Analyse I (Partie B) : Développements de Taylor et séries

DT d'ordre n en 0 à connaitre par coeur (pour rapidité)

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

Séries : critères de convergence

- si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n$ converge, alors $X_n \to 0$
- si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |X_n|$ converge, alors si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n$ converge.
- Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| \leq Y_n$,
  Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} Y_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n$ converge.
- Soit $x \in \mathbb{R}$,
  Si $|x| < 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge et vaut $\frac{1}{1-x}$.
- Critère d'Alembert (valeure absolue).
- Critère de Cauchy (racine).
- Si $\alpha > 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
- Une suite est de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m \geq n_0, |X_m - X_n| \leq \varepsilon$.