ГЛАВА 1

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей главе вводятся основные понятия и определения, строятся математические модели, описывающие динамику инвестиционного портфеля, и формулируются задачи его оптимизации. Рассматриваемые модели можно разбить на два класса: детерминированные, в которых заданы функции цены покупки и продажи ценных бумаг, и недетерминированные, в которых указанные функции прогнозируются на заданном горизонте планирования. Описываются данные, которые будут использоваться для проведения численных экспериментов, и методы прогнозирования. Обсуждаются достоинства и недостатки различных подходов при оптимизации портфелей.

1.1 Основные положения модели

Портфель — совокупность инвестиционных вложений, состоящих из ценных бумаг и свободных финансов.

Портфель состоит из N типов бумаг. Количество бумаг i-го типа ($i = \overline{1,N}$) в момент времени $t \geq t_0$ равняется $x_i(t)$, где $x_i(t) \geq 0$. Обозначим через $x_0(t)$ — количество свободных финансов в момент времени $t \geq t_0$.

Через $u_i^+(t)$ будем обозначать количество ценных бумаг типа i, которые инвестор купил в момент времени t. Соответственно, через $u_i^-(t)$ обозначим, сколько инвестор продал ценных бумаг типа i в момент времени t. Пусть стоимость покупки i-ой бумаги равна $b_i(t) \geq 0$ (buy), а продажа $s_i(t) \geq 0$ (sell). Конкретный вид функций $s_i(t)$, $b_i(t)$, $t \geq t_0$ будет обсуждаться ниже, в разделе **??**.

Таким образом, на в момент времени t инвестор покупает ценных бумаг типа i на сумму $b_i(t)u_i^+(t)$ и продает на сумму $s_i(t)u_i^-(t)$.

Тогда количество свободных средств в следующий момент времени $t+1$ будет равно

$$x_0(t+1) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)\right). \tag{1.1}$$

Количество ценных бумаг типа i в момент времени $t+1$ будет равно

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i). \tag{1.2}$$

Считаем, что в начальный момент времени t_0 заданы начальные условия — количество бумаг каждого типа и объем свободных средств, которыми располагает инвестор:

$$x_i(t_0) = x_{i0},\ i = \overline{1, N};\ \ x_0(t_0) = x_{00}.$$

Введенные переменные и уравнения (1.1), (1.2) представим в векторной форме. Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned}
&X(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)]^T;\\
&U^+(t) = [u_1^+(t), \ldots, u_N^+(t)]^T;\\
&U^-(t) = [u_1^-(t), \ldots, u_N^-(t)]^T;\\
&B(t) = [b_1(t), \ldots, b_N(t)]^T;\\
&S(t) = [s_1(t), \ldots, s_N(t)]^T;\\
&X_0 = [x_{10}, \ldots, x_{N0}]^T.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Используя (1.3), перепишем (1.2) для $X(t)$:

$$X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\ \ X(t_0) = X_0,\ \ t \geq t_0. \tag{1.4}$$

Представим (1.1) в векторной форме:

$$x_0(t+1) = x_0(t) + B(t)^T U^+(t) - S(t)^T U^-(t),\ \ x_0(t_0) = x_{00},\ \ t \geq t_0. \tag{1.5}$$

На значения $X(t)$, $x_0(t)$, $U^+(t)$, $U^-(t)$ в каждый момент времени t накладываются следующие естественные ограничения:

$$\begin{aligned}
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0,\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0,\\
&t \geq t_0.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

С точки зрения теории оптимального управления, в динамической модели (1.4) – (1.6): переменные $X(t) \in \mathbb{R}^N$, $x_0(t) \in \mathbb{R}$ — фазовые переменные (зависимые), переменные $U^+(t) \in \mathbb{R}^N$, $U^-(t) \in \mathbb{R}^N$ — управляющие переменные (управления, независимые), динамическая модель нестационарная в силу зависимости от времени функций цены покупки $B(t)$, $t \geq t_0$, и цены продажи $S(t)$, $t \geq t_0$. Ограничения (1.6), накладываются как на управляющие, так и на фазовые переменные.

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть $w_i(t)$ — общая стоимость бумаг типа i, и она равна сумме, которую инвестор может выручить из ее продажи в момент времени t:

$$w_i(t) = s_i(t)x_i(t), \quad t \geq t_0.$$

Значение $w_0(t)$ будем считать равным $x_0(t)$. Тогда общая стоимость портфеля равна

$$w(t) = \sum_{i=0}^{N} w_i(t).$$

В векторном виде, используя (1.3), получим следующую формулу для общей стоимости портфеля:

$$w(t) = x_0(t) + S(t)^T X(t).$$

Задачи оптимизации портфеля, динамика которого описывается согласно (1.4), (1.5) и подчиняется ограничениям (1.6) будет связана с максимизацией введенной стоимости портфеля при различных дополнительных требованиях. Первая такая модель будет рассмотрена в разд. 1.2, а до этого опишем данные, которые будут использоваться для численных экспериментов.

1.1.1 Данные для численных экспериментов

В данном пункте будут описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов, а также приводится описание того, как строятся прогнозы для значений функций цен $S(t)$, $B(t)$, $t \geq t_0$, при рассмотрении недетерминированной модели (см. разд. 1.3.1), когда их точные значения не известны заранее.

Будем работать с двумя типами данных:

1. сгенерированных искусственно;
2. реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и синусоидальной функции

$$\begin{aligned} b_i(t) &= k_{i0} + k_i t + \alpha_i \sin(r_i + g_i t); \\ s_i(t) &= 0.99 b_i(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для (1.7) значения k_{i0}, k_i, α_i, r_i, g_i подбираются таким образом, чтобы ни для каких $i \neq j$ не совпадали периоды. Выбор функции $s_i(t)$ в представленном виде обусловлен тем наблюдением реально существующий картины, что разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту, и таким образом, она будет хорошим приближением для используемых данных.

Реальные данные взяты из исторических курсов на сайте *coinmarketcap.com* за период ...

Тут вставить графики функций **(НЕ ЗАБЫТЬ ВСТАВИТЬ :)**

1.1.2 Предсказание значений

В общем случае, значения $S(t)$ и $B(t)$ в будущие моменты времени не известны. В настоящей работе будем прогнозировать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регрессионная модель [19], зависимости стоимости от времени. В этом пункте будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Линейная регрессия — метод восстановления зависимости между двумя переменными.

Пусть даны предыдущие наблюдениям за стоимостями фиксированной бумаги $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ в моменты времени $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Для заданного множества из m пар (t_i, p_i), $i = 1, \ldots, m$, значений свободной и зависимой переменной требуется построить зависимость. Назначена линейная модель

$$p_i = f(\mathbf{w}, t_i) + \varepsilon_i$$

с линейной функцией f и аддитивной случайной величиной ε. Переменные t, p принимают значения на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определим модель зависимости как

$$p_i = w_1 + w_2 t_i + \varepsilon_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор параметров

$\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ есть решение нормального уравнения

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P}$ — вектор, состоящий из значений зависимой переменной: $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_m)$. Столбцы матрицы A есть подстановки значений свободной переменной $t_i^0 \mapsto a_{i1}$ и $t_i^1 \mapsto a_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$. Матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}.$$

Зависимая переменная восстанавливается по полученным весам и заданным значениям свободной переменной

$$p_i^* = w_1 + w_2 t_i,$$

иначе

$$\mathbf{P}^* = A\mathbf{w}.$$

Для оценки качества модели используется критерий суммы квадратов регрессионных остатков, SSE — Sum of Squared Errors.

$$SSE = \sum_{i=1}^{m} (p_i - p_i^*)^2 = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*)^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*).$$

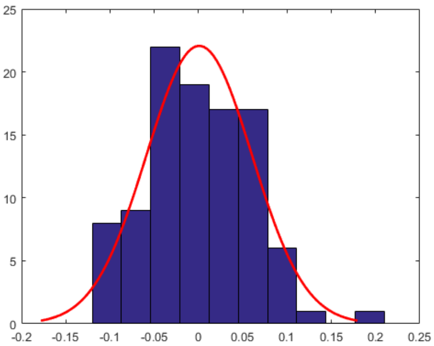
1.1.3 Оценка прогнозирования

В данном пункте рассматривается вопрос о качестве найденных оценок [18]. Находится их смещение, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

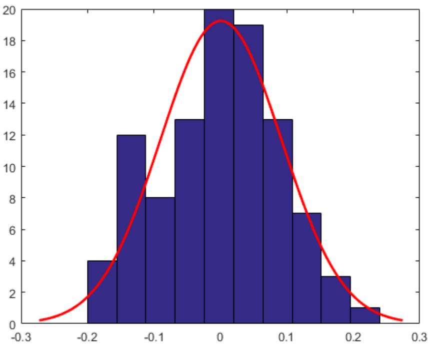
Для нахождения математического ожидания и вариации ошибки будем использовать встроенные *Matlab* функции *var*, *mean*. Данные функции вычисляют следующие значения:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

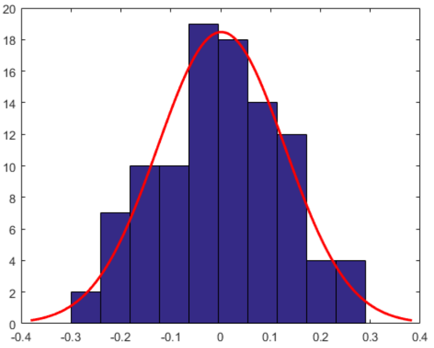
$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} |A_i - \mu|^2.$$



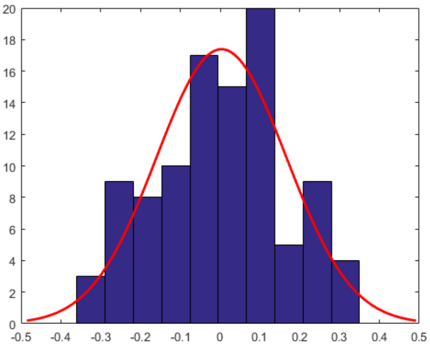
(a) На 1 шаг



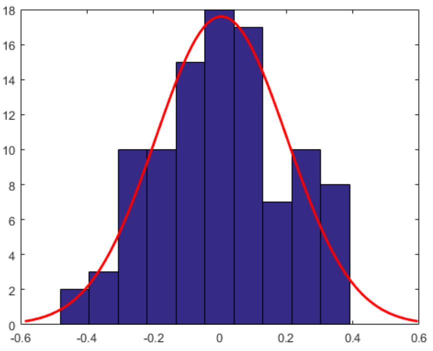
(b) На 2 шага



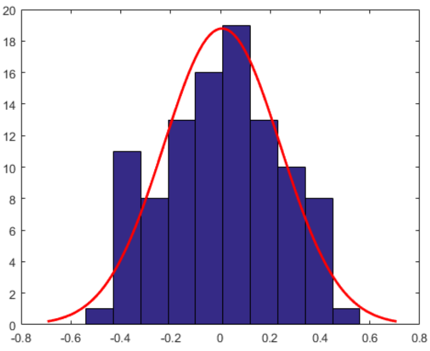
(c) На 3 шага



(d) На 4 шага



(e) На 5 шагов



(f) На 6 шагов

Рис. 1.1: Распределение ошибок предсказания

В процессе прогнозирования вычисляется ошибка следующим образом

$$e(t) = \frac{x_{predicted}(t) - x_{real}(t)}{x_{real}(t)}.$$

Данная ошибка была подсчитана для прогнозирования **(УКАЗАТЬ КАКИЕ ДАННЫЕ)** от одного до шести шагов вперед. На рисунке 1.1 изображены распределения ошибок прогнозирование будущих стоимостей продаж ценных бумаг.

В таблице 1.1 приведены численные значения математического ожида-

t	mean	var
1	0.0007	0.0036
2	0.0007	0.0083
3	0.0012	0.0162
4	0.0032	0.0265
5	0.0043	0.0389
6	0.0064	0.0545

Таблица 1.1: Ошибки прогнозирования

ния и вариации для предсказаний.

Дисперсия $D[e(t)]$ будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости этапа, которая имеет вид

$$L_t(U^+(t), U^-(t)) = \alpha D[e(t)] \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)^2,$$

где $W(t)$ это собственно и сама ошибка прогнозирования.

Так как значения математического ожидания, представленные в таблице 1.1, близки к нулю, то будем считать, что полученные оценки являются несмещенными **(ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ)**.

1.2 Детерминированная модель

Настоящий раздел посвящен исследованию детерминированной модели оптимизации портфеля, т.е. случаю, когда в начальный момент времени t_0 точно известны все значения цены продажи и покупки $s_i(t)$ и $b_i(t)$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, N}$.

Будем применять методы MPC, описанные в главе 1 для задачи оптимизации портфеля. При этом рассматриваются две прогнозирующие задачи MPC с конечным горизонтом прогнозирования T:

- задача максимизации стоимости портфеля без условий в терминальный момент времени $t_0 + T$ (без терминального множества);
- задача максимизации стоимости портфеля с условиями в терминальный момент времени $t_0 + T$ (с терминальным множеством).

1.2.1 Максимизация стоимости портфеля без терминального множества

Рассмотрим следующую задачу MPC с горизонтом планирования T

$$\begin{aligned} \max_{U^+,U^-} J(X_0, x_{00}, U^+, U^-) = w(t_0+T) = \\ = x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T), \end{aligned} \tag{1.8}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t),\\
&X(t_0) = X_0,\\
&x_0(t_0) = x_{00};\\
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Отметим, что в задаче оптимального управления (1.8) – (1.9) функция стоимости не ограничена, кроме того, тут отсутствует функция стоимости этапа $L_t(\cdot)$, а максимизируется только терминальная стоимость портфеля.

Так как предположение $J^*_\infty(X_0, x_{00}, U^+, U^-) < \infty$ из главы **??** не выполняется, то невозможно гарантировать устойчивость процесса, замкнутого обратной связью, построенной в результате применения MPC-алгоритма из главы **??** с прогнозирующей задачей оптимального управления (1.8) – (1.9). Также невозможно исследовать полученное решение на субоптимальность.

Приведем типичную картину поведения инвестора, использующего для управления портфелем задачу (1.8) – (1.9). Для этого приведем результаты численных экспериментов для двух ценных бумаг ($N = 2$) при горизонте прогнозирования $T = 6$ и используя синтетические и реальные данные.

На рисунке 1.2 представлены данные проведенного численного эксперимента. Верхний график показывает количество ценных бумаг первого и второго типа в каждый момент времени. Нижний график представляет собой общую стоимость базового портфеля (с тривиальным управлением — зеленая кривая) и стоимость портфеля под управлением MPC (красная кривая).

Как видно из рисунка 1.2, при использовании задачи (1.8) – (1.9) происходят частые операции вида: продать все бумаги типа i и на освободившиеся

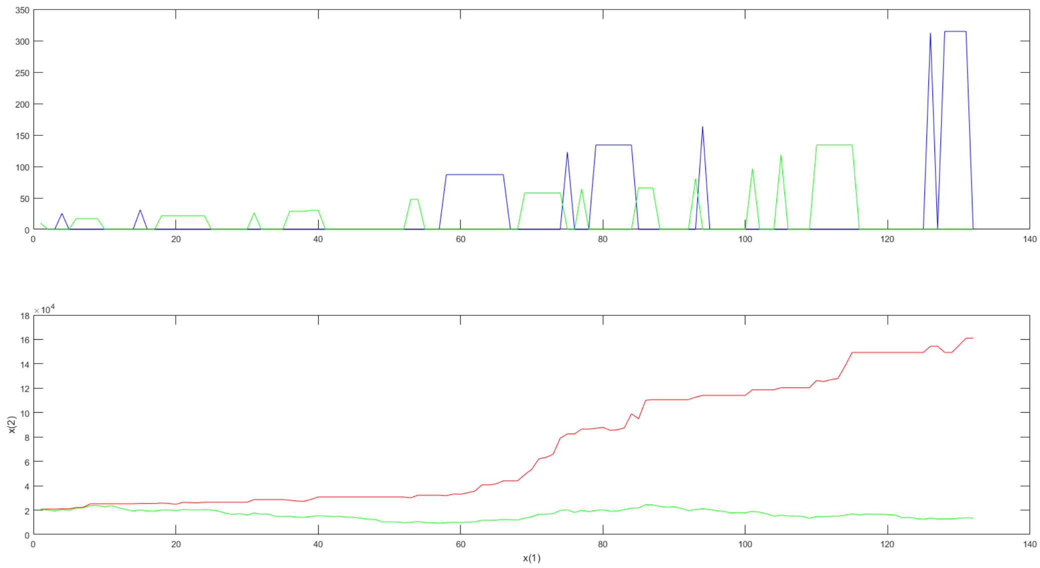


Рис. 1.2: Детерминированная модель без регуляризации

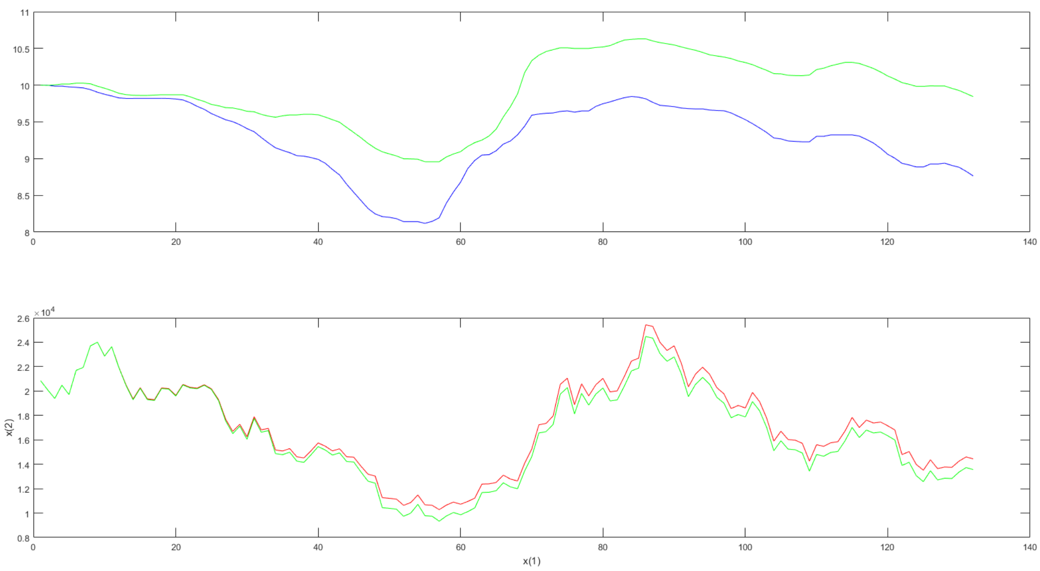


Рис. 1.3: Детерминированная модель с регуляризацией

деньги купить бумаги типа j, $i, j = 1, 2$. Для инвестора такое поведение может приводить к проблемам, поскольку ему приходится постоянно перестраивать портфель, что привносит в его поведение большие риски. Подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерминированной моделью.

Изменим критерий качества (1.8), добавив в него с целью регуляризации стоимость этапа $L(U^+(t), U^-(t))$.

Получим следующую задачу

$$\min_{U^+,U^-} J(x,u) = \sum_{i=0}^{T} L(U^+(i), U^-(i)) - w(T),$$

при условиях (1.9). Заметим, что здесь критерий качества минимизируется, стоимость портфеля взята за знаком $-$.

Если в качестве функции этапа взять, например, функцию вида

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))^2,$$

которая характеризует весь оборот денег, произошедший в момент времени t, то графики изменятся (для $\alpha = 0.01$) как представлено на рисунке 1.3.

Аналогичная картина получается в численных экспериментах со сгенерированными тестовыми данными. Без функции стоимости этапа результаты представлены на рисунке 1.4, со стоимостью этапа — на рисунке 1.5.

1.2.2 Максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Рассмотрим теперь в качестве прогнозирующей задачи MPC — задачу оптимального управления с горизонтом планирования T и ограничениями, накладываемыми на состав портфеля в терминальный момент времени t_0+T:

$$\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) = x_0(t_0+T) + X(t_0+T)^T S(t_0+T); \tag{1.10}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t),\\
&X(t_0) = X_0,\\
&x_0(t_0) = x_{00};\\
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1};\\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

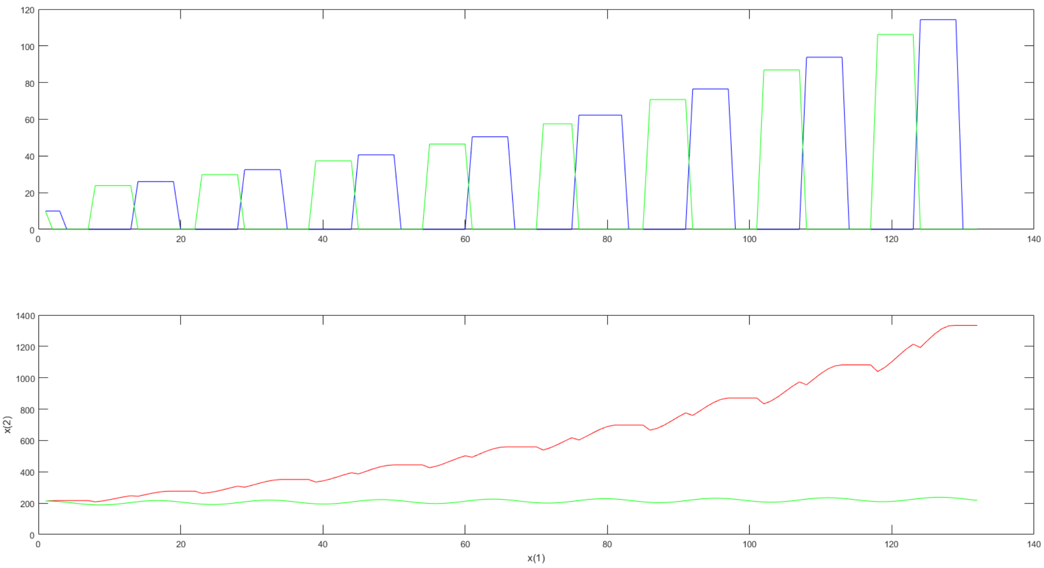


Рис. 1.4: Детерминированная модель без регуляризацией

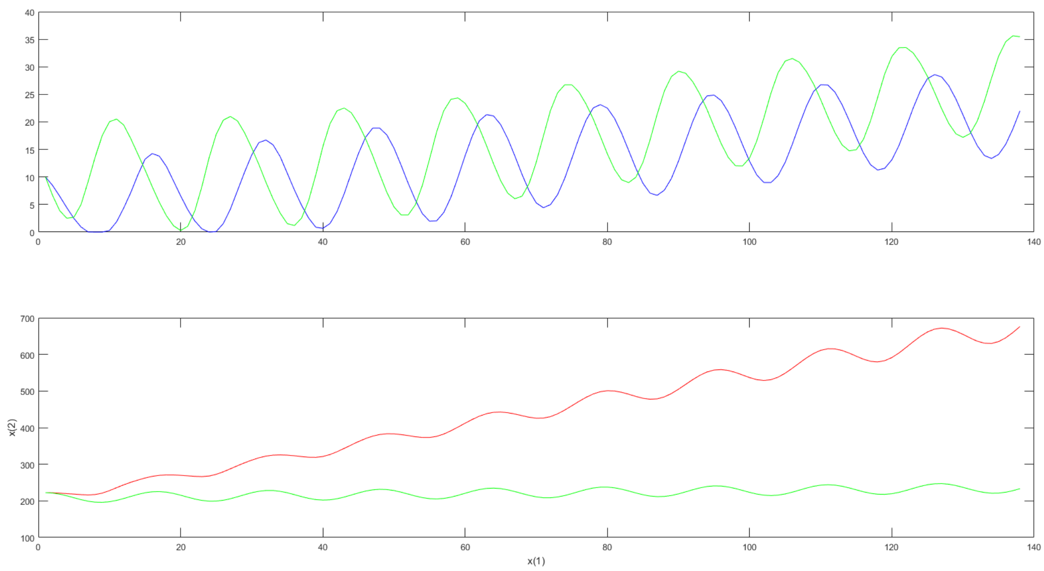


Рис. 1.5: Детерминированная модель с регуляризацией

Поясним смысл введенного ограничения

$$\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad k=\overline{0,N}.$$

Здесь требуется, чтобы в момент времени t_0+T пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом MPC с той лишь разницей, что в стандартных схемах экономического MPC в качестве устойчивого состояния используется точка x_s, а в данном случае это целый луч, содержащий значения с одинаковыми пропорциями.

Предлагаемый подход, кроме того, дает возможность сравнивать эффективность управления MPC без учета колебания курсов, поскольку отношения стоимостей портфелей с тривиальным управление, и с управлением MPC, если они содержат одинаковые пропорции, не зависит от текущих курсов.

Теорема 1.1 Задача (1.10) – (1.11) разрешима.

Доказательство Заметим, что тривиальное управление

$$U^+(t) = U^-(t) \equiv 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1},$$

является допустимым. Кроме того, при этом управлении значение функции $\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-)$ в (1.10) **(ПРОПУЩЕНА ФРАЗА)**, следовательно, задача (1.10) – (1.11) разрешима.

Теорема 1.2 Пусть для начальных условий x_{00}, X_0 из задачи (1.10) – (1.11) получено управление MPC

$$\{(U^+(0), U^-(0)), (U^+(1), U^-(1)), \dots\},$$

и соответствующая ей траектория

$$\{(\hat{X}(0), \hat{x}_0(0)), (\hat{X}(1), \hat{x}_0(1)), \dots\}$$

тогда любого $m \in \mathbb{Z}_+$ верно:

$$\max_{U^+,U^-} J(\hat{X}(m), \hat{x}_0(m), U^+, U^-) \geq x_0(0) + X(0)^T S(m+T).$$

Данная теорема утверждает, что в любой момент времени портфель, управляемый MPC за T шагов, может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет не меньше, чем в случае, когда постоянно используется тривиальное управление (инвестор не управляет портфелем).

Доказательство Будет добавлено позже **(НЕ ЗАБЫТЬ ДОБАВИТЬ)**

Приведем пример того, как будет вести себя система при управлении MPC-регулятором, использующим задачу оптимального управления с терминальным множеством. На рисунке 1.6 представлен результат численного

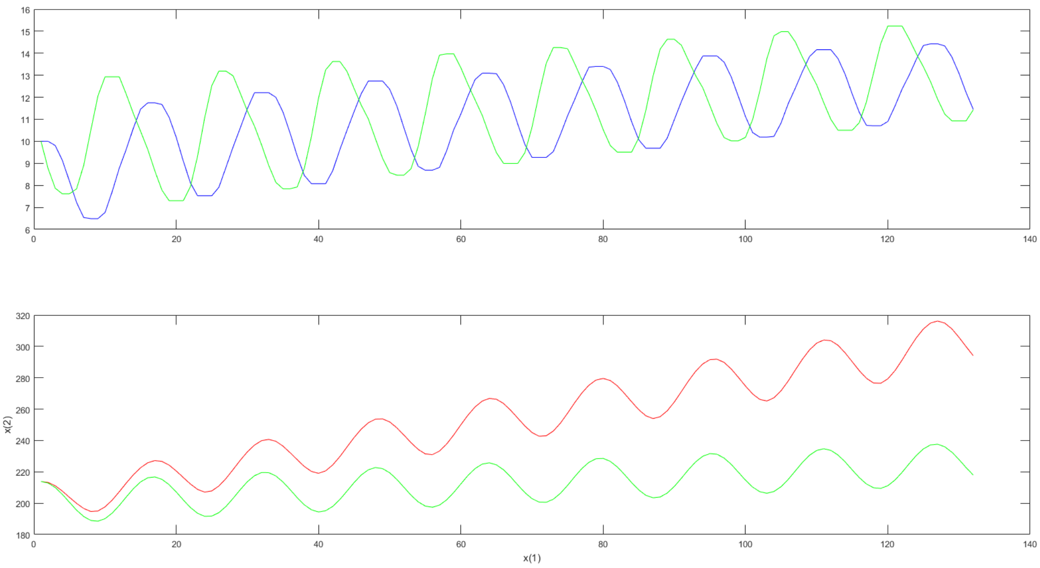


Рис. 1.6: Детерминированная модель с регуляризацией

эксперимента для сгенерированных данных. Как видно, в результате стоимость портфеля получается меньше, нежели в случае без терминального множества (рисунок 1.5). Но при этом у̀же диапазон, в котором изменяется количество ценных бумаг каждого типа.

1.3 Недетерминированная модель

В настоящем разделе исследован случай, когда точно не известны будущие стоимости активов, и модель должна оперировать прогнозируемыми значениями на заданном горизонте планирования T.

Покажем, что для недетерминированного случая нельзя просто использовать предсказания и работать как в детерминированном случае без регуляризации.

На рисунке 1.7 представлен такой случай, при этом на нижнем графике видно, что стоимость портфеля при тривиальном управлении будет выше, нежели при управлении MPC.

Представленное на рисунке 1.7 снижение стоимости портфеля связано с тем, что управление строится на основе прогнозируемых данных, и при этом одинаково учитывается весь горизонт планирования. Для улучшения необходимо сделать так, чтоб прогнозы для близких стоимостей учитывались в большей степени, нежели более дальние по времени.

Введем функцию стоимости этапа, которая будет учитывать ошибки про-

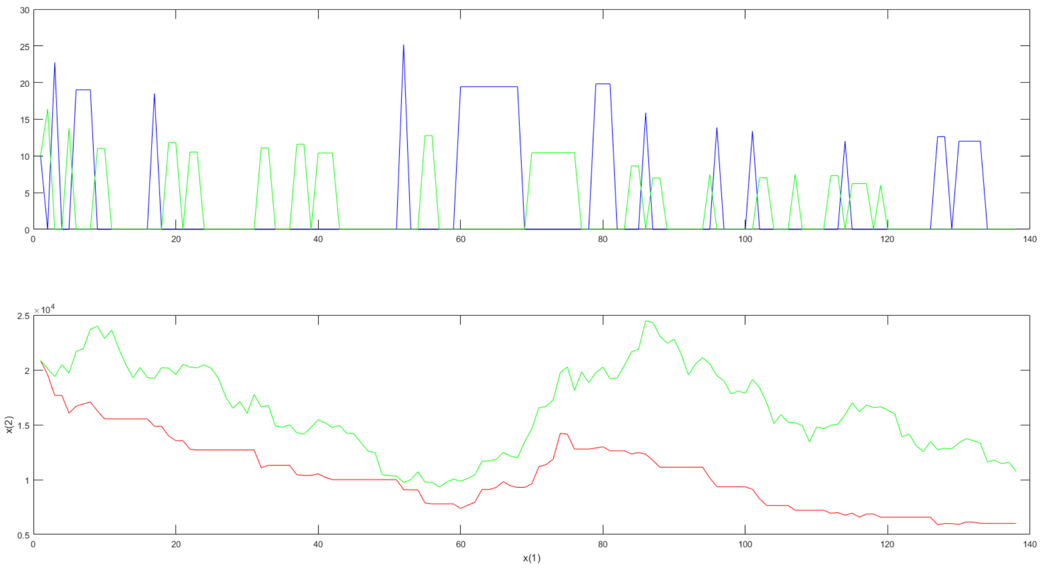


Рис. 1.7: Недетерменированная модель без регуляризацией

гнозирования.

В том случае, когда точно не известны значения $s_i(t)$ и $b_i(t)$, наша функция перехода для $x_0(t)$, в соответствии с (**??**) имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t). \tag{1.12}$$

Где $B(t)$ и $S(t)$ описаны в (1.3).

И при этом $B(t) = (I + E_1(t))\bar{B}(t)$, где $\bar{B}(t)$ это прогнозируемое значение, I – единичная матрица, $E_1(t)$ – случайная диагональная матрица ошибок, при этом $M[E_1(t)] = 0$ (ссылка на часть с оценкой ошибок прогнозирования). Аналогично для $S(t) = \bar{S}(t)(1 + E_2(t))$.

Так как изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что $E_1(t) \equiv E_2(t) = E(t)$.

Сейчас перепишем (**??**):

$$\begin{aligned} x_0(t+1) = x_0(t) - \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) - \\ - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Оценим для величины $x_0(t+1)$ математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \tag{1.14}$$

Будем считать, что величины $x_0(t)$ и $W(t)$ независимы, кроме того, стоимости активов не коррелируют

$$\begin{aligned}D[x_0(t+1)] &= D[x_0(t) - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] = \\ &= D[x_0(t)] + D[\left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] \leq \\ &= D[x_0(t)] + \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t)\rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t)\rangle^2.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Сейчас можем добавить учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будит служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания. Введем функцию стоимости этапа следующим образом:

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha\left(\langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t)\rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t)\rangle^2\right). \tag{1.16}$$

Оценки на значения $D[E(t)]$ зависят от способа предсказания векторов $S(t)$ и $B(t)$.

$$\begin{aligned}&\max_{U^+, U^-} -\sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0+t), U^-(t_0+t)) + \\ &\qquad\qquad + x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T); \\ &X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t) \\ &x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \\ &X(t_0) = X_0; \\ &x_(t_0) = x_0; \\ &X(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T}; \\ &x_0(t) \geq 0; \\ &U^+(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1}; \\ &U^-(t) \geq 0; \\ &\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0, N}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Результат применения данного управления представлен на рисунке 1.8. Тут видим, что применение управления MPC уже лучше, нежели тривиальное управление.

Стоит отметить, что в части работ, посвященных управлению портфелем, например в [1] делается допущение, что стоимость покупки и продажи

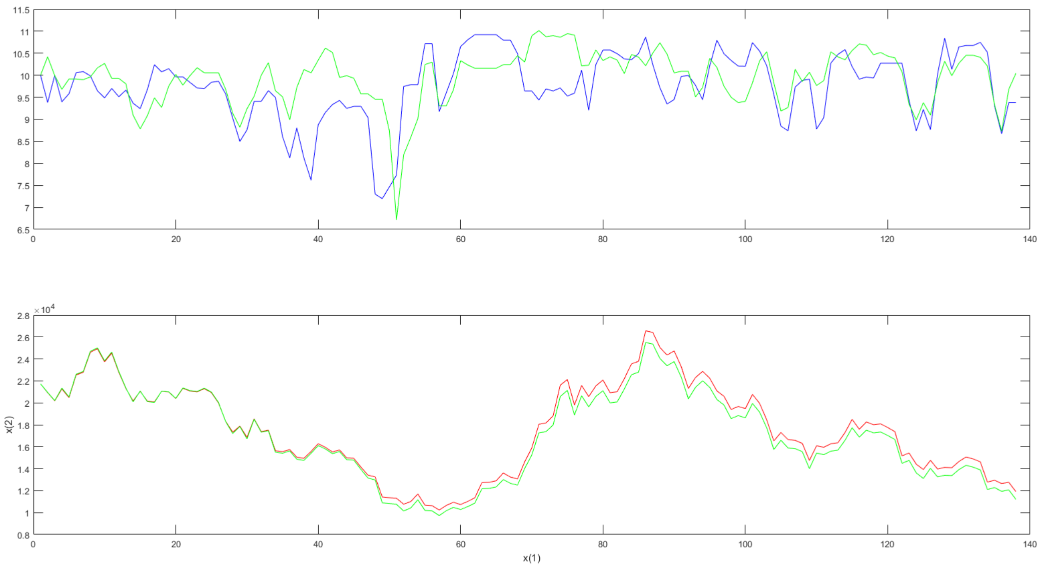


Рис. 1.8: Недетерменированная модель с регуляризацией

совпадают. Это допущение является очень сильным и приводит к тому, что в отличии ситуации на рисунке (1.7) при равных стоимостях покупки и продажи получаем ситуацию как на рисунке (**??**). То есть модель не нуждается ни в регуляризации, ни в терминальном регионе.

1.3.1 Терминальный регион

В данном пункте рассмотрим дополнительные ограничения для модели, введем терминальное множество и рассмотрим задачу квази-бесконечного MPC.

Выберем $\epsilon \in [0, 1]$, и модифицируем терминальное множество из модели (1.10)-(1.11) следующим образом:

$$\left| \frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)} \right| \leq \epsilon, \quad k = \overline{0, N}.$$

Идея данного ограничения возникает из того, что инвестор может хотеть не сильно отдалятся, от изначальных пропорций, но при этом все еще увеличить свой доход относительно тривиального управления.

$$\begin{aligned} \max_{U^+, U^-} -\sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0+t), U^-(t_0+t)) + \\ + x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T); \end{aligned} \tag{1.18}$$

при условиях

$$
\begin{aligned}
&\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) = x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T);\\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t),\\
&X(t_0) = X_0,\\
&x_0(t_0) = x_{00};\\
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1};\\
&\left| \frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0+T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)} \right| \leq \epsilon, \quad k = \overline{0, N}.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

ГЛАВА 2

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Идея использования методов MPC для управления портфелями в настоящий момент очень актуальна, на это указывают ряд исследований, проводимых за последние годы.

Одним из ранних исследований является работа [4] в которой доходность является линейной функцией от некой нормально распределенной случайной величины, тут же появляется идея о представлении целевой функции, как некого взвешенного между доходностью портфеля и рискованностью управления. Продолжение данных исследований можно обнаружить в [3], где строится уже более классическая задача робастного MPC, но при этом используется инвариантная во времени модель, где все доходности фиксируются в самом начале и не изменяются во времени.

Одновременно с составлением моделей происходило исследование подходов для их решения и для моделирования будущих цен активов. В работе [2] динамика изменения доходности активов моделируется при помощи марковского процесса, затем применяется MPC для максимизации математического ожидания доходности. В работе [7] результаты [2] улучшаются при помощи использования фильтра Калмана.

В работе [1] для решения задачи MPC применяются уравнения Рикатти.

Из более современных исследований стоит отметить работу [5]. Тут уже используется неинвариантная во времени модель. И для прогнозирования будущих значений доходности учитываются и текущие доходности активов. Используемая в работе [6] модель дает возможность работать одновременно как с длинными, так и короткими позициями.

К основным недостаткам большинства работ следует отнести то, что цена покупки приравнивается к цене продажи, что не соответствует реальному положению вещей и, как будет показано в данной работе, является очень существенным допущением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Marigo A., Piccoli B. MODEL PREDICTIVE CONTROL FOR PORTFOLIO OPTIMIZATION.

2 Dombrovskii V., Obyedko T. Dynamic Investment Portfolio Optimization under Constraints in the Financial Market with Regime Switching using Model Predictive Control //arXiv preprint arXiv:1410.1136. – 2014.

3 Alenmyr S., ?gren A. Model Predictive Control for Stock Postfolio Selection //MSc Theses. – 2010.

4 Herzog F. et al. Model predictive control for portfolio selection //American Control Conference, 2006. – IEEE, 2006. – С. 8 pp.

5 Nystrup P. et al. Multi-period portfolio selection with drawdown control //Annals of Operations Research. – 2017. – С. 1-27.

6 Yamada Y., Primbs J. A. Model Predictive Control for Optimal Pairs Trading Portfolio with Gross Exposure and Transaction Cost Constraints //Asia-Pacific Financial Markets. – 2018. – Т. 25. – №. 1. – С. 1-21.

7 Fitria I., Apriliani E., Putri E. R. M. Investment ManagementUsing Portfolio Optimizationwith Stock Price Forecasting //Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Т. 10. – №. 48. – С. 2405-2413.

8 Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. – Cambridge university press, 2004.

9 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

10 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.

11 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.

12 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.

13 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.

14 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Инностранная литература, 1960. – 400 с.

15 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

16 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

17 Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов/ Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

18 Боровков, А.А. Числовые характеристики случайных величин. 5-е изд. / А.А. Боровков // М.: Либроком. – 2009. – Глава 4.

19 Стрижов, В.В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей / В.В. Стрижов – М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2008.