Correction_DM

ali.zainoul.az

October 2022

1 Notation big O

Définition de la notation Big O:

$$\begin{aligned} f(n) \in O(g(n)) &\iff f(n) = O(g(n))\text{(abus de notation)} \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n) \end{aligned}$$

- $n = O(n)$ nous dit que: $f(n) = n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $g(n) = n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi:

$$\begin{aligned} n \in O(n) &\iff n = O(n)\text{(abus de notation)} \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 : n \leq cn \\ &\implies n \leq cn \\ &\implies 1 \leq c \end{aligned}$$

Conclusion: $1 \leq n$ nous assure que $1 \leq c$, il suffit de prendre que $n_0 = 1$ et $C \geq 1$.

- $2n = O(3n)$ nous dit que: $f(n) = 2n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $g(n) = 3n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi:

$$\begin{aligned} 2n \in O(3n) &\iff 2n = O(3n)\text{(abus de notation)} \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 : (2n) \leq c(3n) \\ &\implies (2n) \leq c(3n) \\ &\implies (2/3) \leq c \end{aligned}$$

Conclusion: $1 \leq n$ nous assure que $(2/3) \leq c$, il suffit de prendre que $n_0 = 1$ et $c \geq (2/3)$.

- $2n = O(3n)$ nous dit que: $f(n) = 2n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $g(n) = 3n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi:

$$\begin{aligned} n+2 \in O(n) &\iff n+2 = O(n)(\text{abus de notation}) \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 : (n+2) \leq cn \\ &\implies (n+2) \leq cn \\ &\implies \alpha \leq c(\text{for } \alpha \geq 2) \end{aligned}$$

Conclusion: $1 \leq n$ nous assure que $2 \leq c$, il suffit de prendre que $n_0 = 1$ et $c \geq 2$.

- $\sqrt{n} = O(n)$ nous dit que: $f(n) = \sqrt{n}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ et $g(n) = n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \in O(n) &\iff \sqrt{n} = O(n)(\text{abus de notation}) \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 : \sqrt{n} \leq cn \\ &\implies \sqrt{n} \leq cn \\ &\implies c \geq 1(\mathbf{*}) \end{aligned}$$

Conclusion: $1 \leq n$ nous assure que $1 \leq c$, il suffit de prendre que $n_0 = 1$ et $c \geq 1$. **(*):** il suffit de remarquer que pour $n \geq 1$: $n^2 \geq n \implies n \geq \sqrt{n}$.

- $log(n) = O(n)$ nous dit que: $f(n) = log(n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ et $g(n) = n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi:

$$\begin{aligned} log(n) \in O(n) &\iff log(n) = O(n)(\text{abus de notation}) \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 : log(n) \leq cn \\ &\implies log(n) \leq cn \\ &\implies 1 \leq c(\mathbf{*}) \end{aligned}$$

Conclusion: $1 \leq n$ nous assure que $1 \leq c$, il suffit de prendre que $n_0 = 1$ et $c \geq 1$. **(*):** il suffit de remarquer que pour $n \geq 1$: $log(n) \geq n \implies log(n)/n \geq 1$, d'où le résultat.

- $n = O(n^2)$ nous dit que: $f(n) = n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $g(n) = n^2$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi:

$$\begin{aligned} n \in O(n^2) &\iff n = O(n^2)(\text{abus de notation}) \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 : n \leq cn^2 \\ &\implies n \leq cn^2 \\ &\implies c \geq 1(\mathbf{*}) \end{aligned}$$

Conclusion: $1 \leq n$ nous assure que $1 \leq c$, il suffit de prendre que $n_0 = 1$ et $c \geq 1$. **(*):** il suffit de remarquer que pour $n \geq 1 \implies n^2 \geq n$, d'où le résultat.

2 Notation petit o

Définition de la notation petit o:

$$\begin{aligned} f(n) \in o(g(n)) &\iff f(n) = o(g(n))(\text{abus de notation}) \\ &\iff \forall c \geq 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n) \end{aligned}$$

- Pour tous les cas, il suffit simplement de remarquer que la définition précédente est équivalente à:

$$\begin{aligned} f(n) \in o(g(n)) &\iff f(n) = o(g(n))(\text{abus de notation}) \\ &\iff \{f, g \text{ tels que: } \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0\}\textbf{(*)} \end{aligned}$$

Conclusion: il suffit donc de vérifier la condition précédente **(*)** pour les quatre exemples.