Analyse I (Partie B) : Plan du cours

- Limite et continuité de fonctions d'une variable réelle.
  - Adhérence du domaine
  - Limite de fonction en terme de suite
  - Unicité de la limite d'une fonction
  - Règles de calcul
  - Convergence dominée
  - Recouvrement exhaustif
  - Limite de fonction en $\varepsilon - \delta$
  - Continuité + propriétés
  - Théorème des valeurs intermédiaires
  - Théorème des valeurs intermédiaires généralisé
  - Algorithme pour estimer ξ
  - Maximum et minimum d'une fonction
  - Théorème des bornes atteintes + interprétation géométrique
  - Interval compact
- Dérivée de fonction d'une variable réelle
  - Interprétation géométrique
  - Dérivabilité d'une fonction + propriété (dérivable $\rightarrow$ continue)
  - Régles de calcul
  - Théorème de la moyenne + propriété de croissance
  - Théorème de Rolle + équivalence avec le théorème de la moyenne
  - Minimum/Maximum local + propriété
  - "Petit o" + propriété
- Développement de Taylor (DT) et séries
  - "Petit o"
  - DT
  - Unicité du DT
  - Calcul du DT
  - L'ensemble C^k où $k \in \mathbb{N}$ et C^∞
  - Formule du reste + lien avec le théorème de la moyenne
  - Rappel du Binôme de Newton
  - Séries
  - Convergence d'une série
  - Convergence absolue + propriété (convergence absolue $\rightarrow$ convergence)
  - Critère du quotient
  - Critère de la racine
- Les équation différentielles ordinaires (EDO)
  - Équation différentielles ordinaires
  - Solution d'une EDO
  - Théorème : Condition d'une unique solution
  - EDO linéaire (affine)
  - Principe de superposition
  - EDO homogène
  - Résolution de $Lu = 0$
  - Solution réelle
  - EDO inhomogène
  - Théorème : Forme de la solution particulière

Analyse I (Partie B) : Définitions des limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall R > 0, \exists B > 0, \forall x \geq B, f(x) \geq R$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall R > 0, \exists A < 0, \forall x \leq A, f(x) \leq R$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, |f(x) + \lambda| \leq \varepsilon$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \leq B, |f(x) + \lambda| \leq \varepsilon$
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall R > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq R$
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall R > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq R$
- Soient $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$

Analyse I (Partie B) : Développements de Taylor et séries

DT d'ordre n en 0 à connaitre par coeur (pour rapidité)

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

Séries : critères de convergence

- si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n$ converge, alors $X_n \to 0$
- si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |X_n|$ converge, alors si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n$ converge.
- Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| \leq Y_n$,
  Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} Y_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n$ converge.
- Soit $x \in \mathbb{R}$,
  Si $|x| < 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge et vaut $\frac{1}{1-x}$.
- Critère d'Alembert (valeure absolue).
- Critère de Cauchy (racine).
- Si $\alpha > 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
- Une suite est de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m \geq n_0, |X_m - X_n| \leq \varepsilon$.

Analyse I (Partie B) : Les équations différentielles ordinaires

Définition

- Une EDO (d'ordre n) est une équation de type $f(t, \partial_t^n u, ..., \partial_t^1 u, u) = 0$
- Une solution pour une EDO de ce type est une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ où $I \subseteq \mathbb{R}$ qui satisfait l'EDO i.e u est n fois dérivable sur I et $\forall t \in I, f(t, \partial_t^n u, ..., \partial_t^1 u, u) = 0$

Les EDO linéaires homogènes

- Forme générale : Une EDO linéraire homogène est de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$$

- Exemple : $\sin(t)\partial_t^3 u(t) + t^2\partial_t u(t) - 5u(t) = 0$
- Rappel :
  — $\partial^k(u_1(t) + u_2(t)) = \partial^k u_1(t) + \partial^k u_2(t)$
  — $\partial^k(\alpha u_1(t)) = \alpha\partial^k u_1(t)$
  — ∂^k est un opérateur linéaire.

Conséquences

Si

- $u_1(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$ et
- $u_2(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$,

alors

- $u_1(t) + u_2(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$
- $\alpha u_1(t)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = 0$.

Principe de superposition

Si on connait une solution particulière de l'équation notée $u_p(t)$ et si $u_0(t)$ est solution de l'EDO homogène, alors les solutions de l'EDO seront de la forme $u(t) = u_p(t) + u_0(t)$.

Résoudre une EDO

Par principe de superposition, on va devoir trouver une solution particulère et une solution de l'équation homogène.

Résoudre une équation homogène

- Trouver le polynome caractéristique $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(t)x^i$.
- Trouver les racines du polynome caractéristique et leurs multiplicité.
- Les solutions du polynôme de la forme $\sum\limits_{i} P_i(t)e^{\lambda it}$ où λi est la racine du polynome caractéristique et $P_i(t)$ est le polynôme de degré $< m_i$ qui est la multiplicité de la racine λ_i.

Trouver une solution particulière de l'équation $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(t)\partial_t^i u(t) = q(t)e^{ut}$ où $u \in \mathbb{R}$, $q(t)$ est un polynôme.

Il y a deux cas :
- Si u est racine du polynome caractéristique, alors il existe une solution de la forme $t^m r(t)e^{ut}$ où m est la multiplicité de u et $r(t)$ est un polynome de degré $\leq$ au degré de $q(t)$.
- Si u n'est pas une racine du polynome caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme $r(t).e^{ut}$ où $r(t)$ est un polynome de degré $\leq$ degré $q(t)$

Remarque

- Pour trouver les solution réelles de l'EDO, il faut prendre la partie réelle des solution $\mathbb{C}$.
- $cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
- $sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
- $cosh(t) =$
- $sinh(t) =$

Analyse I (Partie B) : Propriétés sur les petits o

1 Définition de petit o

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in Dom(f)$, on dit que f est un petit o de $(x-a)^n$ ssi

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

2 Propriétés

i Soit $m, n \in \mathbb{N}$, si $m \leq n$, alors $o((x-a)^n) = o((x-a)^m)$

Soit $f(x) = o((x-a)^n)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Montrons que $f(x) = o((x-a)^m)$ c'est-à-dire montrons que $f(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} = 0$

$$\begin{array}{rcll}
f(a) & = & 0 & \text{par hypothèse} \\
\\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} & = & \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n (x-a)^{m-n}} & \\
& = & \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} . \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^{m-n}} & \text{car la limite du produit est le produit des limites} \\
& = & 0. \lim_{x \to a} (x-a)^{n-m} & \text{par hypothèse et car } m \leq n \text{ donc } n-m \geq 0 \\
& = & 0.0 & \text{car } x \to a \\
& = & 0 &
\end{array}$$

Cqfd.

ii Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $o((x-a)^n).o((x-a)^m) = o((x-a)^{n+m})$

Soit $f(x) = o((x-a)^n$,
Soit $g(x) = o((x-a)^m$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$
$$g(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} = 0$$

Posons $h(x) = f(x).g(x)$,
Montrons que $h(x) = o((x-a)^{n+m})$ c'est à dire montrons que $h(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n+m}} = 0$

$$\begin{array}{rcll}
h(a) & = & f(a).g(a) & \text{par définition de } h \\
& = & 0.0 & \text{par hypothèse} \\
& = & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n+m}} & = & \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n (x-a)^m} & \\
& = & \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} . \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} & \text{car la limite du produit est le produit des limites} \\
& = & 0.0 & \text{par hypothèse} \\
& = & 0 &
\end{array}$$

Cqfd.

iii Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $(o((x-a)^n))^m = o((x-a)^{n.m})$

Soit $f(x) = o((x-a)^n)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Posons $h(x) = (f(x))^m$,
Montrons que $h(x) = o((x-a)^{n.m})$ c'est à dire montrons que $h(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n.m}} = 0$

$$\begin{array}{rcll} h(a) & = & (f(a))^m & \text{par définition de } h \\ & = & (0)^m & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^{n.m}} & = & \lim_{x \to a} \frac{(f(x))^m}{(x-a)^{n.m}} & \text{par définition de } h \\ & = & \lim_{x \to a} \frac{(f(x))^m}{((x-a)^n)^m} & \text{par une propriété sur les exposants} \\ & = & \lim_{x \to a} (\frac{f(x)}{(x-a)^n})^m & \text{par une propriété sur les exposants} \\ & = & (\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n})^m & \text{car la limite du produit est le produit des limites} \\ & = & 0^m & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

Cqfd.

iv Soit $n \in \mathbb{N}$, $o((x-a)^n) = o(1).(x-a)^n$

Soit $f(x) = o((x-a)^n)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

· **si** $x \neq a$ alors prenons $g(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^n}$
$g(x)$ est un petit o de 1 car :

$$g(a) = \frac{f(a)}{(x-a)^n} = \frac{0}{(x-a)^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{1} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$$

On a bien :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x).(x-a)^n \\ & = & \frac{f(x)}{(x-a)^n}.(x-a)^n \\ & = & f(x) \end{array}$$

Cqfd.

· **si** $x = a$ alors prenons $g(x) = 0$

$$g(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{1} = 0$$

On a bien :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & g(x).(x-a)^n & \\ & = & 0.(x-a)^n & \text{par définition de g(x) et car } x = a \\ & = & 0 & \end{array}$$

Cqfd.

v Soit $n \in \mathbb{N}$, $o(1).(x-a)^n = o((x-a)^n)$

Soit $f(x) = o(1)$,
Donc par définition de petit o,

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1} = 0$$

Posons $h(x) = f(x).(x-a)^n$,
Montrons que $h(x) = o((x-a)^n)$ c'est à dire montrons que $h(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} = 0$

$$\begin{array}{rcll} h(a) & = & f(a).(x-a)^n & \text{par définition de } h \\ & = & 0.(x-a)^n & \text{par hypothèse} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} & = & \lim_{x \to a} \frac{f(x).(x-a)^n}{(x-a)^n} & \text{par définition de } h \\ & = & \lim_{x \to a} f(x) & \\ & = & 0 & \text{par hypothèse} \end{array}$$

Cqfd.

Analyse I (Partie B) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ est continue sur son domaine.

Tenons pour vrai que :

$$\text{(i) } x - a = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1-k}}\, \sqrt[n]{a^k}$$
$$\text{(ii) } \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \rightarrow Dom(\sqrt[n]{x}) = \mathbb{R}^+$$
$$\text{(iii) } \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair} \rightarrow Dom(\sqrt[n]{x}) = \mathbb{R}$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ **est continue sur son domaine.**

i.e $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in Dom(\sqrt[n]{x}), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in Dom(\sqrt[n]{x}), |x - a| \leq \delta \rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \varepsilon$

Preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$,

- **Si** n **est pair**, alors le domaine de $\sqrt[n]{x}$ est $\mathbb{R}^+$. (ii)
  Soit $a \in \mathbb{R}^+$,
  Soit $\varepsilon > 0$,
  Prenons $\delta = \varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}} > 0$,
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $|x - a| \leq \delta$,
  On a :

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \left|\frac{(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\, \sqrt[n]{a^k})}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\, \sqrt[n]{a^k})}\right|$$

$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x-a|}{|\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\, \sqrt[n]{a^k})|} \text{ (i) et par une prop. des } |.|$$

$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\, \sqrt[n]{a^k})|} \text{ par hyp.}$$

$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{\delta}{|\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\,\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}|} \overset{(\alpha)}{\leq} \frac{\delta}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} \leq \varepsilon$$

  (α) : $|\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\,\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}|$
  $= \sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\,\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}$
  Car $a > 0$ et $x > 0$
  Par transitivité,

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \varepsilon$$

  Cqfd

- **Si** n **est impair**, alors le domaine de $\sqrt[n]{x}$ est $\mathbb{R}$. (iii)
  Soit $a \in \mathbb{R}$,

  – **Si** $a > 0$,
    Soit $\varepsilon > 0$,
    Prenons $\delta = \min\left(\frac{a}{2}, \varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}}\right) > 0$,
    Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leq \delta$ i.e $a - \delta \leq x \leq a + \delta$ donc en prenant $\delta = \frac{a}{2} > 0$, on a $a - \frac{a}{2} \leq x \leq a + \frac{a}{2}$ i.e $0 < \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{2}$. Donc par transitivé, $0 < x$.
    On a :

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|=|\frac{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}|$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|=\frac{|x-a|}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ (i) et par une prop des } |.|$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|\leq\frac{\delta}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ par hyp.}$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|\leq\frac{\delta}{|\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a}+\ldots+\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{a^{n-2}}+\sqrt[n]{a^{n-1}}|}\leq\frac{\delta}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}\leq\varepsilon$$

Par transitivité,

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|\leq\varepsilon$$

Cqfd

- **Si** $a=0$,
  Soit $\varepsilon>0$,
  Prenons $\delta=\varepsilon^n>0$,
  Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x-a|\leq\delta$ i.e $|x|\leq\delta$ i.e $-\delta\leq x\leq\delta$ donc en prenant $\delta=\varepsilon^n$, on a $-\varepsilon^n\leq x\leq\varepsilon^n$.
  Comme $\forall x\in\mathbb{R},\forall m\in\mathbb{N},(-x)^{2m+1}=-x^{2m+1}$, on a $(-\varepsilon)^n\leq x\leq\varepsilon^n$ i.e $-\varepsilon\leq\sqrt[n]{x}\leq\varepsilon$ cette dernière inégalité est équivalente à $|\sqrt[n]{x}|\leq\varepsilon$.
  Cqfd

- **Si** $a<0$,
  Soit $\varepsilon>0$,
  Prenons $\delta=\min(\frac{|a|}{2},\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}})>0$,
  Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x-a|\leq\delta$ i.e $|x|\leq\delta$ i.e $a-\delta\leq x\leq a+\delta$ donc en prenant $\delta=\frac{|a|}{2}=\frac{-a}{2}>0$ car $a<0$, on a $\frac{3a}{2}\leq x\leq\frac{a}{2}<0$.
  Donc par transitivité, $x<0$.
  On a :

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|=|\frac{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})}|$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|=\frac{|x-a|}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ (i) et par unr prop. des } |.|$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|\leq\frac{\delta}{|\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{a^k})|} \text{ par hyp.}$$
$$\text{i.e } |\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|\leq\frac{\delta}{|\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a}+\ldots+\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{a^{n-2}}+\sqrt[n]{a^{n-1}}|}\leq\frac{\delta}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}\leq\varepsilon$$

Par transitivité,

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|\leq\varepsilon$$

Cqfd

Conclusion : On a bien prouvé que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x}$ est continue sur son domaine.

Trouver le S permettant de résoudre $(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}) * S = x - y$

- On sait que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$ (cf Internet)
- En remplaçant a par $x^{1/n}$ et b par $y^{1/n}$
- On a alors :

$$(x^{1/n})^n - (y^{1/n})^n = (x^{1/n} - y^{1/n})\sum_{k=0}^{n-1} (x^{1/n})^{n-1-k}(y^{1/n})^k$$
$$\text{i.e } x - y = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y})\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{y^k}$$

- Ainsi, le S recherché est $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1-k}}\sqrt[n]{y^k}$

Sources :

— `http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Identite/IdentAut.htm#idform`
— `http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Decompos/Divanmbn.htm`