Exercice 2*

L'on considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+7x_4=12. \\ 4x_1+2x_2-6x_3+4x_4=1. \\ -16x_1+6x_2-2x_3-15x_4=-19. \\ 6x_1+10x_2-15x_3+10x_4=1. \end{cases}$$

1/. $Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -6 & 4 \\ -16 & 6 & -2 & -15 \\ 6 & 10 & -15 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice Symétrique : $A^t.A = A^2$.

C'est évident que : $A^t = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 & 6 \\ -4 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & -6 & -2 & -15 \\ 7 & 4 & -15 & 19 \end{pmatrix} \neq A.$

Donc : $A^t.A \neq A^2$

CQ : A n'est pas symétrique.

2/. L'on pose : $A^1 = A$ et $b^1 = b$ $\left\{ \ell_i \leftarrow \ell_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}}\ell_k \right\}_{i=2,\dots,n}$.

$k=1,\dots,n-1$

itération 1

$A^1 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -6 & 4 \\ -16 & 6 & -2 & -15 \\ 6 & 10 & -15 & 10 \end{pmatrix}$ $(*)\begin{cases} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}}\ell_1 \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{1}{2}\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + 2\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \frac{3}{4}\ell_1 \end{cases}$

$b^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 12 \\ 0x_1 + 4x_2 - \frac{15}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -5 \\ 0x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1x_4 = 5 \\ 0x_1 + 13x_2 - \frac{69}{4}x_3 + \frac{19}{4}x_4 = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 13 & -\frac{69}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix}$; $b^2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$; $E^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

tq : $A^2 = E^1.A^1$.

*** itération 2 ***

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 13 & -\frac{69}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix}$$

$$b^2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$(**) \begin{cases} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} \ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}} \ell_2 \end{cases} \Leftrightarrow (**) \begin{cases} \ell_1 \leftarrow \\ \ell_2 \leftarrow \ell \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{1}{2}\ell \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (**) \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 12 \\ 0x_1 + 4x_2 - \frac{15}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -5 \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 = \frac{5}{2} \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{57}{8}x_3 + \frac{25}{8}x_4 = \frac{33}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -15/2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & \frac{57}{8} & \frac{25}{8} \end{pmatrix} ; \; b^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 5/2 \\ 33/4 \end{pmatrix} ; \; E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{tq}}$ $A^3 = E^2 \cdot A^2 = E^2 \cdot E^1 \cdot A^1$.

*** itération 3 ***

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -15/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 57/8 & 25/8 \end{pmatrix}$$

$$(***) \begin{cases} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \frac{a_{43}}{a_{33}} \ell_3 \end{cases} \Leftrightarrow (***) \begin{cases} \ell_1 \leftarrow \ell_1 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \frac{57}{2} \ell_3 \end{cases}$$

$$b^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 5/2 \\ 33/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (***) \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 12 \\ 0x_1 + 4x_2 - \frac{15}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -5 \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 = \frac{5}{2} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{49}{2}x_4 = -63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -15/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 49/2 \end{pmatrix} ; \; b^4 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 5/2 \\ -63 \end{pmatrix} , \; E^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{57}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{tq}}$ $A^4 = E^3 \cdot A^3 = E^3 \cdot E^2 \cdot E^1 \cdot A^1$.

$\underline{\text{C/C}}$ $\quad X = \begin{pmatrix} 4,57175 \\ 3,35950 \\ 2,28700 \\ -2,57100 \end{pmatrix}$ solution du système $A^4 x = b$

Par conséquent solution du système $Ax = b$.

"ZAID.I"

Ceci revient à dire :

$$A = A^1 = (E^3E^2E^1)^{-1} \cdot A^4$$

$$= \underbrace{(E^3E^2E^1)^{-1}}_{L} \cdot \underbrace{(E^3E^2E^1 \cdot A^1)}_{U}$$

$$= L \cdot U$$

Avec : $U = A^4$.