

# ГЛАВА 1

## ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей главе вводятся основные понятия и определения, строятся математические модели, описывающие динамику инвестиционного портфеля, и формулируются задачи его оптимизации. Рассматриваемые модели можно разбить на два класса: детерминированные, в которых заданы функции цены покупки и продажи ценных бумаг, и недетерминированные, в которых указанные функции прогнозируются на заданном горизонте планирования. Описываются данные, которые будут использоваться для проведения численных экспериментов, и методы прогнозирования. Обсуждаются достоинства и недостатки различных подходов при оптимизации портфелей.

### 1.1 Основные положения модели

Портфель — совокупность инвестиционных вложений, состоящих из ценных бумаг и свободных финансов.

Портфель состоит из  $N$  типов бумаг. Количество бумаг  $i$ -го типа ( $i = \overline{1, N}$ ) в момент времени  $t \geq 0$  равняется  $x_i(t)$ , где  $x_i(t) \geq 0$ . Обозначим через  $x_0(t)$  — количество свободных финансов в момент времени  $t \geq 0$ .

Через  $u_i^+(t)$  будем обозначать количество ценных бумаг типа  $i$ , которые инвестор купил в момент времени  $t$ . Соответственно, через  $u_i^-(t)$  обозначим, сколько инвестор продал ценных бумаг типа  $i$  в момент времени  $t$ . Пусть стоимость покупки  $i$ -ой бумаги равна  $b_i(t) \geq 0$  (buy), а продажа  $s_i(t) \geq 0$  (sell). Конкретный вид функций  $s_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $t \geq 0$  будет обсуждаться ниже, в разделе ??.

Таким образом, на в момент времени  $t$  инвестор покупает ценных бумаг типа  $i$  на сумму  $b_i(t)u_i^+(t)$  и продает на сумму  $s_i(t)u_i^-(t)$ .

Тогда количество свободных средств в следующий момент времени  $t + 1$  будет равно

$$x_0(t + 1) = x_0(t) + \sum_{i=1}^N (-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)). \quad (1.1)$$

Количество ценных бумаг типа  $i$  в момент времени  $t + 1$  будет равно

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i). \quad (1.2)$$

Считаем, что в начальный момент времени заданы начальные условия — количество бумаг каждого типа и объем свободных средств, которыми располагает инвестор:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_0(0) = x_{00}.$$

Введенные переменные и уравнения (1.1), (1.2) представим в векторной форме. Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T; \\ U^+(t) &= [u_1^+(t), \dots, u_N^+(t)]^T; \\ U^-(t) &= [u_1^-(t), \dots, u_N^-(t)]^T; \\ B(t) &= [b_1(t), \dots, b_N(t)]^T; \\ S(t) &= [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T; \\ X_0 &= [x_{10}, \dots, x_{N0}]^T. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Используя (1.3), перепишем (1.2) для  $X(t)$ :

$$X(t + 1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad t \geq t_0. \quad (1.4)$$

Представим (1.1) в векторной форме:

$$x_0(t + 1) = x_0(t) + B(t)^T U^+(t) - S(t)^T U^-(t), \quad x_0(t_0) = x_{00}, \quad t \geq t_0. \quad (1.5)$$

На значения  $X(t)$ ,  $x_0(t)$ ,  $U^+(t)$ ,  $U^-(t)$  в каждый момент времени  $t$  накладываются следующие естественные ограничения:

$$\begin{aligned} X(t) &\geq 0, \\ x_0(t) &\geq 0, \\ U^+(t) &\geq 0, \\ U^-(t) &\geq 0, \\ t &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

С точки зрения теории оптимального управления, в динамической модели (1.4) – (1.6): переменные  $X(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $x_0(t) \in \mathbb{R}$  — фазовые переменные (зависимые), переменные  $U^+(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $U^-(t) \in \mathbb{R}^N$  — управляющие перемен-

ные (управления, независимые), динамическая модель нестационарная в силу зависимости от времени функций цены покупки  $B(t)$ ,  $t \geq 0$ , и цены продажи  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ . Ограничения (1.6), накладываются как на управляющие, так и на фазовые переменные.

Начиная с нулевого момента времени будет строиться задача МРС. Из полученного управления берется и применяется к системе только первое. Полученное новое состояние системы используется в качестве начального для следующей задачи МРС.

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть  $w_i(t)$  — общая стоимость бумаг типа  $i$ , и она равна сумме, которую инвестор может выручить из ее продажи в момент времени  $t$ :

$$w_i(t) = s_i(t)x_i(t), \quad t \geq 0.$$

Значение  $w_0(t)$  будем считать равным  $x_0(t)$ . Тогда общая стоимость портфеля равна

$$w(t) = \sum_{i=0}^N w_i(t).$$

В векторном виде, используя (1.3), получим следующую формулу для общей стоимости портфеля:

$$w(t) = x_0(t) + S(t)^T X(t).$$

Задачи оптимизации портфеля, динамика которого описывается согласно (1.4), (1.5) и подчиняется ограничениям (1.6) будет связана с максимизацией введенной стоимости портфеля при различных дополнительных требованиях. Первая такая модель будет рассмотрена в разд. 1.2, а до этого опишем данные, которые будут использоваться для численных экспериментов.

### 1.1.1 Данные для численных экспериментов

В данном пункте будут описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов, а также приводится описание того, как строятся прогнозы для значений функций цен  $S(t)$ ,  $B(t)$ ,  $t \geq 0$ , при рассмотрении недетерминированной модели (см. разд. 1.3), когда их точные значения не известны заранее.

Будем работать с двумя типами данных:

1. сгенерированных искусственно;

2. реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и синусоидальной функции

$$\begin{aligned} b_i(t) &= k_{i0} + k_i t + \alpha_i \sin(r_i + g_i t); \\ s_i(t) &= 0.95 b_i(t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для (1.7) значения  $k_{i0}$ ,  $k_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $r_i$ ,  $g_i$  подбираются таким образом, чтобы ни для каких  $i \neq j$  не совпадали периоды. Выбор функции  $s_i(t)$  в представленном виде обусловлен тем наблюдением реально существующей картины, что разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту, и таким образом, она будет хорошим приближением для используемых данных.

Графики сгенерированных значений представлены на рисунке 1.1.

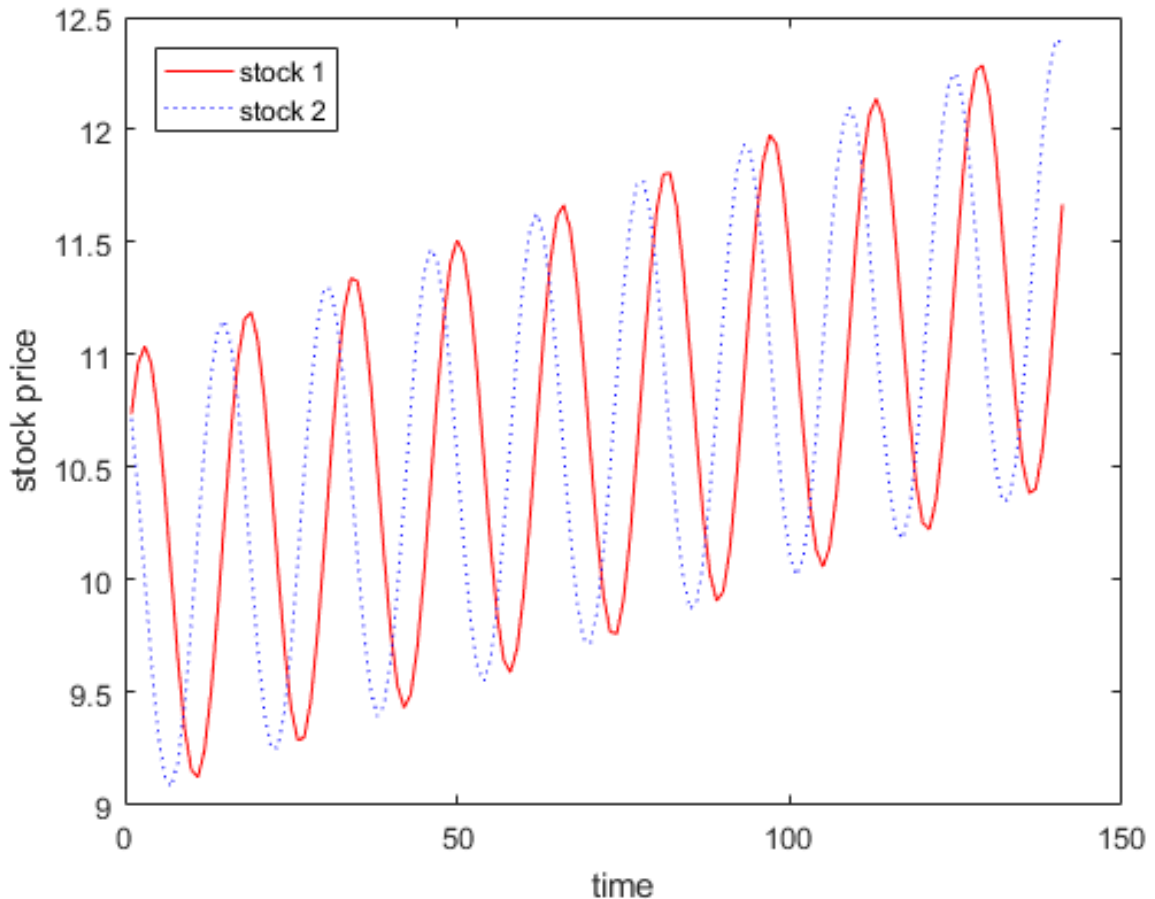


Рис. 1.1: График сгенерированных значений

Реальные данные взяты из исторических курсов на сайте *coinmarketcap.com* за период с 10.02.2018 по 27.06.2018.

Графики реальных курсов представлены на рисунке 1.2.

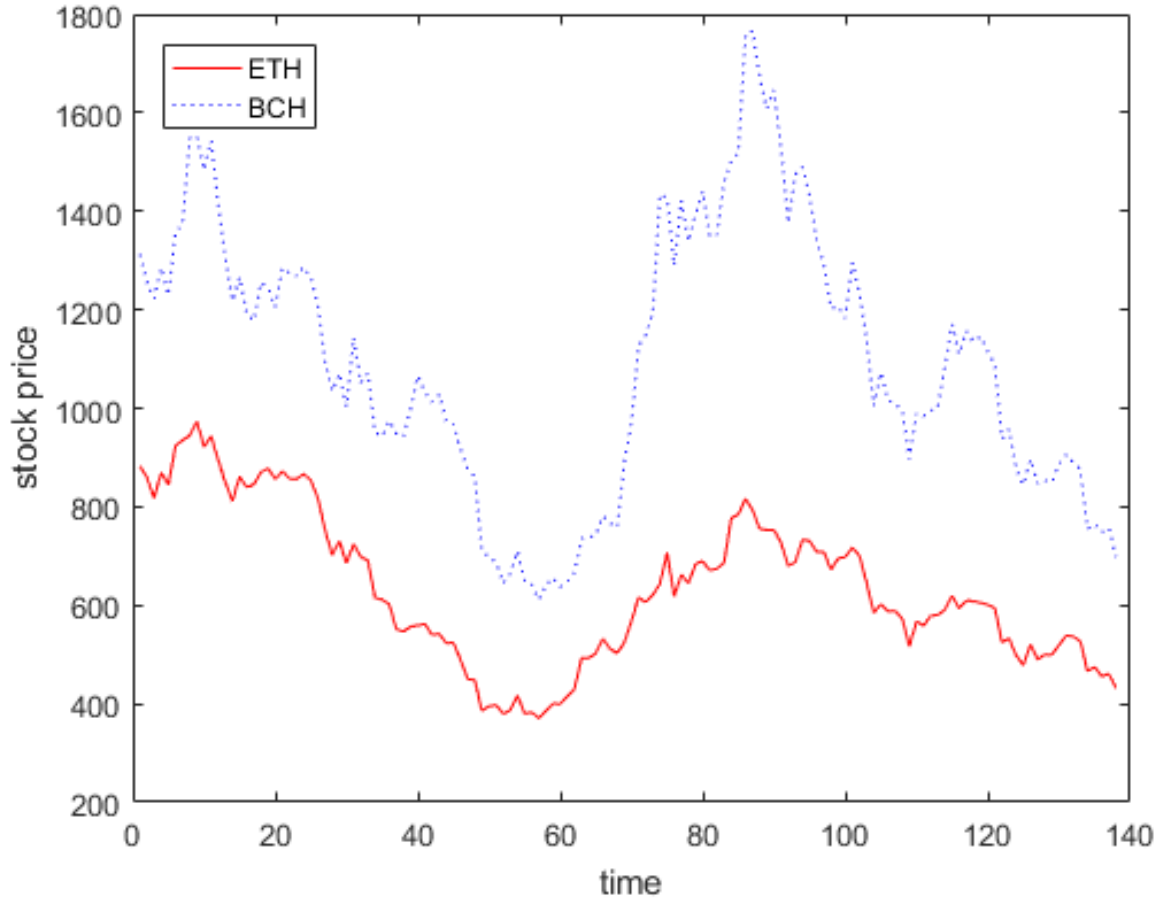


Рис. 1.2: График реальных курсов

### 1.1.2 Предсказание значений

В общем случае, значения  $S(t)$  и  $B(t)$  в будущие моменты времени не известны. В настоящей работе будем прогнозировать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регрессионная модель [27], зависимости стоимости от времени. В этом пункте будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Линейная регрессия — метод восстановления зависимости между двумя переменными.

Пусть даны предыдущие наблюдения за стоимостями фиксированной бумаги  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  в моменты времени  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ .

Для заданного множества из  $m$  пар  $(t_i, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , значений свободной и зависимой переменной требуется построить зависимость. Назначена линейная модель

$$p_i = f(\mathbf{w}, t_i) + \varepsilon_i$$

с линейной функцией  $f$  и аддитивной случайной величиной  $\varepsilon$ . Переменные  $t$ ,  $p$  принимают значения на числовой прямой  $\mathbb{R}$ .

Определим модель зависимости как

$$p_i = w_1 + w_2 t_i + \varepsilon_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор параметров  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$  есть решение нормального уравнения

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор, состоящий из значений зависимой переменной:  $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_m)$ . Столбцы матрицы  $A$  есть подстановки значений свободной переменной  $t_i^0 \mapsto a_{i1}$  и  $t_i^1 \mapsto a_{i2}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}.$$

Зависимая переменная восстанавливается по полученным весам и заданным значениям свободной переменной

$$p_i^* = w_1 + w_2 t_i,$$

иначе

$$\mathbf{P}^* = A\mathbf{w}.$$

Для оценки качества модели используется критерий суммы квадратов регрессионных остатков, SSE — Sum of Squared Errors.

$$SSE = \sum_{i=1}^m (p_i - p_i^*)^2 = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*)^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*).$$

### 1.1.3 Оценка прогнозирования

В данном пункте рассматривается вопрос о качестве найденных оценок [26]. Находится их смещение, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

Для нахождения математического ожидания и вариации ошибки будем использовать встроенные *Matlab* функции *var*, *mean*. Данные функции вы-

t	mean	var
1	0.0007	0.0036
2	0.0007	0.0083
3	0.0012	0.0162
4	0.0032	0.0265
5	0.0043	0.0389
6	0.0064	0.0545

Таблица 1.1: Ошибки прогнозирования

числяют следующие значения:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i,$$

$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N |A_i - \mu|^2.$$

В процессе прогнозирования вычисляется ошибка следующим образом

$$e_i = \frac{p_i - p_i^*}{p_i}.$$

Данная ошибка была подсчитана для прогнозирования стоимости криптовалют от одного до шести шагов вперед. На рисунке 1.3 изображены распределения ошибок прогнозирования будущих стоимостей продаж ценных бумаг.

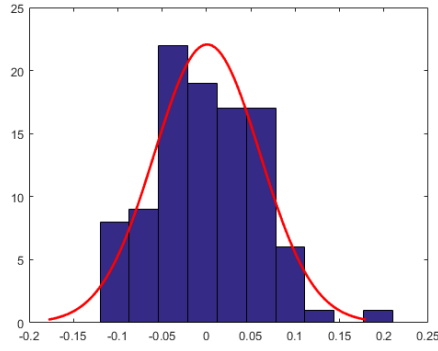
В таблице 1.1 приведены численные значения математического ожидания и вариации для предсказаний.

Дисперсия  $D[e(t)]$  будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости этапа.

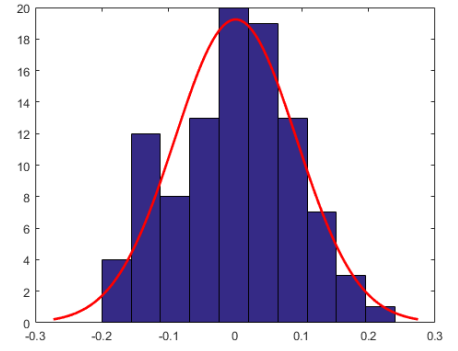
Так как значения математического ожидания, представленные в таблице 1.1, близки к нулю, то будем считать, что полученные оценки являются несмещенными.

## 1.2 Детерминированная модель

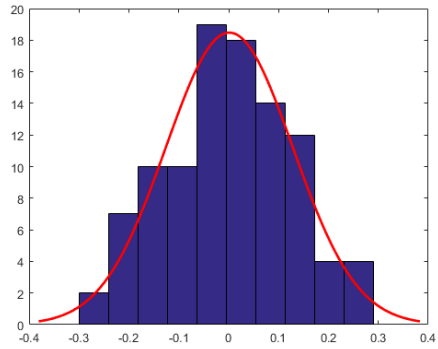
Настоящий раздел посвящен исследованию детерминированной модели оптимизации портфеля, т.е. случаю, когда в начальный момент времени точ-



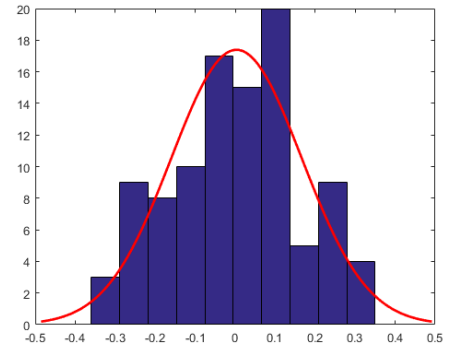
(a) На 1 шаг



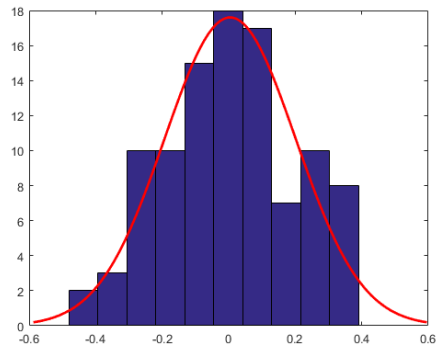
(b) На 2 шага



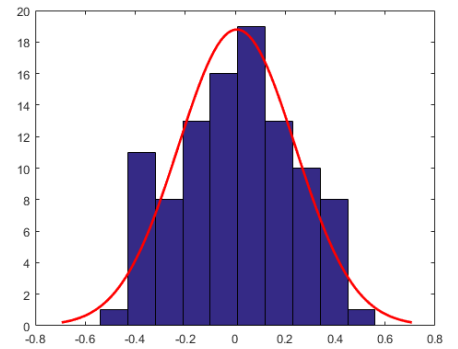
(c) На 3 шага



(d) На 4 шага



(e) На 5 шагов



(f) На 6 шагов

Рис. 1.3: Распределение ошибок предсказания

но известны все значения цены продажи и покупки  $s_i(t)$  и  $b_i(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Будем применять методы МРС, описанные в главе 1 для задачи оптимизации портфеля. При этом рассматриваются две прогнозирующие задачи МРС с конечным горизонтом прогнозирования  $T$ :

- задача максимизации стоимости портфеля без условий в терминальный момент времени  $t_0 + T$  (без терминального множества);
- задача максимизации стоимости портфеля с условиями в терминальный момент времени  $t_0 + T$  (с терминальным множеством).



### 1.2.1 Максимизация стоимости портфеля без терминального множества

Рассмотрим следующую задачу МРС с горизонтом планирования  $T$

$$\begin{aligned} \max_{U^+, U^-} J(X_0, x_{00}, U^+, U^-) &= w(t_0 + T) = \\ &= x_0(t_0 + T) + S(t_0 + T)^T X(t_0 + T), \end{aligned} \quad (1.8)$$

при условиях

$$\begin{aligned} X(t+1) &= X(t) + U^+(t) - U^-(t), \\ x_0(t+1) &= x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \\ X(t_0) &= X_0, \\ x_0(t_0) &= x_{00}; \\ X(t) &\geq 0, \\ x_0(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T}; \\ U^+(t) &\geq 0, \\ U^-(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отметим, что в задаче оптимального управления (1.8) – (1.9) функция стоимости не ограничена, кроме того, тут отсутствует функция стоимости этапа  $L_t(\cdot)$ , а максимизируется только терминальная стоимость портфеля.

Так как предположение  $J_\infty^*(X_0, x_{00}, U^+, U^-) < \infty$  из главы ?? не выполняется, то невозможно гарантировать устойчивость процесса, замкнутого обратной связью, построенной в результате применения МРС-алгоритма из главы ?? с прогнозирующей задачей оптимального управления (1.8) – (1.9). Также невозможно исследовать полученное решение на субоптимальность.

Приведем типичную картину поведения инвестора, использующего для управления портфелем задачу (1.8) – (1.9). Для этого приведем результаты численных экспериментов для двух ценных бумаг ( $N = 2$ ) при горизонте прогнозирования  $T = 6$  и используя синтетические и реальные данные.

На рисунке 1.4 представлены данные проведенного численного эксперимента. Верхний график показывает количество ценных бумаг первого и второго типа в каждый момент времени. Нижний график представляет собой общую стоимость базового портфеля (с тривиальным управлением — зеленая кривая) и стоимость портфеля под управлением МРС (красная кривая).

Как видно из рисунка 1.4, при использовании задачи (1.8) – (1.9) происходят частые операции вида: продать все бумаги типа  $i$  и на освободившиеся

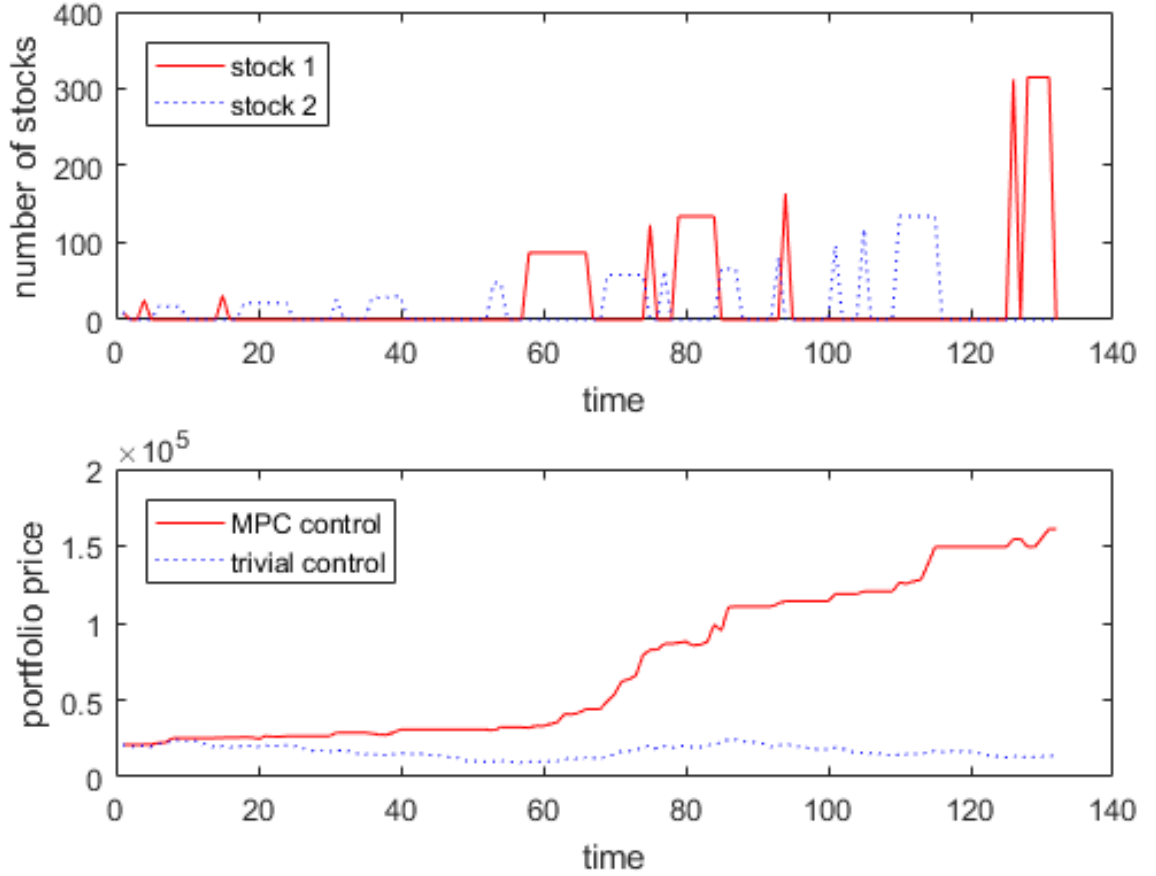


Рис. 1.4: Детерминированная модель без регуляризации

деньги купить бумаги типа  $j$ ,  $i, j = 1, 2$ . Для инвестора такое поведение может приводить к проблемам, поскольку ему приходится постоянно перестраивать портфель, что привносит в его поведение большие риски. Подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерминированной моделью.

Изменим критерий качества (1.8), добавив в него с целью регуляризации стоимость этапа  $L(U^+(t), U^-(t))$ .

Получим следующую задачу

$$\min_{U^+, U^-} J(x, u) = \sum_{i=0}^T L(U^+(i), U^-(i)) - w(T),$$

при условиях (1.9). Заметим, что здесь критерий качества минимизируется, стоимость портфеля взята за знаком  $-$ .

Если в качестве функции этапа взять, например, функцию вида

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))^2,$$

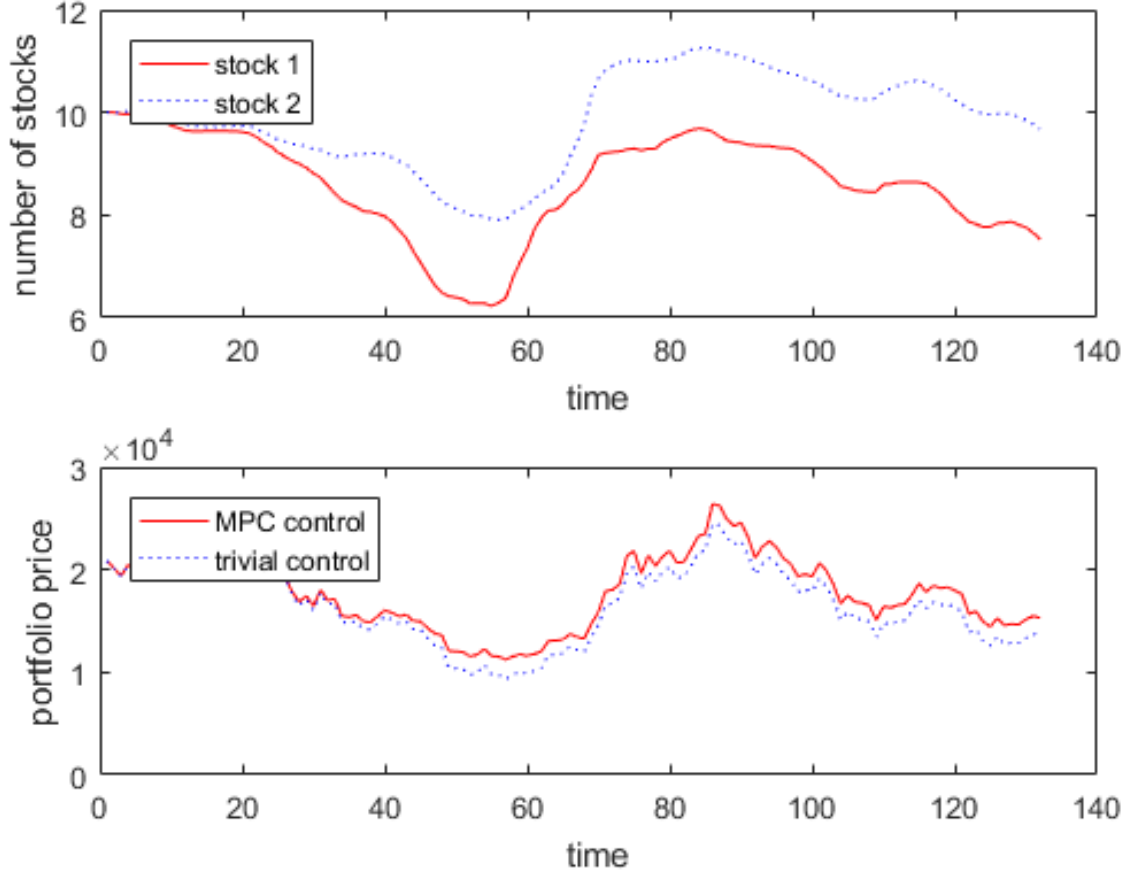


Рис. 1.5: Детерминированная модель с регуляризацией

которая характеризует весь оборот денег, произошедший в момент времени  $t$ , то графики изменятся (для  $\alpha = 0.001$ ) как представлено на рисунке 1.5.

Аналогичная картина получается в численных экспериментах со сгенерированными тестовыми данными. Без функции стоимости этапа результаты представлены на рисунке 1.6, со стоимостью этапа — на рисунке 1.7.

### 1.2.2 Максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Рассмотрим теперь в качестве прогнозирующей задачи MPC — задачу оптимального управления с горизонтом планирования  $T$  и ограничениями, накладываемыми на состав портфеля в терминальный момент времени  $t_0 + T$ :

$$\max_{U^+, U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) = x_0(t_0 + T) + X(t_0 + T)^T S(t_0 + T); \quad (1.10)$$

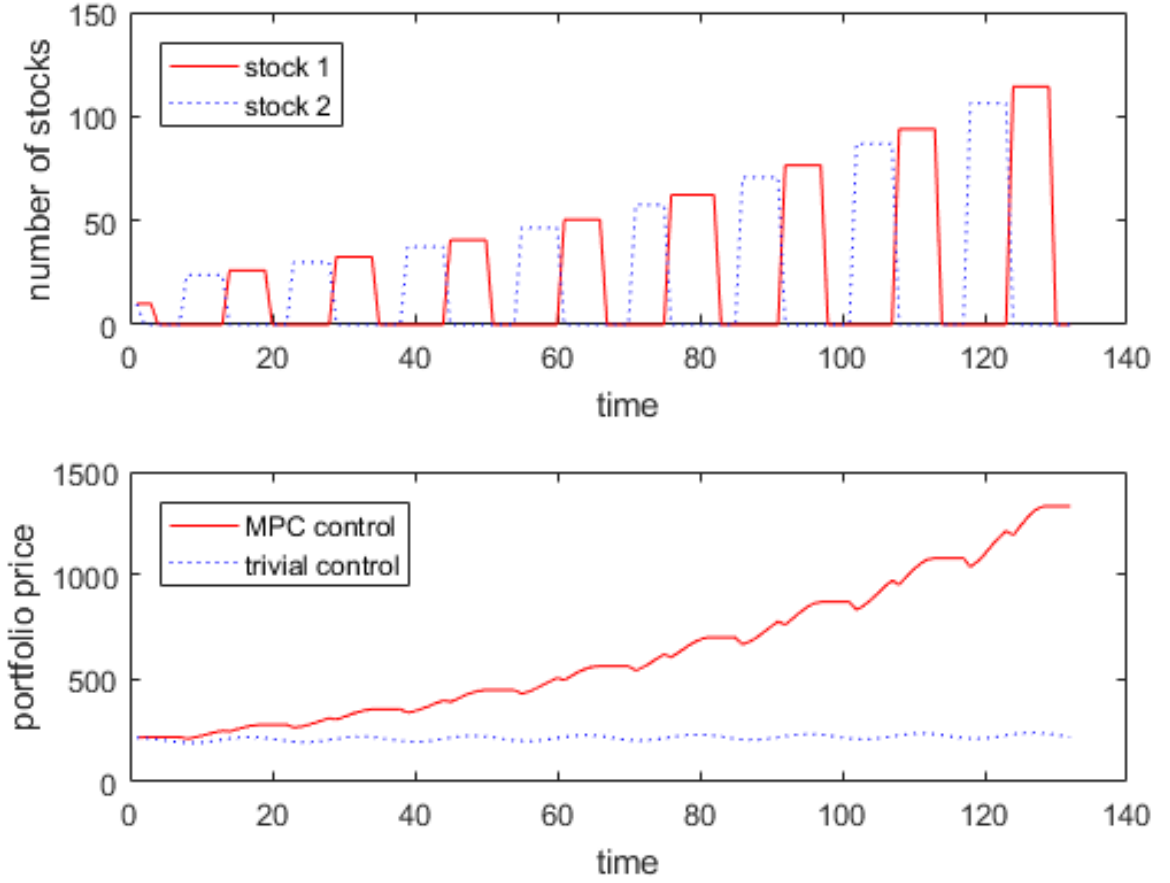


Рис. 1.6: Детерминированная модель без регуляризаций на сгенерированных данных

при условиях

$$\begin{aligned}
 X(t+1) &= X(t) + U^+(t) - U^-(t), \\
 x_0(t+1) &= x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \\
 X(t_0) &= X_0, \\
 x_0(t_0) &= x_{00}; \\
 X(t) &\geq 0, \\
 x_0(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T}; \\
 U^+(t) &\geq 0, \\
 U^-(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1}; \\
 \frac{x_k(t_0 + T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0 + T)} &= \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

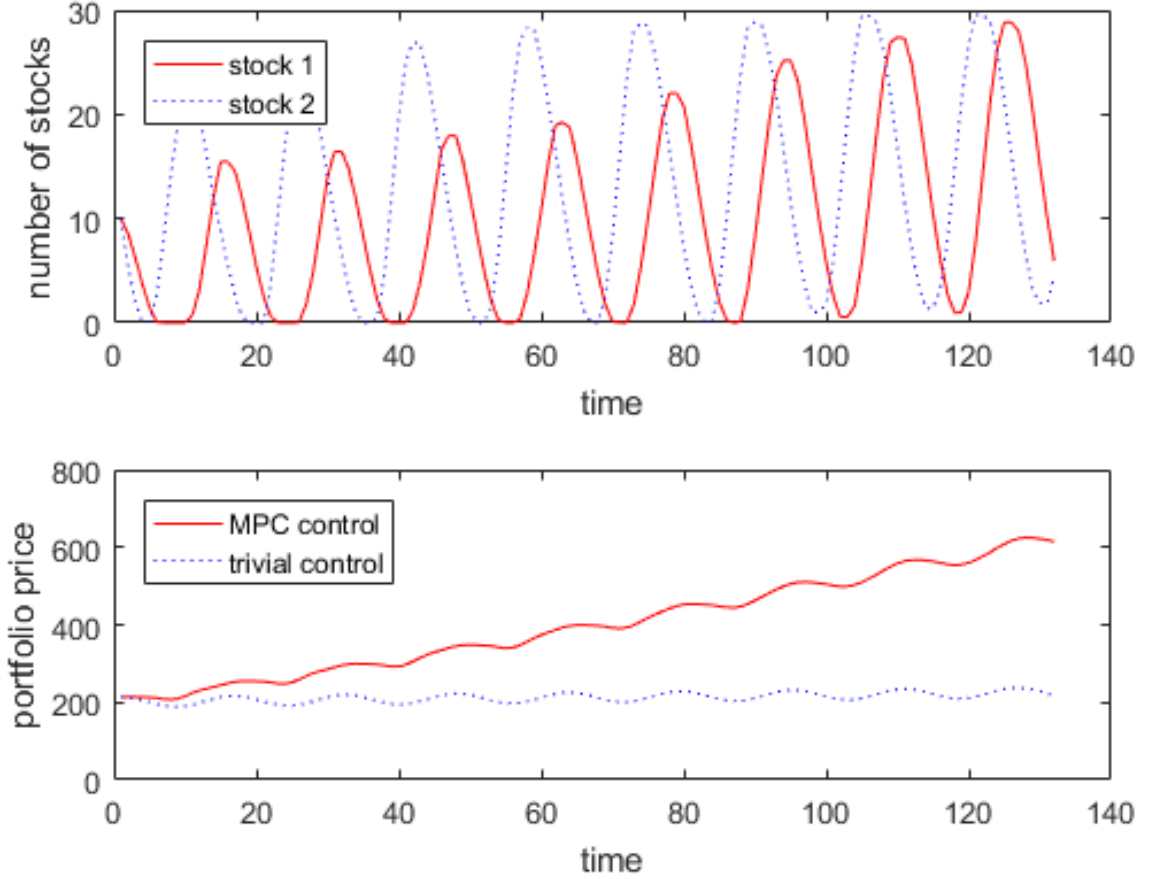


Рис. 1.7: Детерминированная модель с регуляризацией на сгенерированных данных

Поясним смысл введенного ограничения

$$\frac{x_k(t_0 + T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0 + T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Здесь требуется, чтобы в момент времени  $t_0 + T$  пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом MPC с той лишь разницей, что в стандартных схемах экономического MPC в качестве устойчивого состояния используется точка  $x_s$ , а в данном случае это целый луч, содержащий значения с одинаковыми пропорциями.

Предлагаемый подход, кроме того, дает возможность сравнивать эффективность управления MPC без учета колебания курсов, поскольку отношения стоимостей портфелей с тривиальным управление, и с управлением MPC, если они содержат одинаковые пропорции, не зависит от текущих курсов.

**Теорема 1.1** Задача (1.10) – (1.11) разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о Заметим, что тривиальное управление

$$U^+(t) = U^-(t) \equiv 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1},$$

является допустимым. Кроме того, при этом управлении значение функции  $\max_{U^+, U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-)$  в (1.10) является конечным, следовательно, задача (1.10) – (1.11) разрешима.

**Теорема 1.2** Пусть для начальных условий  $x_{00}, X_0$  из задачи (1.10) – (1.11) получено управление МРС

$$\{(U^+(0), U^-(0)), (U^+(1), U^-(1)), \dots\},$$

и соответствующая ей траектория

$$\{(X(0), x_0(0)), (\hat{X}(1), \hat{x}_0(1)), \dots\}$$

тогда любого  $m \in \mathbb{Z}_+$  верно:

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(m), \hat{x}_0(m), U^+, U^-) \geq x_0(0) + S(m + T)^T X(0).$$

Данная теорема утверждает, что в любой момент времени портфель, управляемый МРС за  $T$  шагов, может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет не меньше, чем в случае, когда постоянно используется тривиальное управление (инвестор не управляет портфелем).

Д о к а з а т е л ь с т в о Пусть в момент времени  $j$  оптимальное управление для задачи (1.10) – (1.11) и соответствующая ему траектория равна

$$\begin{aligned} &\{(U^+(j|j), U^-(j|j)), (U^+(j+1|j), U^-(j+1|j)), \dots, \\ &\quad (U^+(j+T-1|j), U^-(j+T-1|j))\}, \\ &\{(X(j|j), x_0(j|j)), (\bar{X}(j+1|j), \bar{x}_0(j+1|j)), \dots, \\ &\quad (\bar{X}(j+T|j), \bar{x}_0(j+T|j))\}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Отметим, что по условию теоремы верны равенства

$$(X(j|j), x_0(j|j)) = (\hat{X}(j), \hat{x}_0(j)),$$

$$(U^+(j|j), U^-(j|j)) = (U^+(j), U^-(j)).$$

и, как следствие, верно равенство

$$(X(j+1|j), x_0(j+1|j)) = (\hat{X}(j+1), \hat{x}_0(j+1)).$$

Доказательство будем вести по индукции. База:

$$\max_{U^+, U^-} J(X(0), x_0(0), U^+, U^-) \geq x_0(0) + X(0)^T S(m+T).$$

верна из самого определения задачи (1.10) – (1.11).

Предположим, что теорема верна для некого  $j \geq 0$ , докажем для  $j+1$ . Из предположении индукции верно

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(j), \hat{x}_0(j), U^+, U^-) \geq x_0(0) + S(j+T)^T X(0).$$

При этом из (1.12) выполняется равенство

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(j), \hat{x}_0(j), U^+, U^-) = \bar{x}_0(j+T|j) + S(j+T)^T \bar{X}(j+T|j) \quad (1.13)$$

Из терминального условия (1.11) следует, что существует  $\beta$  такая, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_0(j+T|j) &= \beta x_0(0), \\ \bar{X}(j+T|j) &= \beta X(0). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.13) и (1.14) следует, что  $\beta \geq 1$ .

Оценим значение

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(j+1), \hat{x}_0(j+1), U^+, U^-)$$

.

Рассмотрим управление

$$\{(U^+(j+1|j), U^-(j+1|j)), \dots (U^+(j+T-1|j), U^-(j+T-1|j)), (0, 0)\}.$$

Ему будет соответствовать траектория

$$\{(X(j+1|j), x_0(j+1|j)), \dots (\bar{X}(j+T|j), \bar{x}_0(j+T|j)), (\bar{X}(j+T|j), \bar{x}_0(j+T|j))\}.$$

Следовательно

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(j+1), \hat{x}_0(j+1), U^+, U^-) \geq \bar{x}_0(j+T|j) + S(j+T+1)^T \bar{X}(j+T|j)$$

Сделаем замену (1.14), получим

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(j+1), \hat{x}_0(j+1), U^+, U^-) \geq \beta x_0(0) + \beta S(j+T+1)^T X(0)$$

Доказательство индукционного шага завершает то, что  $\beta \geq 1$ .

Приведем пример того, как будет вести себя система при управлении МРС-регулятором, использующим задачу оптимального управления с терминальным множеством. На рисунке 1.8 представлен результат численного эксперимента для сгенерированных данных. Как видно, в результате стоимость портфеля получается меньше, нежели в случае без терминального множества (рисунок 1.7). Но при этом уже диапазон, в котором изменяется количество ценных бумаг каждого типа.

### 1.3 Недетерминированная модель

В настоящем разделе исследован случай, когда точно не известны будущие стоимости активов, и модель должна оперировать прогнозируемыми значениями на заданном горизонте планирования  $T$ .

Покажем, что для недетерминированного случая нельзя просто использовать предсказания и работать как в детерминированном случае без регуляризации.

На рисунке 1.9 представлен такой случай, при этом на нижнем графике видно, что стоимость портфеля при тривиальном управлении будет выше, нежели при управлении МРС.

Представленное на рисунке 1.9 снижение стоимости портфеля связано с тем, что управление строится на основе прогнозируемых данных, и при этом одинаково учитывается весь горизонт планирования. Для улучшения необходимо сделать так, чтоб прогнозы для близких стоимостей учитывались в большей степени, нежели более дальние по времени.

Введем функцию стоимости этапа, которая будет учитывать ошибки прогнозирования.

В том случае, когда точно не известны значения  $s_i(t)$  и  $b_i(t)$ , наша функ-



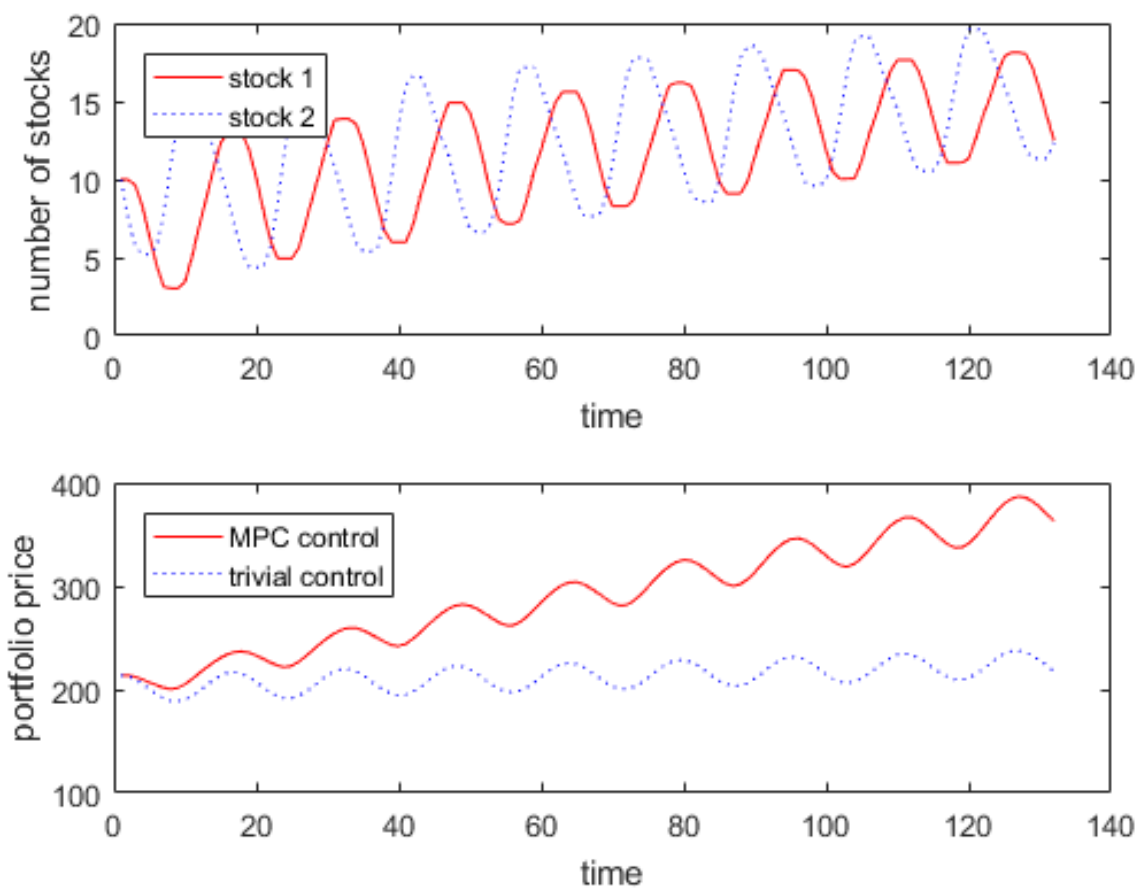


Рис. 1.8: Детерминированная модель с регуляризацией и терминальным множеством

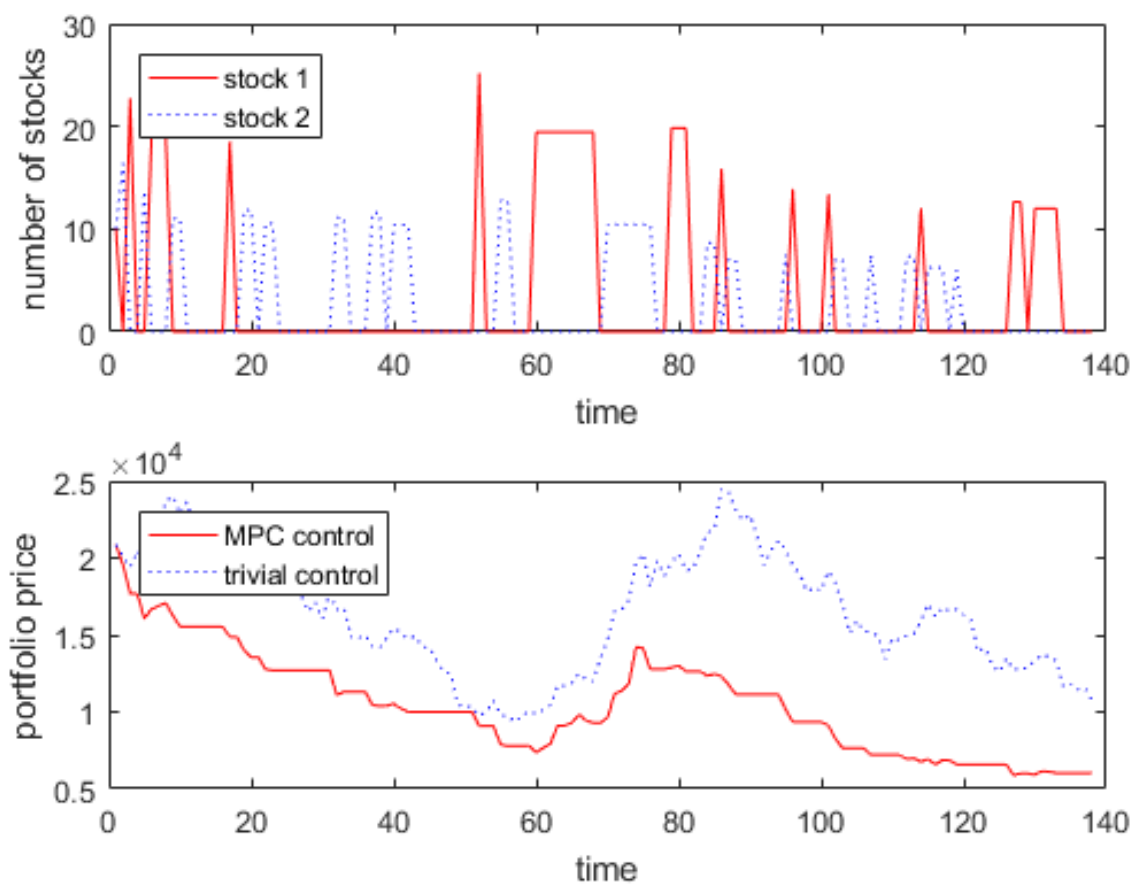


Рис. 1.9: Недетерминированная модель без регуляризаций

ция перехода для  $x_0(t)$ , в соответствии с (??) имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t). \quad (1.15)$$

Где  $B(t)$  и  $S(t)$  описаны в (1.3).

И при этом  $B(t) = (I + E_1(t))\bar{B}(t)$ , где  $\bar{B}(t)$  это прогнозируемое значение,  $I$  – единичная матрица,  $E_1(t)$  – случайная диагональная матрица ошибок, при этом  $M[E_1(t)] = 0$  (ссылка на часть с оценкой ошибок прогнозирования). Аналогично для  $S(t) = \bar{S}(t)(1 + E_2(t))$ .

Так как изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что  $E_1(t) \equiv E_2(t) = E(t)$ .

Сейчас перепишем (??):

$$\begin{aligned} x_0(t+1) = x_0(t) - \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) - \\ - (E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Оценим для величины  $x_0(t+1)$  математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \quad (1.17)$$

Будем считать, что величины  $x_0(t)$  и  $W(t)$  независимы, кроме того, стоимости активов не коррелируют

$$\begin{aligned} D[x_0(t+1)] &= D[x_0(t) - (E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t)] = \\ &= D[x_0(t)] + D[(E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t)] \leq \\ &= D[x_0(t)] + \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t) \rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t) \rangle^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Сейчас можем добавить учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будет служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания. Введем функцию стоимости этапа следующим образом:

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha (\langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t) \rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t) \rangle^2). \quad (1.19)$$

Оценки на значения  $D[E(t)]$  зависят от способа предсказания векторов  $S(t)$  и  $B(t)$ .

$$\begin{aligned}
& \max_{U^+, U^-} - \sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0 + t), U^-(t_0 + t)) + \\
& \quad + x_0(t_0 + T) + S(t_0 + T)^T X(t_0 + T); \\
& X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t) \\
& x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \\
& X(t_0) = X_0; \\
& x(t_0) = x_0; \\
& X(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T}; \\
& x_0(t) \geq 0; \\
& U^+(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1}; \\
& U^-(t) \geq 0; \\
& \frac{x_k(t_0 + T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0 + T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0, N}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Результат применения данного управления представлен на рисунке 1.10. Тут видим, что применение управления МРС уже лучше, нежели тривиальное управление.

Стоит отметить, что в части работ, посвященных управлению портфелем, например в [1] делается допущение, что стоимость покупки и продажи совпадают. Это допущение является очень сильным и приводит к тому, что в отличии ситуации на рисунке (1.9) при равных стоимостях покупки и продажи получаем ситуацию как на рисунке (1.11). То есть модель не нуждается ни в регуляризации, ни в терминальном регионе.

### 1.3.1 Терминальный регион

В данном пункте рассмотрим дополнительные ограничения для модели, введем терминальное множество и рассмотрим задачу квазибесконечного МРС.

Выберем  $\epsilon \in [0, 1]$ , и модифицируем терминальное множество из модели (1.10)-(1.11) следующим образом:

$$\left| \frac{x_k(t_0 + T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0 + T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)} \right| \leq \epsilon, \quad k = \overline{0, N}.$$

Идея данного ограничения возникает из того, что инвестор может хотеть не сильно отдаляться, от изначальных пропорций, но при этом все еще

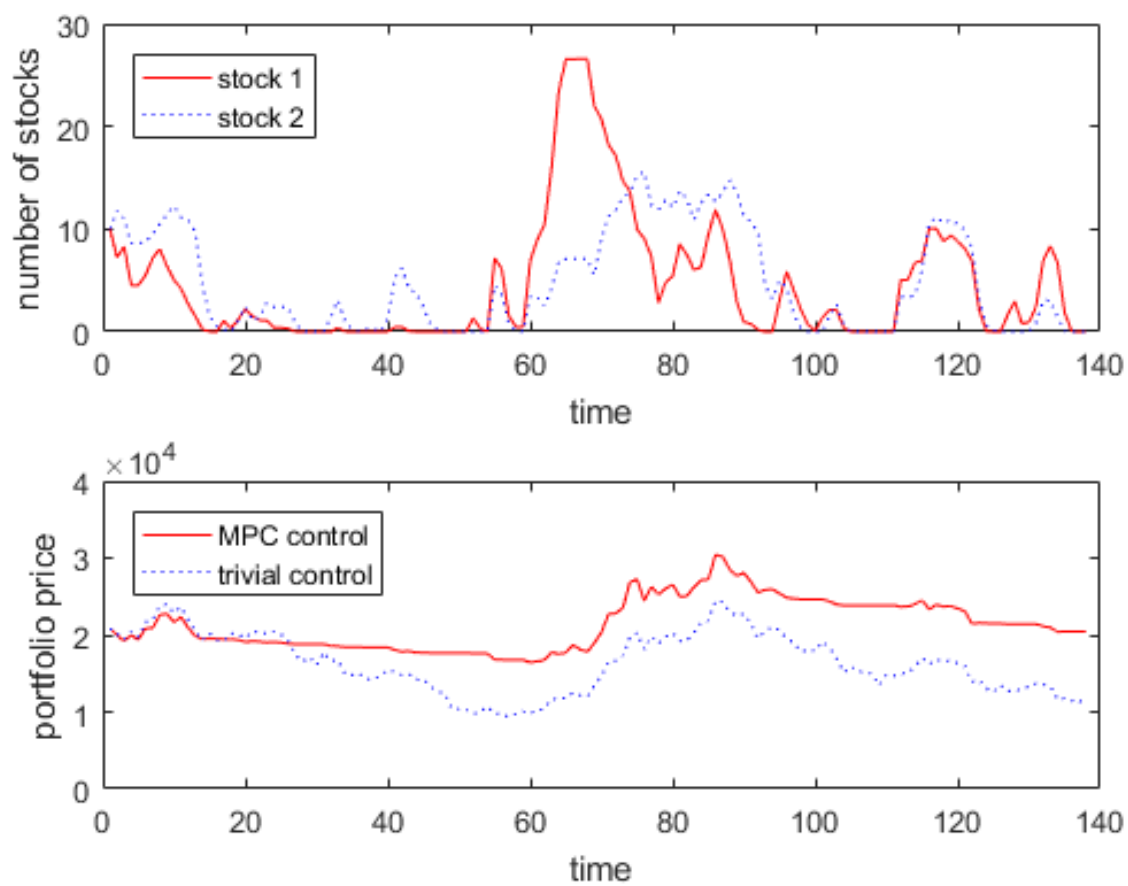


Рис. 1.10: Недетерминированная модель с регуляризацией

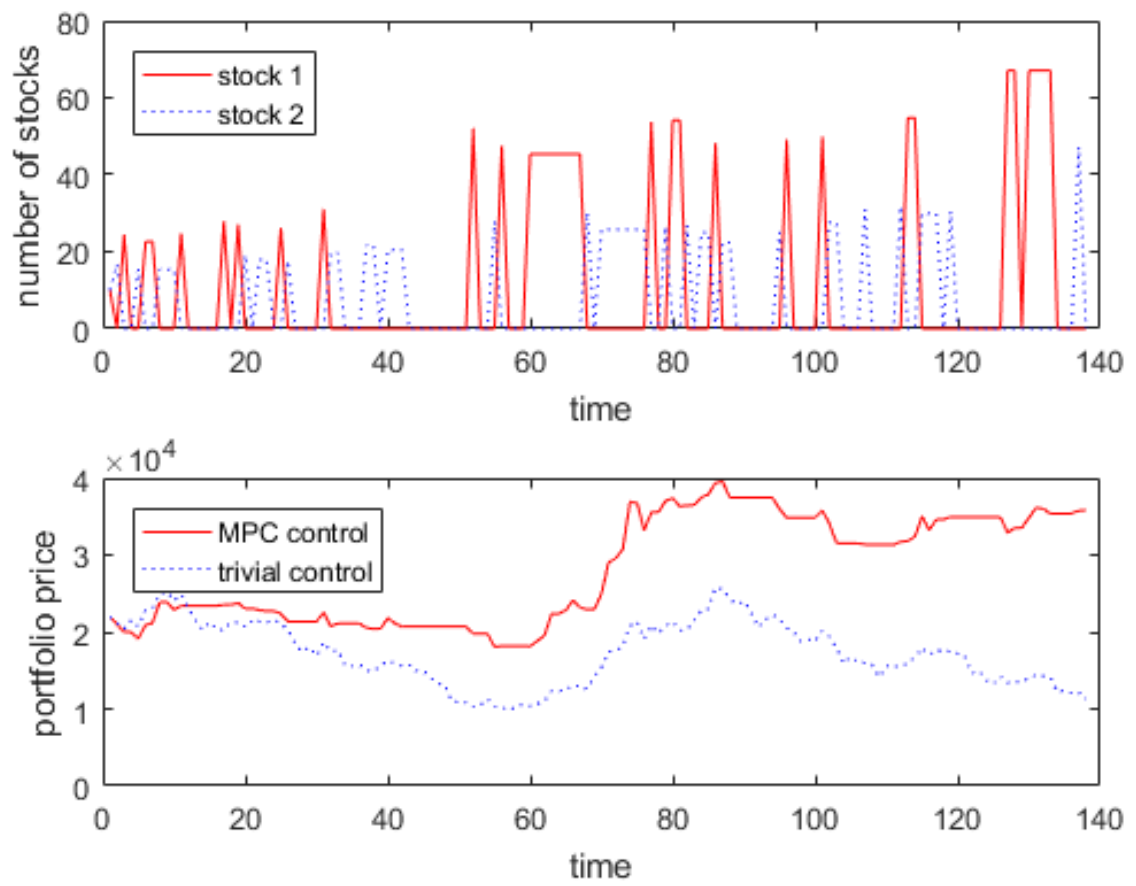


Рис. 1.11: Недетерминированная модель без регуляризации при равных стоимостях продажи и покупки

увеличить свой доход относительно тривиального управления.

$$\begin{aligned} \max_{U^+, U^-} - \sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0 + t), U^-(t_0 + t)) + \\ + x_0(t_0 + T) + S(t_0 + T)^T X(t_0 + T); \end{aligned} \quad (1.21)$$

при условиях

$$\begin{aligned} X(t+1) &= X(t) + U^+(t) - U^-(t), \\ x_0(t+1) &= x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \\ X(t_0) &= X_0, \\ x_0(t_0) &= x_{00}; \\ X(t) &\geq 0, \\ x_0(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T}; \\ U^+(t) &\geq 0, \\ U^-(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1}; \\ \left| \frac{x_k(t_0 + T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0 + T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)} \right| &\leq \epsilon, \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

На рисунке 1.12 представлен эксперимент с  $\epsilon = 0.35$ . Как видно, пропорции между количеством активов первого и второго типа достаточно близко к изначальным на протяжении всего времени.

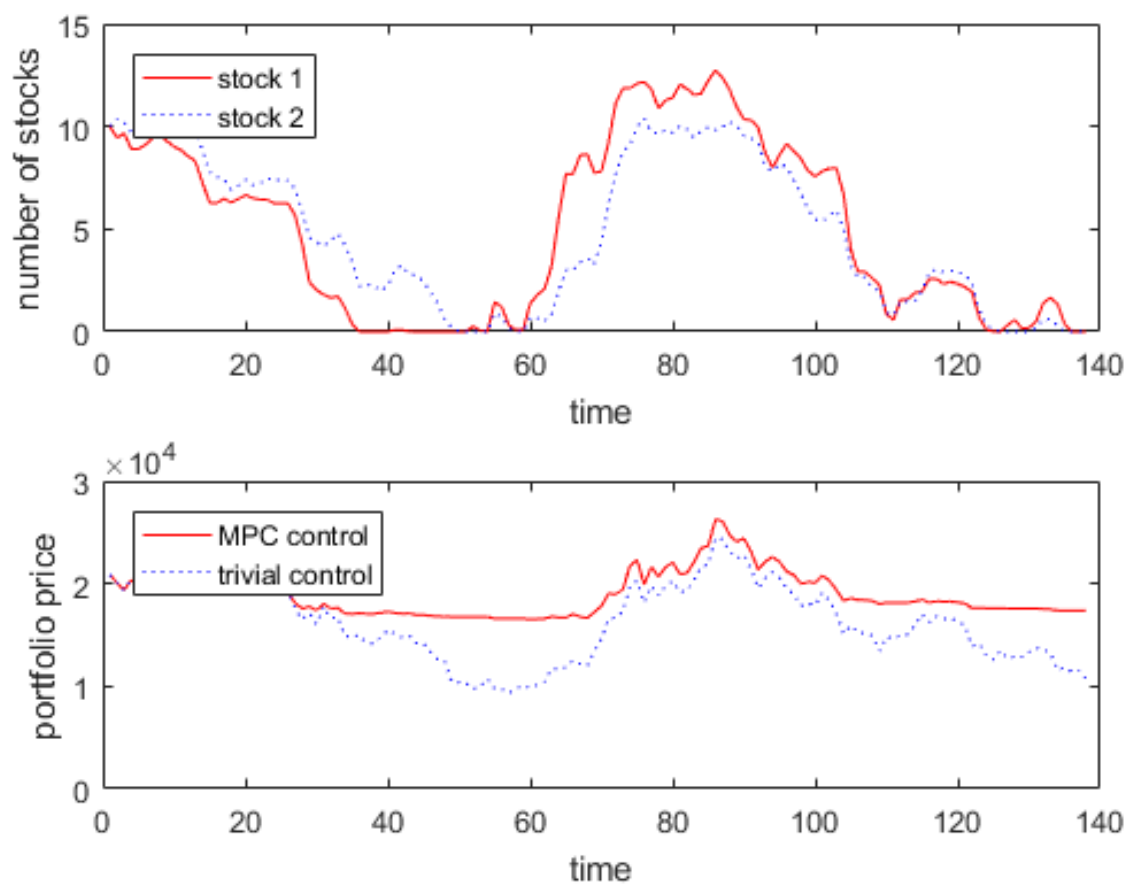


Рис. 1.12: Недетерминированная модель с регуляризацией и терминальным регионом



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Marigo A., Piccoli B. MODEL PREDICTIVE CONTROL FOR PORTFOLIO OPTIMIZATION.
- 2 Dombrovskii V., Obyedko T. Dynamic Investment Portfolio Optimization under Constraints in the Financial Market with Regime Switching using Model Predictive Control //arXiv preprint arXiv:1410.1136. – 2014.
- 3 Alenmyr S., Ogren A. Model Predictive Control for Stock Portfolio Selection //MSc Theses. – 2010.
- 4 Herzog F. et al. Model predictive control for portfolio selection //American Control Conference, 2006. – IEEE, 2006. – ?. 8 pp.
- 5 Nystrup P. et al. Multi-period portfolio selection with drawdown control //Annals of Operations Research. – 2017. – ?. 1-27.
- 6 Yamada Y., Primbs J. A. Model Predictive Control for Optimal Pairs Trading Portfolio with Gross Exposure and Transaction Cost Constraints //Asia-Pacific Financial Markets. – 2018. – ?. 25. – ?. 1. – ?. 1-21.
- 7 Fitria I., Apriliani E., Putri E. R. M. Investment Management Using Portfolio Optimization with Stock Price Forecasting //Applied Mathematical Sciences. – 2016. – ?. 10. – ?. 48. – ?. 2405-2413.
- 8 Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. – Cambridge university press, 2004.
- 9 Chen, H. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability / H. Chen, F. Allgöwer // Automatica – 1998. – Vol. 34, no. 10. – P. 1205–1217.
- 10 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.
- 11 Grüne, L. Analysis and design of unconstrained nonlinear MPC schemes for finite and infinite dimensional systems / L.Grune // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2009. – Vol. 48, no. 2. – P. 1206–1228.
- 12 Grüne, L. Nonlinear model predictive control / L. Grüne, J. Pannek – Springer London, 2011.
- 13 Fontes, F.A.C.C. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers / F.A.C.C. Fontes // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – No. 2. – P. 127–143.

- 14 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.
- 15 Khalil, H.K. Nonlinear systems / H.K. Khalil – New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- 16 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.
- 17 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 18 Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – М.: Высш. шк., 2003.
- 19 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Иностранная литература, 1960. – 400 с.
- 20 Васильев, Ф.П. Методы оптимизации
- 21 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.
- 22 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
- 23 Ли, Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус – М.: Наука, 1972.
- 24
- 25 Математическая теория оптимальных процессов/ Л.С. Понтрягин [и др.] – М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
- 26 Боровков, А.А. Числовые характеристики случайных величин. 5-е изд. / А.А. Боровков // М.: Либроком. – 2009. – Глава 4.
- 27 Стрижов, В.В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей / В.В. Стрижов – М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2008.