ГЛАВА 1
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначения, используемые в этой главе:

- Величины без риски: реальные траектории систем
- Величины с рисками: предсказанные траектории
- L-стоимость перехода
- $(\cdot; t)$ - значение, предсказанное в момент t
- T - горизонт предсказания
- Оптимальное значение функции $J^*(x(t)) = J(x(t), \bar{u}^*(t))$

1.1 Терминальная задача MPC

Приведем математическую формулировку для задачи с нулевым терминальным множеством.

Задача формулируется на основе динамики системы, представляемой как $\dot{x} = f(x, u)$ с начальной точкой $x(0) = x_0$, где $x \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^n$ - вектор управления.

Множества X и U задают допустимые значения состояния и управления для нашей задачи. Таким образом на систему накладываются ограничения вида $x(t) \in X,\ u \in U,\ \forall t \geq 0$.

Приведем предположения о системе, которые важны для разрешимости системы:

- Функция f в начале координат $f(0, 0) = 0$, значит из этого следует, что $x = 0$ – точка равновесия для $u = 0$
- Функция $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – дважды непрерывно дифференцируема
- Множество U - компактное множество, т.е. ограниченное и замкнутое множество.
- Множество X - связанное и закрытое множество

- Для того, чтобы начало координат $(0,0)$ было точкой равновесия системы, необходимо, чтобы начало координат было внутренней точкой множества $X \times U$,что будем записывать как $(0,0) \in int(X \times U)$

Задача MPC:

В момент t, дано начальное состояние $x(t)$ и формулируется следующая задача оптимизации.

$$\min_{\bar{u}(\cdot,t)} J(x(t), \bar{u}(\cdot;t)) \tag{1.1}$$

где $J(x(t), \bar{u}(\cdot;t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau;t), \bar{u}(\tau;t))d\tau$, $L(\bar{x}(\tau;t), \bar{u}(\tau;t))$ - функция стоимости перехода, а $J(x(t), \bar{u}(\cdot;t))$ - аккумулоривание значение стоимости переходов за время горизонта предсказания T, при условиях

$$\dot{\bar{x}} = f(x,u), \bar{x}(t;t) = x(t)$$

$$\bar{u}(\tau;t) \in U,\ \bar{x}(\tau;t) \in X,\ \forall \tau \in [t, t+T]$$

$$\bar{x}(t+T;t) = 0$$

Оптимальное управление открытой системы обозначаем со звездочкой:

$$\bar{u}^*(\cdot;t) = arg\ min_{\bar{u}(\cdot;t)} J(x(t), \bar{u}(\cdot;t))$$

Отметим, что настоящая траектория системы может отличаться от предсказанной.

Приведем предположения относительно функции стоимости перехода:

- Функция $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непрерывная и выполняются следующие условия
$$\begin{cases} L(0,0) = 0 \\ L(x,u) > 0 \\ \forall (x,u) \neq (0,0) \end{cases} \tag{1.2}$$
- Функция $J^*(x)$ непрерывна в точке $x = 0$

Алгоритм MPC

1. В момент времени t, вычисляем значения состояния в этот момент времени $x(t)$ и решаем оптимизационную задачу MPC (1.1)
2. Применяем $u_{MPC}(\tau) = \bar{u}^*(\tau,t)\ \forall t \in [t, t+\delta)$ на временном промежутке δ
3. Устанавливаем $t := t + \delta$ и переходим к шагу 1

Разрешимость: Задача MPC разрешима в момент времени t, если существует хотя бы одно управление $\bar{u}(\cdot;t)$, удовлетворяющее ограничениям.

Theorem 1.1.1 Предположим, что

i. все выше перечисленные предположения относительно динамики системы и функции стоимости переходов выполняются

ii. задача с нулевым терминальным множеством разрешима в момент времени $t = 0$

Тогда верно следующее:

- задача MPC рекуррентно разрешима
- получаемая в результате замкнутая система является асимптотически устойчивой

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ является множеством всех точек, где выполняется (ii). Тогда D называется областью притяжения замкнутой системы.

Приведем идею доказательства, представленной выше теоремы, так как такой это универсальный подход и он еще будет использоваться в дальнейшем для наших целей.

Доказательство.

1. рекуррентная разрешимость доказывается по индукции

   - достижима в $t = 0$ по предположению индукции
   - допустим, что разрешима в момент t. Рассмотрим следующее управление:

   $$\bar{u}(\tau; t+\delta) = \begin{cases} \bar{u}^*(\tau;t), \ \tau \in [t+\delta, t+T] \\ 0, \ \tau \in [t+T, t+\delta+T] \end{cases}$$

   Это управление является выполнимым, так как $\bar{u}^*(\tau;t)$ выполнимо на промежутке $\tau \in [t+\delta, t+T]$, а так как с помощью этого управления в момент времени $t+T$ мы находимся в 0, то значит мы можем применять нулевое управление на промежутке $\tau \in [t+T, t+\delta+T]$ и условия для системы не будут нарушаться.

2. асимптотическая устойчивость

   Идея в использовании функции $J^*(x(t))$ в качестве функции Ляпунова.

   По прямому методу Ляпунова, если выполняются следующие условия для функции Ляпунова $V : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$, $(t,x) \to V(t,x)$:

- $W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x), \forall t \geq 0,\ x \in D$
- $\dot{V}(t,x) \leq 0, \forall t \geq 0,\ x \in D$

где $W_1, W_2 : D \to R$ непрерывные и положительно определенные, то $x^* = 0$ равномерно устойчив. Если далее $\dot{V}(t,x) \leq -W_3(x), \forall t \geq 0,\ x \in D$ и $W_3 : D \to R$ непрерывная и положительно определенная,то $x^* = 0$ равномерно асимптотически устойчива.

Рассмотрим:

$$J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta)) = \int_{t+\delta}^{t+\delta+T} L(\bar{x}(\tau; t+\delta), \bar{u}(\tau; t+\delta)) d\tau =$$

$$= \int_{t+\delta}^{t+T} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau + \int_{t+T}^{t+\delta+T} L(0,0) d\tau (=0) =$$

Так как $J^*(x(t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau$, то можем переписать в виде

$$= J^*(x(t)) - \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau$$

из оптимальности следует, что $J^*(x(t+\delta)) \leq J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta))$, а значит

$$J^*(x(t+\delta)) \leq J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta)) \leq J^*(x(t)) - \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau$$

по индукции мы получаем следующее

$$J^*(x(\infty)) \leq J^*(x(0)) - \int_0^{\infty} L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau)) d\tau$$

Lemma 1 (Barbalat's) *Если ϕ равномерно непрерывна $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, то выполняется следующее*

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau < \infty \Rightarrow \phi(t) \to 0, t \to \infty$$

Так как $J^*(x(\infty)) \geq 0$ по условию и $J^*(x(0))$ конечно, то $\int_0^{\infty} L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau)) d\tau$ тоже конечно.

Из леммы Barbalat's мы получаем, что $L \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно мы получаем, что так как L непрерывна и непрерывны аргументы этой функции, то $\|x_{MPC}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty \Rightarrow$, а из этого следует сходимость.

1.2 MPC на квази-бесконечном горизонте

Ограничения нулевой терминальной задачи достаточно строгие, так как точное попадение в конце горизонта в начало координат не всегда выполнимо, поэтому введем новые ослабленные ограничения, которые будут представлять собой терминальное множество и терминальную функцию. Внутри терминального множества введем локальную функцию управления Ляпунова. Теперь в конце горизонта мы не будем требовать попадение в начало координат, а будем требовать попадение в терминальное множество, в котором уже можно за счет локальной функции Ляпунова достичь начала координат.

Задача оптимизации MPC.

В момент времени t, находим значение состояния $x(t)$

$$\min_{\bar{u}(\cdot;t)} J(x(t), \bar{u}(\cdot;t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau;t), \bar{u}(\tau;t))d\tau + F(\bar{x}(t+T;t))$$

где $F(\bar{x}(t+T;t))$ - функции стоимости терминального состояния, т.е. терминальная функция. Условия остались прежними, за исключением того, что вместо $\bar{x}(t+T;t) = 0$ мы теперь требуем $\bar{x}(t+T;t) \in X^f$.

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \bar{x}(t;t) = x(t)$$

$$\bar{x}(t;t) \in X,\ \bar{u}(t;t) \in U,\ \forall \tau \in [t, t+T]$$

$$\bar{x}(t+T;t) \in X^f$$

Множество состояний X^f - терминальный регион.

Оптимальное решение $\bar{u}^*(\cdot, t)$ и оптимальное значение функции с оптимальным управлением $J^*(x(t))$.

Введем предположения относительно терминального региона и терминальной функции:

Пусть существует локальное вспомогательное управление $u = k^{loc}(x)$, такое что

1. Множество X^f является инвариантным множеством для динамики системы $\dot{x} = f(x, k^{loc}(x))$

2. Управление $k^{loc}(x) \in U\ \forall x \in X^f$, т.е. локальное управление является допустимым для всех состояний терминального региона

3. $\dot{F}(x) + L(x, k^{loc}(x)) \leq 0\ \forall x \in X^f$,

Из этого следует, что F это локальная функция Ляпунова.

Theorem 1.2.1 Предположим, что предположения о терминальной функции и регионе выполняются и задача MPC выполнима в точке $t = 0$. Тогда:

- задача рекурсивна разрешима
- закрытая система является асимптотически устойчивой

Как предположения о терминальной функции и регионе могут быть удовлетворены?

Предположим:

- функция стоимости перехода является квадратической $L(x, u) = x^T Qx + u^T Ru,\ Q, R > 0$
- линеаризация в нуле стабилизируемая, т.е. представима исходная система в виде $\dot{x} = Ax + Bu$, где $A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0),\ B = \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0)$

Тогда будем искать терминальную функцию и регион в следующем виде:

- Линейное вспомогательное управление $k^{loc}(x) = Kx$
- Квадратическая терминальная функция $F(x) = x^T Px$, $P > 0$
- Терминальный регион $X^f_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Px \le \alpha\}$ для некоторой $\alpha > 0$

Определим P, K, α так что предположения о терминальной функции и регионе выполняются.

Для предположения $\dot{F}(x) + L(x, k^{loc}(x)) \le 0\ \forall x \in X^f$:

$$L(x, u) = x^T Qx + u^T Ru = [u = Kx] = x^T (Q + K^T RK)x = x^T Q^* x$$

Тогда перепишем неравенство из предположения в виде:

$$\frac{d}{dt} x(t)^T Px(t) \le -x(t)^t (Q + K^T RK)x(t) = -x(t)^T Q^* x(t)$$

Производная от терминальной функции распишем в таком виде

$$\frac{d}{dt} x(t)^T Px(t) = f(x, Kx)^T Px + x^T Pf(x, Kx)$$

Из линеаризованности системы следует, что $f(x, Kx) = (A + BK)x + \phi(x)$, обозначим $A + BK = A_K$, где K выбирается так, что $A + BK$ является гурвицевой.

Теперь производную перепишем в виде:

$$\frac{d}{dt}x(t)^T P x(t) = x^T(A_K P + P A_K)x + 2x^T P\phi(x) \tag{1.3}$$

Необходимо определить верхнюю границу для $x^T P\phi(x)$: Введем норму функции нелинейности $\phi(x)$ внутри терминального региона $L_\phi := sup\{\frac{|\phi(x)|}{|x|}, x \in X_\alpha^f, x \neq 0\}$

Тогда верхняя граница будет иметь такой вид

$$x^T P\phi(x) \leq |x^T P||\phi(x)| \leq \|P\| L_\phi |x|^2 \leq \frac{\|P\| L_\phi}{\lambda_{min}(P)} x^T P x \tag{1.4}$$

Выберем α достаточно малой для того, чтобы выполнялось следующее неравенство для некоторого $k > 0$:

$$L_\phi \leq \frac{k\lambda_{min}(P)}{\|P\|} \tag{1.5}$$

Подставим (1.5) в (1.4) и получим: $x^T P\phi(x) \leq k x^T P x$. Подставим полученное неравенство в (1.3) и получим

$$\frac{d}{dt}x^T P x \leq x^T(A_K P + P A_K)x + 2k x^T P x = x^T((A_K + kI)^T P + P(A_K + kI))x$$

все это нам гарантирует, что $\frac{d}{dt}x^T P x \leq -x^T Q^* x$,

$\Rightarrow$ равенство Ляпунова может быть решено тогда и только тогда, когда $A_K + kI$ является гурвицевой, в свою очередь этого можно добиться тогда и только когда,k выбирается из следующего неравенства

$$k < -max\ Re\{\lambda(A_K)\} \tag{1.6}$$

Тогда получим уравнение Ляпунова из которого можно получить матрицу P для терминальной функции:

$$\Rightarrow \ (A_K + kI)^T P + P(A_K + kI) = -Q^* \tag{1.7}$$

Алгоритм нахождения терминальной функции и региона, основанный на всех выше перечисленных предположениях:

1. Найдем K такое, что $(A+BK)$ гурвицева, тогда локальное управление будет $u = Kx$

2. Выберем $k > 0$ такое, что неравенство (1.6) верно и решаем уравнение

Ляпунова (1.7)

3. Найдем наибольшее α_1 такое что $Kx \in U, \ \forall x \in X^f_{\alpha_1}$, т.е. наше локальное управление остается допустимым для всех состояний терминального региона задаваемого как $X^f_{\alpha_1} = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T P x \le \alpha_1\}$

4. Найдем наибольшее $\alpha \in (0, \alpha_1]$ такое что (1.5) выполняется.

Шаг (4) мы можем заменить на альтернативный и решать ззадачу оптимизации

$$\max_x x^T P \phi(x) - k x^T P x \quad s.t. \ x^T P x \le \alpha \tag{1.8}$$

Постепенно будем уменьшать α относительно α_1 до тех пор, пока оптимальное значение $\max_x x^T P\phi(x) - kx^T Px$ является отрицательным.

В итоге мы имеем следующие степени свободы:

- нахождение K для локального управления Ляпунова
- выбор k определяет компромисс между "большим"терминальным регионом и большой матрицей P для терминальной функции

1.3 Неограниченный MPC

Неограниченный MPC ставит перед собой задачу гарантировать стабильность и оценить на сколько управление MPC отличается от оптимального. ЗДесь нет ограничений на состояния, поэтому терминальные ингредиенты не вводятся.

Постановка задачи:

- Система строится на основе динамики $\dot{x} = f(x, u), x(0) = x_0, \ x \in \mathbb{R}^n$
- Ограничения вводятся на управление $u(t) \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m \ \forall t \ge 0$

Функция стоимости на бесконечном горизонте

$$J_\infty(x_0, \bar{u}(\cdot; 0)) = \int_0^\infty L(\bar{x}(\tau; 0), \bar{u}(\tau; 0)) d\tau$$

$\Rightarrow$ оптимальное значение функции $J^*_\infty(x_0)$

Предположение: Если $J^*_\infty(x_0) < \infty, \forall x_0$, тогда система асимптотически стабильна.

Функция стоимости на конечном горизонте:

$$J_T(x(t), \bar{u}(\cdot; t)) = \int_0^T L(\bar{x}(\tau; t), \bar{u}(\tau; t)) d\tau$$

Функцию стоимости на бесконечном горизонте получаем, как результат применения MPC

$$J_\infty^{MPC}(x_0) = \int_0^\infty L(\bar{x}_{MPC}(\tau), \bar{u}_{MPC}(\tau)) d\tau$$

Индекс субоптимальности α:
$\alpha J_\infty^{MPC}(x_0) \leq J_\infty^*(x_0) \; \forall x_0$

- $\alpha \leq 1$ следует из оптимальности J_∞^*
- $\alpha > 0$ дает стабильность замнкнутой сиистемы

Предположим, что существует $\alpha \in (0, 1]$ такое что $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq J_T^*(x(t)) - \alpha \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau \tag{1.9}$$

Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^n$ верна следующая цепочка неравенств

$$\alpha J_\infty^*(x(t)) \leq \alpha J_\infty^{MPC}(x(t)) \leq J_T^*(x(t)) \leq J_\infty^*(x(t))$$

Введем обозначение оптимальной функции стоимости перехода $L^*(t; t) = L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t))$

Рассмотрим следующие два неравенства:

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau \tag{1.10}$$

$$\int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau \leq \gamma \int_t^{t+\delta} L^*(\tau; t) d\tau \tag{1.11}$$

Теорема 1.1 Предположим, что существуют $\epsilon \in (0; 1]$ и $\gamma > 0$ такие что 1.10 - 1.11 выполняется. Тогда (1.9) выполняется при $\alpha = 1 - \gamma \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$

$$J_T^*(x(t+\delta)) - J_T^*(x(t)) = J_T^*(x(t+\delta)) - \int_t^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau \leq^{(1.10)}$$

$$\leq \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau - \int_t^{t+\delta} L^*(\tau; t) d\tau \leq^{(1.11)}$$

$$\leq (\gamma \frac{1-\epsilon}{\epsilon} - 1) \int_t^{t+\delta} L^*(\tau; t) d\tau$$

Тогда сейчас мы можем обозначить $\alpha := 1 - \gamma \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ и получить неравенство (1.9).

Предположение 1: Асимптотическая управляемость

Для всех x, существует некое управление $\hat{u}_x(\cdot)$, удовлетворяющее $\hat{u}_x(t) \in \mathbb{U},\ \forall t \geq 0$ такое что

$$L(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \leq \beta(t) \min_u L(x, u),\ \forall t > 0$$

где $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ - непрерывная, положительная, строго убывающая и $\lim_{t \to 0} \beta(t) = 0$

$\Rightarrow$ из этого следует, что $\int_0^\infty \beta(\tau) d\tau < \infty$, а тогда обозначим этот интеграл как $B(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau$.

Необходимо показать,как найти ϵ и γ:

Lemma 2 Пусть предположение 1 выполняется. Тогда неравенство

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq \int_{t+\delta}^{t+t'} L^*(\tau; t) d\tau + B(T + \delta - t') L^*(t + t'; t)$$

верно для всех $t' \in [\delta, T]$

Основываясь на предыдущей лемме, найдем чему равно ϵ:

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq \min_{t' \in [\delta, T]} (\int_{t+\delta}^{t+t'} L^*(\tau; t) d\tau + B(T + \delta - t') L^*(t + t'; t)) \leq$$

$$\int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau + B(T) \min_{t' \in [\delta, T]} L^*(t + t'; t)$$

так как $\min_{t' \in [\delta, T]} L^*(t + t'; t) \leq \frac{1}{T-\delta} \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau$ минимум менее или равен среднему значению, получим

$$= (1 + \frac{B(T)}{T-\delta}) \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau$$

А тогда мы имеем $(1 + \frac{B(T)}{T-\delta}) = \frac{1}{\epsilon}$, т.е. $\frac{1-\epsilon}{\epsilon} = \frac{B(T)}{T-\delta}$.

Аналогичным способом найдем, чему равно γ.

Lemma 3 Пусть предположение 1 выполняется. Тогда неравенство

$$\int_{t+t'}^{t+T} L^*(\tau;t)d\tau \leq B(T-t')L^*(t+t';t)$$

верно для всех $t' \in [0;T]$

Тем же способом как и получили ϵ, найдем $\gamma = \frac{B(T)}{\delta}$ с помощью предыдущей леммы.

В результате получим $\alpha = 1 - \gamma\frac{1-\epsilon}{\epsilon} = 1 - \frac{B(T)}{\delta}(\frac{B(T)}{T-\delta})$.

При $T \to \infty$ наша оценка для $\epsilon \to 1$, а значит из этого следует $\alpha \to 1$ при $T \to \infty$, тогда из этого будет следовать замкнутая стабильность при достаточно большом T.

1.4 Robust MPC

Рассмотрим линейную (дискретную) систему с возмущением:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t)$$

В краткой записи система имеет вид $x^+ = Ax + Bu + w$.

Данная система имеет следующие ограничения:

$$x(t) \in X, u(t) \in U, w(t) \in W \ \forall t = 0, 1...$$

W является компактным, выпуклым множеством, содержащим 0.

Главная идея робастного MPC заключается в использовании дополнительной обратной связи по ошибке, такой, что будет обеспечивать нахождение состояния нашей системы внутри "трубки"вокруг некого номинального состояния системы.

Определим номинальную систему следующим образом:

$$z^+ = Az + Bv$$

В момент времени t, дано $z(t)$, решаем оптимизационную задачу

$$\min_{v(\cdot|t)} \hat{J}(z(t), v(\cdot|t)) = \sum_{i=t}^{t+N-1} L(z(i|t), v(i|t)) + F(z(t+N|t))$$

при условии

$$z(i+1|t) = Az(i|t) + Bv(i|t), z(t|t) = z(t)$$

$$z(i|t) \in Z, v(i|t) \in V, t \leq i \leq t+N-1$$

$$z(t+N|t) \in Z^f \subseteq Z$$

Таким образом, зная оптимальное значение $v^*(\cdot|t)$, мы найдем оптимальное значение $\hat{J}^*(z(t))$

Предположение 1:

- Функция стоимости перехода является квадратичной функцией $L(z,v) = z^T Q z + v^t R v, Q, R > 0$
- Существует локальное вспомогательное управление $k^{loc} = Kx$ такое, что
  1. Z^f инвариантно по отношению $z^+ = (A+BK)z$,где $A_k = A+BK$ гурвицева, и тогда имеем $A_k Z^f \subseteq Z^f$
  2. $Kz \in V \forall z \in Z^f$, т.е. локальное управление является допустимым для всех состояний терминального множества
  3. $F(A_k z) - F(z) \leq -L(z, Kz) \forall z \in Z^f$

Из предположения 1 следует, что

$$\hat{J}^*(z(t+1)) - \hat{J}^*(z(t)) \leq -L(z(t), v_{MPC}(t))$$

Так как L квадратичная, то существуют ограничения $c_2 > c_1 > 0$ такие что $\forall z \in Z_N$

1. $c_1|z|^2 \leq \hat{J}^*(z)$
2. $\hat{J}^*(z^+) - \hat{J}^*(z) \leq -c_1|z|^2$
3. $\hat{J}^*(z) \leq c_2|z|^2$

Введем понятия для рассмотрения влияния возмущения.

Сумма Минковского:

$$A, B \subseteq \mathbb{R}^n A \oplus B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$$

Разница Понтрягина:

$$A, B \subseteq \mathbb{R}^n A \ominus B = \{a \in \mathbb{R}^n | a+b \in A, \forall b \in B\}$$

S является робастным инвариантным множеством для $x^+ = Ax + w$ если $AS \oplus W \subseteq S$ (или эквивалентно $Ax + w \in S \forall x \in S, \forall w \in W$)

Минимальное робастное инвариантное множество:

$$S_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} A^i w$$

Следует отметить, что представленная выше сумма существует и ограничена, если A является матрицей Шура.

В общем случае трудно подсчитать S_∞. Однако в некоторых случаях мы можем приближенно найти это множество.

Пусть наше управление выглядит следующим образом:

$$u_{MPC} = v_{MPC}(x) + K(x - z)$$

Пусть $x^+ = Ax + Bu + w$ и $z^+ = Az + Bv$. Если $x \in Z \oplus S$ и $u = v + K(x - z)$, тогда $X^+ \in Z^+ \oplus S$ (инвариантное множество для $x^+ = (A + BK)x + w$)

Представим алгоритм для робастного MPC

В момент времени t, дано состояние $x(t)$, решаем оптимизационную задачу

$$\min_{z(t|t), v(\cdot|t)} J(x(t), v(\cdot|t)) = \sum_{i=1}^{t+N-1} L(z(i|t), v(i|t)) + F(z(t + N|t))$$

при условии

$$z(i + 1|t) = Az(i|t) + Bv(i|t)$$

$$z(i|t) \in Z = X \ominus S$$

$$v(i|t) \ \in V = U \ominus KS$$

$$t \leq i \leq t + N - 1$$

$$z(t + N|t) \in Z_N \subseteq Z$$

$$x(t) \in z(t|t) \oplus S$$

Оптимальное значение для $J^*(x(t))$ достигается в $z^*(t|t), v^*(\cdot|t)$, тогда строим управление для исходной задачи в виде:

$$u(t) = v^*(t|t) + K(x(t) - z^*(t|t))$$

Свойство робастного MPC

- Множество $X_N = Z_N \oplus S \subseteq X$ допустимо и достижимо
- Равенство $J^*(x) = \hat{J}^*(z^*(x))$ верно по определению J^* и $\hat{J}^*$
- $J^*(x) = 0 \; \forall x \in S$

Theorem 1.4.1 Пусть предположение 1 выполняется и система робастного MPC разрешима в точке $t = 0$.

Тогда:

1. задача робастного MPC рекуррентно разрешима
2. замкнутая система робастно экспоненциально сходится к S
3. замкнутая система удовлетворяет ограничениям на управление и состояния, то есть $x(t) \in X$, $u(t) \in U \; \forall t = 0, 1...$

Важным обобщением использования робастного MPC является применение его к системама вида

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$(A(t), B(t)) \in \rho : con(A_j, B_j), j = 1, ..., J \; \forall \geq 0$

Введем значения: $\bar{A} := \frac{1}{J}\sum_{i=0}^{J} A_i$, $\bar{B} := \frac{1}{J}\sum_{i=0}^{J} B_i$, которые являются средним арифметическим для матриц A и B. Тогда рассмотрим новую систему относительно этих средних значений и возмущением будем называть отклонение от этих средних значений.

$$x(t+1) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + w(t)$$

$$w(t) \in W := \{(A - \bar{A})x + (B - \bar{B})u | (A, B) \in \rho, x \in X, u \in U\}$$

W является компактом, если X,U компакты, тогда мы можем применять робастное MPC в новой формулировке.

Как уже говорилось, сложно вычислить в общем случае минимальное робастное инвариантное множество $S_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} A^i w$

Представим один из способов его аппроксимации.

Определим $S_k := \sum_{i=0}^{k-1} A^i w, \; k \geq 1$

В общем случае, S_k для конечного k не является инвариантным (это верно только в том случае, если A нильпотентна)

Theorem 1.4.2 Если $0 \in int(W)$ и A является матрицей Шура, тогда существует целое число $k > 0$ и $\alpha \in [0, 1)$ такое, что

$$A^k W \subseteq \alpha W \tag{1.12}$$

Если (1.12) выполняется, то

$$S(\alpha, k) := (1 - \alpha)^{-1} S_k$$

является инвариантным множеством для $x^+ = Ax + w$

Представим алгоритм для нахождения инвариантного множества

1. Фиксируем $\alpha \in (0, 1)$ и целое $k > 0$
2. проверяем, выполняется ли (1.12):
   - если да: $S(\alpha, k)$ - это инвариантное множество
   - если нет: устанавливаем $k := k + 1$ и переходим к шагу (2)

ГЛАВА 2

МОДЕЛЬ (НАЗВАТЬ ИНАЧЕ)

В данной главе введем основные понятия и обозначения, которые будем использовать в дальнейшем для решения задачи оптимизации портфеля.

Портфель – совокупность инвестиционных вложений, состоящих из ценных бумаг и свободных финансов.

Портфель состоит из N типов бумаг. Количество бумаг i-го типа в момент времени $t \in \overline{0, T}$ равняется $x_i(t)$, где $x_i(t) \in R_{\geq 0}$. Введем вектор

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)\}^T$$

Обозначим $x_0(t)$ как количество свободных финансов в момент времени t.

Под $u_i^+(t)$ мы будем понимать сколько мы купили ценных бумаг типа i в момент времени t. Под $u_i^-(t)$ мы будем понимать сколько мы продали ценных бумаг типа i в момент времени t. При этом стоимость покупки этой бумаги равна $b_i(t)$ (buy), а продажа $s_i(t)$ (sell).

Таким образом, на каждом шаге покупаем ценнных бумаг типа i на сумму $u_i^+(t)b_i(t)$ и продаем на сумму $u_i^-(t)s_i(t)$.

Таким образом, количество свободных средств в следующий момент времени будет равно

$$x_0(t+1) = x_0(t) - \sum_{i=1}^{N} \left(-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)\right)$$

.

Количество ценных бумаг типа i в момент времени $t+1$ будет равно

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i)$$

Представим все это в векторной форме. Введем следующие определения:

$$U^+(t) = \{u_1^+(t), \ldots, u_N^+(t)\}^T$$
$$U^-(t) = \{u_1^-(t), \ldots, u_1^-(t)\}^T$$

$$B(t) = \{b_1(t), \ldots, b_N(t)\}^T$$
$$S(t) = \{s_1(t), \ldots, s_N(t)\}^T$$

Тогда имеем функцию перехода для $X(t)$:

$$X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t)$$

И для $x_0(t)$:

$$x_0(t+1) = x_0(t) + U^+(t)^t B(t) - U^-(t)^t S(t)$$

На значения X, U^+, U^-, x_0 накладываются следующие естественные ограничения:

$$\begin{aligned} X(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T} \\ U^+(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T-1} \\ U^-(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T-1} \\ x_0(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T} \end{aligned}$$

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть $w_i(t)$ общая стоимость бумаг типа i, и она равна сумме, которую мы сейчас можем выручить из ее продажи, т.е. $w_i(t) = x_i(t)s_i(t)$. $w_0(t)$ будем считать равным $x_0(t)$. Тогда общая стоимость портфеля равна

$$w(t) = \sum_{i=0}^{N} w_i(t)$$

. Или в векторном виде:

$$w(t) = x_0(t) + X(t)^T S(t)$$

2.0.1 Данные для численных экспериментов

В данной главе описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов. Тут же дано описание того, как строятся прогнозы в случае, когда работаем с недетерминированной моделью.

Будем работать с двумя типами данных, сгенерированных искусственно и реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и суносойднойй функции

$$B_i(t) = k_{i0} + k_i * t + \alpha_i * sin(r_i + g_i * t)$$

$$S_i(t) = 0.99 B_i(t)$$

Значения k_{i0}, k_i, α_i, r_i, g_i подобраны таким образом, чтоб ни для каких $i \neq j$ не совпадали периоды. $S_i(t)$ выбрана в таком виде, так как это является неплохим приближением реально существующий картины, когда разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту.

Реальные же данные взяты по ... из исторических курсов за период ...

Предсказание значений

В общем случае, данные будущих стоимостей $S_i(t)$ и $B_i(t)$ не известны. В этой работе будем пытаться предсказать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регриссионная модель, зависимости стоимости от времени, в этом разделе будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Оценка предсказаний

В данной секции рассказывается о качестве найденных оценок. Показывается, что они будут несмещенными, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

Дисперсия будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости перехода в виде

$$L_t(U^+(t), U^-(t), \bar{B}(t), \bar{S}(t), D[W(t)^T]) = \alpha * D[W(t)^T] \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)^2$$

Где $W(t)$ это собственно и сама ошибка предсказания.

2.0.2 Детерменированная модель

В данной главе мы рассмотрим детерминированную модель, а именно, когда нам точно известны наперед все значения $s_i(t)$ и $b_i(t)$.

Иными словами $\hat{s}(t) = s(t)$ и $\hat{b}(t) = b(t)$

В таком случае, мы можем рассмотреть следующие модели:

- максимизация стоимости портфеля без терминального множества
- максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Максимизация стоимости портфеля без терминального множества

Рассмотрим следующую задачу MPC на горизонте планирования T

$$
\begin{aligned}
&\max_{U^+,U^-} J(x,u) = w(T) = x_0(T) + X(T)^T S(T) \\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t) \\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \\
&X(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T} \\
&U^+(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T-1} \\
&U^-(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T-1} \\
&x_0(t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Отметим, что в данной задаче функция стоимости не ограничена, кроме того, тут отсутствуют стоимости переходов а есть только терминальная стоимость.

Так как предположение $J^*_\infty(x_0) < \infty$ из главы (1.3) не выполняется, то мы не можем гарантировать устойчивость и исследовать на субоптимальность.

Проведем численные эксперименты для $T = 6$ и $N = 2$ для синтетических и настоящих данных.

TODO вставить картинки

Как видим, у нас происходят частые операции вида: продать все бумаги типа i и на освободившиеся деньги купить бумаги типа j. Это может представлять собой проблему, так как мы производим сразу большие переводы, что может привносить с собой большие риски (подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерменированной моделью)

Изменим функцию стоимости таким образом, чтоб добавить в нее стоимость перехода.

$\min_{U^+,U^-} J(x,u) = \sum_{i=0}^{T} L(U^+(i), U^-(i)) - w(T)$

Если в качестве функции стоимости взять, скажем

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))$$

то есть весь оборот денег, который был в момент t, то наши графики изменятся уже следующим образом (для $\alpha = 0.1$)

Максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Рассмотрим следующую задачу MPC на горизонте планирования T

$$
\begin{aligned}
&\max_{U^+,U^-} J(x(t_0),u) = x_0(t_0+T) + X(t_0+T)^T S(t_0+T)\\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t)\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t)\\
&X(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T}\\
&U^+(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T-1}\\
&U^-(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T-1}\\
&x_0(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0,T}\\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0,N}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

иными словами, требуется, чтоб в момент времени t_0+T пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом MPC (только там в качестве устойчивого состояния используется точка x_s, а в нашем случае это целый луч).

Теорема 2.1 Задача (**??**) разрешима

Доказательство. Заметим, что управление

$$U^+(t_0+\,) = U^-(t_0+t) \equiv 0, \quad \forall t = \overline{0,T-1}$$

является допустимым, следовательно наша задача разрешима.

Введем понятие нулевого управления, под ним мы будем понимать управление, постоянно равное нулю и обозначим его $NULL$

$$U^+(t) = U^-(t) \equiv 0$$

Теорема 2.2 Пусть для $x_0(0), X(0)$ из задачи (**??**) получено управление MPC

$$\{(U(0),X(1)),(U(1),X(2)),\dots\}$$

тогда любого $M > 0$ верно:

$$\max_{U^+,U^-} J(x(M),u) \geq x_0(0) + X(0)^T S(M+T)$$

Доказательство. Будет добавлено позже

Иными словами, это означает, что в любой момент времени, портфель, управляемый MPC за T шагов может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет больше, нежели мы бы постоянно использовали нулевое управление.

2.0.3 Недетерминированная модель

В данной главе рассмотрен случай, когда точно не известны будущие стоимости активов и мы должны

В случае, когда точно не известны значения $s_i(t)$ и $b_i(t)$, наша функция перехода для $x_0(t)$ имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \tag{2.3}$$

Где

$$B(t) = \{b_1(t), \ldots, b_N(t)\}^T$$
$$S(t) = \{s_1(t), \ldots, s_N(t)\}^T$$

И при этом $B(t) = \bar{B}(t)(1+W_1(t))$, где $\bar{B}(t)$ это предсказанное состояние а $M[W_1(t)] = 0$. Аналогично для $S(t) = \bar{S}(t)(1 + W_2(t))$.

Так как изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что $W_1(t) \equiv W_2(t) = W(t)$

Сейчас перепишем (**??**):

$$\begin{aligned} x_0(t+1) = x_0(t) + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \\ - \left(\bar{B}(t)W(t)\right)^T U^+(t) + \left(\bar{S}(t)W(t)\right)^T U^-(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Оценим для величины $x_0(t+1)$ математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \tag{2.5}$$

Будем считать, что величины $x_0(t)$ и $W(t)$ независимы

$$\begin{aligned} D[x_0(t+1)] = D[x_0(t) - \left(\bar{B}(t)W(t)\right)^T U^+(t) + \left(\bar{S}(t)W(t)\right)^T U^-(t)] = \\ = D[x_0(t)] + D[W(t)^T \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)] = \\ = D[x_0(t)] + D[W(t)^T] \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Сейчас можем добавить учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будит служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания.

$$L_t(U^+(t), U^-(t), \bar{B}(t), \bar{S}(t), D[W(t)^T]) = \alpha * D[W(t)^T] \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)^2$$

Оценки на значения $D[W(t)^T]$ зависят от способа предсказания векторов $S(t)$ и $B(t)$.

$$\begin{aligned}
&\max_{U^+, U^-} -\sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t), U^-(t), \bar{B}(t), \bar{S}(t), D[W(t)^T]) + \\
&\qquad\qquad + x_0(t_0+T) + X(t_0+T)^T S(t_0+T) \\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t) \\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \\
&X(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T} \\
&U^+(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T-1} \\
&U^-(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T-1} \\
&x_0(t_0+t) \geq 0, \quad \forall t = \overline{0, T} \\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0, N}
\end{aligned} \tag{2.7}$$