Analyse I (Partie B) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ est continue sur son domaine.

Tenons pour vrai que :

$$\text{(i) } x - a = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k}$$
$$\text{(ii) } \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \rightarrow Dom(\sqrt[n]{x}) = \mathbb{R}^+$$
$$\text{(iii) } \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair} \rightarrow Dom(\sqrt[n]{x}) = \mathbb{R}$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ **est continue sur son domaine.**

i.e $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in Dom(\sqrt[n]{x}), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in Dom(\sqrt[n]{x}), |x - a| \leq \delta \rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \varepsilon$

Preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$,

- **Si** n **est pair**, alors le domaine de $\sqrt[n]{x}$ est $\mathbb{R}^+$. (ii)
  Soit $a \in \mathbb{R}^+$,
  Soit $\varepsilon > 0$,
  Prenons $\delta = \varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}} > 0$,
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $|x - a| \leq \delta$,
  On a :

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \left|\frac{(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}\right|$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x-a|}{|\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ (i) et par une prop. des } |.|$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ par hyp.}$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}|} \overset{(\alpha)}{\leq} \frac{\delta}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} \leq \varepsilon$$

  (α) : $|\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}|$
  $= \sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}$
  Car $a > 0$ et $x > 0$
  Par transitivité,

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \varepsilon$$

  Cqfd

- **Si** n **est impair**, alors le domaine de $\sqrt[n]{x}$ est $\mathbb{R}$. (iii)
  Soit $a \in \mathbb{R}$,

  - **Si** $a > 0$,
    Soit $\varepsilon > 0$,
    Prenons $\delta = \min\left(\frac{a}{2}, \varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}}\right) > 0$,
    Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leq \delta$ i.e $a - \delta \leq x \leq a + \delta$ donc en prenant $\delta = \frac{a}{2} > 0$, on a $a - \frac{a}{2} \leq x \leq a + \frac{a}{2}$ i.e $0 < \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{2}$. Donc par transitivé, $0 < x$.
    On a :

$$| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |\frac{(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a})\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}|$$
$$\text{i.e } | \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x-a|}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ (i) et par une prop des } |.|$$
$$\text{i.e } | \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ par hyp.}$$
$$\text{i.e } | \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} \leq \varepsilon$$

Par transitivité,

$$| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \varepsilon$$

Cqfd

- **Si** $a = 0$,
  Soit $\varepsilon > 0$,
  Prenons $\delta = \varepsilon^n > 0$,
  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leq \delta$ i.e $|x| \leq \delta$ i.e $-\delta \leq x \leq \delta$ donc en prenant $\delta = \varepsilon^n$, on a $-\varepsilon^n \leq x \leq \varepsilon^n$.
  Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, (-x)^{2m+1} = -x^{2m+1}$, on a $(-\varepsilon)^n \leq x \leq \varepsilon^n$ i.e $-\varepsilon \leq \sqrt[n]{x} \leq \varepsilon$ cette dernière inégalité est équivalente à $|\sqrt[n]{x}| \leq \varepsilon$.
  Cqfd

- **Si** $a < 0$,
  Soit $\varepsilon > 0$,
  Prenons $\delta = \min(\frac{|a|}{2}, \varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}) > 0$,
  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leq \delta$ i.e $|x| \leq \delta$ i.e $a - \delta \leq x \leq a + \delta$ donc en prenant $\delta = \frac{|a|}{2} = \frac{-a}{2} > 0$ car $a < 0$, on a $\frac{3a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} < 0$.
  Donc par transitivité, $x < 0$.
  On a :

$$| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |\frac{(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a})\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}|$$
$$\text{i.e } | \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x-a|}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ (i) et par unr prop. des } |.|$$
$$\text{i.e } | \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ par hyp.}$$
$$\text{i.e } | \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} \leq \varepsilon$$

Par transitivité,

$$| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \varepsilon$$

Cqfd

Conclusion : On a bien prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ est continue sur son domaine.