l'origine (en  $rad$ ). On peut citer deux cas particuliers :

- $a \sin(\omega_0 t)$ , la projection d'un phaseur sur l'axe imaginaire
- $a \cos(\omega_0 t)$ , la projection d'un phaseur sur l'axe réel

— Exponentielle complexe :  $Ae^{(\sigma + j\omega)t}$  avec  $A$  l'amplitude,  $\sigma$  l'amortissement du signal,  $\omega = 2\pi f$  et  $f$  la fréquence de rotation de l'exponentielle imaginaire autour de l'origine. Le signal est amorti si  $\sigma$  est négatif. L'inverse de  $\sigma$  est  $\tau$  et appelé constante de temps.

## 1.2 Systèmes numériques

### 1.2.1 Stabilité

Il faut que  $\forall i, |h(n-i)| < \infty$ .

### 1.2.2 Convolution

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) * h(n) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i) \end{aligned}$$

### 1.2.3 Transformée en Z

#### 1.2.3.1 Signaux usuels

— L'exponentielle décroissante avec  $|a| < 1$  :

$$\{a^n \varepsilon(n)\} \xrightarrow{Z} \sum_{i=0}^{+\infty} a^i z^{-i} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

On a un pôle réel en  $z = a$  et un zéro en 0.

— L'exponentielle décroissante complexe avec  $|\rho| < 1$

$$\{\rho^n e^{jn\varphi} \varepsilon(n)\} \xrightarrow{Z} \sum_{i=0}^{+\infty} \rho^i e^{ji\varphi} z^{-i} = \frac{1}{1 - \rho e^{j\varphi} z^{-1}}$$

On a un pôle en  $z = \rho$  et un zéro en 0.

#### 1.2.3.2 $H(z)$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

## 1.3 Opérations sur les signaux

### 1.3.1 Opérations élémentaires

Les opérations suivantes sont simples à faire subir à des signaux (discrets ou continus) :

- Décalage temporel (ou time-shift) :  $f(t) \longrightarrow f(t - t_0)$  (on décale simplement le signal dans le temps).
- Réflexion (ou time-reversal) :  $f(t) \longrightarrow f(-t)$  (on change le sens du temps).
- Changement d'échelle :  $f(t) \longrightarrow f(\alpha t)$ . Si  $\alpha > 1$ , le signal est contracté (selon l'axe temporel). Si  $\alpha < 1$ , le signal est dilaté (selon l'axe temporel).
- Somme :  $\forall t, z(t) = x(t) + y(t)$ , avec  $x$  et  $y$  deux signaux.
- Produit :  $\forall t, z(t) = x(t) y(t)$ , avec  $x$  et  $y$  deux signaux.

*Remarque 1.3.1.* A partir d'un signal non périodique  $f(t)$ , on peut créer un signal périodique  $f_{T_0}(t)$  en utilisant la somme et le décalage temporel comme suit :

$$f_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT_0)$$

### 1.3.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux signaux complexes  $f(t)$  et  $g(t)$  tels que  $f$  et  $g$  ne sont pas périodiques est :

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t) dt$$

La notation  $g^*(t)$  indique qu'on prend le conjugué des valeurs complexes de  $g(t)$ .

Si  $f$  et  $g$  sont périodiques :

$$\langle f_{T_0}(t), f_T(t) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t)g_T^*(t) dt & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, T = \frac{T_0}{k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'énergie d'un signal est  $E = \langle f(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ . Un signal périodique a une énergie infinie. Pour un signal périodique,  $\langle f_{T_0}(t), f_{T_0}(t) \rangle$  donne sa puissance  $P$ .

### 1.3.3 Convolution

*Remarque 1.3.2.* Cette sous-section traite de la convolution en temps continu. La convolution en temps discret est donnée dans la sous-section 1.2.2.

Soient  $x(t)$  et  $y(t)$  à temps continu et à énergie finie. La convolution est donnée par :

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$$

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont périodiques :

$$z_{T_0}(t) = x_{T_0}(t) * y_T(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$$

avec  $T_0 = kT$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}_0$ . Si les fréquences ne sont pas multiples, la convolution est nulle.

Convolver un signal avec une impulsion de Dirac revient à déplacer l'origine de ce signal à l'origine de l'impulsion :

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

Spécifiquement, on a  $f(t) * \delta(t) = f(t)$ .

On a vu précédemment qu'on peut créer un signal périodique à partir d'un signal non périodique (en utilisant la somme et le décalage temporel). Voici une autre façon de faire en convoluant avec un train d'impulsions de Dirac :

$$f(t) * \delta_{T_0}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta_{T_0}(t - \tau) d\tau = f_{T_0}(t)$$

### 1.3.4 Convolution circulaire

La *convolution circulaire* est définie par :

$$f(n) \otimes g(n) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i)g((n - i) \bmod N)$$

Elle correspond à la convolution entre deux signaux périodiques sous-jacents. Elle n'est donc calculée que sur une période ( $N$  échantillons) et les indices des échantillons sont calculés *modulo*  $N$ .



## 1.4 Transformée de Fourier (temps continu)

### 1.4.1 Fonctions non périodiques

On décompose selon une base d'exponentielles complexes :

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

#### 1.4.1.1 Fonctions usuelles

On donne ici quelques fonctions avec leur transformée de Fourier. Les développements peuvent être trouvés dans le syllabus.

$$\begin{aligned} \text{rect}(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{sinc}(f) \\ \text{tri}(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{sinc}^2(f) \\ \text{sinc}(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{rect}(-f) = \text{rect}(f) \\ \delta(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Les trois premières fonctions ont une seule fréquence caractéristique en  $f = 0$ .

### 1.4.2 Fonctions périodiques

La décomposition devient discrète :

$$F_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \delta(f - kf_0) \text{ avec } F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Série de Fourier :

$$f_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

#### 1.4.2.1 Fonctions usuelles

Comme précédemment, on donne quelques fonctions (périodiques, cette fois) avec leur transformée de Fourier.

*Remarque 1.4.1.* Pour rappel,  $\omega = 2\pi f$ . Plus particulièrement,  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ . De plus,  $T = \frac{1}{f} \Leftrightarrow f = \frac{1}{T}$ .

On a aussi que :

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 t} &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \delta(f - f_0) \\ \cos(\omega_0 t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] && \text{Il y a donc deux fréquences pour le cosinus : } -f_0 \text{ et } f_0 \\ \sin(\omega_0 t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] && \text{Mêmes fréquences que pour le cosinus} \\ 1 &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \delta(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{T_0}(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T_0} \delta_{f_0}(f) && \text{Voir la figure dans le syllabus page 75} \\ \text{rect}_{T_0}(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{\text{sinc}(f)}{2} \\ \text{tri}_{T_0}(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \left| \frac{\text{sinc}^2(f)}{2} \right|\end{aligned}$$

## 1.5 Transformée de Fourier à temps discret

On a :

- $f_e$ , la fréquence d'échantillonnage.
- $T_e = \frac{1}{f_e}$ , la période d'échantillonnage.
- $\omega_e = 2\pi f_e$ , la pulsation d'échantillonnage.

### 1.5.1 Fonctions non périodiques

Les deux équations suivantes décrivent la même TFTD (la première est en fréquence et la seconde en pulsation).

$$\begin{aligned}F^+(F) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{-jn2\pi f} && \text{avec } F = \frac{T_e}{T} = \frac{f}{f_e} \\ F^+(\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{-jn\varphi} && \text{avec } \varphi = 2\pi F = 2\pi \frac{f}{f_e}\end{aligned}$$

### 1.5.2 Fonctions périodiques

On suppose que le signal périodique a une période de  $n_0$  échantillons. Dans ce cas, la période  $T_0$  de la fonction  $f_{T_0}^+$  est égale à  $n_0 T_e$ .

$$F_{T_0}(F) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \delta(\varphi - k\varphi_0) \quad \text{avec } F_k = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n) e^{-jnk\varphi_0}$$

## 1.6 Fonction de réponse en fréquence $H(\varphi)$

La fonction de réponse en fréquence d'un SLI est la TFTD de sa réponse impulsionnelle. Elle peut être simplement calculée via :

$$H(\varphi) = H(z)|_{z=e^{j\varphi}}$$

## 1.7 Échantillonnage

### 1.7.1 Théorème de Shannon

Si on a que  $f_M$  est la plus haute fréquence du signal, il faut que  $f_e \geq 2f_M$

### 1.7.2 Décimer

Pour décimer (diviser la  $f_e$  d') un signal  $x(n)$  par  $k$ , il faut prendre un échantillon sur  $k$  et appliquer un filtre numérique passe-bas de fréquence de coupure égale à  $\frac{f_e}{2k}$ .

### 1.7.3 Interpoler

Pour interpoler (multiplier la  $f_e$  d') un signal  $x(n)$  par  $k$ , il suffit d'ajouter  $k - 1$  échantillons à zéro entre deux échantillons et appliquer un filtre numérique passe-bas de fréquence de coupure égale à  $\frac{kf_e}{2k} = \frac{f_e}{2}$ .

### 1.7.4 Théorème de Shannon généralisé

Pour les signaux pour lesquels l'amplitude spectrale se trouve confinée dans une bande de fréquence de largeur  $B$  centrée autour de  $f_0$ , il faut que  $f_e \geq 2B$  et que  $f_e$  respecte  $Kf_e = f_0 - \frac{B}{2}$  ou  $Kf_e = f_0 + \frac{B}{2}$  avec  $K$  entier.

## 1.8 Transformée de Fourier Discrète

La TFD est définie par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}$$

On peut facilement la représenter sur un cercle de rayon unitaire.

La TFD inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jnk \frac{2\pi}{N}}$$

Calculer la TFD implique toujours de d'abord appliquer une fenêtre. Par défaut, il s'agit d'une fenêtre rectangulaire. Par conséquent, les valeurs de la TFD ne correspondent pas exactement à celles de la transformée de Fourier.

### 1.8.1 Fenêtres usuelles

Donnons d'abord les définitions des fenêtres :

Rectangulaire	$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in [[0, N - 1]] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Hanning	$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\frac{2\pi n}{N}) & \text{si } n \in [[0, N - 1]] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Hamming	$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N}) & \text{si } n \in [[0, N - 1]] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Blackman	$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{N}) & \text{si } n \in [[0, N - 1]] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La Tableau 1.1 donne les caractéristiques des différentes fenêtres.

Fenêtre	Demi-largeur du lobe principal (en fréquence)	Niveau des lobes secondaires (en décibel)
Rectangulaire	$\frac{1}{N}$	$-13\text{ dB}$
Hanning	$\frac{3}{2N}$	$-30\text{ dB}$
Hamming	$\frac{2}{N}$	$-40\text{ dB}$
Blackman	$\frac{11}{4N}$	$-60\text{ dB}$

TABLE 1.1 – Comparaison des fenêtres usuelles



## Chapitre 2

# Systèmes numériques

Un *système numérique* reçoit en entrée une séquence d'échantillons  $\{x(0), x(1), \dots\}$  (notée  $x(n)$ ) et produit en sortie une séquence d'échantillons  $y(n)$  obtenue après applications d'opérations algébriques.

Dans ce document, si un système reçoit  $x(n)$  en entrée et donne  $y(n)$  en sortie, nous écrivons  $x(n) \rightarrow y(n)$ .

Ce chapitre se concentre sur le *domaine temporel*.

Un système numérique est

- *linéaire* ssi  $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \rightarrow \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$  en sortie.
- *invariant* ssi  $x(n - n_0) \rightarrow y(n - n_0)$  en sortie.
- *stable* ssi, quand les entrées sont finies, les sorties sont finies.

Un système numérique linéaire et invariant est noté *SLI*.

**Exemple 2.0.1.** Regardons deux signaux :

- $y(n) = Kx(n) + A$  (avec  $K$  et  $A$  des constantes réelles) est
  - non linéaire car  $x_1(n) \rightarrow Kx_1(n) + A$  et  $x_2(n) \rightarrow Kx_2(n) + A$ . Donc, on devrait avoir  $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \rightarrow K\alpha x_1(n) + K\beta x_2(n) + 2A$  pour que le système soit linéaire. Or, on a  $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \rightarrow K\alpha x_1(n) + K\beta x_2(n) + A$
  - invariant car  $x(n) \rightarrow Kx(n) + A = y(n)$  et, donc, on doit avoir  $y(n - n_0) = Kx(n - n_0) + A$ . On a bien ceci :  $x(n - n_0) \rightarrow Kx(n - n_0) + A = y(n - n_0)$ .
  - stable car  $\lim_{n \rightarrow \infty} Kx(n) + A$  est finie car on suppose que  $x(n)$  est fini.
- $y(n) = nx(n)$ 
  - linéaire car  $x_1(n) \rightarrow nx_1(n)$  et  $x_2(n) \rightarrow nx_2(n)$ . On devrait donc avoir  $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \rightarrow \alpha nx_1(n) + \beta nx_2(n)$ . On a bien ceci :  $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \rightarrow n(\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)) = \alpha nx_1(n) + \beta nx_2(n)$ .
  - non invariant car  $x(n) \rightarrow nx(n) = y(n)$ . On devrait donc avoir  $y(n - n_0) = (n - n_0)x(n - n_0)$ . Or, on a  $x(n - n_0) = nx(n - n_0)$ . Le système n'est donc pas invariant.
  - instable car  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx(n) = \infty$  même si  $x(n)$  est fini (à cause du  $n$  seul).

### 2.1 Systèmes (non) récurrents

On peut écrire la plupart des SLI sous la forme d'*équations aux différences finies, linéaires et à coefficients constants*, comme :

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M)$$

On peut écrire cette équation sous une forme plus compacte :

$$y(n) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (2.1.1)$$

Un système qui a une équation de cette forme est dit *récuratif*. Il faut avoir calculer toutes les sorties précédentes  $n-1, n-2, \dots$  pour calculer la sortie  $n$  (à cause des  $y(n-i)$ ).

Si le système a une équation de la forme suivante (qui est un cas particulier de la forme générale), alors il est dit *non récuratif* :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (2.1.2)$$

L'*ordre* d'un SLI récuratif est donné par  $N$  (le plus grand décalage dans le temps pour les sorties). Pour un SLI non récuratif, il est donné par  $M$  (le plus grand décalage dans le temps pour les entrées).

A partir de maintenant, on dira *filtre numérique* pour un système numérique linéaire et invariant pouvant s'écrire comme (2.1.1). On distingue les *filtres récuratifs* et *filtres non récuratifs*.

### 2.1.1 Représentation graphique (graphe de fluence)

Voir le cours p.26. La sous-section 6.1.3 donne des exemples de représentation graphique.

## 2.2 Réponse impulsionnelle

La *réponse impulsionnelle*, notée  $h(n)$ , d'un SLI numérique est définie comme sa réponse forcée  $y(n)$  en donnant en entrée une impulsion de Dirac. On suppose de plus que  $\forall n < 0, y(n) = 0$ . Pour obtenir  $h(n)$ , il suffit de calculer.

Dans le cas d'un filtre non récuratif,  $h(n)$  est simplement la suite des coefficients  $b_i$ . En effet, l'impulsion de Dirac se propage le long de la chaîne d'éléments à délai. On dit donc qu'un filtre non récuratif est à *réponse impulsionnelle finie* (RIF) .

Dans le cas d'un filtre récuratif,  $h(n)$  est une séquence illimitée. En effet, chaque sortie dépendant des sorties précédentes, on n'aura jamais que la sortie puisse être nulle. Ceci est vrai même quand le filtre est stable. On dit donc qu'un filtre récuratif est à *réponse impulsionnelle infinie* (RII) .

## 2.3 Réponse forcée à une entrée quelconque

*Remarque 2.3.1.* Les interprétations ne sont pas données ici mais sont dans le cours (p.32 à 35).

On peut directement calculer la réponse forcée à une entrée quelconque (comme pour la réponse impulsionnelle). Cependant, en connaissant la réponse impulsionnelle, on peut aller plus vite en faisant une *convolution*. Le symbole de la convolution est  $*$ .

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i) \quad (2.3.1)$$

On peut montrer que le produit de convolution est commutatif :

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i) \quad (2.3.2)$$

### 2.3.1 Stabilité et réponse impulsionnelle

Une conséquence importante de l'Équation 2.3.1 est que la stabilité d'un filtre numérique peut être vérifiée sur base de sa réponse impulsionnelle. La condition est la suivante :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(n-i)| < +\infty$$

Comme, en pratique, on se limite aux premiers échantillons de la réponse impulsionnelle (ceux dont la valeur est supérieure à un certain seuil, typiquement  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$ ), on peut réduire la condition à :

$$\forall -\infty < i < +\infty, |h(n-i)| < +\infty$$

## 2.4 Transformée en Z - Pôles et zéros d'un SLI

La transformée en Z, notée  $X(z)$ , d'une séquence numérique  $\{x(n)\}$  est :

$$\{x(n)\} \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)z^{-i}$$

Il est évidemment possible de prendre la transformée en Z de  $\{h(n)\}$ . Cette transformée est la *fonction de transfert en Z* et est notée  $H(z)$ . Il suffit de remplacer  $x$  par  $h$  dans l'équation précédente.

La transformée en Z de la sortie du système est donnée par :

$$y(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = X(z)H(z)$$

On peut donc dire que  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  et on peut écrire  $H(z)$  sous une forme plus simple (avec  $a_0 = 1$ ) :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

Avec cette écriture, trouver  $H(z)$  en connaissant l'équation aux différences finies d'un filtre est immédiat.

On définit les *zéros* d'un SLI numérique comme les racines du numérateur de  $H(z)$  tandis que les *pôles* sont les racines du dénominateur. On peut les représenter dans un cercle unitaire complexe. Dans le cours, un zéro est représenté par un rond et un pôle par une croix.

### 2.4.1 Stabilité et pôles

Un SLI numérique est strictement stable si ses pôles sont tous à l'intérieur du cercle de rayon unité (cercle non compris), et stable si on accepte aussi les pôles simples.

### 2.4.2 Inverse d'un SLI

*Remarque 2.4.1.* Cette sous-section est inspirée de l'exercice 1.11.b du syllabus.

Ce qui est dit ici ne marche que pour les systèmes qui ont une entrée et une sortie ! C'est, apparemment, plus compliqué dans le cas où on a un système avec plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties.

On a un SLI qui reçoit  $x(n)$  en entrée et produit  $y(n)$ . On veut construire un autre SLI qui prend  $y(n)$  en entrée et produit  $x(n)$ . En connaissant  $H(z)$  du premier système, c'est plutôt simple : la fonction de transfert du second système est  $\frac{1}{H(z)}$  (à condition que  $H(z) \neq 0$ , évidemment). A partir de là, il est aisé de trouver les coefficients du système.





## Chapitre 3

# Analyse fréquentielle des signaux et systèmes numériques

Dans le chapitre 2, on a utilisé uniquement le domaine temporel. Dans ce chapitre, nous allons parler du *domaine fréquentiel*, c'est-à-dire que nous allons analyser les *fréquences* des signaux et systèmes numériques.

### 3.1 Analyse fréquentielle des signal analogiques

Un signal analogique est un signal continu, contrairement à un signal numérique.

#### 3.1.1 Transformée de Fourier d'un signal d'énergie finie

On peut décomposer un signal en plusieurs impulsions de Dirac grâce à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

On peut voir cette équation comme la décomposition de  $f(t)$  en une somme pondérée (et continue) de fonctions de base orthonormées... Néanmoins, il semblerait que ce ne soit pas très utile dans ce cours.

Il est également possible de décomposer un signal d'énergie finie comme une somme pondérée et continue de fonctions de base  $\{e^{j\omega t}\}$  avec  $\omega \in [-\infty, +\infty]$ , c'est-à-dire des exponentielles imaginaires. Ceci s'exprime comme suit :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j\omega t} df \quad (3.1.1)$$

Les coefficients complexes  $F(f)$  sont fonction de la variable  $f$  (qui est la fréquence. Pour rappel,  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ). Ces coefficients constituent la *transformée de Fourier* de  $f(t)$ , notée  $F(f)$ .

Si on admet que les exponentielles imaginaires constituent une base une base de l'ensemble des fonctions d'énergie finie, cette base est orthonormée. On peut donc obtenir que les coefficients intervenant dans la décomposition de  $f(t)$  sur ces fonctions de base peuvent être obtenus par simple projection de  $f(t)$  sur les fonctions de base :

$$F(f) = \langle f(t), e^{j\omega t} \rangle$$

Avec ceci, on obtient l'expression suivante :

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.2)$$

Le couple  $f(t)$  et  $F(f)$  constitue une *paire de transformées de Fourier*. On note cette relation par :

$$f(t) \xLeftrightarrow F(f)$$

### 3.1.1.1 Amplitude et phase

Si on définit l'*amplitude*  $A(f)$  et la *phase*  $\varphi(f)$  de la transformée de Fourier par :

$$F(f) = A(f)e^{j\varphi(f)}$$

Pour que  $f(t)$  soit une fonction réelle,  $A(f)$  doit être une fonction paire et  $\varphi(f)$  doit être une fonction impaire.

*Remarque 3.1.1.* Dans ce cours, toutes les fonctions analysées sont réelles, sauf l'exponentielle imaginaire.

On a :

$$F(0) = \langle f(t), e^{j0t} \rangle = \langle f(t), 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = A(0)$$

### 3.1.1.2 Propriétés de la transformée de Fourier

La liste complète des propriétés peut être trouvée dans le syllabus à la page 68. On ne donne ici que quelques propriétés :

Réflexion	$f(-t) \xLeftrightarrow{F} F^*(f)$ <sup>1</sup>
Changement d'échelle	$f(at) \xLeftrightarrow{F} \frac{1}{ a } F\left(\frac{f}{a}\right)$
Somme	$\sum_i a_i f_i(t) \xLeftrightarrow{F} \sum_i a_i F_i(f)$
Produit	$f(t)g(t) \xLeftrightarrow{F} F(f) * G(f)$
Convolution	$f(t) * g(t) \xLeftrightarrow{F} F(f)G(f)$
Produit scalaire	$\langle f(t), g(t) \rangle \xLeftrightarrow{F} \langle F(f), G(f) \rangle$

### 3.1.2 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

La transformée de Fourier d'une fonction périodique devient :

$$F_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \delta(f - kf_0) \text{ avec } F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.1.3)$$

On a donc que la transformée de Fourier d'un signal périodique est discrète.

On peut réduire la somme continue (3.1.1) à une somme discrète, que l'on appelle *série de Fourier* associée à  $f_{T_0}(t)$  :

$$f_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.1.4)$$

### 3.1.3 Notation en $\omega$

Parfois, on préfère représenter la transformée de Fourier en utilisant la variable de *pulsation*  $\omega$  plutôt qu'avec la fréquence  $f$ .

On a :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

---

1. Pour rappel,  $F^*(f)$  indique qu'on prend les complexes conjugués de  $F(f)$ .

Pour la plupart des fonctions, le passage de  $F(f)$  à  $F(\omega)$  est immédiat car  $F(\omega) = F(f)$ . Le changement d'échelle ne change rien à la valeur de la fonction. Seul l'axe des abscisses est modifié (1 devient  $2\pi$ , 2 devient  $4\pi$ , etc. Cf graphique page 78 du syllabus).

Cependant, il existe un cas important où le changement d'échelle modifie la valeur de la transformée : l'impulsion de Dirac. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega$$

Ceci impose que  $\delta(f) = 2\pi\delta(\omega)$ .

Ceci implique aussi que les transformées qui se basent sur les impulsions de Dirac (comme les transformées des sinusoides) sont modifiées lors du changement d'échelle !

**Exemple 3.1.1.** Regardons le cosinus :

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

On a deux pics en  $-f_0$  et  $f_0$  de valeur  $\frac{1}{2}$ . Ces deux pics deviennent deux pics en  $-\omega_0$  et  $\omega_0$  de valeur  $\pi$ .

## 3.2 Analyse fréquentielle des signaux à temps discret

Jusqu'à présent, nous avons traité des signal analogiques (donc continus). Nous voulons aussi nous intéresser aux signaux numériques (donc discrets).

### 3.2.1 Transformée de Fourier à temps discret

Pour étudier les fréquence d'un signal à temps discret composé d'une séquence d'échantillons  $\{f(n)\}$ , il faut associer aux échantillons une échelle de temps. On le fait grâce à la fonction analogique  $f^+(t)$  composée d'une suite d'impulsions de Dirac espacées d'un temps  $T_e$  appelé *période d'échantillonnage*. Evidemment, les valeurs de  $f^+(t)$  sont égales aux échantillons  $f(n)$ .

$$f^+(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\delta(t - nT_e)$$

La *fréquence d'échantillonnage* est  $f_e = \frac{1}{T_e}$  et  $\omega_e = 2\pi f_e$  est la *pulsation d'échantillonnage*.

On peut simplement définir la *transformée de Fourier à temps discret* (qu'on raccourcit en TFD) comme la transformée de Fourier de  $f^+(t)$ . On peut écrire la formule simplement sous la forme :

$$F^+(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-jn2\pi f} \quad \text{avec } F = \frac{T_e}{T} = \frac{f}{f_e} \quad (3.2.1)$$

où  $F$  est la *fréquence normalisée* sans dimension et  $T = \frac{1}{f}$  ( $f$  étant la véritable variable de la fonction étant donné que  $f_e$  est une constante pour le signal (idem pour  $T_e = \frac{1}{f_e}$ )).

On définit la *pulsation normalisée*  $\varphi$  (parfois notée  $\Omega$ ) comme  $\varphi = 2\pi F$ . On obtient la notation plus compacte :

$$F^+(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-jn\varphi} \quad \text{avec } \varphi = 2\pi F = 2\pi \frac{f}{f_e} \quad (3.2.2)$$

On a donc que  $F^+(F)$  est une fonction périodique en  $F$  de période 1 (ce qui correspond à une période de  $f_e$  en fréquence non normalisée) et que  $F^+(\varphi)$  est une fonction périodique en  $\varphi$  de période  $2\pi$  (ce qui correspond à une période de  $\omega_e$  en pulsation non normalisée).

*Remarque 3.2.1.* La TDF d'un signal discret est continue et périodique !

On a aussi que le signal  $\{f(n)\}$  et la fonction  $F^+(t)$  forment une *paire de transformées de Fourier à temps discret*, notée :

$$\{f(n)\} \xLeftrightarrow{TFTD} F^+(F)$$

Pour ne pas alourdir les notations, on va laisser tomber le  $+$  :

$$\{f(n)\} \xLeftrightarrow{TFTD} F(F)$$

Comme c'était déjà le cas pour la transformée de Fourier, la TFTD  $F(F)$  d'un signal  $\{f(n)\}$  réel est telle que  $F(-F) = F^*(F)$ , c'est-à-dire que les valeurs de  $F(F)$  entre 0 et 1 sont les complexes conjugués des valeurs de  $F(F)$  entre -1 et 0 : le module de la TFTD est pair et son argument est impair.

### 3.2.1.1 Interprétation géométrique

Voir le syllabus page 81.

### 3.2.1.2 Propriétés de la TFTD

Comme pour la transformée de Fourier, on ne donne que quelques propriétés. La liste complète se trouve à la page 83 du syllabus.

Réflexion	$f(-n) \xLeftrightarrow{TFTD} F^*(F)$
Changement d'échelle	$f(an) \xLeftrightarrow{TFTD} \frac{1}{ a } F\left(\frac{F}{a}\right)$
Somme	$\sum_i a_i f_i(n) \xLeftrightarrow{TFTD} \sum_i a_i F_i(F)$
Produit	$f(n)g(n) \xLeftrightarrow{TFTD} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(F - \Phi)G(\Phi) d\Phi$
Convolution	$f(n) * g(n) \xLeftrightarrow{TFTD} F(F)G(F)$
Produit scalaire	$\sum_n f(n)g^*(n) \xLeftrightarrow{TFTD} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(F)G^*(F) dF$

### 3.2.2 TFTD d'une fonction périodique

Dans le cas d'un signal périodique à temps discret de période égale à  $n_0$  échantillons, noté  $\{f_{n_0}(n)\}$ , on périodifie la fonction  $f^+(t)$  pour obtenir  $f_{T_0}^+(t)$  :

$$f_{T_0}^+(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^+(t - kn_0T_e)$$

La période  $T_0$  de  $f_{T_0}^+$  est égale à  $n_0T_e$ .

La TDFT du signal périodique est une suite d'impulsions de Dirac en fréquence (comme pour la transformée de Fourier à temps continu) dont les valeurs sont données par les produits scalaires obtenus par :

$$F_{T_0}(F) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \delta(\varphi - k\varphi) \quad \text{avec } F_k = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n) e^{-jnk\varphi_0} \quad (3.2.3)$$

*Remarque 3.2.2.* Si on applique (3.2.3) à un signal à temps discret et non périodique,  $F_{T_0}(F)$  est périodique de période 1.

Les signaux périodiques à temps discret possèdent donc un spectre de raies de pas  $\frac{1}{n_0}$  (en  $F$ ). Ce spectre de raies est lui-même périodique de période 1 (en  $F$ ). L'amplitude des raies est égale à l'amplitude du spectre du signal non périodique sous-jacent  $f^+(t)$  divisée par la période  $T_0$ .

On peut réduire la somme continue (3.1.1) à une somme discrète, que l'on appelle *série de Fourier à temps discret* associée à  $f_{T_0}^+(t)$  :

$$f_{T_0}^+(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk}$$

*Remarque 3.2.3.* La TFTD d'un signal discret périodique est discrète et périodique !

### 3.3 Réponse en fréquence d'un SLI numérique

#### 3.3.1 Réponse à une exponentielle imaginaire

Soit un SLI numérique. Donnons-lui en entrée une exponentielle imaginaires  $x(n) = e^{jn\varphi} (\forall n \in [-\infty, +\infty])^2$ . La réponse du SLI est :

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)e^{j(n-i)\varphi} \\ &= e^{jn\varphi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)e^{-ji\varphi} \\ &= e^{jn\varphi} H(\varphi) \end{aligned} \quad \text{avec } H(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\varphi}$$

On a donc que la réponse de régime d'un SLI à une exponentielle imaginaire n'est autre que l'exponentielle imaginaire d'entrée, multipliée par un facteur complexe  $H(\varphi)$  qui dépend de la pulsation normalisée  $\varphi$  de l'exponentielle.

$H(\varphi)$  est appelée la *fonction de réponse en fréquence* (ou *transmittance isochrone*) du SLI.

On a que la réponse en fréquence d'un SLI est la TFTD de sa réponse impulsionnelle.

#### 3.3.2 Lien entre $H(z)$ et $H(\varphi)$

On a :

$$H(\varphi) = \left. \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \right|_{z=e^{j\varphi}} = H(z)|_{z=e^{j\varphi}} \quad (3.3.1)$$

Pour calculer la fonction de réponse en fréquence d'un SLI, il suffit donc de connaître la fonction de transfert en  $Z$  et de changer chaque occurrence de  $z$  par  $e^{j\varphi}$ .

En d'autres termes, la réponse en fréquence d'un SLI numérique est égale à sa transformée en  $Z$  calculée sur le cercle de rayon unité.

#### 3.3.3 Interprétation géométrique

Voir syllabus page 89.

---

2. La notation  $[[a, b]]$  indique un intervalle dont tous les éléments sont des entiers, c'est-à-dire que  $[[a, b]] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ .



## Chapitre 4

# Echantillonnage

Regardons maintenant comment passer d'un signal continu à un signal discret. Cette conversion est appelée *échantillonnage*.

L'échantillonnage consiste à construire, à partir d'un signal analogique  $f(t)$ , un signal à temps discret  $f(n) = f(nT_e)$  obtenu en mesurant la valeur de  $f(t)$  toutes les  $T_e$  secondes. On peut voir ceci comme le fait de multiplier  $f(t)$  par un train d'impulsions de Dirac de période  $T_e$  :

$$f^+(t) = f(t)\delta_{T_e}(t) = \sum_n f(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

On peut alors interpréter la transformée de Fourier  $F^+(f)$  de  $f^+(t)$  (c'est-à-dire, la TFTD de  $\{f(n)\}$ ) comme celle d'un produit (pour rappel, un produit en temps est une convolution en fréquence) :

$$F^+(f) = F(f) * \left[ \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \right] = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(f - kf_e)$$

Le schéma de la page 103 du syllabus illustre très bien ce principe.

*Remarque 4.0.1.* La transformée de Fourier obtenue est continue et périodique (ce qui est logique, vu que c'est un TFTD d'un signal non périodique).

### 4.1 Recouvrement spectral (aliasing)

Si le spectre  $F(f)$  du signal analogique  $f(t)$  n'est pas nul au delà de  $\frac{f_e}{2}$ , la superposition peut conduire à des empiètements des translatées. Ce phénomène est appelé *recouvrement* (ou *repliement*) *spectral* (ou, en anglais, *aliasing*).

Ce recouvrement spectral a pour conséquence que le signal  $f(n)$  n'est plus une image correcte de  $f(t)$ . On appelle ceci l'*effet stroboscopique*.

Le terme de *repliement spectral* vient du fait que tout se passe comme si la partie de  $F(f)$  inférieure à  $\frac{f_e}{2}$  se trouvait additionnée à la partie de ce même  $F(f)$  supérieure à  $\frac{f_e}{2}$ , repliée autour de  $\frac{f_e}{2}$  et conjuguée. La figure de la page 104 illustre ceci.

On peut simplement corriger ce problème en prenant une fréquence d'échantillonnage au moins deux fois plus grande que la plus haute composante fréquentielle du signal.

Cependant, certains signaux ont un spectre infini. Dans ce cas, on choisit la fréquence d'échantillonnage de façon à ce que le recouvrement spectral ne dépasse pas un certain seuil. On peut aussi ajouter un *filtre de garde* qui ne laissent passer que les fréquences inférieures ou égales à  $\frac{f_e}{2}$ . Evidemment, en faisant ceci, on commet toujours une erreur dans l'échantillonnage vu qu'on ne considère pas toutes les fréquences.



## 4.2 Théorème de Shannon

Le *théorème de Shannon* (ou *théorème de l'échantillonnage*) dit :

**Théorème 4.2.1** (Théorème de Shannon). *Tout fonction  $f(t)$  dont le spectre est à support bornée (c'est-à-dire que  $\exists f_M$  tel que  $\forall |f| > f_M, F(f) = 0$ ) est complètement définie par ses échantillons  $f(nT_e)$  si  $f_e \geq 2f_M$ .*

Si on échantillonne en respectant ce théorème, il n'y a pas de recouvrement dans les échantillons.

On peut reconstruire le signal d'origine en faisant une convolution dans le temps entre  $f^*(t)$  et  $\text{sinc}(\frac{t}{T_e})$  (une fonction pieuvre qui est considérée comme la *fonction d'interpolation idéale*). En fréquence, ceci nous donne un produit entre  $F$  et  $T_e \text{rect}(\frac{f}{f_e})$ <sup>1</sup>. Ceci est illustré (avec une erreur dans la fonction *sinc*) à la page 109.

## 4.3 Reconstruction du signal à temps continu

A partir des échantillons, on veut reconstruire le signal d'origine  $f(t)$ . Il faut procéder en deux étapes :

1. On construit un vrai signal analogique  $f^*(t)$  à partir des échantillons du signal à temps discret. On appelle ceci *extrapolation*. On peut voir  $f^*(t)$  comme une première ébauche de  $f(t)$ .
2. On applique sur  $f^*(t)$  un *filtre de lissage* qui affine  $f^*(t)$  et le rapproche de  $f(t)$ .

## 4.4 Changement de fréquence d'échantillonnage

Il peut arriver qu'on souhaite augmenter ou diminuer la fréquence d'échantillonnage d'un signal déjà échantillonné. Ici, on va regarder comment multiplier ou diviser la fréquence d'échantillonnage par un nombre entier.

### 4.4.1 Décimation

Considérons un signal  $x_1(n)$  obtenu par échantillonnage d'un signal analogique  $x(t)$  à une fréquence d'échantillonnage  $f_e$ . Le spectre utile du signal est limité à l'intervalle  $[0, \frac{f_e}{2}]$ . On veut *sous-échantillonner* ce signal à une fréquence  $f'_e$  qui est  $k$  fois inférieure à  $f_e$ . On parle aussi de *downsampling*.

On va, dans un premier temps, prendre un échantillon sur  $k$  de  $x_1(n)$ . On va *décimer*  $x_1(n)$  par  $k$ .

Au départ, on avait un signal  $x(t)$  échantillonné à  $f_e$ . On a ensuite appliqué un autre échantillonnage à  $\frac{f_e}{k}$ . Ceci est évidemment équivalent à un échantillonnage direct à  $\frac{f_e}{k}$ . Voici quelques résultats :

- Le spectre du signal décimé est celui du signal analogique de départ, rendu périodique de période  $\frac{f_e}{k}$  (car TFTD).
- L'amplitude spectrale est divisée par  $kT_e$  (car on divise par  $k$  par rapport au spectre du signal échantillonné à  $f_e$ ).

Cependant, une simple décimation ne suffit pas. En effet, comme il y a généralement un filtre de garde réglé pour un échantillonnage à une fréquence de  $f_e$ , le sous-échantillonnage par  $k$  introduit un repliement spectral des composantes de  $x_1(n)$  situées entre  $\frac{f_e}{2k}$  et  $\frac{f_e}{2}$ . Il est donc nécessaire de faire précéder le sous-échantillonnage d'un filtre *numérique* passe-bas de fréquence de coupure égale à  $\frac{f_e}{2k}$ . La décimation totale est illustrée à la page 113.

1. On peut calculer cette transformée de Fourier en utilisant le fait que  $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f)$  et la propriété de changement d'échelle qui est  $f(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} F(\frac{f}{a})$ .

### 4.4.2 Interpoler

Considérons un signal  $x_1(n)$  obtenu par échantillonnage d'un signal analogique  $x(t)$  à une fréquence d'échantillonnage  $f_e$ . Le spectre utile du signal est limité à l'intervalle  $[0, \frac{f_e}{2}]$ . On veut *sur-échantillonner* ce signal à une fréquence  $f'_e$  qui est  $k$  fois supérieure à  $f_e$ . On parle aussi de *upsampling*.

Il faut calculer  $k-1$  échantillons intermédiaires entre deux échantillons de  $x_1(n)$ . Ceci est possible car, par le théorème de Shannon, on sait qu'on peut totalement reconstituer le signal analogique en utilisant l'interpolateur idéal.

Pour faire ceci, il suffit simplement de rajouter les échantillons supplémentaires (et de mettre leur valeur à zéro) de la façon suivante :

$$x_2(n) = \begin{cases} x_1(\frac{n}{k}) & \text{si } n \text{ est multiple de } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme on rajouté uniquement des zéros, ceci ne modifie pas la TFTD, qui reste périodique de période  $f_e$ . Par contre, le spectre utile de  $x_2(n)$  s'étend maintenant de 0 à  $\frac{kf_e}{2}$ . Ceci fait donc apparaître de nouvelles composantes de  $x_1(n)$  (qu'on ne veut pas). On peut les éliminer en faisant suivre le sur-échantillonnage par un filtre passe-bas *numérique* de fréquence de coupure égale à  $\frac{f'_e}{2k}$ . Le résultat est appelé *interpolation* du signal et est illustré à la page 114.

## 4.5 Filtre de garde réel et sur-échantillonnage (oversampling)

Le filtre de garde idéal est impossible à réaliser en pratique. On prendra donc un filtre de garde qui modifie légèrement le spectre original autour de  $f_M$  (à cause du repliement de composantes résiduelles supérieures à  $\frac{f_e}{2}$ ).

On peut compenser cet effet de deux façons :

- Si la fréquence d'échantillonnage est imposée, on peut faire en sorte que la bande passante du filtre soit plus étroite que la limite théorique de  $\frac{f_e}{2}$ . Ceci atténue les recouvrements spectraux MAIS les composantes à plus haute fréquence sont perdues !
- Si on peut choisir  $f_e$ , alors on peut la prendre fortement supérieure à  $2f_M$ . Ceci fait qu'on a plus de calculs à exécuter !

## 4.6 Filtre de lissage réel et sur-échantillonnage (oversampling)

On peut simplifier le filtre de lissage en utilisant une fréquence d'échantillonnage intermédiaire, supérieure à la fréquence de départ, avant d'extrapoler les échantillons. Il suffit de faire du upsampling. Ceci fait qu'on a plus de calculs à exécuter au niveau du filtre numérique mais on gagne en simplification au niveau du filtre de lissage.

**Exemple 4.6.1.** L'exemple des CDs de la page 117 semble être assez important !

## 4.7 Théorème de Shannon généralisé

On peut généraliser le théorème de Shannon pour les signaux à bande étroite, c'est-à-dire pour les signaux pour lesquels l'amplitude spectrale se trouve confinée dans une bande de fréquence de largeur  $B$  centrée autour de  $f_0$ . Ceci est illustré (et expliqué en détail) à la page 118. On ne donne ici que le théorème.

**Théorème 4.7.1** (Théorème de Shannon généralisé). *Toute fonction  $f(t)$  dont le spectre est à bande étroite  $(f_0, B)$  est complètement définie par ses échantillons  $f(nT_e)$  si  $f_e \geq 2B$  et que  $f_e$  respecte en outre l'une des conditions suivantes :  $Kf_e = f_0 - \frac{B}{2}$  ou  $Kf_e = f_0 + \frac{B}{2}$ , avec  $K$  entier.*

**Exemple 4.7.1.** L'exemple des pages 119 à 121 semble également important !



## Chapitre 5

# Transformée de Fourier Discrète

On a vu la transformée de Fourier pour un signal à temps continu et la TFTD pour un signal à temps discret. Cependant, ces transformées sont compliquées à calculer. En pratique, on utilise la *transformée de Fourier Discrète* (TFD).

### 5.1 Transformée de Fourier Discrète

Considérons une suite finie de  $N$  échantillons  $\{x(n)\} = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ . On définit sa *transformée de Fourier Discrète* comme la suite  $\{X(k)\}$  avec  $k \in [[0, N-1]]$  :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn k \frac{2\pi}{N}}$$

Il s'agit en réalité de la TFTD d'un signal numérique dont on ne considère que les  $N$  premiers échantillons, calculée pour les  $N$  pulsations normalisées  $\varphi \{0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2(N-1)\pi}{N}\}$ , c'est-à-dire pour les  $N$  fréquences normalisées  $F \in \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$ . A ce titre, la TFD a les mêmes interprétations que la TFTD.

La *transformée de Fourier Discrète inverse* est donnée par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jn k \frac{2\pi}{N}}$$

avec  $n \in [[0, N-1]]$ .

#### 5.1.1 Interprétation géométrique

Voir page 132 du syllabus (important ! Contrairement à l'interprétation vectorielle).

#### 5.1.2 Interprétation spectrale

Les valeurs des coefficients  $\{X_k\} = \{X(0), X(1), \dots, X(N-1)\}$  de la TFD d'une suite  $\{x(n)\} = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$  ne sont rien d'autre que les raies  $F_k$  de la TFTD du signal périodique de période  $N$  ayant  $\{x(n)\}$  comme période, corrigées par un facteur multiplicatif  $T_0 = NT_e$ .

#### 5.1.3 Convolution circulaire

La *convolution circulaire* est définie par :

$$f(n) \otimes g(n) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i) g((n-i) \bmod N)$$

### 5.1.4 Propriétés

Voici les propriétés intéressantes de la TFD :

Linéarité	$\sum_i a_i f_i(n) \xleftrightarrow{F} \sum_i a_i F_i(F)$
Retard	$f((n - n_0) \bmod N) \xleftrightarrow{F} F(k) e^{-jkn_0 \frac{2\pi}{N}}$
Convolution <b>circulaire</b>	$f(n) \otimes g(n) \xleftrightarrow{F} F(k) G(k)$
Produit	$f(n) g(n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{N} F(k) \otimes G(k)$

On peut exprimer  $F(k)$  sous la forme :

$$F(k) = A(k) e^{j\varphi(k)}$$

avec  $A(k)$  l'*amplitude* (similaire à  $A(f)$  pour la transformée de Fourier normale) et  $\varphi(k)$  la *phase* (similaire à  $\varphi(f)$ ).

On peut montrer que le module  $A(k)$  est pair modulo  $N$  et la phase  $\varphi(k)$  est impaire modulo  $k$ . On dit que  $\{F(k)\}$  est une suite *conjuguée modulo  $N$*  :

$$F(N - k) = F^*(k)$$

## 5.2 Transformée de Fourier Rapide

Il est possible de réduire le temps de calcul de la TFD d'une suite dont le nombre d'échantillons  $N$  est décomposable en facteurs (typiquement, une puissance de 2) avec la *transformée de Fourier Rapide* (TFR ou FFT). On se concentre sur une méthode nommée *FFT radix 2 avec entrelacement dans le temps*.

Cette méthode exige que  $\exists M$  tel que  $N = 2^M$ . L'idée est de calculer la TFD d'un signal à  $N$  échantillons par le calcul de deux TFD à  $\frac{N}{2}$  échantillons. Ces deux TFS sont ensuite décomposée en deux TFD traitant chacune  $\frac{N}{4}$  échantillons, et ainsi de suite jusqu'à avoir des TFD à 2 points. Les détails (dont le *facteur de rotation* nécessaire pour construire la TFD à partir de deux sous-TFD) sont donnés dans le cours.

Retenons ici l'idée principale et le fait que la complexité de la FFT est en  $\mathcal{O}(N \log_2(N))$  et que la complexité de la TFD est en  $\mathcal{O}(N^2)$ . Donc, la FFT est plus rapide à calculer que la TFD directe.

## 5.3 Observation spectrale

Nous pouvons considérer la TFD d'une séquence  $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$  comme la transformée de Fourier de la fonction impulsionnelle  $x_N^+(t)$  obtenue par multiplication de  $x(t)$  avec un train de  $N$  impulsions de Dirac, transformée dont on n'a gardé que les  $N$  valeurs correspondant aux fréquences  $f \in \left\{0, \frac{F_e}{N}, \frac{2F_e}{N}, \dots, \frac{(N-1)F_e}{N}\right\}$ .

Il nous faut maintenant connaître l'effet de cette troncation dans le temps et de cet échantillonnage en fréquence.

Considérons d'abord la fonction  $w^+(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \{0, T_e, \dots, (N-1)T_e\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Cette fonction corres-

pond à un train de  $N$  impulsions de Dirac, c'est-à-dire à une *fenêtre rectangulaire*. La transformée de Fourier  $W^+(f)$  de ce signal est donnée par la TTFD de la suite d'échantillons  $\{w(n)\}$  correspondants :

$$W^+(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) e^{-jn\varphi} = \left( \frac{e^{-j\frac{N}{2}\varphi}}{e^{-j\frac{\varphi}{2}}} \right) \frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$

Cette fonction a l'allure d'une fonction *sinc* périodique. Elle vaut  $N$  en  $F = 0$  et s'annule en  $F \in \{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$ .

La transformée de Fourier  $X_N^+(f)$  de  $x_n^+(t)$  correspond donc à la convolution des transformées de Fourier respectives de  $x(t)$  et de  $w^+(t)$ . La TFD de  $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$  est alors la séquence des valeurs de  $X_N^+(f)$  pour  $f \in \left\{0, \frac{F_e}{N}, \frac{2F_e}{N}, \dots, \frac{(N-1)F_e}{N}\right\}$ .

### 5.3.1 Signal périodique

On sait que la TTFD d'un signal  $x_{T_0}(n)$  résultant de l'échantillonnage d'un signal analogique périodique  $x_{T_0}(f)$  avec un pas d'échantillonnage  $T_e$  est périodique et discrète (c'est un spectre de raies périodique).

Nous allons utiliser  $W^+(F)$  pour établir le lien qui unit la transformée de Fourier d'un signal périodique analogique  $x_{T_0}(t)$  à la TFD de la suite d'échantillons correspondant  $x_{T_0}(n)$ . Voir la figure page 144.

**Exemple 5.3.1.** Les exemples semblent importants/utiles.

### 5.3.2 Signal non-périodique

#### 5.3.2.1 Cas où la fenêtre de $N$ échantillons n'a pas d'influence

Si le signal dont on cherche à observer le spectre est de durée finie et que le nombre  $N$  d'échantillons couvre une plage temporelle supérieure ou égale à cette durée, alors la TFD affiche les  $N$  valeurs de la TTFD originale. C'est donc immédiat, dans ce cas, d'avoir le spectre du signal si on a la TFD.

#### 5.3.2.2 Cas où la fenêtre de $N$ échantillons conduit à une troncature du signal dans le temps

Dans ce cas, l'interprétation donnée plus haut (sur les signaux périodiques) est également applicable à un signal non périodique  $x(t)$ . La seule différence est que la transformée de Fourier  $X(f)$  est continue (et non discrète).

L'effet de la convolution de  $X(f)$  avec  $W^+(f)$  correspond à une périodification accompagnée d'un filtrage passe-bas de  $X(f)$  : les variations brusques de  $X(f)$  sont adoucies et sa dynamique est limitée par celle de  $W^+(f)$  : on voit parfois apparaître sur  $X_N^+(f)$  les lobes secondaires de  $W^+(f)$  dans les plages de fréquence où  $X(f)$  sont très faibles.

Le niveau d'amplitude des raies données par la TFD est lié à celui de la transformée de Fourier du signal :

$$X^+(F=0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \qquad X_N^+(F=0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

On en déduit :

$$X_N^+(0) = kX^+(0) \qquad \text{avec } k = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)}$$

Voir le graphique page 153.

Tout ça pour dire que la TFD a une amplitude différente de la TTFD, c'est-à-dire que l'amplitude de la TTFD est multipliée par  $k$  (dont la définition est donnée au-dessus) pour obtenir l'amplitude de la TFD.

### 5.3.3 Calcul de la TFTD sur $N_{TFD}$ points en fréquence

On peut contrôler les effets de modification exposés dans la sous-section précédente en réalisant le calcul de la TFTD du signal fenêtré  $\{x_N(n)\}$  sur un nombre de points en fréquence  $N_{TFD}$  différent de  $N$ .

#### 5.3.3.1 Complétion par des zéros

On peut ajouter des échantillons nuls à la suite des  $N$  valeurs  $\{x_N(0), x_N(1), \dots, x_N(N-1)\}$  jusqu'à obtenir  $N_{TFD}$  valeurs. On obtient alors une représentation plus réaliste de  $\{x_N(n)\}$ .

On augmente donc le nombre d'échantillons de la TFTD de  $\{x_N(n)\}$  avec, cette fois,  $N_{TFD}$  valeurs. Ceci fournit donc une meilleure représentation de la  $X_N^+(f)$  MAIS n'augmente pas la précision du résultat (on voit mieux parce qu'on a plus de points mais les points ne sont pas mieux placés). Voir le graphique page 157.

#### 5.3.3.2 Périodification de la séquence d'échantillons

On peut aussi calculer la TFTD de  $\{x_N(n)\}$  sur un nombre de points  $N_{TFD}$  (en fréquence) plus petit que  $N$ . Il suffit en effet de découper la séquence  $\{x_N(0), x_N(1), \dots, x_N(N-1)\}$  en blocs de  $N_{TFD}$  valeurs. Ensuite, on somme les échantillons occupant les mêmes positions dans leurs blocs respectifs. Ceci revient à périodifier la séquence d'entrée avec une période de  $N_{TFD}$  échantillons :

$$x_{N_{TFD}}(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_N(n - iN_{TFD})$$

Il est (apparemment) facile de montrer que la TFD de la séquence  $\{x_{N_{TFD}}(n)\}$  ainsi constituée fournit bien les valeurs de la TFTD de  $\{x_N(n)\}$  sur  $N_{TFD}$  valeurs entre  $F = 0$  et  $F = 1$ .

L'intérêt de cette méthode est de limiter les calculs (par exemple, parce qu'il y a énormément d'échantillons).

Comme la complétion par de zéros augmente le nombre de points sans modifier la valeur des points, la périodification diminue le nombre de points sans modifier les valeurs (on voit moins de points mais les points ne sont pas mieux placés). Voir le graphique page 159.

### 5.3.4 Pondération par une fenêtre

Nous avons vu que le fait de ne conserver que  $N$  échantillons d'un signal  $\{x(n)\}$  peut être interprété comme la multiplication de ce signal par une fenêtre rectangulaire. La TFTD de cette fenêtre possède un lobe principal de largeur  $\frac{1}{N}$  et le gain d'amplitude des lobes secondaires est à peu près  $-13 \text{ dB}$  (on a donc une perte d'amplitude puisque le gain est négatif). Ceci peut poser problème si certaines raies (certaines fréquences) sont largement à plus de  $13 \text{ dB}$  sous la raie d'amplitude maximale.

**Exemple 5.3.2.** On prend un signal composé d'une sinusoïde à  $130 \text{ Hz}$  d'amplitude 1 et d'une autre sinusoïde à  $300 \text{ Hz}$  d'amplitude  $\frac{1}{100}$ . On utilise une fenêtre rectangulaire à 64 points et le calcul de la FFT se fait sur 512 points en fréquence. La fréquence  $f = 130 \text{ Hz}$  est très visible. En revanche, la fréquence  $f = 300 \text{ Hz}$  est masquée par les lobes secondaires de la première raie. Voir page 161 du syllabus pour le graphique.

On peut alors utiliser une autre *fenêtre de pondération*. Ces fenêtres sont données (avec la longueur des lobes et la perte d'amplitude) dans la sous-section 1.8.1.

Il faut donc faire très attention au choix de la fenêtre : permettre d'avoir des lobes plus bas implique que les lobes sont plus longs. Si deux fréquences sont très proches, leurs lobes pourraient fusionner (voir page 164).

### 5.3.5 Analyse à court-terme

L'analyse en fréquence est une opération qui effectue une moyenne sur tout l'axe du temps. Par conséquent, certains aspects temporels peuvent être complètement cachés. Il peut alors être intéressant de découper le signal en tranches pour faire apparaître l'ordonnancement de portions du signal. On constate que le découpage en tranches plus petites augmente la résolution temporelle mais diminue la résolution fréquentielle.

En plus clair, maintenant : l'analyse en fréquence donne les fréquences mais ne donne pas l'ordre d'apparition de ces fréquences. Par exemple, avec un signal composé d'une sinusoïde à une certaine fréquence suivie d'une sinusoïde à une autre fréquence, on a les fréquences mais on ne sait pas quelle fréquence est la première. Le découpage en temps permet de voir quelles fréquences interviennent à quel moment. Cependant, comme à chaque fois on prend une petite partie du temps, on n'a pas toutes les informations. Par conséquent, les fréquences ne sont pas forcément bien calculées ! Il faut donc combiner les deux intelligemment pour savoir quelles sont les fréquences et leur ordre.

## 5.4 Convolution linéaire

Rappelons que la convolution linéaire est donnée par :

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i)$$

Le nombre de valeurs non-nulles retournées par la convolution de deux séquences finies de  $N$  et  $M$  valeurs est de  $N + M - 1$ . Il est facile de montrer qu'il faut  $\nu(NM)$  opérations.

On peut réduire la charge de calculs en calculant la TFD (par la FFT) de chacune des séquences à convoluer, en multipliant les TFD obtenues et en prenant la TFD inverse du résultat. Il faut cependant rajouter des zéros afin d'avoir (au moins)  $N + M - 1$  valeurs dans chaque séquence (typiquement, on s'arrange pour avoir aussi une puissance de deux pour profiter pleinement de la FFT). On a donc  $\nu((N + M)\log(N + M))$ <sup>1</sup> opérations, ce qui est meilleur.

## 5.5 Conclusion

La TTFD d'une fonction non périodique est une fonction continue tandis que la TFD est une fonction discrète. On peut augmenter ou diminuer le nombre de points du graphique de la TFD en faisant varier  $N_{TFD}$  mais cette modification ne modifie pas la valeur des points.

Il faut faire attention aux points suivants :

- Echantillonner le signal provoque du recouvrement spectral. Ceci peut être contrôlé via  $f_e$ .
- On applique une fenêtre de pondération. Ceci peut faire en sorte que certaines fréquences soient cachées. Ceci peut être contrôlé via le choix de la fenêtre et  $N$ .
- Effectivement calculer la transformée de Fourier discrète nous donne un signal discret. On peut augmenter ou diminuer le nombre de points via  $N_{TFD}$ .

---

1. Je n'ai pas vérifié mes calculs... Il faut simplement retenir que passer par 3 TFD (2 directs et une inverse) est plus rapide que de calculer directement la convolution linéaire.





## Chapitre 6

# Synthèse des filtres numériques

Pour finir ce cours, intéressons-nous à la *synthèse* des filtres numériques, c'est-à-dire à leur implémentation en pratique.

### 6.1 Cellule du second degré

On va juste regarder une cellule de base du second degré (ordre).

On sait que la fonction de transfert en Z d'une cellule du second ordre est de la forme :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

On sait aussi que les racines et les pôles peuvent s'écrire sous la forme :

$$-\sigma \pm j\omega$$

De plus,  $\rho$  est le module et  $\sigma = -\rho \cos(\theta)$  (voir la figure de la page 216 pour les liens entre les différentes valeurs).

On a alors :

$$H(z) = K \frac{1 - 2\rho_n \cos(\theta_n) z^{-1} + \rho_n^2 z^{-2}}{1 - 2\rho_d \cos(\theta_d) z^{-1} + \rho_d^2 z^{-2}}$$

Ceci caractérise une *cellule du second degré*.

La stabilité impose des conditions sur la valeur des coefficients du dénominateur :

- Si  $a_2 > \frac{a_1^2}{4}$  ( $\rho^2 > \sigma^2$ ), les pôles sont complexes. Il faut alors  $a_2 < 1$  ( $\rho < 1$ ).
- Si  $a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$ , les pôles sont réels. Il faut alors  $(1 - a_1 + a_2) > 0 \wedge (1 + a_1 + a_2) > 0$ .

#### 6.1.1 Résonateur du second degré

Si la cellule a les caractéristiques suivantes, alors la cellule est un *résonateur du second degré* :

- Les pôles complexes sont situés proches du cercle unité ( $\rho_d \simeq 1$ ).
- $b_2 = 0$  (on a donc un seul zéro réel).

La fonction de transfert est donné par :

$$H(z) = K \frac{1 + bz^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = K \frac{1 + bz^{-1}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})}$$

avec  $p_1 = \rho e^{j\theta}$ ,  $p_2 = \rho e^{-j\theta}$ ,  $a_1 = -2\rho \cos(\theta)$  et  $a_2 = \rho^2$ .

Ou plus simplement :

$$H(z) = K \frac{1 - \cos(\theta) z^{-1}}{1 - 2\rho \cos(\theta) z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

L'amplitude maximale de la transformée de Fourier est :

$$A_M = \frac{K}{2(1-\rho)\sqrt{\rho}}$$

Regardons maintenant l'intervalle de fréquences  $\Delta\varphi$  dans lequel  $A$  est supérieur à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (la *bande passante* à 3 dB) :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2\varepsilon = 2(1-\rho) && \text{Radians} \\ \Delta f &= \frac{2(1-\rho)f_e}{2\pi} = \frac{\Delta\varphi f_e}{2\pi} && \text{Hertz}\end{aligned}$$

Cette cellule amplifie les valeurs du signal pour certaines fréquences.

### 6.1.2 Filtre coupe-bande du second degré

Si la cellule a les caractéristiques suivantes, alors la cellule est un *filtre coupe-bande du second degré* :

- Deux zéros sur le cercle de rayon unité ( $\rho_n = 1$ )
- Deux pôles complexes proches de ces zéros et mêmes arguments.

La fonction de transfert est donné par :

$$H(z) = K \frac{1 - 2\rho \cos(\theta)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\rho \cos(\theta)z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

Cette cellule élimine une composante spectrale de fréquence  $f_0 = \frac{\theta f_e}{2\pi}$ .

La *bande coupante* à 3 dB, c'est-à-dire, l'intervalle de fréquences autour de  $f_0$  dans lequel l'amplitude est inférieure à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  vaut :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2\varepsilon = 2(1-\rho) && \text{Radians} \\ \Delta f &= \frac{\Delta\varphi f_e}{2\pi} && \text{Hertz}\end{aligned}$$

### 6.1.3 Implémentation d'une cellule du second degré

Nous avons vu au chapitre 2 une façon de représenter un SLI récursif (le graphe de fluence). Cette structure est appelée *structure directe I* (ou *structure immédiate*). Cette structure peut servir pour implémenter la récurrence numérique d'un SLI récursif. Cependant, il ne s'agit pas de la structure la plus efficace. Un exemple d'une telle structure est donné dans la Figure 6.1.1.

Il est facile de trouver la *structure directe II* en intervertissant l'ordre de l'implémentation de  $A(z)$  et  $B(z)$  (on prend le "bloc" de  $A(z)$ , on l'échange de place avec le "bloc" de  $B(z)$  et on permute les nœuds d'addition et de  $z^{-1}$  en changeant aussi le sens des flèches) et en fusionnant les blocs  $z^{-1}$  qui sont au même niveau. Comme une petite figure est plus claire que des mots, la Figure 6.1.2 donne un exemple.

On obtient une structure qui est déjà plus compacte... Cependant, on peut faire encore mieux grâce à la *règle de Mason* :

$$H(z) = \frac{\sum_i P_i(z)}{1 - \sum_j B_j(z)}$$

où  $P_i(z)$  représente la fonction de transfert associé à un parcours dans la structure du filtre et  $B_j(z)$  représente celle d'une boucle (les sommets  $i$  et  $j$  s'étendent sur tous les parcours et toutes les boucles). Les structures déjà données respectent cette règle. Sur base de cette règle, on peut obtenir une *structure directe II transposée* en réalisant les opérations suivantes :

1. Remplacer les nœuds de sommation (les nœuds avec un  $\Sigma$ ) par des nœuds de dispersion (là où plusieurs branches démarrent ; ces nœuds sont représentés par un point noir dans ce document) et inversement.

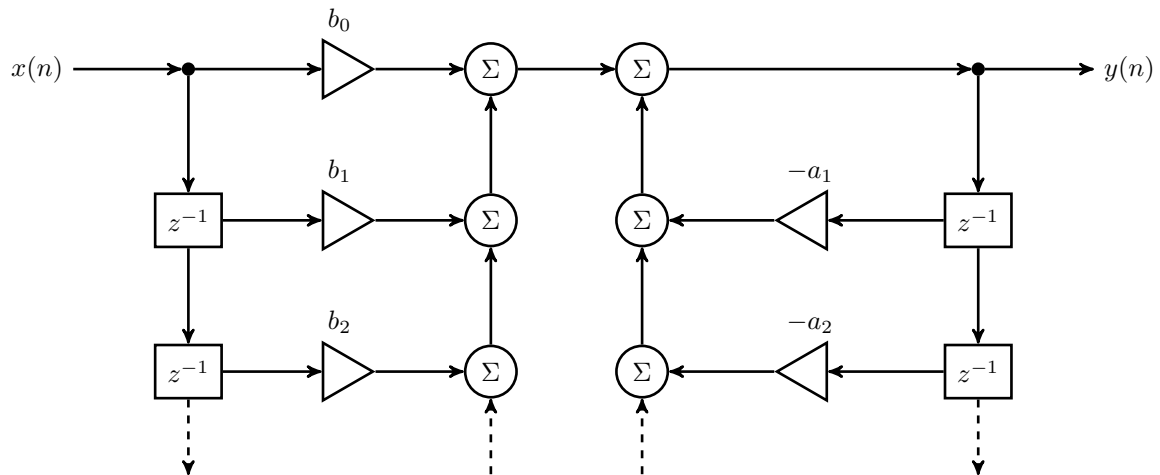


FIGURE 6.1.1 – Exemple de structure directe I

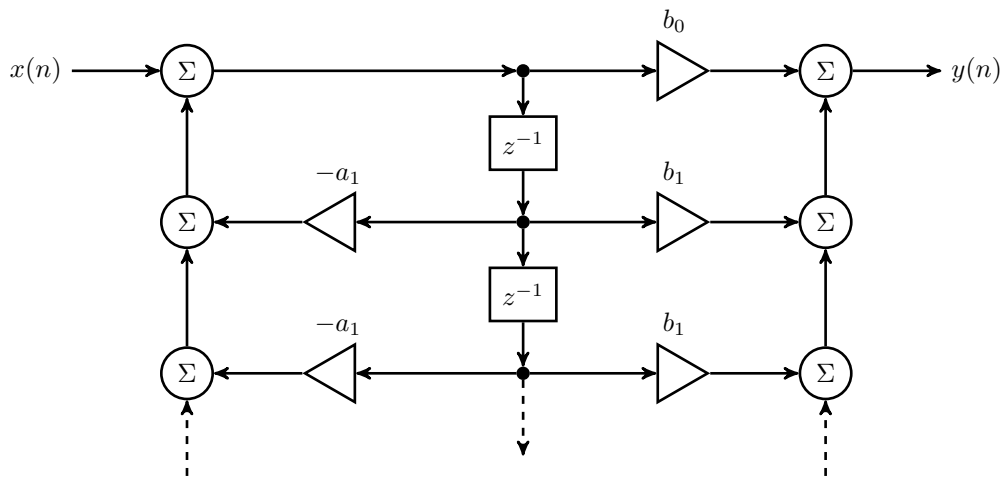


FIGURE 6.1.2 – Exemple de structure directe II

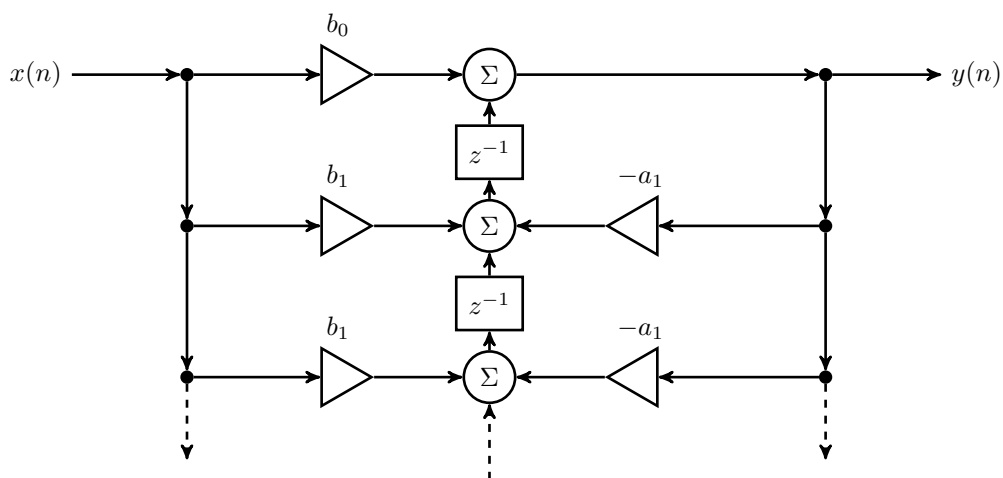


FIGURE 6.1.3 – Exemple de structure directe II Transposée

2. Inverser tous les sens de parcours (on permute le bloc de  $A(z)$  et celui de  $B(z)$  et toutes les flèches sauf celles de la première ligne).

Encore une fois, un exemple est donné dans la Figure 6.1.3.

*Remarque 6.1.1.* Je ne pense pas qu'il faille retenir comment passer d'une structure à l'autre... Tant que vous savez dessiner la structure demandée à l'examen...

## 6.2 Synthèse des filtres IIR

### 6.2.1 Butterworth - Chebyshev - Cauet

Voir les slides (page 9) pour les représentations graphiques.

Ces filtres sont tous des filtres passe-bas. Ils ont chacun des avantages et des inconvénients : meilleur coupage dans la fréquence MAIS le début est plus chaotique (voir Cauet pour un exemple assez parlant).

### 6.2.2 Le problème de la quantification des coefficients

Stocker les coefficients en virgule fixe (donc, avec un nombre précis de bits pour la partie entière et un nombre précis de bits pour la partie décimale ; il n'y a pas de principe d'exposant et de mantisse) peut poser de lourds problèmes pour nos filtres. En effet, une petite variation d'un coefficient d'un polynôme peut casser tout le filtre. Cependant, il peut arriver (sur certains hardwares) que la virgule fixe soit imposée. Voir la slide numérotée 21 pour une illustration (syllabus page 230).

### 6.2.3 Le problème du bruit de calcul

En plus du problème de la quantification des coefficients, la virgule fixe pose un autre problème : les échantillons sont aussi encodés avec la virgule fixe... Ainsi que tous les résultats de calcul intermédiaires. Plus précisément, il y a deux conséquences importantes :

1. En sortie de chaque multiplicateur, les valeurs numériques sont connues sur  $2N$  bits (où  $N$  est le nombre de bits des valeurs d'entrée). On veut tout stocker sur  $N$  bits. On doit donc arrondir le résultat, ce qui provoque du *bruit de calcul*. On peut atténuer cet effet en stockant les résultats de la multiplication sur  $N_c$  bits avec  $N < N_c < 2N$ .
2. Les additionneurs ont un autre problème : il n'y a pas d'arrondi à exécuter mais il peut y avoir un dépassement (overflow). Ceci peut être interprété comme un changement de signe par le processeur (si les nombres sont signés) ce qui provoque des erreurs importantes. On peut limiter cet effet en divisant tous les nombres par un facteur d'échelle. Dans ce cas, la sortie du filtre est également modifiée (puisque tous les nombres sont plus petits) !

Ce qui nous intéresse ici, c'est de comprendre que choisir la structure directe I, II ou II transposée dépend des contraintes hardwares et des bruits de calcul qu'on tolère. On peut aussi utiliser la technique de *cascade de cellules du second degré* (mais je pense pas que ça soit très utile dans ce cours).

## 6.3 Synthèse des filtres FIR

Les filtres FIR (sans partie récursive) ont une fonction de transfert de la forme :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

On sait qu'ils sont toujours stables. Ils servent à créer des filtres qui ne déforment pas le signal. Cependant, pour atteindre une bonne sélectivité des fréquences, leur degré est plus important que pour les filtres IIR. Une utilisation typique des filtres FIR est, par exemple, celle des filtres d'interpolation

ou de décimation (car on ne veut pas modifier le signal en entrée!). Cependant, il existe des techniques pour trouver le degré minimal nécessaire : Parks et McClellan qui se basent sur minimiser le maximum de  $|H(\varphi) - H_d(\varphi)|$  où  $H_d(\varphi)$  est la transmittance idéale à réaliser. On peut aussi noter que les filtres FIR sont beaucoup moins sensibles à une quantification de leurs coefficients.



# Index

- $N_{TFD}$ , 26
- Échantillonnage, 19
- Échelon unité, 1
- Équations aux différences finies, 9
- Aliasing, *voir* Recouvrement spectral
- Amplitude, 14, 24
- Bande coupante à 3 dB, 30
- Bande passante à 3 dB, 30
- Bruit de calcul, 32
- Cellule du second degré, 29
- Changement d'échelle, 2
- Convolution, 10
  - Circulaire, 3, 23
- Décalage temporel, 2
- Décimation, 20
- Degré, *voir* Ordre
- Différences finies, *voir* Équations aux différences finies
- Domaine fréquentiel, 13
- Domaine temporel, 9
- Downsampling, *voir* Sous-échantillonnage
- Effet stroboscopique, 19
- Exponentielle imaginaire, 1
- Extrapolation, 20
- Fenêtre
  - De pondération, 26
  - Rectangulaire, 24
- Filtre coupe-bande du second degré, 30
- Filtre de garde, 19
- Filtre de lissage, 20
- Filtre numérique, 10
- Fonction d'interpolation idéale, 20
- Fonction de réponse en fréquence, 17
- Fonction de transfert en Z, 11, 17
- Fonction pieuvre, 1
- Fréquence, 13
  - D'échantillonnage, 15
  - Normalisée, 15
- Impulsion de Dirac, 1, 3, 13, 15
  - Train, 1
- Interpolation, 21
- Ordre, 10, 29
- Période d'échantillonnage, 15
- Pôle, 11
- Paire de transformées de Fourier, 13
  - À temps discret, 16
- Peigne de Dirac, *voir* Impulsion de Dirac, Train
- Phase, 14, 24
- Phaseur, *voir* Exponentielle imaginaire
- Pulsation, 14
  - D'échantillonnage, 15
  - Normalisée, 15
- Réflexion, 2
- Réponse impulsionnelle, 10
  - finie, 10
  - infinie, 10
- Résonateur du second degré, 29
- Règle de Mason, 30
- Recouvrement spectral, 19
- Rectangle, 1
- Repliement spectral, *voir* Recouvrement spectral
- Série de Fourier, 14
  - À temps discret, 17
- Sinus cardinal, *voir* Fonction pieuvre
- Sinusoidal, 1
- SLI, 9
  - Non récursif, 10
  - Récursif, 10
- Sous-échantillonnage, 20
- Structure
  - Directe I, 30
  - Directe II, 30
  - Transposée, 30
  - Immédiate, *voir* Structure, Directe I
- Suite conjuguée modulo  $N$ , 24
- Sur-échantillonnage, 21
- Synthèse, 29
- Système numérique, 9



- 
- Invariant, 9
  - Linéaire, 9
  - Stable, 9–11
  
  - Théorème de l'échantillonnage, *voir* Théorème de Shannon
  - Théorème de Shannon, 20, 21
  - Time-reversal, *voir* Réflexion
  - Time-shift, *voir* Décalage temporel
  - Train d'impulsions de Dirac, *voir* Impulsion de Dirac, Train
  - Transformée de Fourier, 4, 13
    - À temps discret, 15
    - Discrete, 23
    - Inverse, 23
    - Rapide, 24
  - Transformée en Z, 11
  - Transmittance isochrone, *voir* Fonction de réponse en fréquence
  - Triangle, 1
  
  - Upsampling, *voir* Sur-échantillonnage
  
  - Zéro, 11

# Liste des symboles

$\delta(n)$  Impulsion de Dirac

$\delta_{n_0}(n)$  Train d'impulsions de Dirac de période  $n_0$

$\varepsilon(n)$  Echelon unité

$\{f(n)\} \xLeftrightarrow{TFTD} F(F)$   $F(F)$  est la TFTD de l'ensemble d'échantillons  $\{f(n)\}$

$f(t) \xLeftrightarrow{F} F(f)$   $F(f)$  est la transformée de Fourier de  $f(t)$

$f(t) * g(t)$  Convolution entre la fonction  $f(t)$  et la fonction  $g(t)$

$H(z)$  Fonction de transfert en Z

$rect(t)$  Fonction rectangle

$sinc(t)$  Fonction pieuvre

$tri(t)$  Fonction triangle

DFT Transformée de Fourier Discrète

FFT Transformée de Fourier Rapide

RIF Réponse impulsionnelle finie

RII Réponse impulsionnelle infinie

SLI Système numérique linéaire et invariant

TFD Transformée de Fourier Discrète

TFR Transformée de Fourier Rapide

TFTD Transformée de Fourier à temps discret