Analyse I (Partie B) : Les équations différentielles ordinaires

Définition

- Une EDO (d'ordre n) est une équation de type $f(t, \partial_t^n u, ..., \partial_t^1 u, u) = 0$
- Une solution pour une EDO de ce type est une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ où $I \subseteq \mathbb{R}$ qui satisfait l'EDO i.e u est n fois dérivable sur I et $\forall t \in I, f(t, \partial_t^n u, ..., \partial_t^1 u, u) = 0$

Les EDO linéaires homogènes

- Forme générale : Une EDO linéraire homogène est de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$$

- Exemple : $\sin(t)\partial_t^3 u(t) + t^2\partial_t u(t) - 5u(t) = 0$
- Rappel :
  — $\partial^k(u_1(t) + u_2(t)) = \partial^k u_1(t) + \partial^k u_2(t)$
  — $\partial^k(\alpha u_1(t)) = \alpha\partial^k u_1(t)$
  — ∂^k est un opérateur linéaire.

Conséquences

Si
- $u_1(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$ et
- $u_2(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$,

alors
- $u_1(t) + u_2(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$
- $\alpha u_1(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$.

Principe de superposition

Si on connait une solution particulière de l'équation notée $u_p(t)$ et si $u_0(t)$ est solution de l'EDO homogène, alors les solutions de l'EDO seront de la forme $u(t) = u_p(t) + u_0(t)$.

Résoudre une EDO

Par principe de superposition, on va devoir trouver une solution particulère et une solution de l'équation homogène.

Résoudre une équation homogène

- Trouver le polynome caractéristique $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^i$.
- Trouver les racines du polynome caractéristique et leurs multiplicité.
- Les solutions du polynôme de la forme $\sum_i P_i(t)e^{\lambda i t}$ où λi est la racine du polynome caractéristique et $P_i(t)$ est le polynôme de degré $< m_i$ qui est la multiplicité de la racine λ_i.

Trouver une solution particulière de l'équation $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = q(t)e^{ut}$ où $u \in \mathbb{R}$, $q(t)$ est un polynôme.

Il y a deux cas :

- Si u est racine du polynome caractéristique, alors il existe une solution de la forme $t^m r(t)e^{ut}$ où m est la multiplicité de u et $r(t)$ est un polynome de degré $\leq$ au degré de $q(t)$.
- Si u n'est pas une racine du polynome caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme $r(t).e^{ut}$ où $r(t)$ est un polynome de degré $\leq$ degré $q(t)$

Remarque

- Pour trouver les solution réelles de l'EDO, il faut prendre la partie réelle des solution $\mathbb{C}$.
- $cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
- $sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
- $cosh(t) =$
- $sinh(t) =$