ГЛАВА 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ MPC

MPC (Model Predictive control), или управление по прогнозирующей модели [10, 12, 17] — современный подход к решению задач теории управления, основанный на последовательном, в каждый момент времени, решении прогнозирующих задач оптимального управления (predictive optimal control problem) с конечным горизонтом управления, сформулированных для математической модели управляемого объекта, начальное условие которой совпадает с измеренным состоянием объекта. Значение оптимального программного управления прогнозирующей задачи на левом конце промежутка управления используется для управления объектом в текущий момент времени и до тех пор, пока не будет получено и обработано следующее измерение состояния. Управление, которое подается на объект в описанном процессе, представляет собой обратную связь (т.к. оно зависит от измеряемых состояний), свойства которой зависят от конкретного вида прогнозирующей задачи оптимального управления и целей управления объектом (например, стабилизация, регулирование, слежение и др.).

В настоящей главе приводятся основные сведения из теории MPC в применении к классической задаче стабилизации нелинейной системы, обсуждаются основные подходы к построению прогнозирующих задач оптимального управления и свойства результирующих обратных связей.

1.1 Задача стабилизации и базовый алгоритм MPC

Рассматривается объект управления, поведение которого при $t \geq 0$ описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта в момент времени t, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^r$ — вектор управляющего воздействия в момент t, $x_0 \in X$ — заданное начальное состояние.

Относительно функции $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ предполагается, что она обеспечивает существование и единственность решения уравнения (1.1) при любом допустимом управляющем воздействии $u(t) \in U$, $t \geq 0$. Условия, которым должна удовлетворять функция f для выполнения сделанного предположения, можно найти в [20]). Ниже будут сформулированы дополнительные требования, накладываемые на функцию f, связанные с конкретными задачами оптимального управления.

Множества X и U задают множества допустимых значений состояния и управления объекта. Таким образом, при управлении должны учитываться жесткие ограничения на траекторию фазовой и управляющей переменных

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \ t \geq 0. \tag{1.2}$$

Будем считать, что начало координат $x = 0$ является точкой равновесия (1.1) при тривиальном управлении $u = 0$, т.е. выполняется $f(0, 0) = 0$. Естественно, при этом должно выполняться условие $(0, 0) \in X \times U$.

Задача стабилизации состоит в нахождении управления типа обратной связи $u(x)$, $x \in X$, такого, что замкнутая система $\dot{x} = f(x, u(x))$, является асимптотический устойчивой [24]. Решение задачи стабилизации может быть найдено из задачи оптимального управления с бесконечным полуинтервалом управления

$$P(x_0): \qquad \min_{u(\cdot)} J_\infty(x_0, u) \tag{1.3}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0,$$

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \ t \in [0, +\infty),$$

где критерий качества имеет вид

$$J_\infty(x_0, u) = \int_0^{+\infty} L(x(t), u(t))dt,$$

функция $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ — заданная функция, которая носит название стоимости этапа. Если $L(0, 0) = 0$, $L(x, u) > 0$, для $(x, u) \neq (0, 0)$, то целью управления в задаче $P(x_0)$ является перевод системы (1.1) в начало координат.

Пусть $u_\infty^*(t; x_0)$ — оптимальное программное управление [25] в задаче $P(x_0)$, $J_\infty^*(x_0) < \infty$ — оптимальное значение задачи $P(x_0)$. При определенных требованиях, предъявляемых к функциям f и L, система (1.1), замкнутая обратной связью $u_\infty^*(0; x)$, $x \in X$, т.е. система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_\infty^0(0; x(t))), \quad t \geq 0,$$

является асимптотически устойчивой [24].

Обратная связь $u^*_\infty(0; x)$, $x \in X$, теоретически может быть построена, если решать задачу $P(x(t))$ в каждый текущий момент времени t для текущего состояния $x(t)$ [23]. На практике, однако, реализация такого подхода в общем случае невозможна: основная причина состоит в высокой трудоемкости решения задач с бесконечным полуинтервалом.

На практике применяются подходы, объединенные общим названием MPC (или NMPC, если речь идет о нелинейных задачах), основная идея которых состоит в том, чтобы аппроксимировать задачу $P(x(t))$ задачей $\bar{P}(x(t))$ с конечным горизонтом T, решение которой может быть получено за разумное время [17].

Как правило, новая задача $\bar{P}(x(t))$ будет содержать, помимо уравнений динамики (1.1) и ограничений (1.2) дополнительные условия, накладываемые на правом конце траектории [10]. Эти условия различны для различных схем MPC и необходимы для обеспечения требуемых свойств замкнутой системы, например, асимптотической устойчивости.

Задачу $\bar{P}(x_0)$ будем называть *прогнозирующей задачей оптимального управления* или *задачей MPC*.

Базовый алгоритм MPC состоит в следующем:
Для каждого $t = 0, \delta, 2\delta, \dots$

1. Измерить текущее состояние $x(t) \in X$ объекта.

2. Решить задачу $\bar{P}(x(t))$, получить ее оптимальное программное управление
$$\bar{u}^*(\tau; t), \quad \tau \in [t, t + T].$$

3. Подать на объект управляющее воздействие
$$u_{MPC}(\tau) = \bar{u}^*(\tau; t), \quad \tau \in [t, t + \delta[,$$
начиная с момента времени t до получения следующего измерения в момент $t + \delta$.

Ниже обсуждаются три подхода к построению MPC задачи $\bar{P}(x(t))$:

1. Zero terminal constraint MPC, в котором прогнозирующая задача задача оптимального управления содержит терминальные ограничения равенства — условие попадания траектории в начало координат в терминальный момент времени [14];

2. Quiasi-Infinite MPC — квазибесконечный MPC, в котором задача $P(x(t))$ на бесконечном полуинтервале аппроксимируется на основе применения линейной обратной связи после терминального момента времени [9].

3. Unconstrained MPC — безусловный MPC, в котором в терминальный момент времени не накладываются никакие дополнительные условия, что упрощает численное решение задачи MPC [11].

Отметим, что в силу различных факторов, таких как неточности математического моделирования, неточности реализации обратной связи, возмущения, и др., управления и траектории реального управляемого объекта и прогнозирующей задачи оптимального управления не совпадают.

Поэтому, чтобы отличать переменные объекта и переменные модели, последние будем снабжать "чертой" над переменной. Таким образом, $x(t)$, $u(t)$, $t \geq 0$, — измеренные состояния и управляющие воздействия объекта (1.1), $\bar{x}(\tau;t)$, $\bar{u}(\tau;t)$, $\tau \in [t, t+T]$, — переменные оптимизации в задаче MPC $\bar{P}(x(t))$, определенные на конечном промежутке прогнозирования $[t, t+T]$ длины T, начиная с текущего момента t. Второй аргумент t здесь подчеркивает, что прогноз делается в текущий момент t.

Отметим, что несмотря на то, что ниже результаты представлены для непрерывных систем, существуют их полные аналоги и для дискретных систем.

1.2 Задача MPC с терминальными ограничениями-равенствами

Идеи MPC применялись на практике еще в 1970-х, однако первый подход, гарантирующий устойчивость замкнутой системы был предложен только в 1988 в работе [14]. В этом подходе прогнозирующая задача оптимального управления содержала ограничение-равенство для правого конца траектории, который требовалось привести в положение равновесия, в данном случае — в начало координат.

Тогда задача MPC $\bar{P}(x(t))$ для измеренного состояния объекта $x(t)$ в момент t формулируется следующим образом:

$$J^*(x(t)) = \min_{\bar{u}(\cdot;t)} J(x(t), \bar{u}(\cdot;t)), \tag{1.4}$$

при условиях

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(t;t) = x(t),$$
$$\bar{u}(\tau;t) \in U, \quad \bar{x}(\tau;t) \in X, \quad \tau \in [t, t+T],$$
$$\bar{x}(t+T;t) = 0,$$

где

$$J(x(t), \bar{u}(\cdot;t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau;t), \bar{u}(\tau;t))d\tau,$$

$L(\bar{x}(\tau;t), \bar{u}(\tau;t))$ — функция стоимости этапа, $J(x(t), \bar{u}(\cdot;t))$ — аккумулированное значение стоимости этапов на всем горизонте прогнозирования T.

Заметим, что в задаче (1.4) предполагается, что математическая модель точно соответствует динамике реального объекта управления. Такие схемы MPC носят название номинальных (nominal MPC) [10].

Оптимальное программное управление задачи (1.4) обозначим

$$\bar{u}^*(\cdot;t) = \arg\min_{\bar{u}(\cdot;t)} J(x(t), \bar{u}(\cdot;t)).$$

Таким образом, алгоритм MPC из [14] состоит в следующем

1. В момент времени t измерить текущее состояние $x(t) \in X$ объекта.

2. Решить задачу MPC (1.4).

3. Применить $u_{MPC}(\tau) = \bar{u}^*(\tau, t)$, $\tau \in [t, t+\delta)$ для управления объектом на временном промежутке длины δ.

4. Положить $t := t + \delta$ и вернуться к шагу 1.

Для того, чтобы гарантировать асимптотическую устойчивость системы (1.1), необходимо сделать ряд предположений о правой части дифференциального уравнения (1.1), ограничениях задачи (1.2), функции стоимости этапа L, и существовании решения задачи (1.4).

Предположение 1.1 Пусть объект управления, описываемый (1.1) – (1.2), удовлетворяет следующим условиям:

i. Функция $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ дважды непрерывно дифференцируема.

ii. Множество U — компакт, т.е. ограниченное и замкнутое множество.

iii. Множество X — связное и замкнутое множество.

iv. Точка равновесия — начало координат $(0,0)$ — является внутренней точкой множества $X \times U$: $(0,0) \in \mathrm{int}(X \times U)$.

Предположение 1.2 Относительно параметров критерия качества задачи (1.4) предположим, что функция $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ непрерывна и выполняются следующие условия:

i. $L(0,0) = 0$, $L(x,u) > 0$, $(x,u) \neq (0,0)$.

ii. Функция $J^*(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

При сделанных предположениях, задача MPC (1.4) разрешима (существует оптимальное программное управление) в момент времени t, если в ней существует хотя бы одно допустимое управление $\bar{u}(\cdot;t)$, т.е. такое управление, которое вместе с порождаемой им траекторией удовлетворяет всем ограничениям задачи (1.4).

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество всех точек x, для которых разрешима задача (1.4) в начальный момент времени $t = 0$.

Теорема 1.1 Пусть выполняются предположения 1.1, 1.2 и имеет место начальная разрешимость задачи (1.4), т.е. $x_0 \in D$. Тогда

1. Задача MPC (1.4) рекуррентно разрешима, т.е. для любого момента $t > 0$ существует оптимальное программное управление $\bar{u}^*(\cdot;t)$.

2. Замкнутая система является асимптотически устойчивой с областью притяжения D.

Приведем идею доказательства теоремы 1.1, поскольку здесь используется универсальный подход, который будет использоваться далее для целей магистерской диссертации.

Доказательство

1. Рекуррентная разрешимость задачи (1.4) доказывается по индукции.

Задача (1.4) разрешима в момент $t = 0$ по предположению индукции.

Допустим, что (1.4) разрешима в момент t. Для следующего момента $t + \delta$ рассмотрим управление $\bar{u}(\tau; t+\delta)$, $\tau \in [t+\delta, t+\delta+T]$, построенное следующим образом:

$$\bar{u}(\tau; t+\delta) = \begin{cases} \bar{u}^*(\tau;t), & \tau \in [t+\delta, t+T], \\ 0, & \tau \in [t+T, t+\delta+T], \end{cases} \tag{1.5}$$

Покажем, что это управление является допустимым в задаче $P(x(t+\delta))$ для точки $x(t+\delta) = \bar{x}(t+\delta;t)$. Во-первых, $\bar{u}^*(\tau;t)$ допустимо на промежутке $\tau \in$

$[t+\delta, t+T]$, при этом $x(t+T; t+\delta) = 0$. Во-вторых, в силу $f(0,0) = 0$, имеем, что применение тривиального управления на промежутке $[t+T, t+\delta+T]$ даст $x(\tau; t+\delta) \equiv 0$, $\tau \in [t+T, t+\delta+T]$, что влечет выполнение терминального ограничения $P(x(t+\delta))$ в задаче $P(x(t+\delta))$. Существование допустимого управления здесь равносильно существованию оптимального.

2. Доказательство асимптотической устойчивости замкнутой системы основано на идее использования функции $J^*(x(t))$ в качестве функции Ляпунова [24].

Согласно прямому методу Ляпунова [18], если выполняются следующие условия для функции Ляпунова $V : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto V(t, x)$:

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), \quad t \geq 0, \ x \in D,$$

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad t \geq 0, \ x \in D,$$

где $W_1, W_2 : D \to \mathbb{R}$ непрерывные и положительно определенные, то положение равновесия $x = 0$ является равномерно устойчивым с областью притяжения D.

Если далее

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x), \quad t \geq 0, \ x \in D,$$

где $W_3 : D \to \mathbb{R}$ — непрерывная и положительно определенная, то положение равновесия является равномерно асимптотически устойчивым в D.

Вычислим значение критерия качества задачи $P(x(t+\delta))$ на допустимом управлении (1.5):

$$J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta)) = \int_{t+\delta}^{t+\delta+T} L(\bar{x}(\tau; t+\delta), \bar{u}(\tau; t+\delta)) d\tau =$$

$$= \int_{t+\delta}^{t+T} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau + \int_{t+T}^{t+\delta+T} L(0, 0) d\tau.$$

Поскольку

$$J^*(x(t)) = \int_{t}^{t+T} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau,$$

то далее можем записать

$$J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot; t+\delta)) = J^*(x(t)) - \int_{t}^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau.$$

Поскольку на оптимальном программном управлении значение критерия качества будет не хуже, чем на допустимом (1.5), то верно неравенство

$J^*(x(t+\delta)) \leq J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot;t+\delta))$, а значит

$$J^*(x(t+\delta)) \leq J(x(t+\delta), \bar{u}(\cdot;t+\delta)) \leq J^*(x(t)) - \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau;t), \bar{u}^*(\tau;t))d\tau.$$

по индукции мы получаем следующее

$$J^*(x(\infty)) \leq J^*(x(0)) - \int_0^{\infty} L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau))d\tau,$$

где $x_{MPC}(t)$, $t \geq 0$, — траектория замкнутой системы.

Дальнейший анализ основан на лемме Барбалата, которая является фундаментальным результатом асимптотического анализа решений дифференциальных уравнений и одним из базовых инструментов теории управления. Лемма связывает сходимость интеграла со сходимостью его подынтегральной функции:

Лемма 1.1 (Барбалат) *Если функция $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ равномерно непрерывна, то выполняется следующее*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \phi(\tau)d\tau < \infty \quad \Rightarrow \quad \phi(t) \to 0,\ t \to \infty.$$

Из предположения 1.2 следует, что $J^*(x(\infty)) \geq 0$, кроме того, в силу начальной разрешимости оптимальное значение $J^*(x(0))$ конечно. Поэтому

$$\int_0^{\infty} L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau))d\tau < \infty,$$

откуда в силу леммы Барбалата получаем, что $L(t) = L(x_{MPC}(t), u_{MPC}(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку L непрерывна и непрерывны аргументы этой функции, то $\|x_{MPC}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty \Rightarrow$, откуда следует результат теоремы. $\square$

Добавление тривиального условия $\bar{x}(t+T) = 0$ на правом конце траектории — простейшее условие, гарантирующее асимптотическую устойчивость. Основными недостатками данного подхода являются: 1) вычислительные сложности, связанные с (в общем случае нелинейными) ограничениями-равенствами, поскольку точное попадание в конце горизонта в начало координат не всегда выполнимо; 2) маленькой областью притяжения D.

Эти недостатки устраняются в следующем подходе.

1.3 Квазибесконечный MPC

Ослабим ограничения-равенства в терминальный момент времени и потребуем от траектории попадания не в начало координат, а на некоторое терминальное множество X^f. Внутри терминального множества X^f введем локальную функцию Ляпунова системы с управлением F, которая определяет еще один новый элемент задачи — терминальное слагаемое $F(\bar{x}(t+T;t))$ в критерии качества, за счет которой обеспечивается сходимость к началу координат.

Большинство современных схем MPC вкладываются в общую схему с терминальным множеством и терминальным слагаемым в критерии качества [13]. Впервые такой подход для стабилизации нелинейных непрерывных систем с ограничениями был предложен в рамках квазибесконечного MPC (Quasi-Infinite MPC) в работе [9].

Задача MPC $\bar{P}(x(t))$ в новом подходе выглядит следующим образом:

$$J^*(x(t)) = \min_{\bar{u}(\cdot;t)} \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau;t), \bar{u}(\tau;t))d\tau + F(\bar{x}(t+T;t)), \tag{1.6}$$

при условиях

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(t;t) = x(t),$$
$$\bar{x}(t;t) \in X, \quad \bar{u}(t;t) \in U, \quad \tau \in [t, t+T],$$
$$\bar{x}(t+T;t) \in X^f,$$

где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции стоимости терминального состояния, X^f — терминальное множество.

Как и прежде, $\bar{u}^*(\cdot;t)$ — оптимальное программное управление, $J^*(x(t))$ — оптимальное значение задачи (1.6).

Введем предположения относительно терминального множества и терминальной функции:

Предположение 1.3 Пусть существует локальная обратная связь

$$u = k^{loc}(x), \quad x \in X_f,$$

такая что

i. Множество X^f является инвариантным множеством для системы, замкнутой локальной обратной связью $\dot{x} = f(x, k^{loc}(x))$.

ii. Имеет место включение $k^{loc}(x) \in U$, $x \in X^f$, т.е. локальная обратная связь является допустимой для всех состояний терминального множества.

iii. Выполняется неравенство $\dot{F}(x) + L(x, k^{loc}(x)) \leq 0$, $x \in X^f$.

Сделанные предположения означают, что F — локальная функция Ляпунова системы с управлением [15].

Теорема 1.2 Пусть выполняются предположения 1.3, и задача MPC (1.6) разрешима в начальный момент времени $t = 0$. Тогда

1. Задача MPC (1.6) рекуррентно разрешима.

2. Замкнутая система является асимптотически устойчивой.

Согласно [9], предположения 1.3 о терминальной функции и терминальном множестве можно удовлетворить следующим образом.

Пусть

i. функция стоимости этапа является выпуклой квадратичной

$$L(x, u) = x^T Q x + u^T R u,\ \ Q, R > 0;$$

ii. линеаризация системы (1.1) в нуле

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0),\ \ B = \frac{\partial F}{\partial u}(0,0),$$

стабилизируема [18].

Тогда будем искать локальную обратную связь, терминальную функцию и терминальное множество в следующем виде:

- Локальная обратная связь — линейная: $k^{loc}(x) = Kx$.

- Терминальная функция — квадратичная: $F(x) = x^T P x$, $P > 0$.

- Терминальное множество — эллипсоид: $X^f_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T P x \leq \alpha\}$ для некоторого $\alpha > 0$.

Определим параметры K, P, α так чтобы выполнялись предположения 1.3. Во-первых, выберем K таким образом, чтобы матрица $A_K = A +$

$BK = A_K$ была гурвицевой. Существование такой матрицы следует из стабилизируемости линеаризации системы (1.1).

Во-вторых, для определения матрицы P перепишем неравенство iii в предположении 1.3:

$$\frac{d}{dt}x(t)^T Px(t) \le -L(x(t), k^{loc}(x(t))) = -x(t)^T(Q+K^T RK)x(t) = -x(t)^T Q^* x(t).$$

Слева производная квадратичной терминальной функции в силу динамики системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}x(t)^T Px(t) = f(x(t), Kx(t))^T Px(t) + x(t)^T Pf(x(t), Kx(t)).$$

Используя линеаризацию, имеем $f(x, Kx) = (A + BK)x + \phi(x)$, откуда

$$\frac{d}{dt}x(t)^T Px(t) = x(t)^T(A_K P + PA_K)x(t) + 2x(t)^T P\phi(x(t)). \tag{1.7}$$

Теперь необходимо оценить сверху слагаемое $x^T P\phi(x)$. Пусть внутри терминального множества $L_\phi := \sup\{||\phi(x)||/||x||, x \in X_\alpha^f, x \ne 0\}$. Тогда требуемая оценка может быть получена следующим образом

$$x^T P\phi(x) \le \|x^T P\| \cdot \|\phi(x)\| \le \|P\| \cdot L_\phi \cdot \|x\|^2 \le \frac{\|P\| \cdot L_\phi}{\lambda_{\min}(P)} x^T Px, \tag{1.8}$$

где $\lambda_{\min}(P) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P > 0$.

Выберем α достаточно малым, так чтобы для некоторого $k > 0$ выполнялось неравенство

$$L_\phi \le \frac{k\lambda_{min}(P)}{\|P\|}. \tag{1.9}$$

Используя (1.9) в (1.8), получим: $x^T P\phi(x) \le kx^T Px$. Тогда (1.7):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t)^T Px(t) &\le x(t)^T(A_K P + PA_K)x(t) + 2kx(t)^T Px(t) = \\ &= x(t)^T((A_K + kI)^T P + P(A_K + kI))x(t).\end{aligned}$$

Теперь матрицу P определим как решение уравнения Ляпунова

$$(A_K + kI)^T P + P(A_K + kI) = -Q^*, \tag{1.10}$$

которое имеет решение тогда и только когда матрица $A_K + kI$ является гурвицевой, чего можно добиться, выбирая параметр k согласно следующему неравенству

$$k < -\max\ Re\{\lambda(A_K)\}. \tag{1.11}$$

Окончательно, получим

$$\frac{d}{dt}x^TPx \leq -x^TQ^*x,$$

что влечет инвариантность множества X_α^f для системы (1.1) с линейной обратной связью $k^{loc}(x) = Kx$.

Таким образом, алгоритм нахождения терминальной функции и множества:

1. Решить задачу стабилизации для линеаризации системы (1.1) в окрестности начала координат, т.е. найдем K такое, что $(A + BK)$ гурвицева; тогда $u = Kx$ — локальная обратная связь.

2. Выбрать $k > 0$ такое, что верно неравенство (1.11) и решить уравнение Ляпунова (1.10).

3. Найти наибольшее α_1 такое что $Kx \in U\ \forall x \in X_{\alpha_1}^f$, т.е. локальная обратная связь допустима для всех состояний терминального множества, задаваемого как $X_{\alpha_1}^f = \{x \in \mathbb{R}^n | x^TPx \leq \alpha_1\}$.

4. Найдем наибольшее $\alpha \in (0, \alpha_1]$ такое что выполняется (1.9).

Шаг (4) может быть заменить на альтернативный: будем решать задачу оптимизации

$$\max_x x^TP\phi(x) - kx^TPx, \quad x^TPx \leq \alpha, \tag{1.12}$$

постепенно уменьшая α относительно α_1 до тех пор, пока оптимальное значение задачи (1.12) является отрицательным.

В итоге мы имеем следующие степени свободы:

- нахождение K для локального управления Ляпунова

- выбор k определяет компромисс между "большим"терминальным регионом и большой матрицей P для терминальной функции

1.4 Безусловный MPC

Теория безусловного MPC (Unconstrained MPC) (см. например, [11,12]) ставит перед собой задачу гарантировать асимптотическую устойчивость замкнутой системы без дополнительных терминальных ингредиентов (терминальная функция F и терминальное множество X^f). Помимо упрощения предварительных построений, связанных с вычислением F и X^f, и численного решения прогнозирующей задачи оптимального управления $\bar{P}(x(t))$, теория безусловного MPC позволяет оценить, насколько управление MPC отличается от оптимального, т.е. от решения задачи (1.3).

Задача MPC в рассматриваемом случае имеет вид

$$J_T(x(t), \bar{u}(\cdot; t)) = \int_t^{t+T} L(\bar{x}(\tau; t), \bar{u}(\tau; t)) d\tau, \tag{1.13}$$

при условиях

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(t; t) = x(t),$$

$$\bar{u}(\tau; t) \in U, \quad \tau \in [t, t+T].$$

В результате применения базового алгоритма MPC с прогнозирующей задачей оптимального управления (1.13) на бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$ будет получена следующая стоимость процесса MPC:

$$J_\infty^{MPC}(x_0) = \int_0^\infty L(x_{MPC}(\tau), u_{MPC}(\tau)) d\tau.$$

Дальнейшая цель — найти оценку субоптимальности α:

$$\alpha J_\infty^{MPC}(x_0) \leq J_\infty^*(x_0) \ \ \forall x_0,$$

где для α выполнены неравенства

— $\alpha \leq 1$, что следует из оптимальности значения $J_\infty^*(x_0)$;

— $\alpha > 0$, что требуется для гарантии асимптотической устойчивости замкнутой системы (см. доказательство теоремы 1.1).

Предположим, что существует $\alpha \in (0, 1]$, такое что $\forall x \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq J_T^*(x(t)) - \alpha \int_t^{t+\delta} L(\bar{x}^*(\tau; t), \bar{u}^*(\tau; t)) d\tau. \tag{1.14}$$

Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^n$ верна следующая цепочка неравенств

$$\alpha J_\infty^*(x(t)) \leq \alpha J_\infty^{MPC}(x(t)) \leq J_T^*(x(t)) \leq J_\infty^*(x(t)).$$

Теорема 1.3 Предположим, что существуют $\epsilon \in (0; 1]$ и $\gamma > 0$, такие что выполняются неравенства

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau;t)d\tau, \tag{1.15}$$

$$\int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau;t)d\tau \leq \gamma\int_{t}^{t+\delta} L^*(\tau;t)d\tau, \tag{1.16}$$

где $L^*(\tau;t) = L(\bar{x}^*(\tau;t), \bar{u}^*(\tau;t))$.

Тогда (1.14) выполняется при $\alpha = 1 - \gamma\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из цепочки неравенств

$$J_T^*(x(t+\delta)) - J_T^*(x(t)) = J_T^*(x(t+\delta)) - \int_t^{t+T} L^*(\tau;t)d\tau \overset{(1.15)}{\leq}$$

$$\leq \frac{1-\epsilon}{\epsilon}\int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau;t)d\tau - \int_t^{t+\delta} L^*(\tau;t)d\tau \overset{(1.16)}{\leq}$$

$$\leq (\gamma\frac{1-\epsilon}{\epsilon} - 1)\int_t^{t+\delta} L^*(\tau;t)d\tau$$

Обозначим $\alpha := 1 - \gamma\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$, получим требуемое неравенство (1.14). □

Дальнейшие построения направлены на нахождение подходящих ε, γ.

Предположение 1.4 (Асимптотическая управляемость) Для всех x, существует управление $\hat{u}_x(t) \in U$, $t \geq 0$, такое что

$$L(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \leq \beta(t)\min_u L(x,u), \quad t > 0,$$

где $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ — непрерывная, положительная, строго убывающая и $\lim_{t\to 0}\beta(t) = 0$.

Из условий, накладываемых на функцию β следует, что $\int_0^\infty \beta(\tau)d\tau < \infty$. Далее будем использовать обозначение $B(t) = \int_0^t \beta(\tau)d\tau$.

Лемма 1.2 В предположении 1.4 неравенство

$$J_T^*(x(t+\delta)) \leq \int_{t+\delta}^{t+t'} L^*(\tau;t)d\tau + B(T+\delta-t')L^*(t+t';t)$$

верно для всех $t' \in [\delta, T]$.

Основываясь на лемме 1.2, найдем значение ϵ. Запишем неравенство

$$J_T^*(x(t+\delta)) \le \min_{t' \in [\delta, T]} \left\{ \int_{t+\delta}^{t+t'} L^*(\tau; t) d\tau + B(T+\delta-t') L^*(t+t'; t) \right\} \le$$

$$\le \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau + B(T) \min_{t' \in [\delta, T]} L^*(t+t'; t) = \left(1 + \frac{B(T)}{T-\delta}\right) \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau,$$

где использовано неравенство $\min_{t' \in [\delta, T]} L^*(t+t'; t) \le \frac{1}{T-\delta} \int_{t+\delta}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau$.

Тогда мы имеем $\left(1 + \frac{B(T)}{T-\delta}\right) = \frac{1}{\epsilon}$, т.е. $\frac{1-\epsilon}{\epsilon} = \frac{B(T)}{T-\delta}$.

Аналогично найдем, чему равно γ. Будем использовать

Лемма 1.3 В предположении 1.4 неравенство

$$\int_{t+t'}^{t+T} L^*(\tau; t) d\tau \le B(T-t') L^*(t+t'; t)$$

верно для всех $t' \in [0; T]$.

Повторяя аргументы, с помощью которых было получено ε, используя лемму 1.3 найдем $\gamma = \frac{B(T)}{\delta}$.

Окончательно, получили

$$\alpha = 1 - \gamma \frac{1-\epsilon}{\epsilon} = 1 - \frac{B(T)}{\delta} \left(\frac{B(T)}{T-\delta}\right),$$

откуда следует, что при $T \to \infty$, поскольку $\epsilon \to 1$, то $\alpha \to 1$. Таким образом, при достаточно больших горизонтах прогнозирования имеет место асимптотическая устойчивость замкнутой системы и субоптимальность полученной в результате применения алгоритма MPC обратной связи.

ГЛАВА 2

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей главе вводятся основные понятия и определения, строятся математические модели, описывающие динамику инвестиционного портфеля, и формулируются задачи его оптимизации. Рассматриваемые модели можно разбить на два класса: детерминированные, в которых заданы функции цены покупки и продажи ценных бумаг, и недетерминированные, в которых указанные функции прогнозируются на заданном горизонте планирования. Описываются данные, которые будут использоваться для проведения численных экспериментов, и методы прогнозирования. Обсуждаются достоинства и недостатки различных подходов при оптимизации портфелей.

2.1 Основные положения модели

Портфель — совокупность инвестиционных вложений, состоящих из ценных бумаг и свободных финансов.

Портфель состоит из N типов бумаг. Количество бумаг i-го типа ($i = \overline{1, N}$) в момент времени $t \geq t_0$ равняется $x_i(t)$, где $x_i(t) \geq 0$. Обозначим через $x_0(t)$ — количество свободных финансов в момент времени $t \geq t_0$.

Через $u_i^+(t)$ будем обозначать количество ценных бумаг типа i, которые инвестор купил в момент времени t. Соответственно, через $u_i^-(t)$ обозначим, сколько инвестор продал ценных бумаг типа i в момент времени t. Пусть стоимость покупки i-ой бумаги равна $b_i(t) \geq 0$ (buy), а продажа $s_i(t) \geq 0$ (sell). Конкретный вид функций $s_i(t)$, $b_i(t)$, $t \geq t_0$ будет обсуждаться ниже, в разделе **??**.

Таким образом, на в момент времени t инвестор покупает ценных бумаг типа i на сумму $b_i(t)u_i^+(t)$ и продает на сумму $s_i(t)u_i^-(t)$.

Тогда количество свободных средств в следующий момент времени $t+1$ будет равно

$$x_0(t+1) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)\right). \tag{2.1}$$

Количество ценных бумаг типа i в момент времени $t+1$ будет равно

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i). \tag{2.2}$$

Считаем, что в начальный момент времени t_0 заданы начальные условия — количество бумаг каждого типа и объем свободных средств, которыми располагает инвестор:

$$x_i(t_0) = x_{i0},\ i = \overline{1, N};\ \ x_0(t_0) = x_{00}.$$

Введенные переменные и уравнения (2.1), (2.2) представим в векторной форме. Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned}
&X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T;\\
&U^+(t) = [u_1^+(t), \dots, u_N^+(t)]^T;\\
&U^-(t) = [u_1^-(t), \dots, u_N^-(t)]^T;\\
&B(t) = [b_1(t), \dots, b_N(t)]^T;\\
&S(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T;\\
&X_0 = [x_{10}, \dots, x_{N0}]^T.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Используя (2.3), перепишем (2.2) для $X(t)$:

$$X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\ \ X(t_0) = X_0,\ \ t \geq t_0. \tag{2.4}$$

Представим (2.1) в векторной форме:

$$x_0(t+1) = x_0(t) + B(t)^T U^+(t) - S(t)^T U^-(t),\ \ x_0(t_0) = x_{00},\ \ t \geq t_0. \tag{2.5}$$

На значения $X(t)$, $x_0(t)$, $U^+(t)$, $U^-(t)$ в каждый момент времени t накладываются следующие естественные ограничения:

$$\begin{aligned}
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0,\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0,\\
&t \geq t_0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

С точки зрения теории оптимального управления, в динамической модели (2.4) – (2.6): переменные $X(t) \in \mathbb{R}^N$, $x_0(t) \in \mathbb{R}$ — фазовые переменные (зависимые), переменные $U^+(t) \in \mathbb{R}^N$, $U^-(t) \in \mathbb{R}^N$ — управляющие переменные (управления, независимые), динамическая модель нестационарная в силу зависимости от времени функций цены покупки $B(t)$, $t \geq t_0$, и цены продажи $S(t)$, $t \geq t_0$. Ограничения (2.6), накладываются как на управляющие, так и на фазовые переменные.

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть $w_i(t)$ — общая стоимость бумаг типа i, и она равна сумме, которую инвестор может выручить из ее продажи в момент времени t:

$$w_i(t) = s_i(t)x_i(t), \quad t \geq t_0.$$

Значение $w_0(t)$ будем считать равным $x_0(t)$. Тогда общая стоимость портфеля равна

$$w(t) = \sum_{i=0}^{N} w_i(t).$$

В векторном виде, используя (2.3), получим следующую формулу для общей стоимости портфеля:

$$w(t) = x_0(t) + S(t)^T X(t).$$

Задачи оптимизации портфеля, динамика которого описывается согласно (2.4), (2.5) и подчиняется ограничениям (2.6) будет связана с максимизацией введенной стоимости портфеля при различных дополнительных требованиях. Первая такая модель будет рассмотрена в разд. 2.2, а до этого опишем данные, которые будут использоваться для численных экспериментов.

2.1.1 Данные для численных экспериментов

В данном пункте будут описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов, а также приводится описание того, как строятся прогнозы для значений функций цен $S(t)$, $B(t)$, $t \geq t_0$, при рассмотрении недетерминированной модели (см. разд. 2.3.1), когда их точные значения не известны заранее.

Будем работать с двумя типами данных:

1. сгенерированных искусственно;

2. реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и синусоидальной функции

$$\begin{aligned} &b_i(t) = k_{i0} + k_i t + \alpha_i \sin(r_i + g_i t); \\ &s_i(t) = 0.95 b_i(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для (2.7) значения k_{i0}, k_i, α_i, r_i, g_i подбираются таким образом, чтобы ни для каких $i \neq j$ не совпадали периоды. Выбор функции $s_i(t)$ в представленном виде обусловлен тем наблюдением реально существующий картины, что разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту, и таким образом, она будет хорошим приближением для используемых данных.

Реальные данные взяты из исторических курсов на сайте *coinmarketcap.com* за период ...

Тут вставить графики функций **(НЕ ЗАБЫТЬ ВСТАВИТЬ :)**

2.1.2 Предсказание значений

В общем случае, значения $S(t)$ и $B(t)$ в будущие моменты времени не известны. В настоящей работе будем прогнозировать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регрессионная модель [27], зависимости стоимости от времени. В этом пункте будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Линейная регрессия — метод восстановления зависимости между двумя переменными.

Пусть даны предыдущие наблюдениям за стоимостями фиксированной бумаги $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ в моменты времени $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Для заданного множества из m пар (t_i, p_i), $i = 1, \ldots, m$, значений свободной и зависимой переменной требуется построить зависимость. Назначена линейная модель

$$p_i = f(\mathbf{w}, t_i) + \varepsilon_i$$

с линейной функцией f и аддитивной случайной величиной ε. Переменные t, p принимают значения на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определим модель зависимости как

$$p_i = w_1 + w_2 t_i + \varepsilon_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор параметров

$\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ есть решение нормального уравнения

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P}$ — вектор, состоящий из значений зависимой переменной: $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_m)$. Столбцы матрицы A есть подстановки значений свободной переменной $t_i^0 \mapsto a_{i1}$ и $t_i^1 \mapsto a_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$. Матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}.$$

Зависимая переменная восстанавливается по полученным весам и заданным значениям свободной переменной

$$p_i^* = w_1 + w_2 t_i,$$

иначе

$$\mathbf{P}^* = A\mathbf{w}.$$

Для оценки качества модели используется критерий суммы квадратов регрессионных остатков, SSE — Sum of Squared Errors.

$$SSE = \sum_{i=1}^{m} (p_i - p_i^*)^2 = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*)^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*).$$

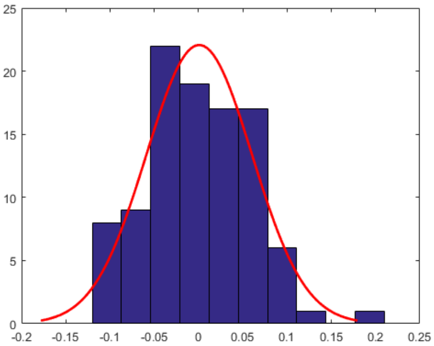
2.1.3 Оценка прогнозирования

В данном пункте рассматривается вопрос о качестве найденных оценок [26]. Находится их смещение, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

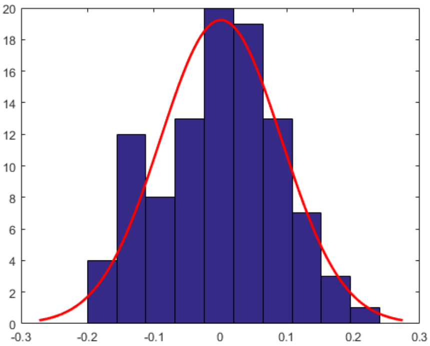
Для нахождения математического ожидания и вариации ошибки будем использовать встроенные *Matlab* функции *var*, *mean*. Данные функции вычисляют следующие значения:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

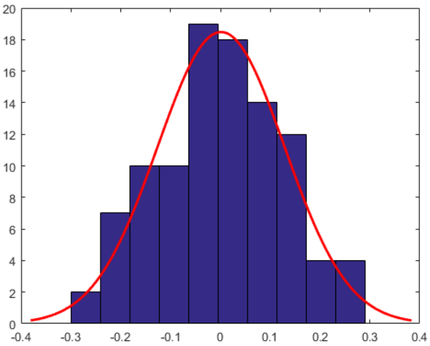
$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} |A_i - \mu|^2.$$



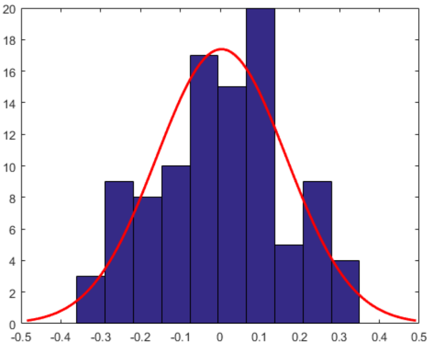
(a) На 1 шаг



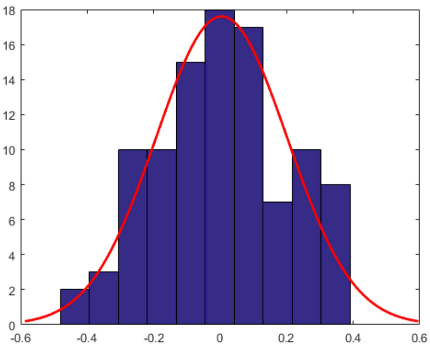
(b) На 2 шага



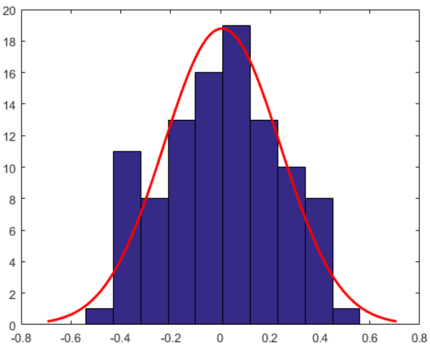
(c) На 3 шага



(d) На 4 шага



(e) На 5 шагов



(f) На 6 шагов

Рис. 2.1: Распределение ошибок предсказания

В процессе прогнозирования вычисляется ошибка следующим образом

$$e_i = \frac{p_i - p_i^*}{p_i}.$$

Данная ошибка была подсчитана для прогнозирования стоимости криптовалют от одного до шести шагов вперед. На рисунке 2.1 изображены распределения ошибок прогнозирование будущих стоимостей продаж ценных бумаг.

В таблице 2.1 приведены численные значения математического ожидания и вариации для предсказаний.

t	mean	var
1	0.0007	0.0036
2	0.0007	0.0083
3	0.0012	0.0162
4	0.0032	0.0265
5	0.0043	0.0389
6	0.0064	0.0545

Таблица 2.1: Ошибки прогнозирования

Дисперсия $D[e(t)]$ будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости этапа, которая имеет вид

$$L_t(U^+(t), U^-(t)) = \alpha D[e(t)] \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)^2,$$

где $W(t)$ это собственно и сама ошибка прогнозирования.

Так как значения математического ожидания, представленные в таблице 2.1, близки к нулю, то будем считать, что полученные оценки являются несмещенными **(ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ)**.

2.2 Детерминированная модель

Настоящий раздел посвящен исследованию детерминированной модели оптимизации портфеля, т.е. случаю, когда в начальный момент времени t_0 точно известны все значения цены продажи и покупки $s_i(t)$ и $b_i(t)$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, N}$.

Будем применять методы MPC, описанные в главе 1 для задачи оптимизации портфеля. При этом рассматриваются две прогнозирующие задачи MPC с конечным горизонтом прогнозирования T:

- задача максимизации стоимости портфеля без условий в терминальный момент времени $t_0 + T$ (без терминального множества);

- задача максимизации стоимости портфеля с условиями в терминальный момент времени $t_0 + T$ (с терминальным множеством).

2.2.1 Максимизация стоимости портфеля без терминального множества

Рассмотрим следующую задачу MPC с горизонтом планирования T

$$\begin{aligned}\max_{U^+,U^-} J(X_0, x_{00}, U^+, U^-) = w(t_0+T) = \\ = x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T),\end{aligned} \tag{2.8}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t),\\
&X(t_0) = X_0,\\
&x_0(t_0) = x_{00};\\
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Отметим, что в задаче оптимального управления (2.8) – (2.9) функция стоимости не ограничена, кроме того, тут отсутствует функция стоимости этапа $L_t(\cdot)$, а максимизируется только терминальная стоимость портфеля.

Так как предположение $J^*_\infty(X_0, x_{00}, U^+, U^-) < \infty$ из главы 1.4 не выполняется, то невозможно гарантировать устойчивость процесса, замкнутого обратной связью, построенной в результате применения MPC-алгоритма из главы 1.4 с прогнозирующей задачей оптимального управления (2.8) – (2.9). Также невозможно исследовать полученное решение на субоптимальность.

Приведем типичную картину поведения инвестора, использующего для управления портфелем задачу (2.8) – (2.9). Для этого приведем результаты численных экспериментов для двух ценных бумаг ($N = 2$) при горизонте прогнозирования $T = 6$ и используя синтетические и реальные данные.

На рисунке 2.2 представлены данные проведенного численного эксперимента. Верхний график показывает количество ценных бумаг первого и второго типа в каждый момент времени. Нижний график представляет собой общую стоимость базового портфеля (с тривиальным управлением — зеленая кривая) и стоимость портфеля под управлением MPC (красная кривая).

Как видно из рисунка 2.2, при использовании задачи (2.8) – (2.9) происходят частые операции вида: продать все бумаги типа i и на освободившиеся деньги купить бумаги типа j, $i, j = 1, 2$. Для инвестора такое поведение может приводить к проблемам, поскольку ему приходится постоянно перестраивать портфель, что привносит в его поведение большие риски. Подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерминированной моделью.

Изменим критерий качества (2.8), добавив в него с целью регуляризации стоимость этапа $L(U^+(t), U^-(t))$.

Получим следующую задачу

$$\min_{U^+, U^-} J(x, u) = \sum_{i=0}^{T} L(U^+(i), U^-(i)) - w(T),$$

при условиях (2.9). Заметим, что здесь критерий качества минимизируется, стоимость портфеля взята за знаком $-$.

Если в качестве функции этапа взять, например, функцию вида

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))^2,$$

которая характеризует весь оборот денег, произошедший в момент времени t, то графики изменятся (для $\alpha = 0.001$) как представлено на рисунке 2.3.

Аналогичная картина получается в численных экспериментах со сгенерированными тестовыми данными. Без функции стоимости этапа результаты представлены на рисунке 2.4, со стоимостью этапа — на рисунке 2.5.

2.2.2 Максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Рассмотрим теперь в качестве прогнозирующей задачи MPC — задачу оптимального управления с горизонтом планирования T и ограничениями, накладываемыми на состав портфеля в терминальный момент времени t_0+T:

$$\max_{U^+, U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) = x_0(t_0 + T) + X(t_0 + T)^T S(t_0 + T); \qquad (2.10)$$

при условиях

$$
\begin{aligned}
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t),\\
&X(t_0) = X_0,\\
&x_0(t_0) = x_{00};\\
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1};\\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Поясним смысл введенного ограничения

$$
\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.
$$

Здесь требуется, чтобы в момент времени $t_0 + T$ пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом MPC с той лишь разницей, что в стандартных схемах экономического MPC в качестве устойчивого состояния используется точка x_s, а в данном случае это целый луч, содержащий значения с одинаковыми пропорциями.

Предлагаемый подход, кроме того, дает возможность сравнивать эффективность управления MPC без учета колебания курсов, поскольку отношения стоимостей портфелей с тривиальным управление, и с управлением MPC, если они содержат одинаковые пропорции, не зависит от текущих курсов.

Теорема 2.1 Задача (2.10) – (2.11) разрешима.

Доказательство Заметим, что тривиальное управление

$$
U^+(t) = U^-(t) \equiv 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1},
$$

является допустимым. Кроме того, при этом управлении значение функции $\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-)$ в (2.10) **(ПРОПУЩЕНА ФРАЗА)**, следовательно, задача (2.10) – (2.11) разрешима.

Теорема 2.2 Пусть для начальных условий x_{00}, X_0 из задачи (2.10) –

(2.11) получено управление MPC

$$\{(U^+(0), U^-(0)), (U^+(1), U^-(1)), \dots\},$$

и соответствующая ей траектория

$$\{(\hat{X}(0), \hat{x}_0(0)), (\hat{X}(1), \hat{x}_0(1)), \dots\}$$

тогда любого $m \in \mathbb{Z}_+$ верно:

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(m), \hat{x}_0(m), U^+, U^-) \geq x_0(0) + X(0)^T S(m+T).$$

Данная теорема утверждает, что в любой момент времени портфель, управляемый MPC за T шагов, может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет не меньше, чем в случае, когда постоянно используется тривиальное управление (инвестор не управляет портфелем).

Д о к а з а т е л ь с т в о Будет добавлено позже **(НЕ ЗАБЫТЬ ДОБАВИТЬ)**

Приведем пример того, как будет вести себя система при управлении MPC-регулятором, использующим задачу оптимального управления с терминальным множеством. На рисунке 2.6 представлен результат численного эксперимента для сгенерированных данных. Как видно, в результате стоимость портфеля получается меньше, нежели в случае без терминального множества (рисунок 2.5). Но при этом ȳже диапазон, в котором изменяется количество ценных бумаг каждого типа.

2.3 Недетерминированная модель

В настоящем разделе исследован случай, когда точно не известны будущие стоимости активов, и модель должна оперировать прогнозируемыми значениями на заданном горизонте планирования T.

Покажем, что для недетерминированного случая нельзя просто использовать предсказания и работать как в детерминированном случае без регуляризации.

На рисунке 2.7 представлен такой случай, при этом на нижнем графике видно, что стоимость портфеля при тривиальном управлении будет выше, нежели при управлении MPC.

Представленное на рисунке 2.7 снижение стоимости портфеля связано с тем, что управление строится на основе прогнозируемых данных, и при этом одинаково учитывается весь горизонт планирования. Для улучшения необходимо сделать так, чтоб прогнозы для близких стоимостей учитывались в большей степени, нежели более дальние по времени.

Введем функцию стоимости этапа, которая будет учитывать ошибки прогнозирования.

В том случае, когда точно не известны значения $s_i(t)$ и $b_i(t)$, наша функция перехода для $x_0(t)$, в соответствии с (**??**) имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t). \tag{2.12}$$

Где $B(t)$ и $S(t)$ описаны в (2.3).

И при этом $B(t) = (I + E_1(t))\bar{B}(t)$, где $\bar{B}(t)$ это прогнозируемое значение, I – единичная матрица, $E_1(t)$ – случайная диагональная матрица ошибок, при этом $M[E_1(t)] = 0$ (ссылка на часть с оценкой ошибок прогнозирования). Аналогично для $S(t) = \bar{S}(t)(1 + E_2(t))$.

Так как изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что $E_1(t) \equiv E_2(t) = E(t)$.

Сейчас перепишем (**??**):

$$\begin{aligned} x_0(t+1) = x_0(t) - \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) - \\ - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Оценим для величины $x_0(t+1)$ математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \tag{2.14}$$

Будем считать, что величины $x_0(t)$ и $W(t)$ независимы, кроме того, стоимости активов не коррелируют

$$\begin{aligned} D[x_0(t+1)] &= D[x_0(t) - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] = \\ &= D[x_0(t)] + D[\left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] \leq \\ &= D[x_0(t)] + \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t)\rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t)\rangle^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Сейчас можем добавить учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будит служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания. Введем функцию стоимости этапа следующим образом:

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha \left(\langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t) \rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t) \rangle^2 \right). \tag{2.16}$$

Оценки на значения $D[E(t)]$ зависят от способа предсказания векторов $S(t)$ и $B(t)$.

$$\begin{aligned}
&\max_{U^+, U^-} -\sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0+t), U^-(t_0+t)) + \\
&\qquad\qquad + x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T); \\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t) \\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \\
&X(t_0) = X_0; \\
&x_(t_0) = x_0; \\
&X(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T}; \\
&x_0(t) \geq 0; \\
&U^+(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1}; \\
&U^-(t) \geq 0; \\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0, N}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Результат применения данного управления представлен на рисунке 2.8. Тут видим, что применение управления MPC уже лучше, нежели тривиальное управление.

Стоит отметить, что в части работ, посвященных управлению портфелем, например в [1] делается допущение, что стоимость покупки и продажи совпадают. Это допущение является очень сильным и приводит к тому, что в отличии ситуации на рисунке (2.7) при равных стоимостях покупки и продажи получаем ситуацию как на рисунке (2.9). То есть модель не нуждается ни в регуляризации, ни в терминальном регионе.

2.3.1 Терминальный регион

В данном пункте рассмотрим дополнительные ограничения для модели, введем терминальное множество и рассмотрим задачу квази-бесконечного MPC.

Выберем $\epsilon \in [0, 1]$, и модифицируем терминальное множество из модели

(2.10)-(2.11) следующим образом:

$$\left|\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}\right| \leq \epsilon, \quad k = \overline{0,N}.$$

Идея данного ограничения возникает из того, что инвестор может хотеть не сильно отдалятся, от изначальных пропорций, но при этом все еще увеличить свой доход относительно тривиального управления.

$$\begin{aligned} \max_{U^+,U^-} -\sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0+t), U^-(t_0+t)) + \\ + x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T); \end{aligned} \tag{2.18}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) = x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T); \\ &X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t), \\ &x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \\ &X(t_0) = X_0, \\ &x_0(t_0) = x_{00}; \\ &X(t) \geq 0, \\ &x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T}; \\ &U^+(t) \geq 0, \\ &U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1}; \\ &\left|\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} - \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}\right| \leq \epsilon, \quad k = \overline{0,N}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

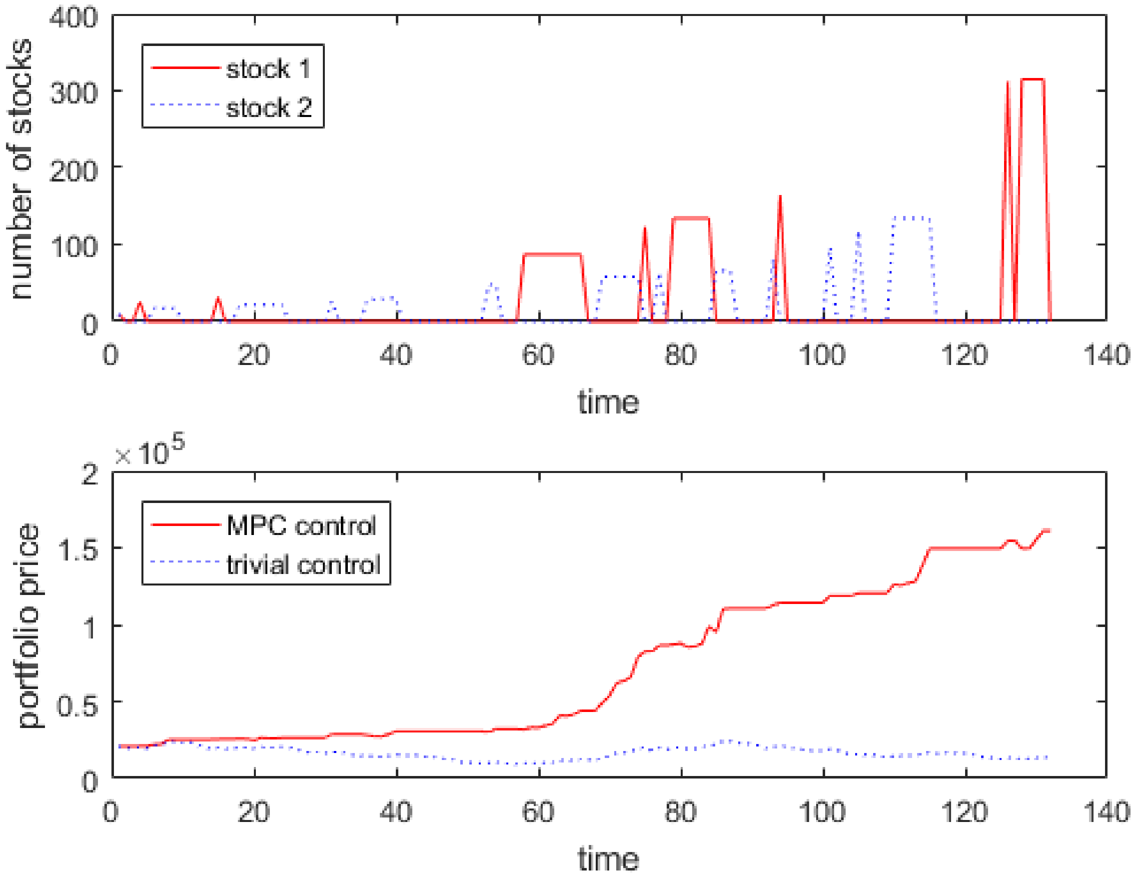


Рис. 2.2: Детерминированная модель без регуляризации

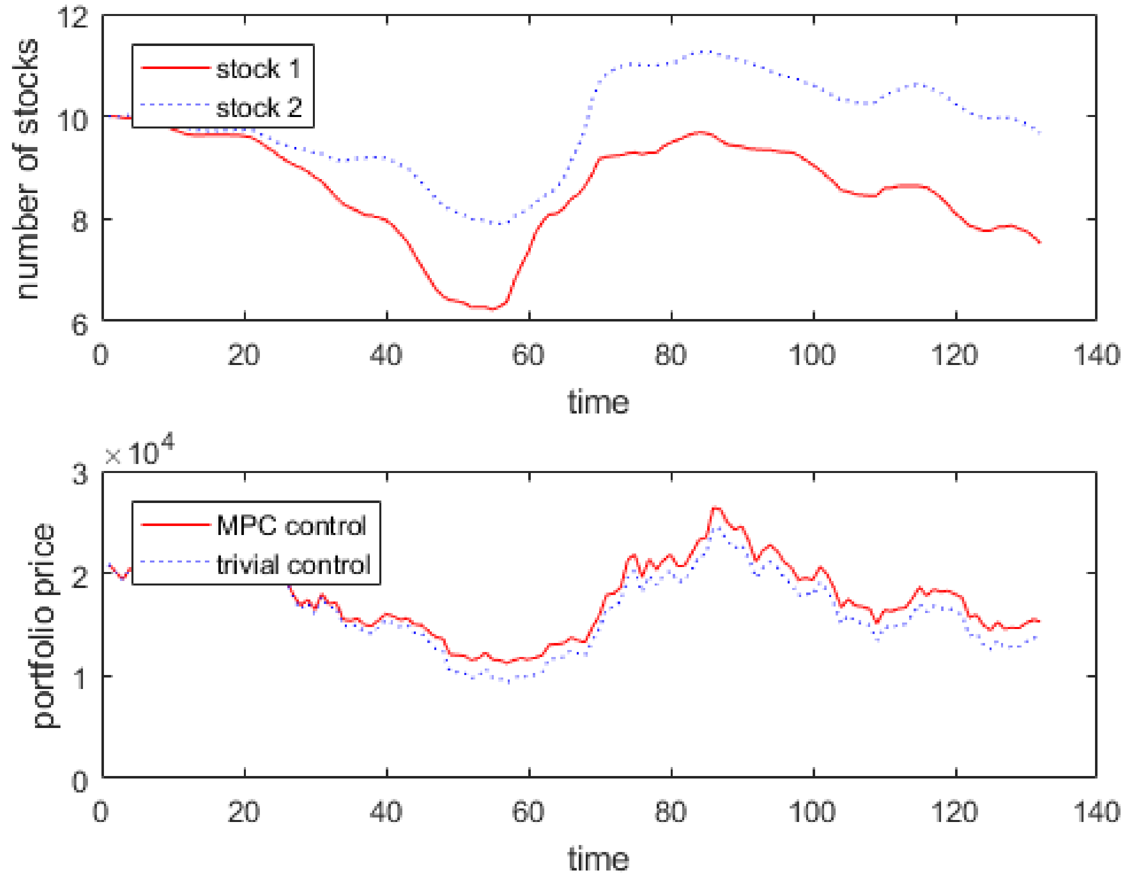


Рис. 2.3: Детерминированная модель с регуляризацией

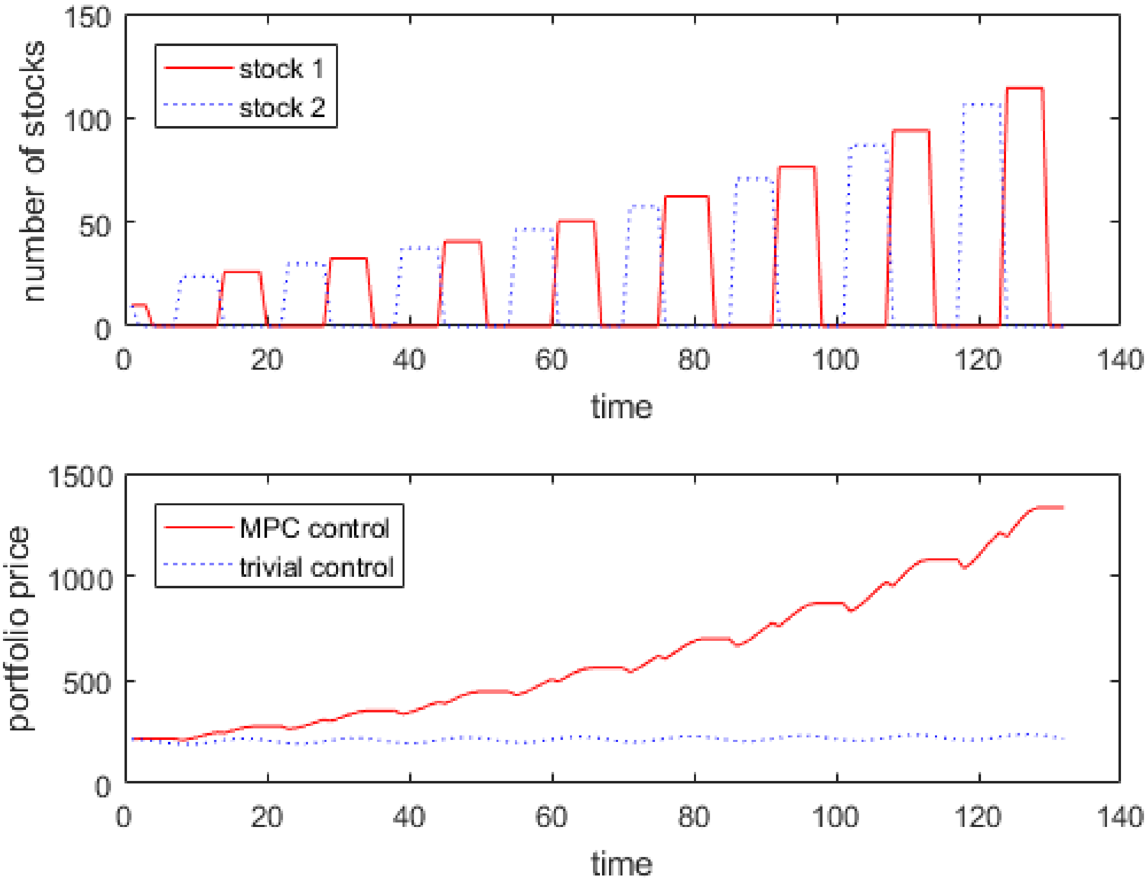


Рис. 2.4: Детерминированная модель без регуляризацией

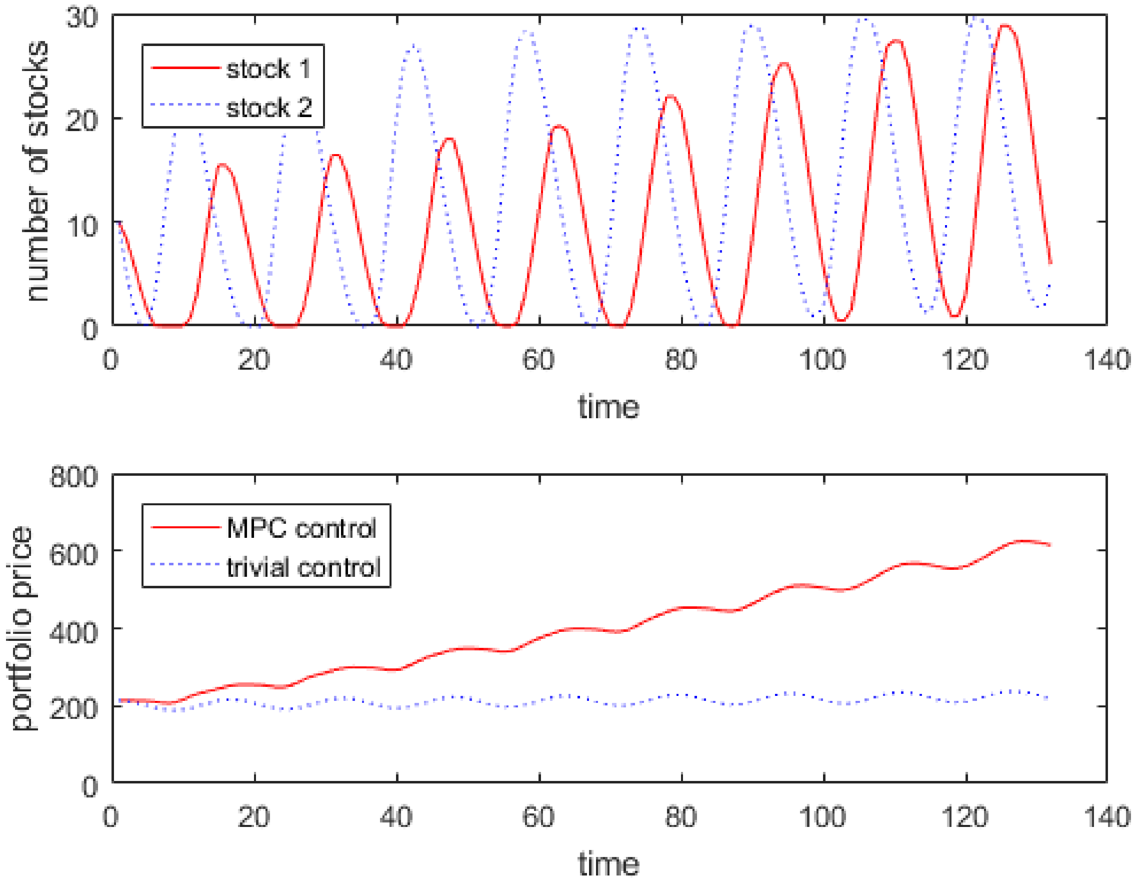


Рис. 2.5: Детерминированная модель с регуляризацией

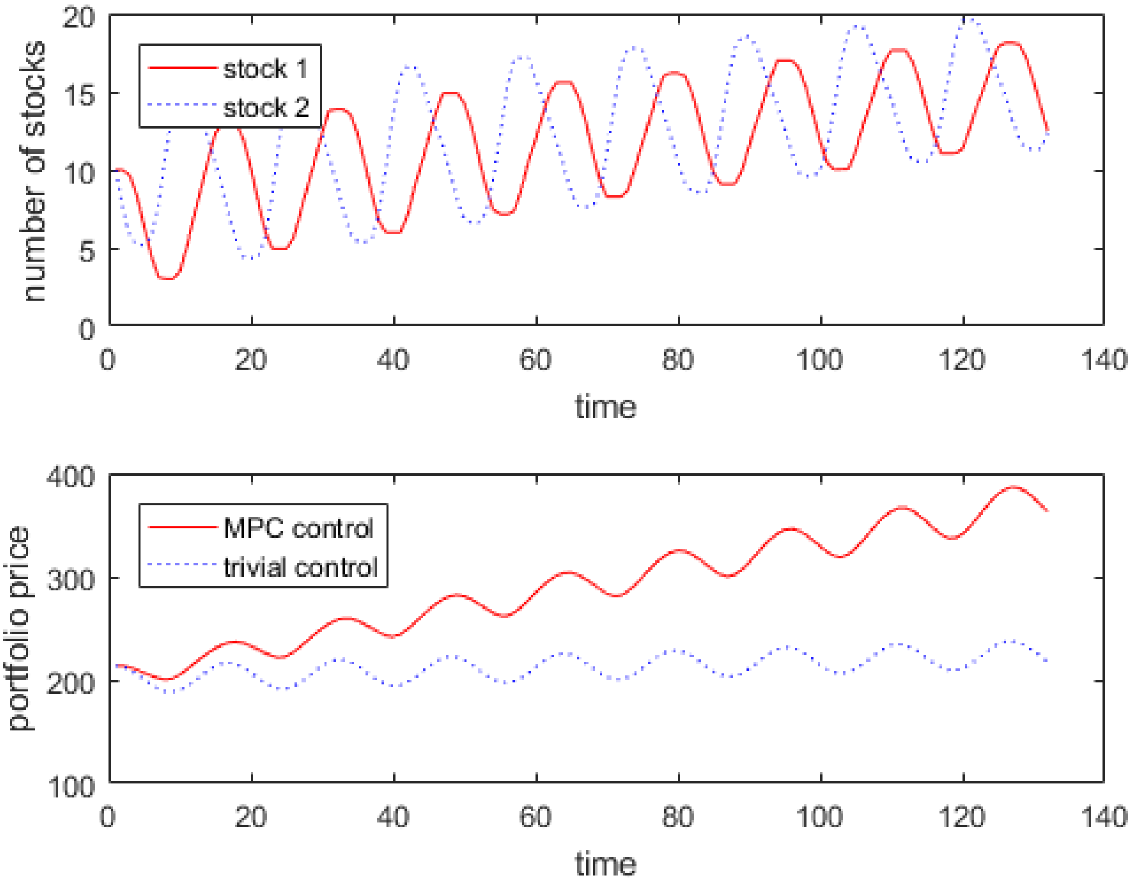


Рис. 2.6: Детерминированная модель с регуляризацией

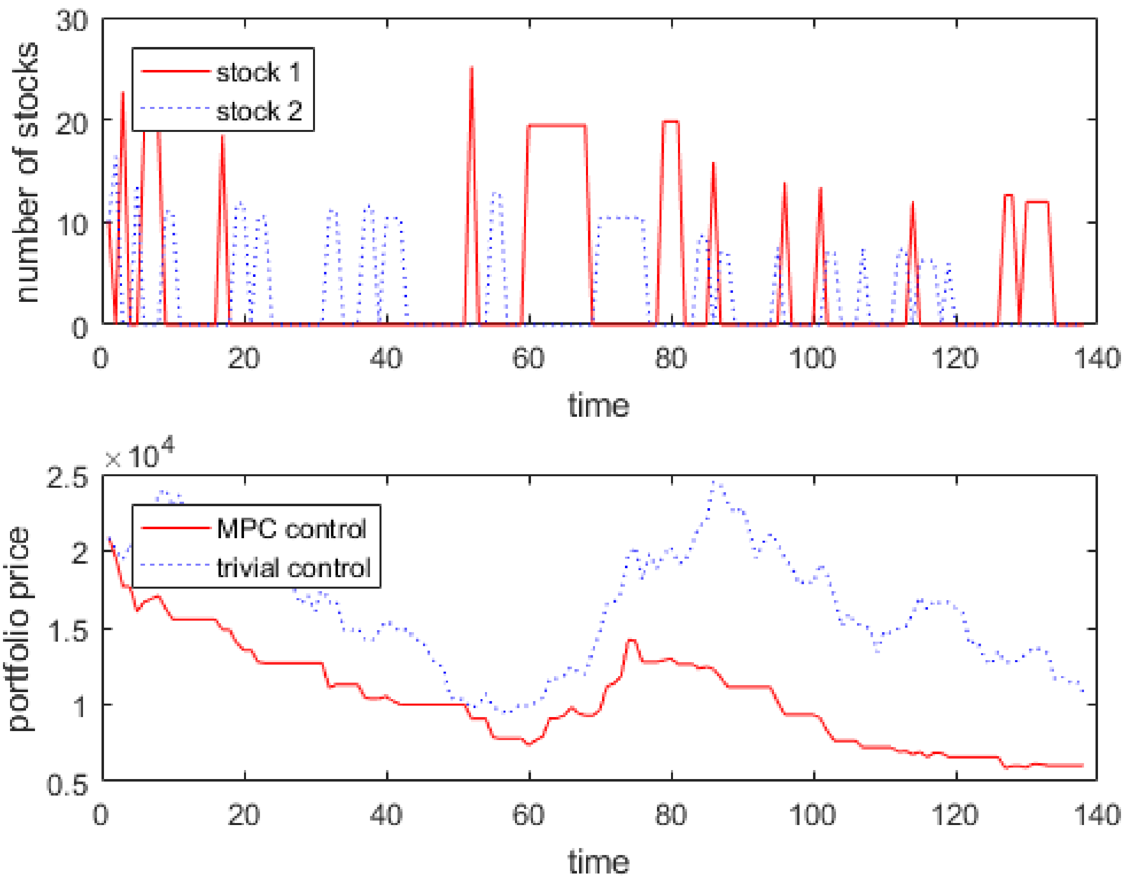


Рис. 2.7: Недетерменированная модель без регуляризацией

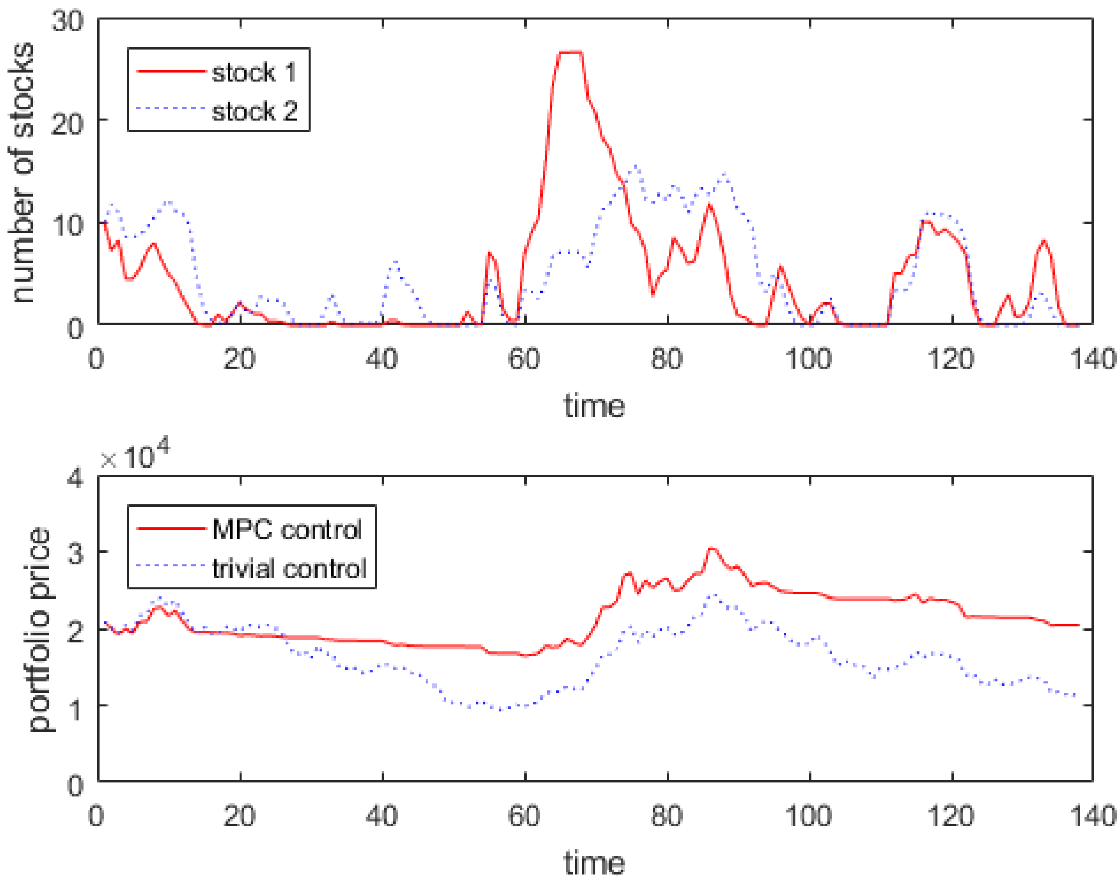


Рис. 2.8: Недетерменированная модель с регуляризацией

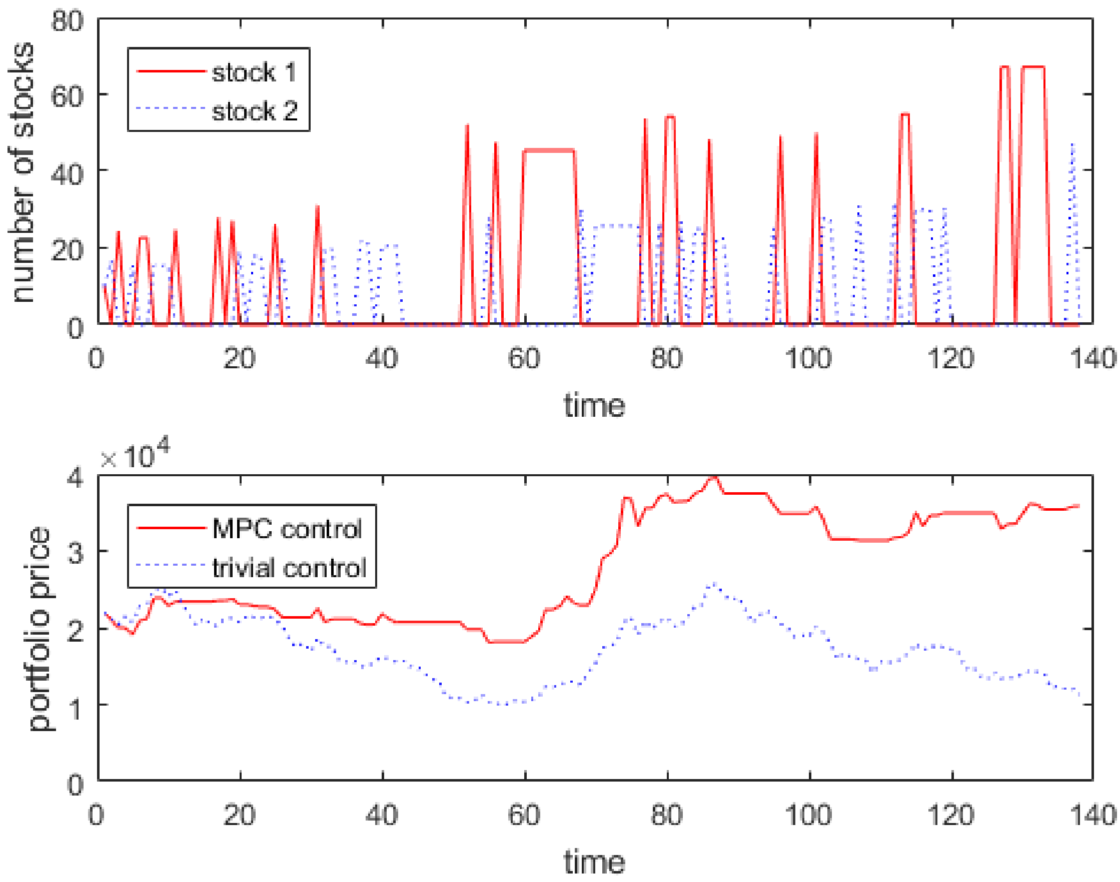


Рис. 2.9: Недетерменированная модель с регуляризацией

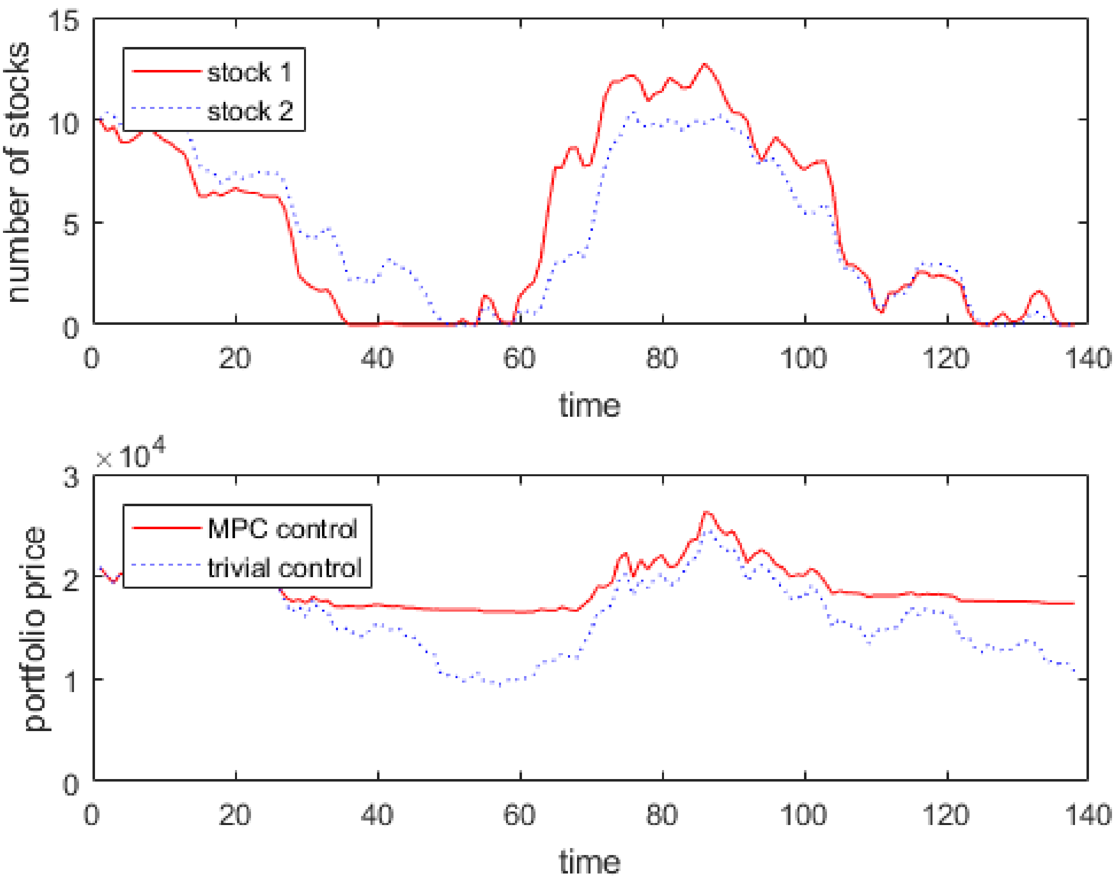


Рис. 2.10: Недетерменированная модель с регуляризацией

ГЛАВА 3

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Идея использования методов MPC для управления портфелями в настоящий момент очень актуальна, на это указывают ряд исследований, проводимых за последние годы.

Одним из ранних исследований является работа [4] в которой доходность является линейной функцией от некой нормально распределенной случайной величины, тут же появляется идея о представлении целевой функции, как некого взвешенного между доходностью портфеля и рискованностью управления. Продолжение данных исследований можно обнаружить в [3], где строится уже более классическая задача робастного MPC, но при этом используется инвариантная во времени модель, где все доходности фиксируются в самом начале и не изменяются во времени.

Одновременно с составлением моделей происходило исследование подходов для их решения и для моделирования будущих цен активов. В работе [2] динамика изменения доходности активов моделируется при помощи марковского процесса, затем применяется MPC для максимизации математического ожидания доходности. В работе [7] результаты [2] улучшаются при помощи использования фильтра Калмана.

В работе [1] для решения задачи MPC применяются уравнения Рикатти.

Из более современных исследований стоит отметить работу [5]. Тут уже используется неинвариантная во времени модель. И для прогнозирования будущих значений доходности учитываются и текущие доходности активов. Используемая в работе [6] модель дает возможность работать одновременно как с длинными, так и короткими позициями.

К основным недостаткам большинства работ следует отнести то, что цена покупки приравнивается к цене продажи, что не соответствует реальному положению вещей и, как будет показано в данной работе, является очень существенным допущением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Marigo A., Piccoli B. MODEL PREDICTIVE CONTROL FOR PORTFOLIO OPTIMIZATION.

2 Dombrovskii V., Obyedko T. Dynamic Investment Portfolio Optimization under Constraints in the Financial Market with Regime Switching using Model Predictive Control //arXiv preprint arXiv:1410.1136. – 2014.

3 Alenmyr S., Ogren A. Model Predictive Control for Stock Postfolio Selection //MSc Theses. – 2010.

4 Herzog F. et al. Model predictive control for portfolio selection //American Control Conference, 2006. – IEEE, 2006. – ?. 8 pp.

5 Nystrup P. et al. Multi-period portfolio selection with drawdown control //Annals of Operations Research. – 2017. – ?. 1-27.

6 Yamada Y., Primbs J. A. Model Predictive Control for Optimal Pairs Trading Portfolio with Gross Exposure and Transaction Cost Constraints //Asia-Pacific Financial Markets. – 2018. – ?. 25. – ?. 1. – ?. 1-21.

7 Fitria I., Apriliani E., Putri E. R. M. Investment ManagementUsing Portfolio Optimizationwith Stock Price Forecasting //Applied Mathematical Sciences. – 2016. – ?. 10. – ?. 48. – ?. 2405-2413.

8 Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. – Cambridge university press, 2004.

9 Chen, H. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability / H. Chen, F. Allgöwer // Automatica – 1998. – Vol. 34, no. 10. – P. 1205—1217.

10 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

11 Grüne, L. Analysis and design of unconstrained nonlinear MPC schemes for finite and infinite dimensional systems / L.Grune // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2009. – Vol. 48, no. 2. – P. 1206—1228.

12 Grüne, L. Nonlinear model predictive control / L. Grüne, J. Pannek – Springer London, 2011.

13 Fontes, F.A.C.C. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers / F.A.C.C. Fontes // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – No. 2. – P. 127–143.

14 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.

15 Khalil, H.K. Nonlinear systems / H.K. Khalil – New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

16 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.

17 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.

18 Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – М.: Высш. шк., 2003.

19 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Инностранная литература, 1960. – 400 с.

20 Васильев, Ф.П. Методы оптимизации

21 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

22 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

23 Ли, Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус – М.: Наука, 1972.

24

25 Математическая теория оптимальных процессов/ Л.С. Понтрягин [и др.] – М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

26 Боровков, А.А. Числовые характеристики случайных величин. 5-е изд. / А.А. Боровков // М.: Либроком. – 2009. – Глава 4.

27 Стрижов, В.В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей / В.В. Стрижов – М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2008.