

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

**ПОРТФЕЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДАМИ  
УПРАВЛЕНИЯ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ**

Магистрская диссертация

специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель  
Наталия Михайловна Дмитрук  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Допущена к защите

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления  
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2018

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
<b>ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МРС</b> . . . . .	8
1.1 Задача стабилизации и базовый алгоритм МРС. . . . .	8
1.2 Задача МРС с терминальными ограничениями-равенствами . . . .	11
1.3 Квазибесконечный МРС . . . . .	15
1.4 Безусловный МРС . . . . .	19
<b>ГЛАВА 2 ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ.</b> . .	23
2.1 Основные положения модели . . . . .	23
2.2 Данные для численных экспериментов . . . . .	25
2.3 Модель без терминального множества. . . . .	26
2.4 Модель с терминальным множеством . . . . .	31
2.5 Выводы . . . . .	36
<b>ГЛАВА 3 МОДЕЛИ С ПРОГНОЗАМИ</b> . . . . .	39
3.1 Предсказание функций стоимости. . . . .	39
3.2 Модели с регуляризацией . . . . .	42
3.3 Модель с терминальным условием . . . . .	45
3.4 Выводы . . . . .	47
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	50

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Магистерская диссертация, 51 с., 11 рис., 28 источников

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ, УПРАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕМ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Объектом исследования являются — динамические модели оптимизации портфеля и связанные с ними алгоритмы управления по прогнозирующей модели.

Целью данной работы является применение методов управления с прогнозирующей моделью в управлении портфелем активов.

Исследование проводилось в двух основных направлениях, когда заранее известны стоимости бумаг и когда нам самим необходимо их прогнозировать. В результате были разработаны и исследованы несколько моделей.

В результате исследований установлено, что МРС предоставляет различные способы для моделирования задачи формирования портфеля и при этом позволяет учитывать множество факторов, таких как разные курсы на покупку и продажу, нежелание вносить большие изменения в структуру портфеля и возможность быстро вернуться к исходным пропорциям. Кроме того, эксперименты показывают, что скорость построения управления достаточна для прикладного использования.

В структуре работы выделяются три главы. В первой главе определяют основные понятия и результаты в области управления с прогнозирующей моделью. Во второй главе рассматриваются модели для управления портфелем в том случае, когда стоимости покупки и продажи бумаг известны заранее. В третьей главе используются прогнозируемые стоимости.

Новизной данной работы является подход к использованию прогнозируемых стоимостей покупки и продажи бумаг. При этом подходе сама модель допускает разные цены на покупку и продажу, кроме того, выделение прогнозирования в отдельную подзадачу позволило составить универсальную модель МРС, не зависящую от способа прогнозирования. Таким образом, сейчас на улучшение качества управления можно влиять при помощи построения более точных оценок стоимостей бумаг.

# АГУЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Магістарская дысертацыя, 51 с., 11 мал. , 28 крыніц

## АПТЫМАЛЬНАЕ КІРАВАННЕ, КІРАВАННЕ ПА ПРАГНАЗУЮЧАЙ МАДЭЛІ, КІРАВАННЕ ПАРТФЕЛЕМ КАШТОЎНЫХ ПАПЕР, ПАРТФЕЛЬНЫЯ АПТЫМІЗАЦЫЯ

Аб'ектам даследавання з'яўляюцца — дынамічныя мадэлі аптымізацыі партфеля і звязаныя з імі алгарытмы кіравання па прагназуючай мадэлі.

Мэтай дадзенай працы з'яўляецца прымяненне метадаў кіравання з прагназуючай мадэллю у кіраванні партфелем каштоўных папер.

Даследаванне праводзілася ў двух асноўных кірунках, калі загадзя вядомы кошт папер і калі нам самім неабходна іх прагназаваць. У выніку былі распрацаваны і даследаваны некалькі мадэляў.

У выніку даследаванняў устаноўлена, што МРС прадастаўляе розныя спосабы для мадэлявання задачы фарміравання партфеля і пры гэтым дазваляе ўлічваць мноства фактараў, такіх як розныя курсы на куплю і продаж, нежаданне ўносіць вялікія змены у структуру партфеля і магчымасць хутка вярнуцца да зыходным прапарцыям. Акрамя таго, эксперыменты паказваюць, што хуткасць пабудовы кіравання дастатковая для прыкладнога выкарыстання.

У структуры працы вылучаюцца тры часткі. У першай вызначаюцца асноўныя паняцці і вынікі ў галіне кіравання з прагназуючай мадэллю. У другой разглядаюцца мадэлі для кіравання партфелем у тым выпадку, калі кошту пакупкі і продажу папер вядомыя загадзя. У трэцяй выкарыстоўваюцца прагназуемыя кошт.

Навізной дадзенай працы з'яўляецца падыход да выкарыстання прагназуемых коштаў пакупкі і продажу папер. Пры гэтым падыходзе сама мадэль дапускае розныя кошты на куплю і продаж, акрамя таго, вылучэнне прагназавання у асобную падзадачу дазволіла скласці універсальную мадэль МРС, якая не залежыць ад спосабу прагназавання. Такім чынам, цяпер на паляпшэнне якасці кіравання можна ўплываць пры дапамозе пабудовы больш дакладных ацэнак коштаў папер.

# GENERAL CHARACTERISTICS OF THE WORK

Master thesis, 51 p., 11 images, 28 sources

## OPTIMAL CONTROL, MODEL PREDICTIVE CONTROL, MANAGEMENT PORTFOLIO OF ASSETS, PORTFOLIO OPTIMIZATION

The object of the study is dynamic models of portfolio optimization and related control algorithms based on the MPC.

The purpose of this paper is to apply control methods with a predictive model in managing a portfolio of securities.

The study was conducted in two main directions, when the values of securities are known in advance and when we ourselves need to predict them. As a result, several models were developed and investigated.

As a result of the research, it is established that the MPC provides various ways to simulate the task of forming a portfolio and at the same time allows taking into account many factors, such as different rates of buying and selling, unwillingness to make big changes in the portfolio structure and the ability to return quickly to the original proportions. In addition, experiments show that the speed of control construction is sufficient for application use.

There are three chapters in the structure of the work. The first chapter defines the basic concepts and results in the field of the model predictive control. In the second chapter, models for portfolio management are considered in the case when the purchase and sale costs of securities are known in advance. The third chapter uses predicted costs.

The novelty of this work is the approach to using the predicted purchase and sale prices of securities. In this approach, the model itself allows different prices for buying and selling, in addition, the allocation of forecasting in a separate subtask has made it possible to compile a universal MPC model that does not depend on the forecasting method. Thus, now the improvement of the management quality can be influenced by computing more accurate estimates of the value of assets.

## ВВЕДЕНИЕ

MPC (Model Predictive control), или управление по прогнозирующей модели [4, 8, 17] — современный подход к решению задач теории управления, основанный на последовательном, в каждый момент времени, решении прогнозирующих задач оптимального управления (predictive optimal control problem) с конечным горизонтом управления, сформулированных для математической модели управляемого объекта, начальное условие которой совпадает с измеренным состоянием объекта. Значение оптимального программного управления прогнозирующей задачи на левом конце промежутка управления используется для управления объектом в текущий момент времени и до тех пор, пока не будет получено и обработано следующее измерение состояния. Управление, которое подается на объект в описанном процессе, представляет собой обратную связь (т.к. оно зависит от измеряемых состояний), свойства которой зависят от конкретного вида прогнозирующей задачи оптимального управления и целей управления объектом (например, стабилизация, регулирование, слежение и др.).

Идея использования методов MPC для управления портфелями в настоящий момент очень актуальна, на это указывают ряд исследований, проводимых за последние годы.

Одним из ранних исследований является работа [10] в которой доходность является линейной функцией от некой нормально распределенной случайной величины, тут же появляется идея о представлении целевой функции, как некоего взвешенного между доходностью портфеля и рискованностью управления. Продолжение данных исследований можно обнаружить в [1], где строится уже более классическая задача робастного MPC, но при этом используется инвариантная во времени модель, где все доходности фиксируются в самом начале и не изменяются во времени.

Одновременно с составлением моделей происходило исследование подходов для их решения и для моделирования будущих цен активов. В работе [5] динамика изменения доходности активов моделируется при помощи марковского процесса, затем применяется MPC для максимизации математического ожидания доходности. В работе [6] результаты [5] улучшаются при помощи использования фильтра Калмана.

В работе [14] для решения задачи MPC применяются уравнения Риккати.

Из более современных исследований стоит отметить работу [16]. Тут уже используется неинвариантная во времени модель. И для прогнозирования бу-

дущих значений доходности учитываются и текущие доходности активов. Используемая в работе [18] модель дает возможность работать одновременно как с длинными, так и короткими позициями.

К основным недостаткам большинства работ следует отнести то, что цена покупки приравнивается к цене продажи, что не соответствует реальному положению вещей и, как будет показано в данной работе, является очень существенным допущением.

# ГЛАВА 1

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МРС

В настоящей главе приводятся основные сведения из теории МРС в применении к классической задаче стабилизации нелинейной системы, обсуждаются основные подходы к построению прогнозирующих задач оптимального управления и свойства результирующих обратных связей.

### 1.1 Задача стабилизации и базовый алгоритм МРС

Рассматривается объект управления, поведение которого при  $t \geq 0$  описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

где  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  — вектор состояния объекта в момент времени  $t$ ,  $u \in U \subseteq \mathbb{R}^r$  — вектор управляющего воздействия в момент  $t$ ,  $x_0 \in X$  — заданное начальное состояние.

Относительно функции  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  предполагается, что она обеспечивает существование и единственность решения уравнения (1.1) при любом допустимом управляющем воздействии  $u(t) \in U$ ,  $t \geq 0$ . Условия, которым должна удовлетворять функция  $f$  для выполнения сделанного предположения, можно найти в [22]). Ниже будут сформулированы дополнительные требования, накладываемые на функцию  $f$ , связанные с конкретными задачами оптимального управления.

Множества  $X$  и  $U$  задают множества допустимых значений состояния и управления объекта. Таким образом, при управлении должны учитываться жесткие ограничения на траекторию фазовой и управляющей переменных

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Будем считать, что начало координат  $x = 0$  является точкой равновесия (1.1) при тривиальном управлении  $u = 0$ , т.е. выполняется  $f(0, 0) = 0$ . Естественно, при этом должно выполняться условие  $(0, 0) \in X \times U$ .

Задача стабилизации состоит в нахождении управления типа обратной связи  $u(x)$ ,  $x \in X$ , такого, что замкнутая система  $\dot{x} = f(x, u(x))$ , является



асимптотический устойчивой [26]. Решение задачи стабилизации может быть найдено из задачи оптимального управления с бесконечным полуинтервалом управления

$$P(x_0) : \min_{u(\cdot)} J_\infty(x_0, u) \quad (1.3)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0, \\ x(t) &\in X, \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned}$$

где критерий качества имеет вид

$$J_\infty(x_0, u) = \int_0^{+\infty} L(x(t), u(t)) dt,$$

функция  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  — заданная функция, которая носит название стоимости этапа. Если  $L(0, 0) = 0$ ,  $L(x, u) > 0$ , для  $(x, u) \neq (0, 0)$ , то целью управления в задаче  $P(x_0)$  является перевод системы (1.1) в начало координат.

Пусть  $u_\infty^*(t; x_0)$  — оптимальное программное управление [27] в задаче  $P(x_0)$ ,  $J_\infty^*(x_0) < \infty$  — оптимальное значение задачи  $P(x_0)$ . При определенных требованиях, предъявляемых к функциям  $f$  и  $L$ , система (1.1), замкнутая обратной связью  $u_\infty^*(0; x)$ ,  $x \in X$ , т.е. система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_\infty^0(0; x(t))), \quad t \geq 0,$$

является асимптотически устойчивой [26].

Обратная связь  $u_\infty^*(0; x)$ ,  $x \in X$ , теоретически может быть построена, если решать задачу  $P(x(t))$  в каждый текущий момент времени  $t$  для текущего состояния  $x(t)$  [25]. На практике, однако, реализация такого подхода в общем случае невозможна: основная причина состоит в высокой трудоемкости решения задач с бесконечным полуинтервалом.

На практике применяются подходы, объединенные общим названием МРС (или NMРС, если речь идет о нелинейных задачах), основная идея которых состоит в том, чтобы аппроксимировать задачу  $P(x(t))$  задачей  $\bar{P}(x(t))$  с конечным горизонтом  $T$ , решение которой может быть получено за разумное время [17].

Как правило, новая задача  $\bar{P}(x(t))$  будет содержать, помимо уравнений динамики (1.1) и ограничений (1.2) дополнительные условия, накладываемые на правом конце траектории [4]. Эти условия различны для различных схем

МРС и необходимы для обеспечения требуемых свойств замкнутой системы, например, асимптотической устойчивости.

Задачу  $\bar{P}(x_0)$  будем называть *прогнозирующей задачей оптимального управления* или *задачей МРС*.

Базовый алгоритм МРС состоит в следующем:

Для каждого  $t = 0, \delta, 2\delta, \dots$

1. Измерить текущее состояние  $x(t) \in X$  объекта.
2. Решить задачу  $\bar{P}(x(t))$ , получить ее оптимальное программное управление

$$\bar{u}^*(\tau; t), \quad \tau \in [t, t + T].$$

3. Подать на объект управляющее воздействие

$$u_{MPC}(\tau) = \bar{u}^*(\tau; t), \quad \tau \in [t, t + \delta[,$$

начиная с момента времени  $t$  до получения следующего измерения в момент  $t + \delta$ .

Ниже обсуждаются три подхода к построению МРС задачи  $\bar{P}(x(t))$ :

1. Zero terminal constraint МРС, в котором прогнозирующая задача — задача оптимального управления содержит терминальные ограничения равенства — условие попадания траектории в начало координат в терминальный момент времени [12];
2. Quasi-Infinite МРС — квазibesконечный МРС, в котором задача  $P(x(t))$  на бесконечном полуинтервале аппроксимируется на основе применения линейной обратной связи после терминального момента времени [3].
3. Unconstrained МРС — безусловный МРС, в котором в терминальный момент времени не накладываются никакие дополнительные условия, что упрощает численное решение задачи МРС [7].

Отметим, что в силу различных факторов, таких как неточности математического моделирования, неточности реализации обратной связи, возмущения, и др., управления и траектории реального управляемого объекта и прогнозирующей задачи оптимального управления не совпадают.

Поэтому, чтобы отличать переменные объекта и переменные модели, последние будем снабжать "чертой" над переменной. Таким образом,  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,

$t \geq 0$ , — измеренные состояния и управляющие воздействия объекта (1.1),  $\bar{x}(\tau; t)$ ,  $\bar{u}(\tau; t)$ ,  $\tau \in [t, t+T]$ , — переменные оптимизации в задаче МРС  $\bar{P}(x(t))$ , определенные на конечном промежутке прогнозирования  $[t, t+T]$  длины  $T$ , начиная с текущего момента  $t$ . Второй аргумент  $t$  здесь подчеркивает, что прогноз делается в текущий момент  $t$ .

Отметим, что несмотря на то, что ниже результаты представлены для непрерывных систем, существуют их полные аналоги и для дискретных систем.

## 1.2 Задача МРС с терминальными ограничениями-равенствами

Идеи МРС применялись на практике еще в 1970-х, однако первый подход, гарантирующий устойчивость замкнутой системы был предложен только в 1988 в работе [12]. В этом подходе прогнозирующая задача оптимального управления содержала ограничение-равенство для правого конца траектории, который требовалось привести в положение равновесия, в данном случае — в начало координат.

Тогда задача МРС  $\bar{P}(x(t))$  для измеренного состояния объекта  $x(t)$  в момент  $t$  формулируется следующим образом:

$$J^*(x(t)) = \min_{\bar{u}(\cdot; t)} J(x(t), \bar{u}(\cdot; t)), \quad (1.4)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(t; t) = x(t), \\ \bar{u}(\tau; t) &\in U, \quad \bar{x}(\tau; t) \in X, \quad \tau \in [t, t+T], \\ \bar{x}(t+T; t) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$J(x(t), \bar{u}(\cdot; t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau; t), \bar{u}(\tau; t)) d\tau,$$

$L(\bar{x}(\tau; t), \bar{u}(\tau; t))$  — функция стоимости этапа,  $J(x(t), \bar{u}(\cdot; t))$  — аккумулярованное значение стоимости этапов на всем горизонте прогнозирования  $T$ .

Заметим, что в задаче (1.4) предполагается, что математическая модель точно соответствует динамике реального объекта управления. Такие схемы МРС носят название номинальных (nominal MPC) [4].

Оптимальное программное управление задачи (1.4) обозначим

$$\bar{u}^*(\cdot; t) = \arg \min_{\bar{u}(\cdot; t)} J(x(t), \bar{u}(\cdot; t)).$$

Таким образом, алгоритм MPC из [12] состоит в следующем

1. В момент времени  $t$  измерить текущее состояние  $x(t) \in X$  объекта.
2. Решить задачу MPC (1.4).
3. Применить  $u_{MPC}(\tau) = \bar{u}^*(\tau, t)$ ,  $\tau \in [t, t + \delta)$  для управления объектом на временном промежутке длины  $\delta$ .
4. Положить  $t := t + \delta$  и вернуться к шагу 1.

Для того, чтобы гарантировать асимптотическую устойчивость системы (1.1), необходимо сделать ряд предположений о правой части дифференциального уравнения (1.1), ограничениях задачи (1.2), функции стоимости этапа  $L$ , и существовании решения задачи (1.4).

**Предположение 1.1** Пусть объект управления, описываемый (1.1) – (1.2), удовлетворяет следующим условиям:

- i. Функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  дважды непрерывно дифференцируема.
- ii. Множество  $U$  — компакт, т.е. ограниченное и замкнутое множество.
- iii. Множество  $X$  — связное и замкнутое множество.
- iv. Точка равновесия — начало координат  $(0, 0)$  — является внутренней точкой множества  $X \times U$ :  $(0, 0) \in \text{int}(X \times U)$ .

**Предположение 1.2** Относительно параметров критерия качества задачи (1.4) предположим, что функция  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и выполняются следующие условия:

- i.  $L(0, 0) = 0$ ,  $L(x, u) > 0$ ,  $(x, u) \neq (0, 0)$ .
- ii. Функция  $J^*(x)$  непрерывна в точке  $x = 0$ .

При сделанных предположениях, задача МРС (1.4) разрешима (существует оптимальное программное управление) в момент времени  $t$ , если в ней существует хотя бы одно допустимое управление  $\bar{u}(\cdot; t)$ , т.е. такое управление, которое вместе с порождаемой им траекторией удовлетворяет всем ограничениям задачи (1.4).

Пусть  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество всех точек  $x$ , для которых разрешима задача (1.4) в начальный момент времени  $t = 0$ .

**Теорема 1.1** Пусть выполняются предположения 1.1, 1.2 и имеет место начальная разрешимость задачи (1.4), т.е.  $x_0 \in D$ . Тогда

1. Задача МРС (1.4) рекуррентно разрешима, т.е. для любого момента  $t > 0$  существует оптимальное программное управление  $\bar{u}^*(\cdot; t)$ .
2. Замкнутая система является асимптотически устойчивой с областью притяжения  $D$ .

Приведем идею доказательства теоремы 1.1, поскольку здесь используется универсальный подход, который будет использоваться далее для целей магистерской диссертации.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Рекуррентная разрешимость задачи (1.4) доказывается по индукции. Задача (1.4) разрешима в момент  $t = 0$  по предположению индукции.

Допустим, что (1.4) разрешима в момент  $t$ . Для следующего момента  $t + \delta$  рассмотрим управление  $\bar{u}(\tau; t + \delta)$ ,  $\tau \in [t + \delta, t + \delta + T]$ , построенное следующим образом:

$$\bar{u}(\tau; t + \delta) = \begin{cases} \bar{u}^*(\tau; t), & \tau \in [t + \delta, t + T], \\ 0, & \tau \in [t + T, t + \delta + T], \end{cases} \quad (1.5)$$

Покажем, что это управление является допустимым в задаче  $P(x(t + \delta))$  для точки  $x(t + \delta) = \bar{x}(t + \delta; t)$ . Во-первых,  $\bar{u}^*(\tau; t)$  допустимо на промежутке  $\tau \in [t + \delta, t + T]$ , при этом  $x(t + T; t + \delta) = 0$ . Во-вторых, в силу  $f(0, 0) = 0$ , имеем, что применение тривиального управления на промежутке  $[t + T, t + \delta + T]$  даст  $x(\tau; t + \delta) \equiv 0$ ,  $\tau \in [t + T, t + \delta + T]$ , что влечет выполнение терминального ограничения  $P(x(t + \delta))$  в задаче  $P(x(t + \delta))$ . Существование допустимого управления здесь равносильно существованию оптимального.

2. Доказательство асимптотической устойчивости замкнутой системы основано на идее использования функции  $J^*(x(t))$  в качестве функции Ляпунова [26].

Согласно прямому методу Ляпунова [19], если выполняются следующие условия для функции Ляпунова  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto V(t, x)$ :

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), \quad t \geq 0, \quad x \in D,$$

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad t \geq 0, \quad x \in D,$$

где  $W_1, W_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывные и положительно определенные, то положение равновесия  $x = 0$  является равномерно устойчивым с областью притяжения  $D$ .

Если далее

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x), \quad t \geq 0, \quad x \in D,$$

где  $W_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная и положительно определенная, то положение равновесия является равномерно асимптотически устойчивым в  $D$ .

Вычислим значение критерия качества задачи  $P(x(t+\delta))$  на допустимом управлении (1.5):

$$\begin{aligned} J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta)) &= \int_{t+\delta}^{t+\delta+T} L(\bar{x}(\tau; t+\delta), \bar{u}(\tau; t+\delta)) d\tau = \\ &= \int_{t+\delta}^{t+T} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau + \int_{t+T}^{t+\delta+T} L(0, 0) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$J^*(x(t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau,$$

то далее можем записать

$$J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta)) = J^*(x(t)) - \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau.$$

Поскольку на оптимальном программном управлении значение критерия качества будет не хуже, чем на допустимом (1.5), то верно неравенство  $J^*(x(t+\delta)) \leq J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta))$ , а значит

$$J^*(x(t+\delta)) \leq J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta)) \leq J^*(x(t)) - \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau.$$

по индукции мы получаем следующее

$$J^*(x(\infty)) \leq J^*(x(0)) - \int_0^\infty L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau)) d\tau,$$

где  $x_{MPC}(t)$ ,  $t \geq 0$ , — траектория замкнутой системы.

Дальнейший анализ основан на лемме Барбалата, которая является фундаментальным результатом асимптотического анализа решений дифференциальных уравнений и одним из базовых инструментов теории управления. Лемма связывает сходимость интеграла со сходимостью его подынтегральной функции:

**Лемма 1.1 (Барбалат)** *Если функция  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  равномерно непрерывна, то выполняется следующее*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau < \infty \Rightarrow \phi(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Из предположения 1.2 следует, что  $J^*(x(\infty)) \geq 0$ , кроме того, в силу начальной разрешимости оптимальное значение  $J^*(x(0))$  конечно. Поэтому

$$\int_0^\infty L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau)) d\tau < \infty,$$

откуда в силу леммы Барбалата получаем, что  $L(t) = L(x_{MPC}(t), u_{MPC}(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поскольку  $L$  непрерывна и непрерывны аргументы этой функции, то  $\|x_{MPC}(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ , откуда следует результат теоремы.  $\square$

Добавление тривиального условия  $\bar{x}(t + T) = 0$  на правом конце траектории — простейшее условие, гарантирующее асимптотическую устойчивость. Основными недостатками данного подхода являются: 1) вычислительные сложности, связанные с (в общем случае нелинейными) ограничениями равенствами, поскольку точное попадание в конце горизонта в начало координат не всегда выполнимо; 2) маленькой областью притяжения  $D$ .

Эти недостатки устраняются в следующем подходе.

### 1.3 Квазибесконечный MPC

Ослабим ограничения-равенства в терминальный момент времени и потребуем от траектории попадания не в начало координат, а на некоторое терминальное множество  $X^f$ . Внутри терминального множества  $X^f$  введем локальную функцию Ляпунова системы с управлением  $F$ , которая определяет еще один новый элемент задачи — терминальное слагаемое  $F(\bar{x}(t + T; t))$

в критерии качества, за счет которой обеспечивается сходимость к началу координат.

Большинство современных схем MPC вкладываются в общую схему с терминальным множеством и терминальным слагаемым в критерии качества [9]. Впервые такой подход для стабилизации нелинейных непрерывных систем с ограничениями был предложен в рамках квазибесконечного MPC (Quasi-Infinite MPC) в работе [3].

Задача MPC  $\bar{P}(x(t))$  в новом подходе выглядит следующим образом:

$$J^*(x(t)) = \min_{\bar{u}(\cdot; t)} \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau; t), \bar{u}(\tau; t)) d\tau + F(\bar{x}(t+T; t)), \quad (1.6)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(t; t) = x(t), \\ \bar{x}(t; t) &\in X, \quad \bar{u}(t; t) \in U, \quad \tau \in [t, t+T], \\ \bar{x}(t+T; t) &\in X^f, \end{aligned}$$

где  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — функции стоимости терминального состояния,  $X^f$  — терминальное множество.

Как и прежде,  $\bar{u}^*(\cdot; t)$  — оптимальное программное управление,  $J^*(x(t))$  — оптимальное значение задачи (1.6).

Введем предположения относительно терминального множества и терминальной функции:

**Предположение 1.3** Пусть существует локальная обратная связь

$$u = k^{loc}(x), \quad x \in X_f,$$

такая что

- i. Множество  $X^f$  является инвариантным множеством для системы, замкнутой локальной обратной связью  $\dot{x} = f(x, k^{loc}(x))$ .
- ii. Имеет место включение  $k^{loc}(x) \in U$ ,  $x \in X^f$ , т.е. локальная обратная связь является допустимой для всех состояний терминального множества.
- iii. Выполняется неравенство  $\dot{F}(x) + L(x, k^{loc}(x)) \leq 0$ ,  $x \in X^f$ .

Сделанные предположения означают, что  $F$  — локальная функция Ляпунова системы с управлением [13].



**Теорема 1.2** Пусть выполняются предположения 1.3, и задача МРС (1.6) разрешима в начальный момент времени  $t = 0$ . Тогда

1. Задача МРС (1.6) рекуррентно разрешима.
2. Замкнутая система является асимптотически устойчивой.

Согласно [3], предположения 1.3 о терминальной функции и терминальном множестве можно удовлетворить следующим образом.

Пусть

- i. функция стоимости этапа является выпуклой квадратичной

$$L(x, u) = x^T Q x + u^T R u, \quad Q, R > 0;$$

- ii. линеаризация системы (1.1) в нуле

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0),$$

стабилизируема [19].

Тогда будем искать локальную обратную связь, терминальную функцию и терминальное множество в следующем виде:

- Локальная обратная связь — линейная:  $k^{loc}(x) = Kx$ .
- Терминальная функция — квадратичная:  $F(x) = x^T P x$ ,  $P > 0$ .
- Терминальное множество — эллипсоид:  $X_\alpha^f = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T P x \leq \alpha\}$  для некоторого  $\alpha > 0$ .

Определим параметры  $K, P, \alpha$  так чтобы выполнялись предположения 1.3. Во-первых, выберем  $K$  таким образом, чтобы матрица  $A_K = A + BK = A_K$  была гурвицевой. Существование такой матрицы следует из стабилизируемости линеаризации системы (1.1).

Во-вторых, для определения матрицы  $P$  перепишем неравенство iii в предположении 1.3:

$$\frac{d}{dt} x(t)^T P x(t) \leq -L(x(t), k^{loc}(x(t))) = -x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) = -x(t)^T Q^* x(t).$$

Слева производная квадратичной терминальной функции в силу динамики системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} x(t)^T P x(t) = f(x(t), Kx(t))^T P x(t) + x(t)^T P f(x(t), Kx(t)).$$

Используя линеаризацию, имеем  $f(x, Kx) = (A + BK)x + \phi(x)$ , откуда

$$\frac{d}{dt}x(t)^T Px(t) = x(t)^T (A_K P + P A_K)x(t) + 2x(t)^T P \phi(x(t)). \quad (1.7)$$

Теперь необходимо оценить сверху слагаемое  $x^T P \phi(x)$ . Пусть внутри терминального множества  $L_\phi := \sup\{\|\phi(x)\|/\|x\|, x \in X_\alpha^f, x \neq 0\}$ . Тогда требуемая оценка может быть получена следующим образом

$$x^T P \phi(x) \leq \|x^T P\| \cdot \|\phi(x)\| \leq \|P\| \cdot L_\phi \cdot \|x\|^2 \leq \frac{\|P\| \cdot L_\phi}{\lambda_{\min}(P)} x^T P x, \quad (1.8)$$

где  $\lambda_{\min}(P) > 0$  — минимальное собственное значение матрицы  $P > 0$ .

Выберем  $\alpha$  достаточно малым, так чтобы для некоторого  $k > 0$  выполнялось неравенство

$$L_\phi \leq \frac{k \lambda_{\min}(P)}{\|P\|}. \quad (1.9)$$

Используя (1.9) в (1.8), получим:  $x^T P \phi(x) \leq k x^T P x$ . Тогда (1.7):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t)^T Px(t) &\leq x(t)^T (A_K P + P A_K)x(t) + 2k x(t)^T P x(t) = \\ &= x(t)^T ((A_K + kI)^T P + P(A_K + kI))x(t). \end{aligned}$$

Теперь матрицу  $P$  определим как решение уравнения Ляпунова

$$(A_K + kI)^T P + P(A_K + kI) = -Q^*, \quad (1.10)$$

которое имеет решение тогда и только когда матрица  $A_K + kI$  является гурвицевой, чего можно добиться, выбирая параметр  $k$  согласно следующему неравенству

$$k < -\max \operatorname{Re}\{\lambda(A_K)\}. \quad (1.11)$$

Окончательно, получим

$$\frac{d}{dt}x^T P x \leq -x^T Q^* x,$$

что влечет инвариантность множества  $X_\alpha^f$  для системы (1.1) с линейной обратной связью  $k^{loc}(x) = Kx$ .

Таким образом, алгоритм нахождения терминальной функции и множества:

1. Решить задачу стабилизации для линеаризации системы (1.1) в окрест-

ности начала координат, т.е. найдем  $K$  такое, что  $(A + BK)$  гурвицева; тогда  $u = Kx$  — локальная обратная связь.

2. Выбрать  $k > 0$  такое, что верно неравенство (1.11) и решить уравнение Ляпунова (1.10).
3. Найти наибольшее  $\alpha_1$  такое что  $Kx \in U \forall x \in X_{\alpha_1}^f$ , т.е. локальная обратная связь допустима для всех состояний терминального множества, задаваемого как  $X_{\alpha_1}^f = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T P x \leq \alpha_1\}$ .
4. Найдем наибольшее  $\alpha \in (0, \alpha_1]$  такое что выполняется (1.9).

Шаг (4) может быть заменен на альтернативный: будем решать задачу оптимизации

$$\max_x x^T P \phi(x) - kx^T P x, \quad x^T P x \leq \alpha, \quad (1.12)$$

постепенно уменьшая  $\alpha$  относительно  $\alpha_1$  до тех пор, пока оптимальное значение задачи (1.12) является отрицательным.

В итоге мы имеем следующие степени свободы:

- нахождение  $K$  для локального управления Ляпунова
- выбор  $k$  определяет компромисс между "большим" терминальным регионом и большой матрицей  $P$  для терминальной функции

## 1.4 Безусловный MPC

Теория безусловного MPC (Unconstrained MPC) (см. например, [7, 8]) ставит перед собой задачу гарантировать асимптотическую устойчивость замкнутой системы без дополнительных терминальных ингредиентов (терминальная функция  $F$  и терминальное множество  $X^f$ ). Помимо упрощения предварительных построений, связанных с вычислением  $F$  и  $X^f$ , и численного решения прогнозирующей задачи оптимального управления  $\bar{P}(x(t))$ , теория безусловного MPC позволяет оценить, насколько управление MPC отличается от оптимального, т.е. от решения задачи (1.3).

Задача MPC в рассматриваемом случае имеет вид

$$J_T(x(t), \bar{u}(\cdot; t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau; t), \bar{u}(\tau; t)) d\tau, \quad (1.13)$$

при условиях

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(t; t) = x(t),$$

$$\bar{u}(\tau; t) \in U, \quad \tau \in [t, t + T].$$

В результате применения базового алгоритма MPC с прогнозирующей задачей оптимального управления (1.13) на бесконечном полуинтервале  $[0, \infty)$  будет получена следующая стоимость процесса MPC:

$$J_{\infty}^{MPC}(x_0) = \int_0^{\infty} L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau)) d\tau.$$

Дальнейшая цель — найти оценку субоптимальности  $\alpha$ :

$$\alpha J_{\infty}^{MPC}(x_0) \leq J_{\infty}^*(x_0) \quad \forall x_0,$$

где для  $\alpha$  выполнены неравенства

- $\alpha \leq 1$ , что следует из оптимальности значения  $J_{\infty}^*(x_0)$ ;
- $\alpha > 0$ , что требуется для гарантии асимптотической устойчивости замкнутой системы (см. доказательство теоремы 1.1).

Предположим, что существует  $\alpha \in (0, 1]$ , такое что  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  выполняется

$$J_T^*(x(t + \delta)) \leq J_T^*(x(t)) - \alpha \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau. \quad (1.14)$$

Тогда для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  верна следующая цепочка неравенств

$$\alpha J_{\infty}^*(x(t)) \leq \alpha J_{\infty}^{MPC}(x(t)) \leq J_T^*(x(t)) \leq J_{\infty}^*(x(t)).$$

**Теорема 1.3** Предположим, что существуют  $\epsilon \in (0, 1]$  и  $\gamma > 0$ , такие что выполняются неравенства

$$J_T^*(x(t + \delta)) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau, \quad (1.15)$$

$$\int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau \leq \gamma \int_t^{t+\delta} L^*(\tau; t) d\tau, \quad (1.16)$$

где  $L^*(\tau; t) = L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t))$ .

Тогда (1.14) выполняется при  $\alpha = 1 - \gamma \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** следует из цепочки неравенств

$$J_T^*(x(t + \delta)) - J_T^*(x(t)) = J_T^*(x(t + \delta)) - \int_t^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau \stackrel{(1.15)}{\leq}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau - \int_t^{t+\delta} L^*(\tau; t) d\tau \stackrel{(1.16)}{\leq} \\
&\leq \left( \gamma \frac{1-\epsilon}{\epsilon} - 1 \right) \int_t^{t+\delta} L^*(\tau; t) d\tau
\end{aligned}$$

Обозначим  $\alpha := 1 - \gamma \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ , получим требуемое неравенство (1.14).  $\square$

Дальнейшие построения направлены на нахождение подходящих  $\epsilon, \gamma$ .

**Предположение 1.4** (Асимптотическая управляемость) Для всех  $x$ , существует управление  $\hat{u}_x(t) \in U$ ,  $t \geq 0$ , такое что

$$L(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \leq \beta(t) \min_u L(x, u), \quad t > 0,$$

где  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  — непрерывная, положительная, строго убывающая и  $\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = 0$ .

Из условий, накладываемых на функцию  $\beta$  следует, что  $\int_0^\infty \beta(\tau) d\tau < \infty$ . Далее будем использовать обозначение  $B(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau$ .

**Лемма 1.2** В предположении 1.4 неравенство

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq \int_{t+\delta}^{t+t'} L^*(\tau; t) d\tau + B(T+\delta-t') L^*(t+t'; t)$$

верно для всех  $t' \in [\delta, T]$ .

Основываясь на лемме 1.2, найдем значение  $\epsilon$ . Запишем неравенство

$$\begin{aligned}
J_T^*(x(t+\delta)) &\leq \min_{t' \in [\delta, T]} \left\{ \int_{t+\delta}^{t+t'} L^*(\tau; t) d\tau + B(T+\delta-t') L^*(t+t'; t) \right\} \leq \\
&\leq \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau + B(T) \min_{t' \in [\delta, T]} L^*(t+t'; t) = \left( 1 + \frac{B(T)}{T-\delta} \right) \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau,
\end{aligned}$$

где использовано неравенство  $\min_{t' \in [\delta, T]} L^*(t+t'; t) \leq \frac{1}{T-\delta} \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau$ .

Тогда мы имеем  $\left( 1 + \frac{B(T)}{T-\delta} \right) = \frac{1}{\epsilon}$ , т.е.  $\frac{1-\epsilon}{\epsilon} = \frac{B(T)}{T-\delta}$ .

Аналогично найдем, чему равно  $\gamma$ . Будем использовать

**Лемма 1.3** В предположении 1.4 неравенство

$$\int_{t+t'}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau \leq B(T-t') L^*(t+t'; t)$$

верно для всех  $t' \in [0; T]$ .

Повторяя аргументы, с помощью которых было получено  $\varepsilon$ , используя лемму 1.3 найдем  $\gamma = \frac{B(T)}{\delta}$ .

Окончательно, получили

$$\alpha = 1 - \gamma \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} = 1 - \frac{B(T)}{\delta} \left( \frac{B(T)}{T - \delta} \right),$$

откуда следует, что при  $T \rightarrow \infty$ , поскольку  $\epsilon \rightarrow 1$ , то  $\alpha \rightarrow 1$ . Таким образом, при достаточно больших горизонтах прогнозирования имеет место асимптотическая устойчивость замкнутой системы и субоптимальность полученной в результате применения алгоритма МРС обратной связи.

## ГЛАВА 2

# ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

В настоящей главе вводятся основные понятия и определения, строятся математические модели, описывающие динамику инвестиционного портфеля, и формулируются задачи его оптимизации. Рассматриваемые модели можно разбить на два класса: в которых заданы функции цены покупки и продажи активов, и в которых указанные функции прогнозируются на заданном горизонте планирования. Описываются данные, которые будут использоваться для проведения численных экспериментов. Обсуждаются достоинства и недостатки различных подходов при оптимизации портфелей.

### 2.1 Основные положения модели

Портфель — совокупность инвестиционных вложений, состоящих из активов и свободных финансов.

Портфель состоит из  $N$  типов бумаг. Количество бумаг  $i$ -го типа ( $i = \overline{1, N}$ ) в момент времени  $t \geq 0$  равняется  $x_i(t)$ , где  $x_i(t) \geq 0$ . Обозначим через  $x_0(t)$  — количество свободных финансов в момент времени  $t \geq 0$ .

Через  $u_i^+(t)$  будем обозначать количество активов типа  $i$ , которые инвестор купил в момент времени  $t$ . Соответственно, через  $u_i^-(t)$  обозначим, сколько инвестор продал активов типа  $i$  в момент времени  $t$ . Пусть стоимость покупки  $i$ -ой бумаги равна  $b_i(t) \geq 0$  (buy), а продажа  $s_i(t) \geq 0$  (sell). Конкретный вид функций  $s_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $t \geq 0$  будет обсуждаться ниже, в разделе 2.2.

Таким образом, в момент времени  $t$  инвестор покупает активов типа  $i$  на сумму  $b_i(t)u_i^+(t)$  и продает на сумму  $s_i(t)u_i^-(t)$ .

Тогда количество свободных средств в следующий момент времени  $t + 1$  будет равно

$$x_0(t + 1) = x_0(t) + \sum_{i=1}^N (-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)). \quad (2.1)$$

Количество активов типа  $i$  в момент времени  $t + 1$  будет равно

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i). \quad (2.2)$$

Считаем, что в начальный момент времени заданы начальные условия — количество бумаг каждого типа и объем свободных средств, которыми располагает инвестор:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_0(0) = x_{00}.$$

Введенные переменные и уравнения (2.1), (2.2) представим в векторной форме. Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T; \\ U^+(t) &= [u_1^+(t), \dots, u_N^+(t)]^T; \\ U^-(t) &= [u_1^-(t), \dots, u_N^-(t)]^T; \\ B(t) &= [b_1(t), \dots, b_N(t)]^T; \\ S(t) &= [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T; \\ X_0 &= [x_{10}, \dots, x_{N0}]^T. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя (2.3), перепишем (2.2) для  $X(t)$ :

$$X(t + 1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t), \quad X(0) = X_0, \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Представим (2.1) в векторной форме:

$$x_0(t + 1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \quad x_0(0) = x_{00}, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

На значения  $X(t)$ ,  $x_0(t)$ ,  $U^+(t)$ ,  $U^-(t)$  в каждый момент времени  $t$  накладываются следующие естественные ограничения:

$$\begin{aligned} X(t) &\geq 0, \\ x_0(t) &\geq 0, \\ U^+(t) &\geq 0, \\ U^-(t) &\geq 0, \\ t &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

С точки зрения теории управления, в динамической модели (2.4) – (2.6): переменные  $X(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $x_0(t) \in \mathbb{R}$  — фазовые переменные (зависимые), переменные  $U^+(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $U^-(t) \in \mathbb{R}^N$  — управляющие переменные (управления,



независимые), динамическая модель нестационарная в силу зависимости от времени функций цены покупки  $B(t)$ ,  $t \geq 0$ , и цены продажи  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ . Ограничения (2.6), накладываются как на управляющие, так и на фазовые переменные.

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть  $w_i(t)$  — общая стоимость бумаг типа  $i$ , и она равна сумме, которую инвестор может выручить из ее продажи в момент времени  $t$ :

$$w_i(t) = s_i(t)x_i(t).$$

Значение  $w_0(t)$  будем считать равным  $x_0(t)$ . Тогда общая стоимость портфеля равна

$$w(t) = \sum_{i=0}^N w_i(t).$$

В векторном виде, используя (2.3), получим следующую формулу для общей стоимости портфеля:

$$w(t) = x_0(t) + S(t)^T X(t).$$

Задачи оптимизации портфеля, динамика которого описывается согласно (2.4), (2.5) и подчиняется ограничениям (2.6) будет связана с максимизацией введенной стоимости портфеля при различных дополнительных требованиях.

Для оптимизации поведения инвестора будем применять методы МРС, описанные в главе 1. Таким образом, в каждый момент времени, начиная с  $t = 0$  будет решаться прогнозирующая задача оптимального управления. Первое значение ее оптимального управления будет использовано для принятия решения об изменении содержания портфеля в текущий момент времени. Новое полученное состояние портфеля затем используется в качестве начального в задаче оптимального управления в следующий момент времени. Как будет показано ниже, качество полученного замкнутого процесса управления зависит от формулировки прогнозирующей задачи.

## 2.2 Данные для численных экспериментов

В данном разделе описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов.

Будем работать с двумя типами данных:

1. сгенерированных искусственно;
2. реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и синусоидальной функции

$$\begin{aligned} b_i(t) &= k_{i0} + k_i t + \alpha_i \sin(r_i + g_i t); \\ s_i(t) &= 0.95 b_i(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для (2.7) значения  $k_{i0}$ ,  $k_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $r_i$ ,  $g_i$  подбираются таким образом, чтобы ни для каких  $i \neq j$  не совпадали периоды. Выбор функции  $s_i(t)$  в представленном виде обусловлен тем наблюдением реально существующей картины, что разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту, и таким образом, она будет хорошим приближением для используемых данных.

Графики сгенерированных значений представлены на рисунке 2.1.

Реальные данные взяты из исторических курсов на сайте *coinmarketcap.com* за период с 10.02.2018 по 27.06.2018.

Графики реальных курсов представлены на рисунке 2.2.

## 2.3 Модель без терминального множества

Настоящий и следующий разделы посвящены исследованию детерминированной модели оптимизации портфеля, т.е. случаю, когда в начальный момент времени точно известны все значения цены продажи и покупки  $s_i(t)$  и  $b_i(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Будем применять методы МРС, описанные в главе 1 для задачи оптимизации портфеля. При этом рассматривается прогнозирующая задача МРС с конечным горизонтом прогнозирования  $T$  максимизации стоимости портфеля без условий в терминальный момент времени  $t + T$  (без терминального множества).

- задача ;
- задача максимизации стоимости портфеля с условиями в терминальный момент времени  $t + T$  (с терминальным множеством).

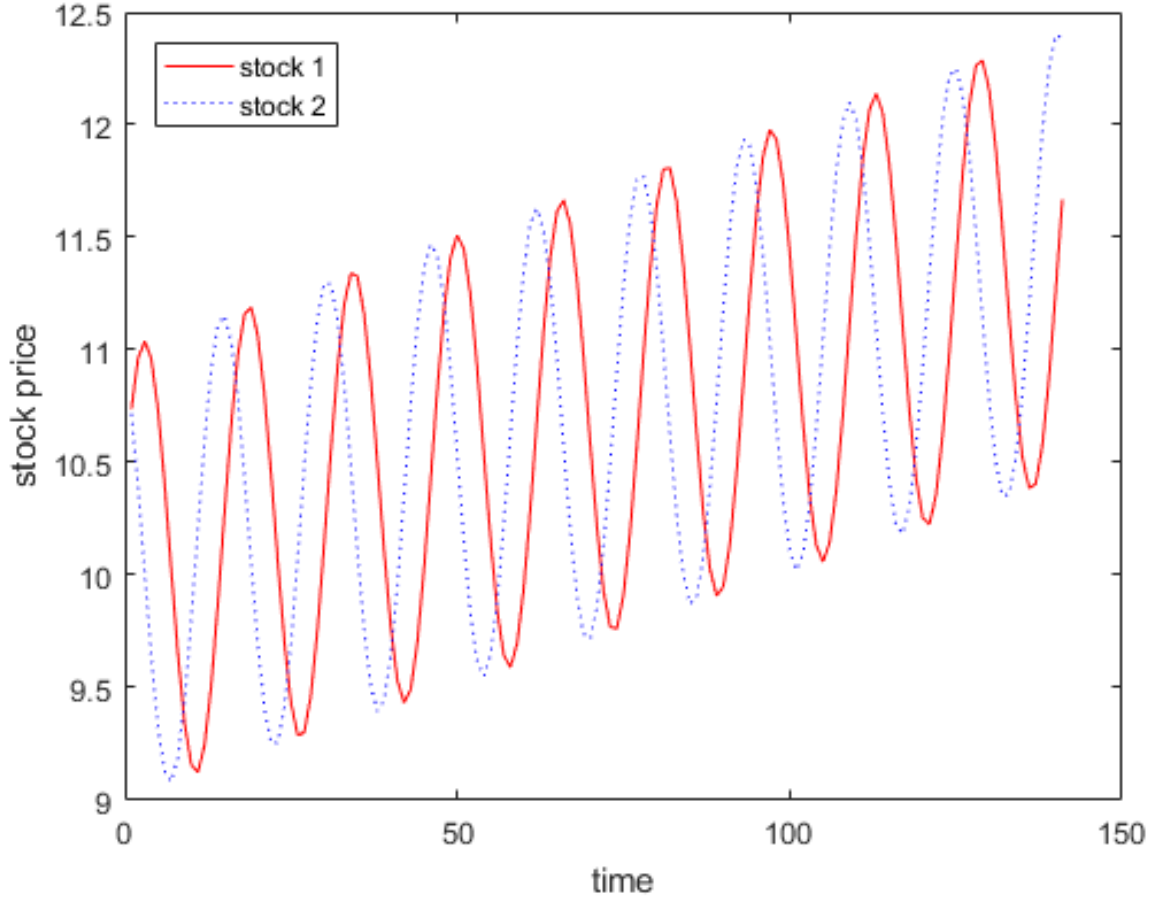


Рис. 2.1: График сгенерированных значений

Рассмотрим следующую задачу MPC с горизонтом планирования  $T$

$$\begin{aligned} \max_{\bar{U}^+, \bar{U}^-} J(X(t), x_0(t), \bar{U}^+, \bar{U}^-) &= w(t+T) = \\ &= \bar{x}_0(t+T) + S(t+T)^T \bar{X}(t+T), \end{aligned} \quad (2.8)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{X}(\tau+1) &= \bar{X}(\tau) + \bar{U}^+(\tau) - \bar{U}^-(\tau), \\ \bar{x}_0(\tau+1) &= \bar{x}_0(\tau) - B(\tau)^T \bar{U}^+(\tau) + S(\tau)^T \bar{U}^-(\tau), \\ \bar{X}(t) &= X(t), \\ \bar{x}_0(t) &= x_0(t), \\ \bar{X}(\tau) &\geq 0, \\ \bar{x}_0(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t+T}, \\ \bar{U}^+(\tau) &\geq 0, \\ \bar{U}^-(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t+T-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

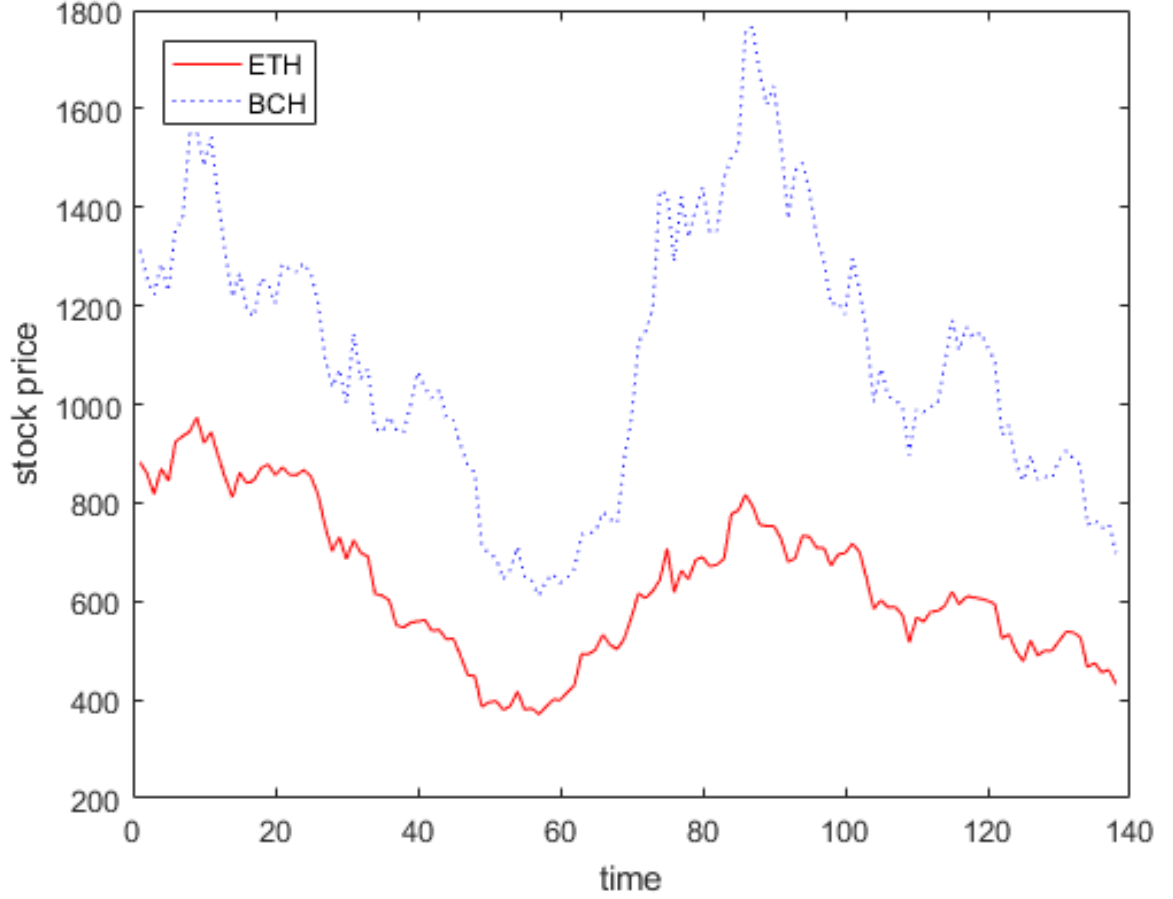


Рис. 2.2: График реальных курсов

Оптимальное решение данной задачи будем обозначать используя символ \*:

$$\begin{aligned}\bar{U}_-^* &= \{\bar{U}_-^*(\tau|t)\}, \\ \bar{U}_+^* &= \{\bar{U}_+^*(\tau|t)\}, \quad \tau = \overline{t, t+T-1},\end{aligned}\tag{2.10}$$

Данному управлению соответствует траектория

$$\{(X^*(\tau|t), x_0^*(\tau|t))\}, \quad \tau = \overline{t, t+T}.$$

При этом первое управлением MPC будем называть первое значение оптимального управления

$$(U_+^{MPC}(t), U_+^{MPC}(t)) = (U_-^*(t|t), U_+^*(t|t)).$$

Отметим, что в задаче оптимального управления (2.8) – (2.9) функция стоимости зависит от функции  $S(\tau)$ , кроме того, отсутствует функция стоимости этапа  $L_t(\cdot)$ , а максимизируется только терминальная стоимость порт-

феля.

Так как предположение  $J_{\infty}^*(X(t), x_0(t)) < \infty$  из главы 1.4 не выполняется, то невозможно гарантировать устойчивость процесса, замкнутого обратной связью, построенной в результате применения МРС-алгоритма из главы 1.4 с прогнозирующей задачей оптимального управления (2.8) – (2.9). Также невозможно исследовать полученное решение на субоптимальность.

Приведем типичную картину поведения инвестора, использующего для управления портфелем задачу (2.8) – (2.9). Для этого приведем результаты численных экспериментов для двух активов ( $N = 2$ ) при горизонте прогнозирования  $T = 6$  и используя синтетические и реальные данные.

На рисунке 2.3 представлены данные проведенного численного эксперимента. Верхний график показывает количество активов первого и второго типа в каждый момент времени. Нижний график представляет собой общую стоимость базового портфеля (с тривиальным управлением — пунктирная линия) и стоимость портфеля под управлением МРС (сплошная линия).

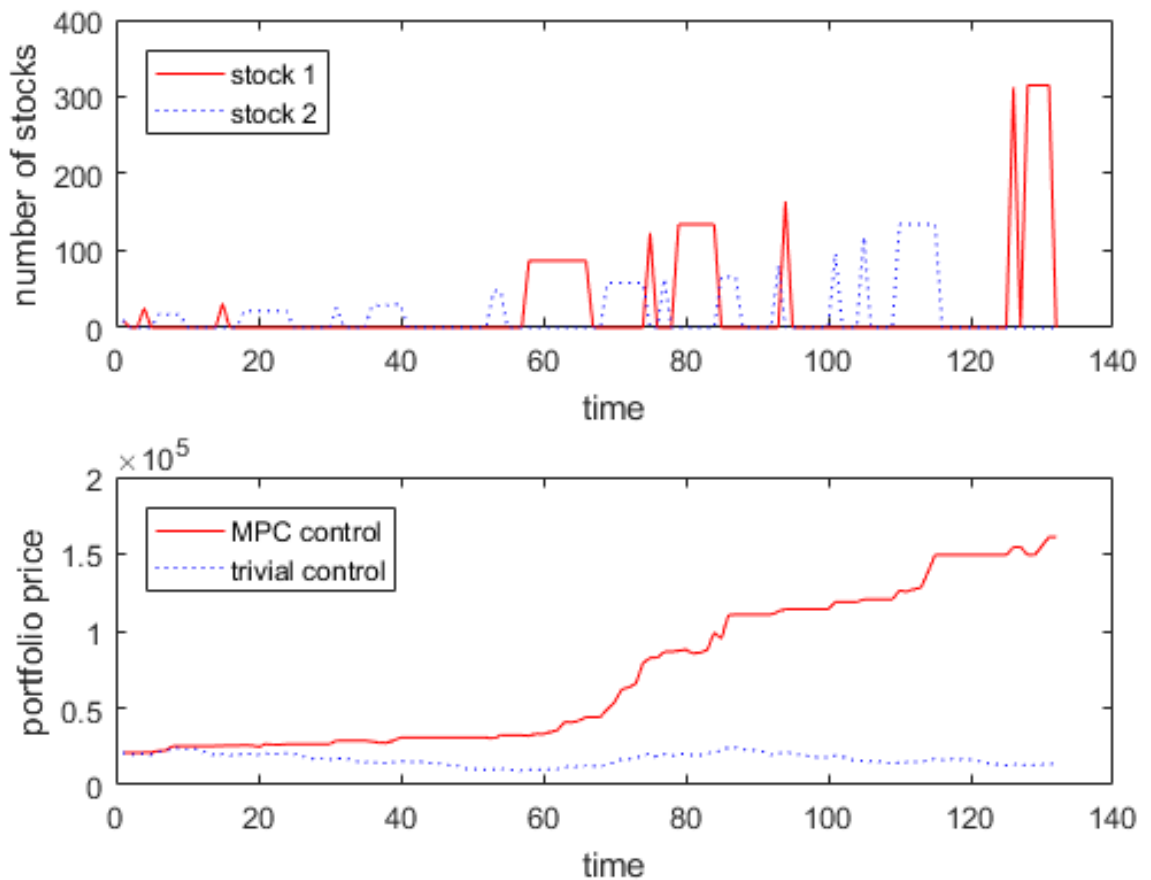


Рис. 2.3: Детерминированная модель без регуляризации

Как видно из рисунка 2.3, при использовании задачи (2.8) – (2.9) происходят частые операции вида: продать все бумаги типа  $i$  и на освободившиеся

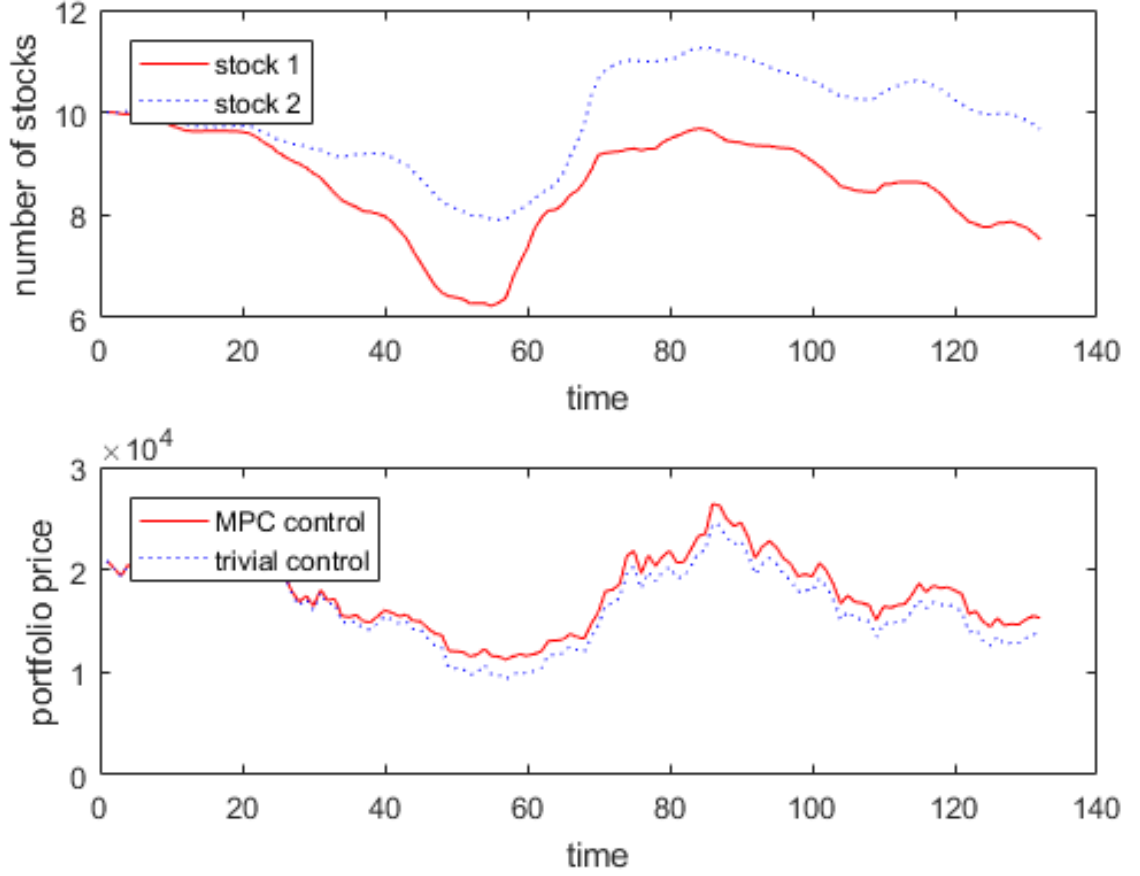


Рис. 2.4: Детерминированная модель с регуляризацией

деньги купить бумаги типа  $j$ ,  $i, j = 1, 2$ . Для инвестора такое поведение может приводить к проблемам, поскольку ему приходится постоянно перестраивать портфель, что привносит в его поведение большие риски. Подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерминированной моделью.

Изменим критерий качества (2.8), добавив в него с целью регуляризации стоимость этапа  $L_t(U^+(t), U^-(t))$ .

Получим следующую задачу

$$\min_{\bar{U}^+, \bar{U}^-} J(X(t), x_0(t), \bar{U}^+, \bar{U}^-) = \sum_{t=0}^T L_t(U^+(t), U^-(t)) - w(T), \quad (2.11)$$

при условиях (2.9). Заметим, что здесь критерий качества минимизируется, стоимость портфеля взята за знаком  $-$ .

Если в качестве функции этапа взять, например, функцию вида

$$L_t(U^+(t), U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))^2,$$

которая характеризует весь оборот денег, произошедший в момент времени  $t$ , то графики изменятся (для  $\alpha = 0.001$ ) как представлено на рисунке 2.4.

При этом отметим, что задача (2.11) — задача квадратичного программирования. Для таких задач разработаны эффективные, быстрые методы решения, в частности, методы внутренней точки [2, 15], что чрезвычайно важно при реализации алгоритмов МРС и быстрого принятия решений в каждый момент времени.

Аналогичная рисунку 2.4 картина получается в численных экспериментах со сгенерированными тестовыми данными. Без функции стоимости этапа результаты представлены на рисунке 2.5а, со стоимостью этапа — на рисунке 2.5б.

## 2.4 Модель с терминальным множеством

Рассмотрим теперь в качестве прогнозирующей задачи МРС — задачу оптимального управления с горизонтом планирования  $T$  и ограничениями, накладываемыми на состав портфеля в терминальный момент времени  $t_0 + T$  (с терминальным множеством):

$$\max_{\bar{U}^+, \bar{U}^-} J(X(t), x_0(t), \bar{U}^+, \bar{U}^-) = x_0(t + T) + S(t + T)^T X(t + T); \quad (2.12)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{X}(\tau + 1) &= \bar{X}(\tau) + \bar{U}^+(\tau) - \bar{U}^-(\tau), \\ \bar{x}_0(\tau + 1) &= \bar{x}_0(\tau) - B(\tau)^T \bar{U}^+(\tau) + S(\tau)^T \bar{U}^-(\tau), \\ \bar{X}(t) &= X(t), \\ \bar{x}_0(t) &= x_0(t), \\ \bar{X}(\tau) &\geq 0, \\ \bar{x}_0(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t + T}, \\ \bar{U}^+(\tau) &\geq 0, \\ \bar{U}^-(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t + T - 1}, \\ \frac{\bar{x}_k(t + T)}{\sum_{i=0}^N \bar{x}_i(t + T)} &= \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поясним смысл введенного ограничения

$$\frac{\bar{x}_k(t+T)}{\sum_{i=0}^N \bar{x}_i(t+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Здесь требуется, чтобы в момент времени  $t+T$  пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом МРС с той лишь разницей, что в стандартных схемах экономического МРС в качестве устойчивого состояния используется точка  $x_s$ , а в данном случае это целый луч, содержащий значения с одинаковыми пропорциями.

Предлагаемый подход, кроме того, дает возможность сравнивать эффективность управления МРС без учета колебания курсов, поскольку отношения стоимостей портфелей с тривиальным управлением, и с управлением МРС, если они содержат одинаковые пропорции, не зависят от текущих курсов.

В общем случае, терминальные ограничения в форме равенства являются нежелательными для задач МРС, так как, нахождение допустимого управления численными методами может быть затруднительно. В следующей теореме покажем, что для рассматриваемой задачи МРС можно в явном виде указать допустимое управление.

**Теорема 2.1** Задача (2.12) – (2.13) разрешима.

**Доказательство** Докажем, что всегда существует допустимое управление, которое приведет портфель на шаге  $T$  к необходимым пропорциям. Докажем даже более строгое утверждение, можно за один шаг привести портфель к любым пропорциям. Этого будет достаточно, так как можно на протяжении  $T-1$  шагов использовать тривиальное управление, а последним шагом привести пропорции к заданным.

Пусть состояние системы в момент времени  $t$  равно  $(x_0(t), X(t))$ , целью будет получить пропорции как в  $(x_0(0), X(0))$ . Не нарушая общности будем считать, что  $x_0(0) + \sum_{i=1}^N X_i(0) = 1$ .

При  $x_0(0) = 1$  допустимым будет управление

$$\bar{U}^-(t|t) = X(t), \quad \bar{U}^+(t|t) = 0,$$

$$\bar{U}^-(t+k|t) = X(t), \quad \bar{U}^+(t+k|t) = 0, \quad k = \overline{1, T-1}.$$

Если  $x_0(0) \neq 1$ , то существует хотя бы один  $j = \overline{1, N}$  такой, что  $X_j(0) \neq 0$ . В этом случае рассмотрим управление



$$\bar{U}^- = X(t), \bar{U}^+ = \alpha X(0),$$

для некоторого  $\alpha \geq 0$ . Тогда

$$\bar{X}(t+1) = \alpha X(0),$$

$$\bar{x}_0(t+1) = x_0(t) + S(t)^T X(t) - \alpha B(t)^T X(0).$$

Найдем, чему будут равны пропорции при таком управлении:

$$\frac{x_0(t+1)}{\sum_{i=0}^N x_i(t+1)} = \frac{x_0(t) + S(t)^T X(t) - \alpha B(t)^T X(0)}{x_0(t) + S(t)^T X(t) - \alpha B(t)^T X(0) + \alpha \sum_{i=0}^N x_i(0)}. \quad (2.14)$$

При  $\alpha = 0$  значение выражения (2.14) равно 1, при росте  $\alpha$  дробь неограниченно убывает. В силу непрерывности следует, что существует такое значение  $\alpha$ , что (2.14) станет равной  $x_0(0) \in [0, 1)$ .

При таком  $\alpha$  будут выполняться и остальные пропорции

$$\frac{x_k(t+1)}{\sum_{i=0}^N x_i(t+1)} = x_k(0), \quad k = \overline{1, N}. \quad (2.15)$$

Легко показать, что значение  $\max_{U^+, U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-)$  ограничено. Это следует из того, что множество значений, которые могут принимать  $(U^+, U^-)$  компактно. Следовательно, задача (2.12) – (2.13) разрешима.  $\square$

**Теорема 2.2** Пусть для начальных условий  $x_0(0), X(0)$  по задаче (2.12) – (2.13) получено управление MPC

$$\{(U_+^{MPC}(0), U_-^{MPC}(0)), (U_+^{MPC}(1), U_-^{MPC}(1)), \dots\},$$

и соответствующая ей траектория

$$\{(X(0), x_0(0)), (X^{MPC}(1), x_0^{MPC}(1)), \dots\}$$

тогда любого  $t \in \mathbb{Z}_+$  верно:

$$\max_{U^+, U^-} J(X^{MPC}(t), x_0^{MPC}(t), U^+, U^-) \geq x_0(0) + S(t+T)^T X(0).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** Пусть в момент времени  $j$  оптимальное управление для задачи (2.12) – (2.13) и соответствующая ему траектория равна

$$\begin{aligned}
& \{(U_+^*(j|j), U_-^*(j|j)), (U_+^*(j+1|j), U_-^*(j+1|j)), \dots, \\
& \quad (U_+^*(j+T-1|j), U_-^*(j+T-1|j))\}, \\
& \{(X^*(j|j), x_0^*(j|j)), (X^*(j+1|j), x_0^*(j+1|j)), \dots, \\
& \quad (X^*(j+T|j), x_0^*(j+T|j))\}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Отметим, что по условию теоремы верны равенства

$$\begin{aligned}
(X^*(j|j), x_0^*(j|j)) &= (X^{MPC}(j), x_0^{MPC}(j)), \\
(U_+^*(j|j), U_-^*(j|j)) &= (U_+^{MPC}(j), U_-^{MPC}(j)).
\end{aligned}$$

и, как следствие, верно равенство

$$(X^*(j+1|j), x_0^*(j+1|j)) = (X^{MPC}(j+1), x_0^{MPC}(j+1)).$$

Доказательство будем вести по индукции. База:

$$\max_{U^+, U^-} J(X(0), x_0(0), U^+, U^-) \geq x_0(0) + S(T)^T X(0).$$

верна из самого определения задачи (2.12) – (2.13).

Предположим, что теорема верна для некого  $j \geq 0$ , докажем для  $j+1$ . Из предположении индукции верно

$$\max_{U^+, U^-} J(X^{MPC}(j), x_0^{MPC}(j), U^+, U^-) \geq x_0(0) + S(j+T)^T X(0).$$

При этом из (2.16) выполняется равенство

$$\max_{U^+, U^-} J(X^{MPC}(j), x_0^{MPC}(j), U^+, U^-) = x_0^*(j+T|j) + S(j+T)^T X^*(j+T|j) \tag{2.17}$$

Из терминального условия (2.13) следует, что существует  $\beta$  такая, что

$$\begin{aligned}
x_0^*(j+T|j) &= \beta x_0(0), \\
X^*(j+T|j) &= \beta X(0).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Из (2.17) и (2.18) следует, что  $\beta \geq 1$ .

Оценим значение

$$\max_{U^+, U^-} J(X^{MPC}(j+1), x_0^{MPC}(j+1), U^+, U^-)$$

Рассмотрим управление

$$\{(U_+^*(j+1|j), U_-^*(j+1|j)), \dots (U_+^*(j+T-1|j), U_-^*(j+T-1|j)), (0, 0)\}.$$

Ему будет соответствовать траектория

$$\{(X^*(j+1|j), x_0^*(j+1|j)), \dots (X^*(j+T|j), x_0^*(j+T|j)), (X^*(j+T|j), x_0^*(j+T|j))\}.$$

Следовательно

$$\max_{U^+, U^-} J(X^{MPC}(j+1), x_0^{MPC}(j+1), U^+, U^-) \geq x_0^*(j+T|j) + S(j+T+1)^T X^*(j+T|j)$$

Сделаем замену (2.18), получим

$$\max_{U^+, U^-} J(X^{MPC}(j+1), x_0^{MPC}(j+1), U^+, U^-) \geq \beta x_0(0) + \beta S(j+T+1)^T X(0)$$

Доказательство индукционного шага завершает то, что  $\beta \geq 1$ .  $\square$

Данная теорема утверждает, что в любой момент времени портфель, управляемый МРС за  $T$  шагов, может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет не меньше, чем в случае, когда постоянно используется тривиальное управление (инвестор не управляет портфелем).

Приведем пример того, как будет вести себя система при управлении МРС-регулятором, использующим задачу оптимального управления с терминальным множеством. На рисунке 2.6а представлен результат численного эксперимента для сгенерированных данных. Как видно, в результате стоимость портфеля получается меньше, нежели в случае без терминального множества (рисунок 2.5b). Но при этом уже диапазон, в котором изменяется количество активов каждого типа.

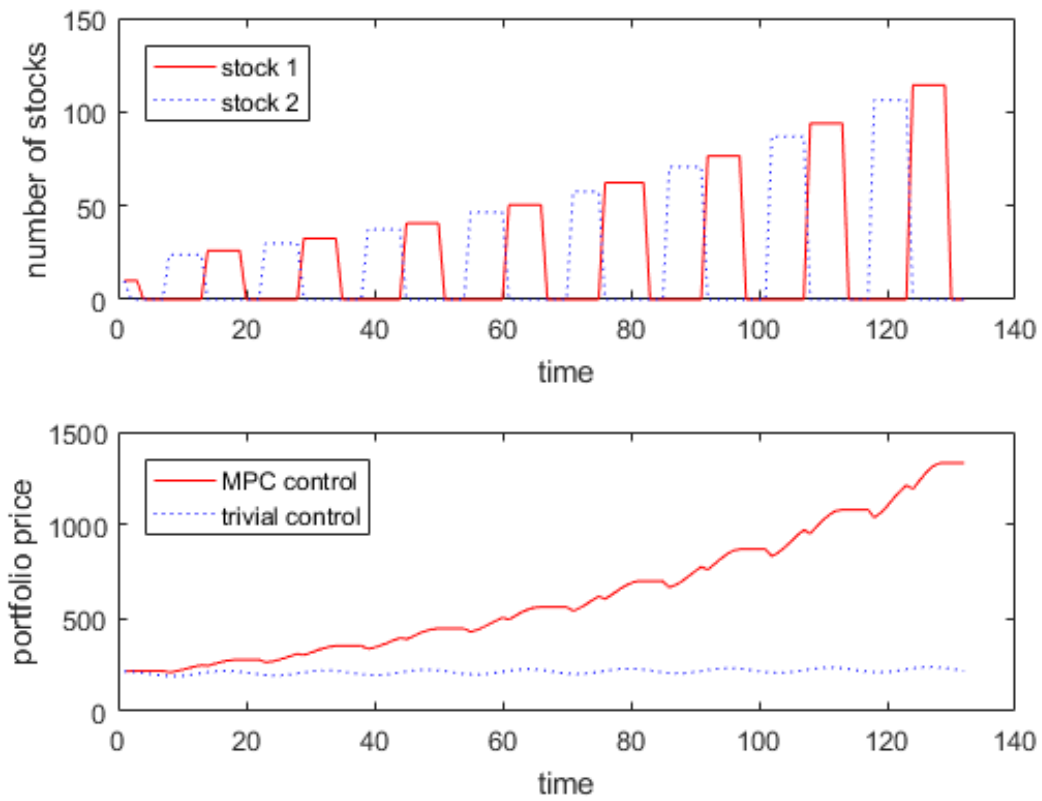
Аналогичные результаты получаем и для реальных данных (рисунок 2.6b по сравнению с рисунком 2.4).

## 2.5 Выводы

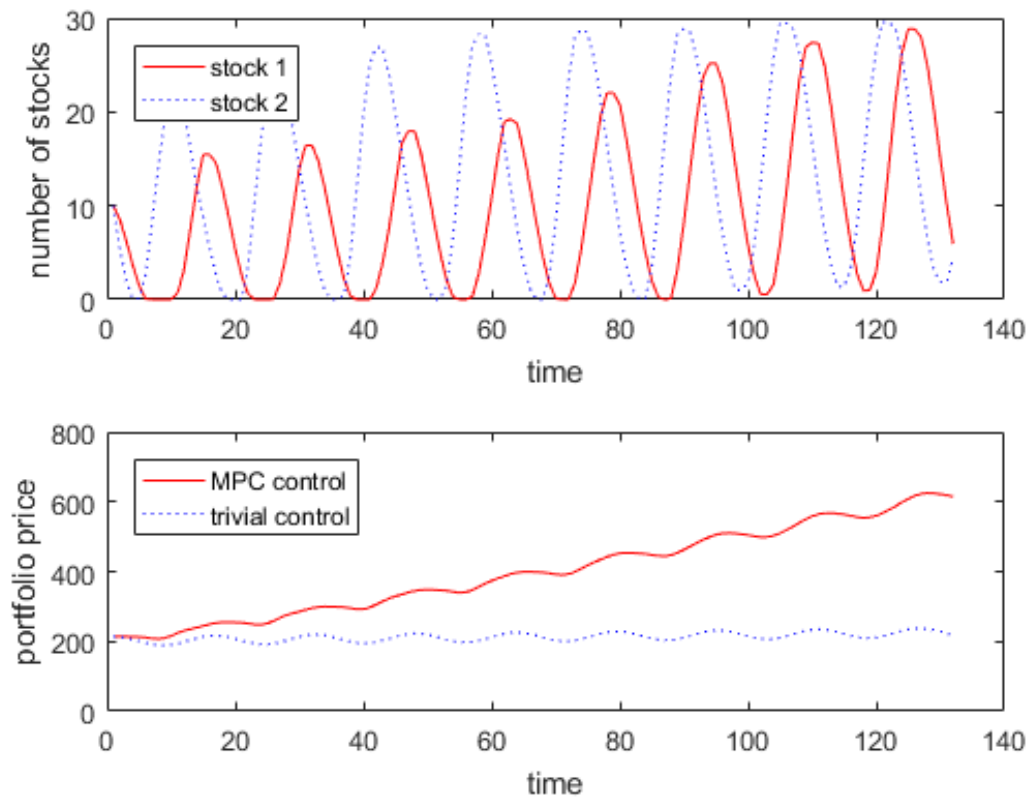
В данной главе рассмотрена детерминированная модель портфеля. При исследовании влияния регуляризации выявлено уменьшение доходности, но при этом и управление становится более гладким, это демонстрируется на рисунках 2.3 и 2.4. Добавление к регуляризации терминального множества еще сильнее сокращает прибыль, но так же и заметно уменьшает диапазон, в котором происходят изменения количества активов (рисунки 2.4 и 2.6b).

Доказана разрешимость задачи (2.12) – (2.13). Кроме того, для данной задачи доказана эффективность управления МРС.

В целом, результаты данной главы показывают, что МРС предоставляет различные способы для моделирования задачи формирования портфеля и при этом позволяет учитывать множество факторов, таких как разные курсы на покупку и продажу, нежелание вносить большие изменения в структуру портфеля и возможность быстро вернуться к исходным пропорциям. Кроме того, эксперименты показывают, что скорость построения управления достаточна для прикладного использования.

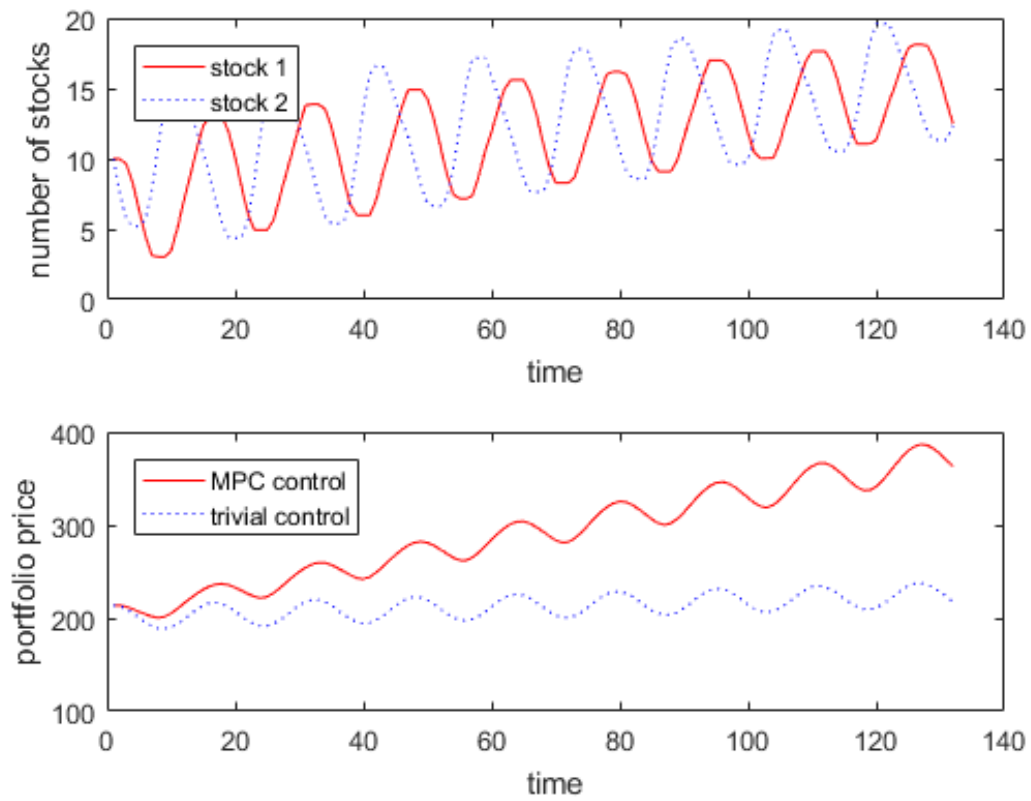


(a) Без регуляризации

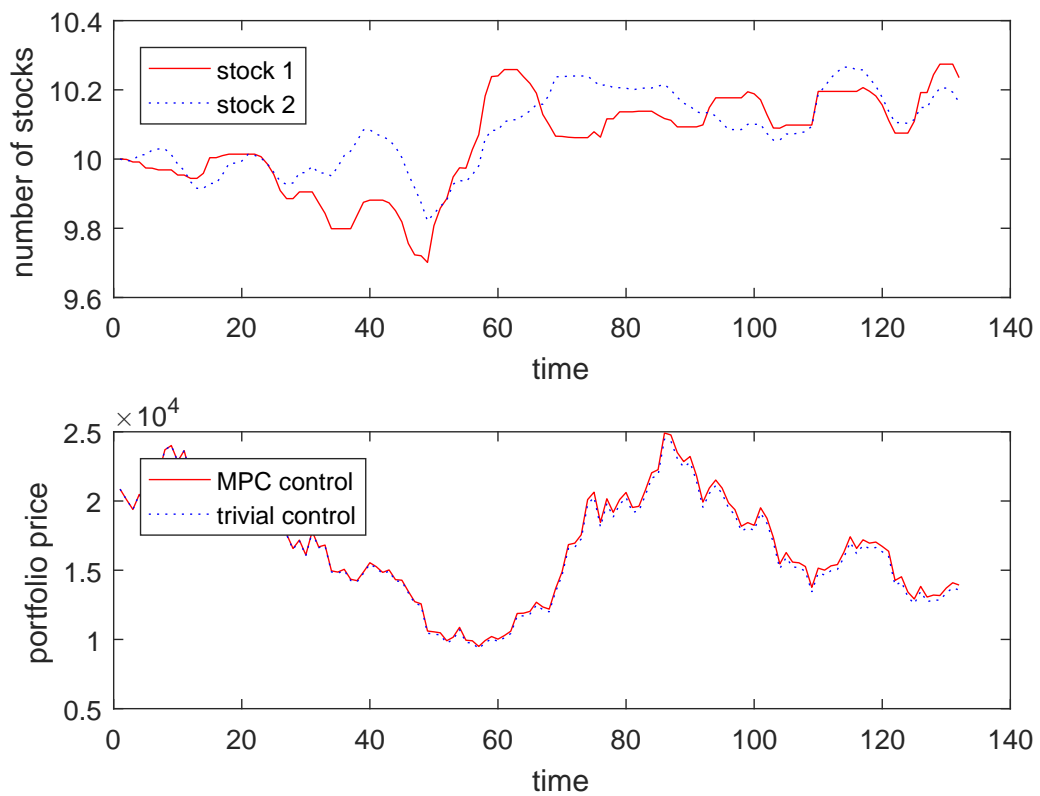


(b) С регуляризацией

Рис. 2.5: Детерминированная модель на сгенерированных данных



(a) Сгенерированные данные



(b) Реальные данные

Рис. 2.6: Модель с регуляризацией и терминальным множеством

## ГЛАВА 3

### МОДЕЛИ С ПРОГНОЗАМИ

В настоящей главе исследован случай, когда точно не известны будущие стоимости активов, и модель должна оперировать прогнозируемыми значениями на заданном горизонте планирования  $T$ .

#### 3.1 Предсказание функций стоимости

В общем случае, значения  $S(t)$  и  $B(t)$  в будущие моменты времени не известны. В настоящей работе будем прогнозировать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регрессионная модель [28], зависимости стоимости от времени. В этом пункте будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Линейная регрессия — метод восстановления зависимости между двумя переменными.

Пусть даны предыдущие наблюдения за стоимостями фиксированной бумаги  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  в моменты времени  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ .

Для заданного множества из  $m$  пар  $(t_i, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , значений свободной и зависимой переменной требуется построить зависимость. Назначена линейная модель

$$p_i = f(\mathbf{w}, t_i) + \varepsilon_i$$

с линейной функцией  $f$  и аддитивной случайной величиной  $\varepsilon$ . Переменные  $t$ ,  $p$  принимают значения на числовой прямой  $\mathbb{R}$ .

Определим модель зависимости как

$$p_i = w_1 + w_2 t_i + \varepsilon_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор параметров  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$  есть решение нормального уравнения

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор, состоящий из значений зависимой переменной:  $\mathbf{P} =$

$(p_1, \dots, p_m)$ . Столбцы матрицы  $A$  есть подстановки значений свободной переменной  $t_i \mapsto a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}.$$

Зависимая переменная восстанавливается по полученным весам и заданным значениям свободной переменной

$$p_i^* = w_1 + w_2 t_i,$$

иначе

$$\mathbf{P}^* = A\mathbf{w}.$$

Для оценки качества модели используется критерий суммы квадратов регрессионных остатков, SSE — Sum of Squared Errors.

$$SSE = \sum_{i=1}^m (p_i - p_i^*)^2 = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*)^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*).$$

### 3.1.1 Оценка предсказания функций стоимости

В данном пункте рассматривается вопрос о качестве найденных оценок [21]. Находится их смещение, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

Для нахождения математического ожидания и вариации ошибки будем использовать встроенные *Matlab* функции *var*, *mean*. Данные функции вычисляют следующие значения:

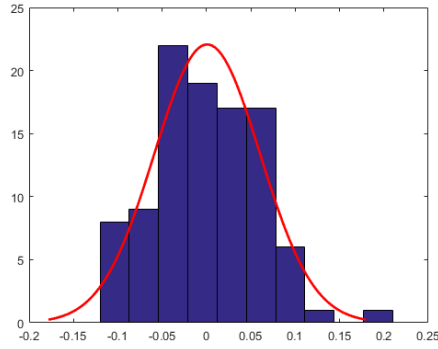
$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i,$$

$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N |A_i - \mu|^2.$$

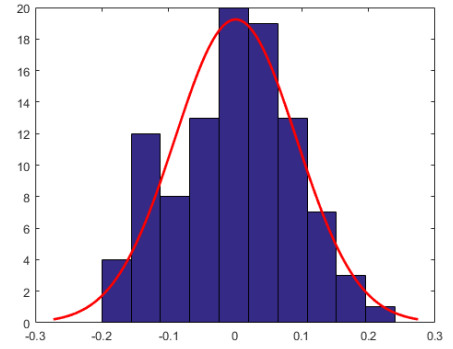
В процессе прогнозирования вычисляется ошибка следующим образом

$$e_i = \frac{p_i - p_i^*}{p_i}.$$

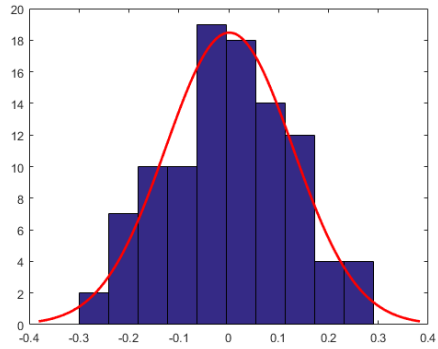




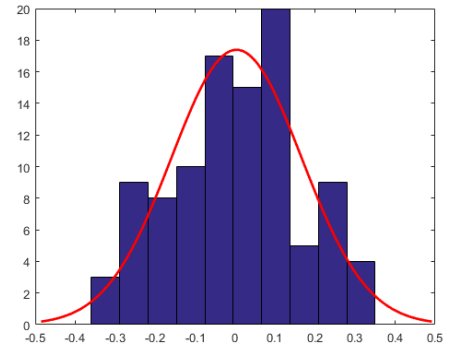
(a) На 1 шаг



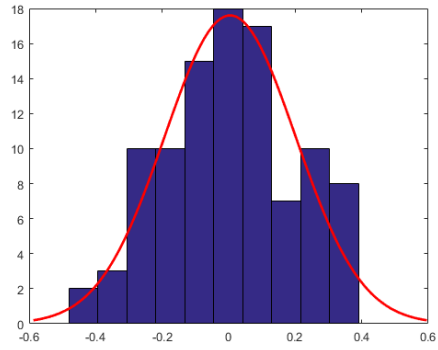
(b) На 2 шага



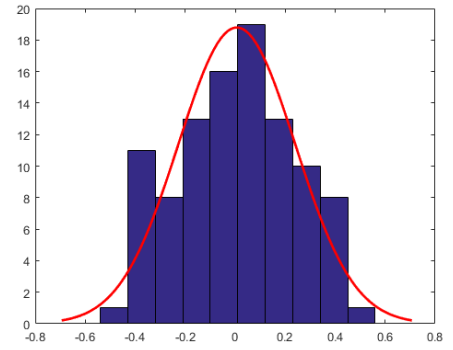
(c) На 3 шага



(d) На 4 шага



(e) На 5 шагов



(f) На 6 шагов

Рис. 3.1: Распределение ошибок предсказания

Данная ошибка была подсчитана для прогнозирования стоимости криптовалют от одного до шести шагов вперед. На рисунке 3.1 изображены распределения ошибок прогнозирования будущих стоимостей продаж активов.

В таблице 3.1 приведены численные значения математического ожидания и вариации для предсказаний.

Дисперсия  $D[e(t)]$  будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости этапа.

Так как значения математического ожидания, представленные в таблице 3.1, близки к нулю, то будем считать, что полученные оценки являются несмещенными.

t	mean	var
1	0.0007	0.0036
2	0.0007	0.0083
3	0.0012	0.0162
4	0.0032	0.0265
5	0.0043	0.0389
6	0.0064	0.0545

Таблица 3.1: Ошибки прогнозирования

## 3.2 Модели с регуляризацией

Покажем, что для недетерминированного случая нельзя просто использовать предсказания без использования регуляризации.

На рисунке 3.2 представлен такой случай, при этом на нижнем графике видно, что стоимость портфеля при тривиальном управлении будет выше, чем при управлении MPC.

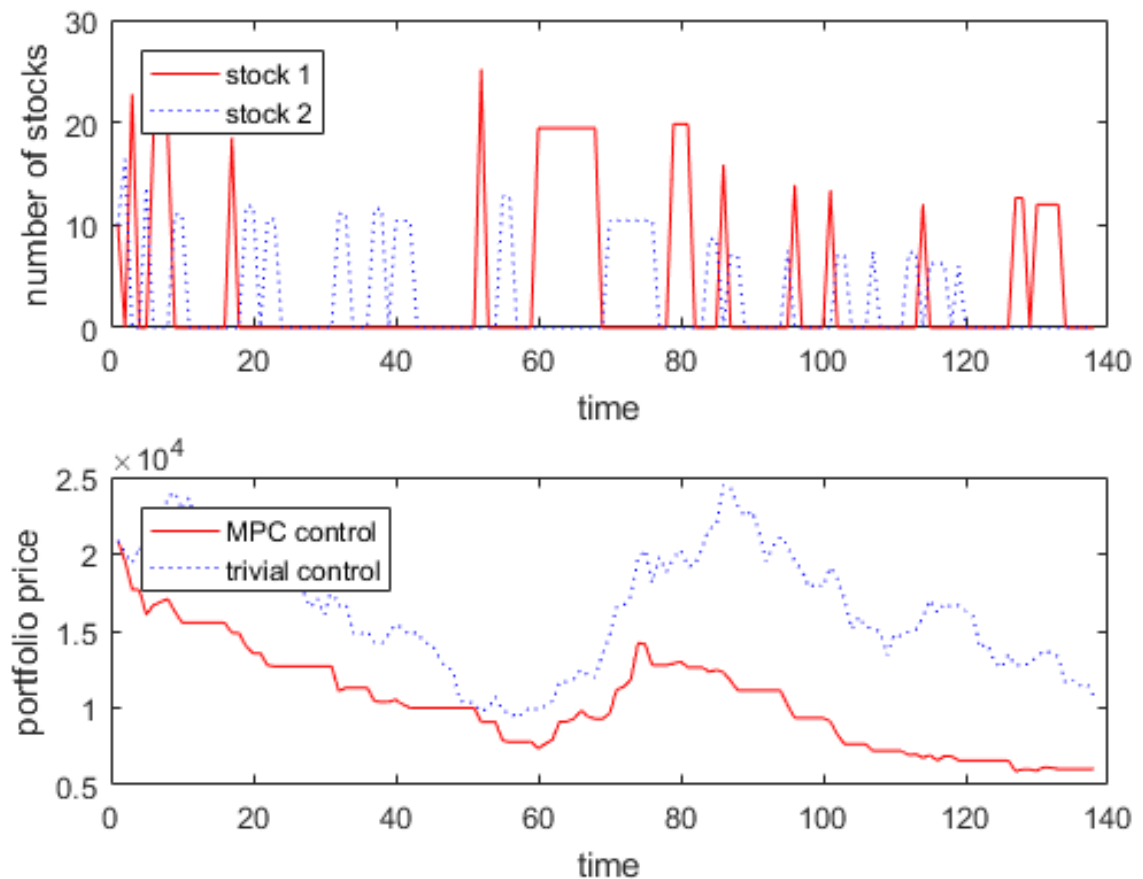


Рис. 3.2: Недетерминированная модель без регуляризацией

Представленное на рисунке 3.2 снижение стоимости портфеля связано с тем, что управление строится на основе прогнозируемых данных, и при этом одинаково учитывается весь горизонт планирования. Введем способ регуляризации, предложенный в статье [11] который позволит модели учитывать вероятностную природу прогнозируемых данных.

Введем функцию стоимости этапа, которая будет учитывать ошибки прогнозирования.

В том случае, когда точно не известны значения  $s_i(t)$  и  $b_i(t)$ , функция перехода для  $x_0(t)$ , в соответствии с (2.9) имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \quad (3.1)$$

где

$$B(t) = (I + E_1(t))\bar{B}(t).$$

В представленной формуле  $\bar{B}(t)$  — прогнозируемое значение,  $I$  — единичная матрица,  $E_1(t)$  — случайная диагональная матрица ошибок, при этом  $M[E_1(t)] = 0$  (пункт 3.1.1). Аналогично

$$S(t) = \bar{S}(t)(1 + E_2(t)).$$

Поскольку изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что  $E_1(t) \equiv E_2(t) = E(t)$ .

Сейчас перепишем (3.1) с учетом вида функций  $B$  и  $S$ :

$$\begin{aligned} x_0(t+1) = x_0(t) - \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) - \\ - (E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оценим для величины  $x_0(t+1)$  математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t). \quad (3.3)$$

Будем считать, что величины  $x_0(t)$  и  $W(t)$  независимы, кроме того, стоимости активов не коррелируют

$$\begin{aligned} D[x_0(t+1)] &= D[x_0(t) - (E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t)] = \\ &= D[x_0(t)] + D[(E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t)] \leq \\ &\leq D[x_0(t)] + (\bar{B}(t)^T D[E(t)] U^+(t))^2 + (\bar{S}(t)^T D[E(t)] U^-(t))^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Сейчас внесем учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будет

служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания. Введем функцию стоимости этапа следующим образом:

$$L_t(U^+(t), U^-(t)) = \alpha \left( (\bar{B}(t)^T D[E(t)] U^+(t))^2 + (\bar{S}(t)^T D[E(t)] U^-(t))^2 \right). \quad (3.5)$$

Оценки на значения  $D[E(t)]$  зависят от способа предсказания векторов  $\hat{S}(t)$  и  $\hat{B}(t)$ .

Теперь задача MPC имеет вид:

$$\begin{aligned} \max_{U^+, U^-} & - \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(U^+(t+\tau), U^-(t+\tau)) + \\ & + \bar{x}_0(t+T) + \hat{S}(t_0+T)^T \bar{X}(t+T), \\ \bar{X}(\tau+1) &= \bar{X}(\tau) + U^+(\tau) - U^-(\tau), \\ \bar{x}_0(\tau+1) &= \bar{x}_0(\tau) - \hat{B}(\tau)^T \bar{U}^+(\tau) + \hat{S}(\tau)^T \bar{U}^-(\tau), \\ \bar{X}(t) &= X(t), \\ \bar{x}_0(t) &= x_0(t), \\ \bar{X}(\tau) &\geq 0, \\ \bar{x}_0(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t+T}, \\ \bar{U}^+(\tau) &\geq 0, \\ \bar{U}^-(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t+T-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Теорема 3.1** Задача (3.6) разрешима.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.  $\square$

Результат применения представлен на рисунке 3.3. Тут видим, что применение управления MPC уже лучше, нежели тривиальное управление.

Стоит отметить, что в части работ, посвященных управлению портфелем, например в [14], делается допущение, что стоимость покупки и продажи совпадают. Это допущение является очень сильным и приводит к тому, что в отличии ситуации на рисунке (3.2) при равных стоимостях покупки и продажи получаем ситуацию как на рисунке (3.4), где модель не нуждается ни в регуляризации, ни в терминальном множестве.

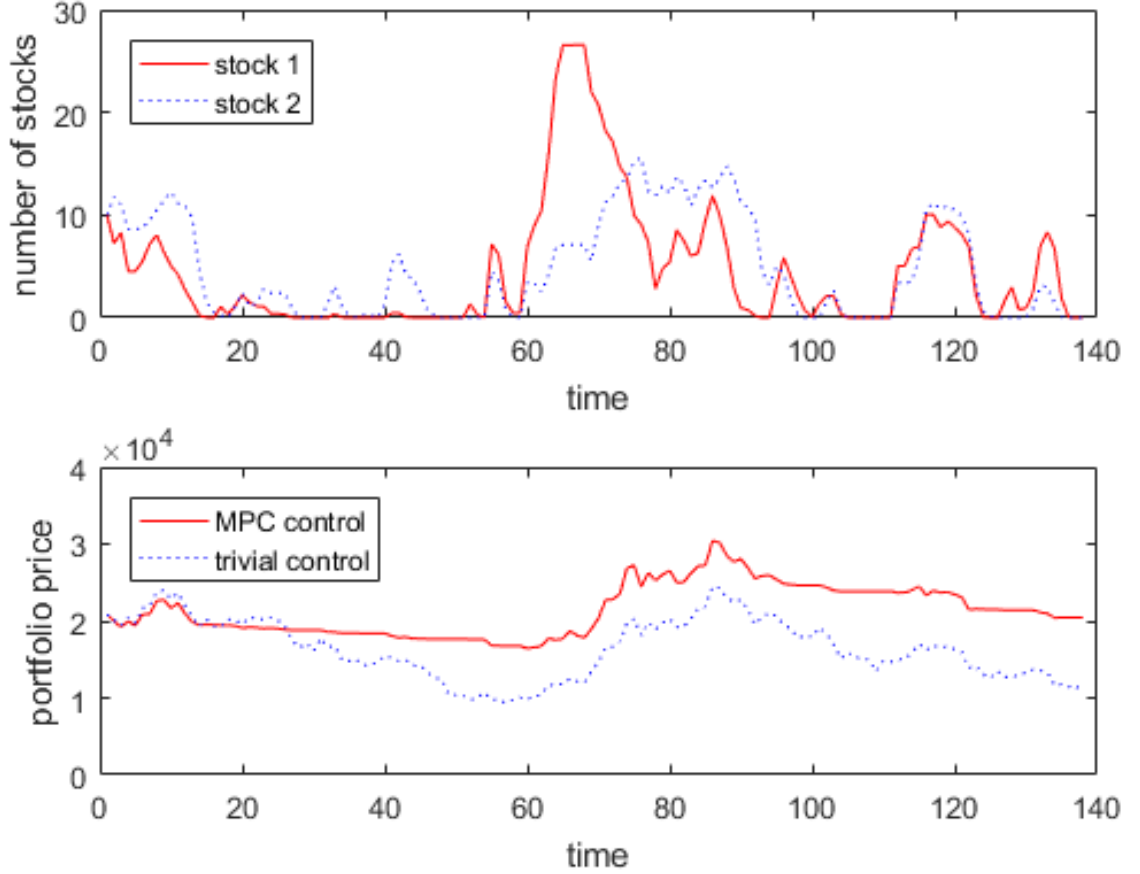


Рис. 3.3: Модель с регуляризацией

### 3.3 Модель с терминальным условием

В данном пункте рассмотрим дополнительные ограничения для модели, введем терминальное множество и рассмотрим задачу квазибесконечного MPC.

Выберем  $\epsilon \in [0, 1]$ , и модифицируем терминальное множество из модели (2.12)-(2.13) следующим образом:

$$\left| \frac{\bar{x}_k(t+T)}{\sum_{i=0}^N \bar{x}_i(t+T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)} \right| \leq \epsilon, \quad k = \overline{0, N}.$$

Идея данного ограничения возникает из того, что инвестор может хотеть не сильно отдаляться, от изначальных пропорций, но при этом все еще увеличить свой доход относительно тривиального управления.

Задача MPC формулируется следующим образом:

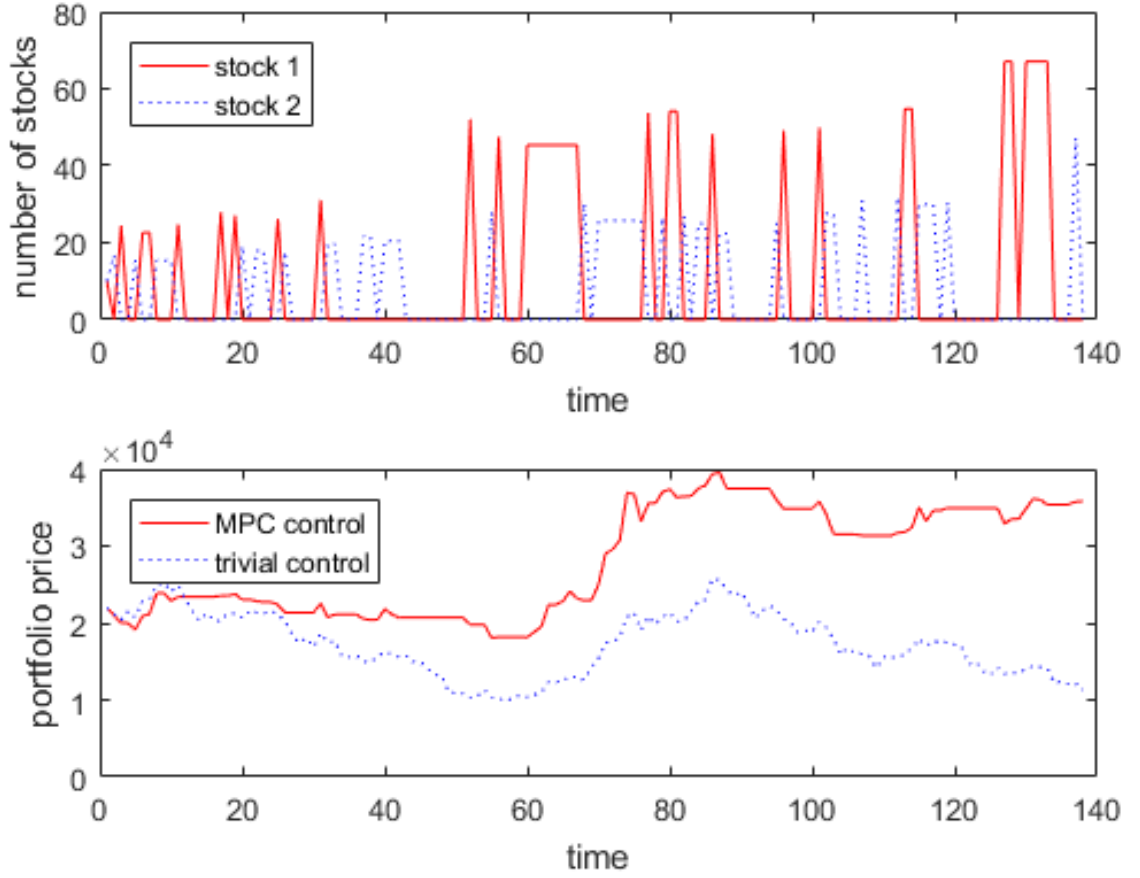


Рис. 3.4: Недетерминированная модель без регуляризации при равных стоимостях продажи и покупки

$$\begin{aligned}
 \max_{U^+, U^-} & - \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(U^+(t+\tau), U^-(t+\tau)) + \\
 & + \bar{x}_0(t+T) + \hat{S}(t_0+T)^T \bar{X}(t+T),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
\bar{X}(\tau + 1) &= \bar{X}(\tau) + U^+(\tau) - U^-(\tau), \\
\bar{x}_0(\tau + 1) &= \bar{x}_0(\tau) - \hat{B}(\tau)^T \bar{U}^+(\tau) + \hat{S}(\tau)^T \bar{U}^-(\tau), \\
\bar{X}(t) &= X(t), \\
\bar{x}_0(t) &= x_0(t), \\
\bar{X}(\tau) &\geq 0, \\
\bar{x}_0(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t + T}, \\
\bar{U}^+(\tau) &\geq 0, \\
\bar{U}^-(\tau) &\geq 0, \quad \tau = \overline{t, t + T - 1}, \\
\left| \frac{\bar{x}_k(t + T)}{\sum_{i=0}^N \bar{x}_i(t + T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)} \right| &\leq \epsilon, \quad k = \overline{0, N}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

**Теорема 3.2** Задача (3.7) - (3.8) разрешима.

**Доказательство** Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.  $\square$

На рисунке 3.5 представлен эксперимент с  $\epsilon = 0.35$ . Как видно, пропорции между количеством активов первого и второго типа достаточно близко к изначальным на протяжении всего времени.

### 3.4 Выводы

В данной главе рассмотрено формирование портфеля при использовании прогнозированных цен. Исследованы числовые характеристики предложенного способа прогнозирования стоимостей.

В ходе экспериментов показано, что приравнивание цены покупки и продажи является довольно существенным допущением и необходимо ставить эксперименты с разными стоимостями на покупку и продажу. Кроме того, использование модели без регуляризации (2.8) - (2.9) тоже неэффективно и может вести себя даже хуже, чем тривиальное управление.

Предложен модифицирован способ регуляризации с учетом полученных оценок для прогнозируемых стоимостей. Так же в задаче (2.13) терминальное множество, модифицировано в терминальное условие (3.8), что упрощает ее численное решение. Для всех модификаций составлены и рассмотрены задачи МРС, проведены численные эксперименты. Эти эксперименты показывают,

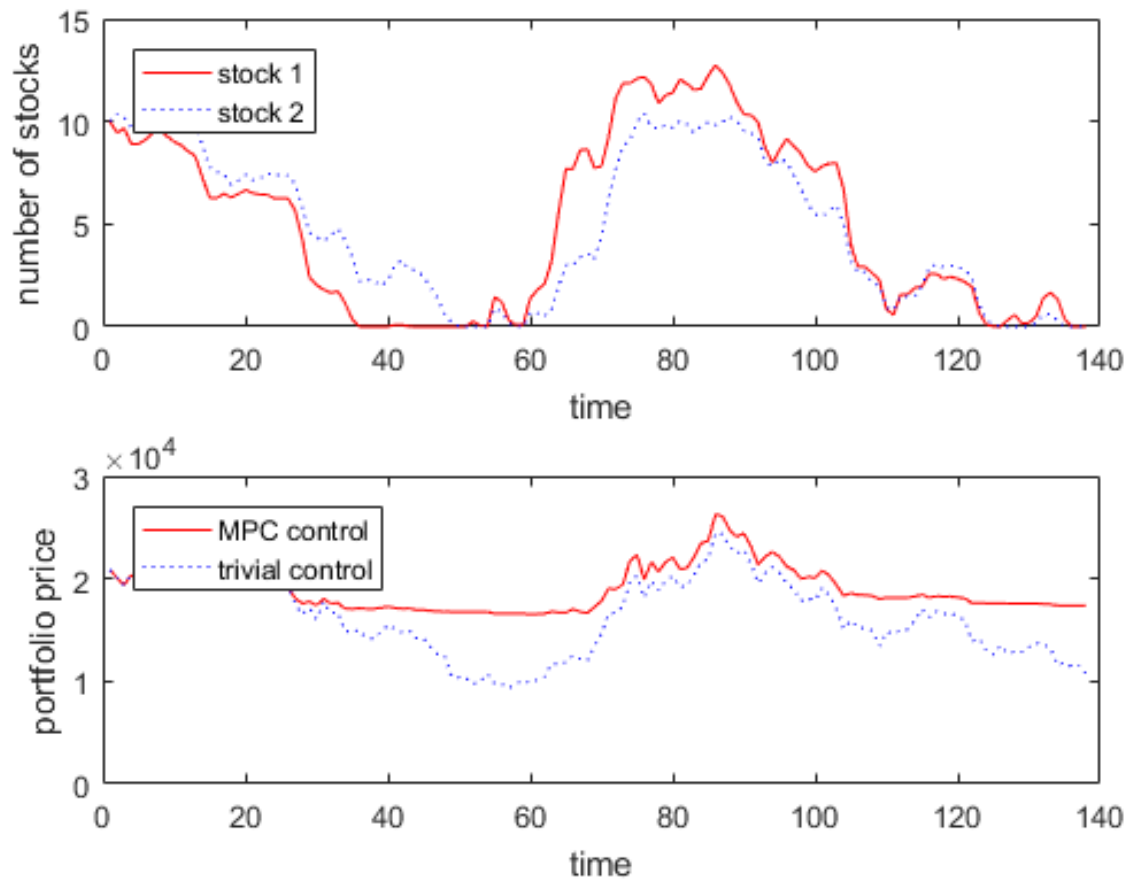


Рис. 3.5: Недетерминированная модель с регуляризацией и терминальным множеством

что полученная модель дает больше прибыли, нежели тривиальное управление.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены модели портфеля с детерминированными и прогнозируемыми стоимостями активов. Исследовано влияние регуляризации и терминальных условий на управление и соответствующую доходность.

Доказана разрешимость задачи (2.12) – (2.13). Кроме того, для данной задачи доказана эффективность управления МРС.

В работе показано, что МРС предоставляет различные способы для моделирования задачи формирования портфеля и при этом позволяет учитывать множество факторов, таких как разные курсы на покупку и продажу, нежелание вносить большие изменения в структуру портфеля и возможность быстро вернуться к исходным пропорциям. Кроме того, эксперименты показывают, что скорость построения управления достаточна для прикладного использования.

При использовании прогнозируемых стоимостей, предложен модифицирован способ регуляризации с учетом полученных оценок для прогнозируемых цен. Для всех модификаций составлены и рассмотрены задачи МРС, проведены численные эксперименты.

Новизной данной работы является подход к использованию прогнозируемых стоимостей покупки и продажи бумаг. При этом подходе сама модель допускает разные цены на покупку и продажу, кроме того, выделение прогнозирования в отдельную подзадачу позволило составить универсальную модель МРС, не зависящую от способа прогнозирования. Таким образом, сейчас на улучшение качества управления можно влиять при помощи построения более точных оценок стоимостей бумаг.

В дальнейших исследованиях планируется попробовать заменить модель прогнозирования на более совершенную, например LSTM нейронную сеть. Исследовать, какие дополнительные ограничения необходимо наложить на функции  $S(t)$  и  $B(t)$  чтоб получить доказуемо лучшее тривиального управление.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Alenmyr, S. Model Predictive Control for Stock Portfolio Selection / S. Alenmyr, A. Ogren // MSc Theses. – 2010.
- 2 Boyd, S. Vandenberghe L. Convex optimization. – Cambridge university press, 2004.
- 3 Chen, H. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability / H. Chen, F. Allgöwer // Automatica – 1998. – Vol. 34, no. 10. – P. 1205–1217.
- 4 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.
- 5 Dombrovskii, V. Dynamic Investment Portfolio Optimization under Constraints in the Financial Market with Regime Switching using Model Predictive Control / V. Dombrovskii, T. Obyedko // arXiv preprint arXiv:1410.1136. – 2014.
- 6 Fitria, I. Investment Management Using Portfolio Optimization with Stock Price Forecasting / I. Fitria, E. Apriliani, E.R.M. Putri // Applied Mathematical Sciences. – 2016. P. 2405-2413.
- 7 Grüne, L. Analysis and design of unconstrained nonlinear MPC schemes for finite and infinite dimensional systems / L. Grune // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2009. – Vol. 48, no. 2. – P. 1206–1228.
- 8 Grüne, L. Nonlinear model predictive control / L. Grüne, J. Pannek – Springer London, 2011.
- 9 Fontes, F.A.C.C. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers / F.A.C.C. Fontes // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – No. 2. – P. 127–143.
- 10 Herzog, F. Model predictive control for portfolio selection / F. Herzog [et. al] // American Control Conference, 2006. – IEEE, – 2006. – P. 8.
- 11 Hewing, L. Cautious model predictive control using Gaussian process regression / L. Hewing, M. N. Zeilinger // arXiv preprint arXiv:1705.10702. – 2017.
- 12 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.

- 13 Khalil, H.K. Nonlinear systems / H.K. Khalil – New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- 14 Marigo, A. Model predictive control for portfolio optimization / A. Marigo, B. Piccoli // Proc. of 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control. – 2004.
- 15 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.
- 16 Nystrup, P. Multi-period portfolio selection with drawdown control / P. Nystrup [et al.] // Annals of Operations Research. – 2017. – P. 1–27.
- 17 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 18 Yamada, Y. Model Predictive Control for Optimal Pairs Trading Portfolio with Gross Exposure and Transaction Cost Constraints / Y. Yamada, J.A. Primbs // Asia-Pacific Financial Markets. – 2018. P. 1-21.
- 19 Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – М.: Высш. шк., 2003.
- 20 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
- 21 Боровков, А.А. Числовые характеристики случайных величин. 5-е изд. / А.А. Боровков // М.: Либроком. – 2009. – Глава 4.
- 22 Васильев, Ф.П. Методы оптимизации
- 23 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.
- 24 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
- 25 Ли, Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус – М.: Наука, 1972.
- 26 Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения. 2-е изд., стереотип / И.Г. Малкин // М.: Эдиториал УРСС. – 2004.
- 27 Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] – М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
- 28 Стрижов, В.В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей / В.В. Стрижов – М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2008.