Analyse I (Partie B) : Propriétés sur les petits o

1 Définition de petit o

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in Dom(f)$, on dit que f est un petit o de $(x-a)^n$ ssi

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

2 Propriétés

i Soit $m, n \in \mathbb{N}$, si $m \leq n$, alors $o((x-a)^n) = o((x-a)^m)$

Soit $f(x) = o((x-a)^n)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Montrons que $f(x) = o((x-a)^m)$ c'est-à-dire montrons que $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} = 0$

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & 0 & \text{par hypothèse} \\ \\ \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} & = & \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n(x-a)^{m-n}} & \\ & = & \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}. \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^{m-n}} & \text{car la limite du produit est le produit des limites} \\ & = & 0. \lim\limits_{x\to a} (x-a)^{n-m} & \text{par hypothèse et car } m \leq n \text{ donc } n-m \geq 0 \\ & = & 0.0 & \text{car } x \to a \\ & = & 0 & \end{array}$$

Cqfd.

ii Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $o((x-a)^n).o((x-a)^m) = o((x-a)^{n+m})$

Soit $f(x) = o((x-a)^n$,
Soit $g(x) = o((x-a)^m$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$
$$g(a) = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} = 0$$

Posons $h(x) = f(x).g(x)$,
Montrons que $h(x) = o((x-a)^{n+m})$ c'est à dire montrons que $h(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n+m}} = 0$

$$\begin{array}{rcll} h(a) & = & f(a).g(a) & \text{par définition de } h \\ & = & 0.0 & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \lim\limits_{x\to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n+m}} & = & \lim\limits_{x\to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n(x-a)^m} & \\ & = & \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}. \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} & \text{car la limite du produit est le produit des limites} \\ & = & 0.0 & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

Cqfd.

iii Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $(o((x-a)^n))^m = o((x-a)^{n.m})$

Soit $f(x) = o((x-a)^n)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Posons $h(x) = (f(x))^m$,
Montrons que $h(x) = o((x-a)^{n.m})$ c'est à dire montrons que $h(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n.m}} = 0$

$$\begin{array}{rcll} h(a) & = & (f(a))^m & \text{par définition de } h \\ & = & (0)^m & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n.m}} & = & \lim_{x \to a} \frac{(f(x))^m}{(x-a)^{n.m}} & \text{par définition de } h \\ & = & \lim_{x \to a} \frac{(f(x))^m}{((x-a)^n)^m} & \text{par une propriété sur les exposants} \\ & = & \lim_{x \to a} (\frac{f(x)}{(x-a)^n})^m & \text{par une propriété sur les exposants} \\ & = & (\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n})^m & \text{car la limite du produit est le produit des limites} \\ & = & 0^m & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

Cqfd.

iv Soit $n \in \mathbb{N}$, $o((x-a)^n) = o(1).(x-a)^n$

Soit $f(x) = o((x-a)^n)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

· **si** $x \neq a$ alors prenons $g(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^n}$
$g(x)$ est un petit o de 1 car :

$$g(a) = \frac{f(a)}{(x-a)^n} = \frac{0}{(x-a)^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{1} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

On a bien :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x).(x-a)^n \\ & = & \frac{f(x)}{(x-a)^n}.(x-a)^n \\ & = & f(x) \end{array}$$

Cqfd.

· **si** $x = a$ alors prenons $g(x) = 0$

$$g(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{1} = 0$$

On a bien :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & g(x).(x-a)^n & \\ & = & 0.(x-a)^n & \text{par définition de g(x) et car } x = a \\ & = & 0 & \end{array}$$

Cqfd.

v Soit $n \in \mathbb{N}$, $o(1).(x-a)^n = o((x-a)^n)$

Soit $f(x) = o(1)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1} = 0$$

Posons $h(x) = f(x).(x-a)^n$,
Montrons que $h(x) = o((x-a)^n)$ c'est à dire montrons que $h(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} = 0$

$$\begin{array}{rcll} h(a) & = & f(a).(x-a)^n & \text{par définition de } h \\ & = & 0.(x-a)^n & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} & = & \lim_{x \to a} \frac{f(x).(x-a)^n}{(x-a)^n} & \text{par définition de } h \\ & = & \lim_{x \to a} f(x) & \\ & = & 0 & \text{par hypothèse} \end{array}$$

Cqfd.