

# ГЛАВА 1

## ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей главе вводятся основные понятия и определения, строятся математические модели, описывающие динамику инвестиционного портфеля, и формулируются задачи его оптимизации. Рассматриваемые модели можно разбить на два класса: детерминированные, в которых заданы функции цены покупки и продажи ценных бумаг, и недетерминированные, в которых указанные функции прогнозируются на заданном горизонте планирования. Описываются данные, которые будут использоваться для проведения численных экспериментов, и методы прогнозирования. Обсуждаются достоинства и недостатки различных подходов при оптимизации портфелей.

### 1.1 Основные положения модели

Портфель — совокупность инвестиционных вложений, состоящих из ценных бумаг и свободных финансов.

Портфель состоит из  $N$  типов бумаг. Количество бумаг  $i$ -го типа ( $i = \overline{1, N}$ ) в момент времени  $t \geq t_0$  равняется  $x_i(t)$ , где  $x_i(t) \geq 0$ . Обозначим через  $x_0(t)$  — количество свободных финансов в момент времени  $t \geq t_0$ .

Через  $u_i^+(t)$  будем обозначать количество ценных бумаг типа  $i$ , которые инвестор купил в момент времени  $t$ . Соответственно, через  $u_i^-(t)$  обозначим, сколько инвестор продал ценных бумаг типа  $i$  в момент времени  $t$ . Пусть стоимость покупки  $i$ -ой бумаги равна  $b_i(t) \geq 0$  (buy), а продажа  $s_i(t) \geq 0$  (sell). Конкретный вид функций  $s_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $t \geq t_0$  будет обсуждаться ниже, в разделе ??.

Таким образом, на в момент времени  $t$  инвестор покупает ценных бумаг типа  $i$  на сумму  $b_i(t)u_i^+(t)$  и продает на сумму  $s_i(t)u_i^-(t)$ .

Тогда количество свободных средств в следующий момент времени  $t + 1$  будет равно

$$x_0(t + 1) = x_0(t) + \sum_{i=1}^N (-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)). \quad (1.1)$$

Количество ценных бумаг типа  $i$  в момент времени  $t + 1$  будет равно

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i). \quad (1.2)$$

Считаем, что в начальный момент времени  $t_0$  заданы начальные условия — количество бумаг каждого типа и объем свободных средств, которыми располагает инвестор:

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_0(t_0) = x_{00}.$$

Введенные переменные и уравнения (1.1), (1.2) представим в векторной форме. Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T; \\ U^+(t) &= [u_1^+(t), \dots, u_N^+(t)]^T; \\ U^-(t) &= [u_1^-(t), \dots, u_N^-(t)]^T; \\ B(t) &= [b_1(t), \dots, b_N(t)]^T; \\ S(t) &= [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T; \\ X_0 &= [x_{10}, \dots, x_{N0}]^T. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Используя (1.3), перепишем (1.2) для  $X(t)$ :

$$X(t + 1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad t \geq t_0. \quad (1.4)$$

Представим (1.1) в векторной форме:

$$x_0(t + 1) = x_0(t) + B(t)^T U^+(t) - S(t)^T U^-(t), \quad x_0(t_0) = x_{00}, \quad t \geq t_0. \quad (1.5)$$

На значения  $X(t)$ ,  $x_0(t)$ ,  $U^+(t)$ ,  $U^-(t)$  в каждый момент времени  $t$  накладываются следующие естественные ограничения:

$$\begin{aligned} X(t) &\geq 0, \\ x_0(t) &\geq 0, \\ U^+(t) &\geq 0, \\ U^-(t) &\geq 0, \\ t &\geq t_0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

С точки зрения теории оптимального управления, в динамической модели (1.4) – (1.6): переменные  $X(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $x_0(t) \in \mathbb{R}$  — фазовые переменные (зависимые), переменные  $U^+(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $U^-(t) \in \mathbb{R}^N$  — управляющие перемен-

ные (управления, независимые), динамическая модель нестационарная в силу зависимости от времени функций цены покупки  $B(t)$ ,  $t \geq t_0$ , и цены продажи  $S(t)$ ,  $t \geq t_0$ . Ограничения (1.6), накладываются как на управляющие, так и на фазовые переменные.

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть  $w_i(t)$  — общая стоимость бумаг типа  $i$ , и она равна сумме, которую инвестор может выручить из ее продажи в момент времени  $t$ :

$$w_i(t) = s_i(t)x_i(t), \quad t \geq t_0.$$

Значение  $w_0(t)$  будем считать равным  $x_0(t)$ . Тогда общая стоимость портфеля равна

$$w(t) = \sum_{i=0}^N w_i(t).$$

В векторном виде, используя (1.3), получим следующую формулу для общей стоимости портфеля:

$$w(t) = x_0(t) + S(t)^T X(t).$$

Задачи оптимизации портфеля, динамика которого описывается согласно (1.4), (1.5) и подчиняется ограничениям (1.6) будет связана с максимизацией введенной стоимости портфеля при различных дополнительных требованиях. Первая такая модель будет рассмотрена в разд. 1.2, а до этого опишем данные, которые будут использоваться для численных экспериментов.

### 1.1.1 Данные для численных экспериментов

В данном пункте будут описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов, а также приводится описание того, как строятся прогнозы для значений функций цен  $S(t)$ ,  $B(t)$ ,  $t \geq t_0$ , при рассмотрении недетерминированной модели (см. разд. 1.3), когда их точные значения не известны заранее.

Будем работать с двумя типами данных:

1. сгенерированных искусственно;
2. реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и синус-

соидаальной функции

$$\begin{aligned} b_i(t) &= k_{i0} + k_i t + \alpha_i \sin(r_i + g_i t); \\ s_i(t) &= 0.99 B_i(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для (1.7) значения  $k_{i0}$ ,  $k_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $r_i$ ,  $g_i$  подбираются таким образом, чтобы ни для каких  $i \neq j$  не совпадали периоды. Выбор функции  $s_i(t)$  в представленном виде обусловлен тем наблюдением реально существующий картины, что разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту, и таким образом, она будет хорошим приближением для используемых данных.

Реальные данные взяты из исторических курсов на сайте *coinmarketcap.com* за период ...

Тут вставить графики функций (НЕ ЗАБЫТЬ ВСТАВИТЬ :)

### 1.1.2 Предсказание значений

В общем случае, значения  $s_i(t)$  и  $b_i(t)$  в будущие моменты времени не известны. В настоящей работе будем прогнозировать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регрессионная модель [?], зависимости стоимости от времени. В этом пункте будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Линейная регрессия — метод восстановления зависимости между двумя переменными.

Для заданного множества из  $m$  пар  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , значений свободной и зависимой переменной требуется построить зависимость. Назначена линейная модель

$$y_i = f(\mathbf{w}, x_i) + \varepsilon_i$$

с аддитивной случайной величиной  $\varepsilon$ . Переменные  $x$ ,  $y$  принимают значения на числовой прямой  $\mathbb{R}$ .

Определим модель зависимости как

$$y_i = w_1 + w_2 x_i + \varepsilon_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор параметров  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$  есть решение нормального уравнения

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{y}$  — вектор, состоящий из значений зависимой переменной:  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ . Столбцы матрицы  $A$  есть подстановки значений свободной переменной  $x_i^0 \mapsto a_{i1}$  и  $x_i^1 \mapsto a_{i2}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}.$$

Зависимая переменная восстанавливается по полученным весам и заданным значениям свободной переменной

$$y_i^* = w_1 + w_2 x_i,$$

иначе

$$\mathbf{y}^* = A\mathbf{w}.$$

Для оценки качества модели используется критерий суммы квадратов регрессионных остатков, SSE — Sum of Squared Errors.

$$SSE = \sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*)^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*).$$

### 1.1.3 Оценка прогнозирования

В данном пункте рассматривается вопрос о качестве найденных оценок [?]. Находится их смещение, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

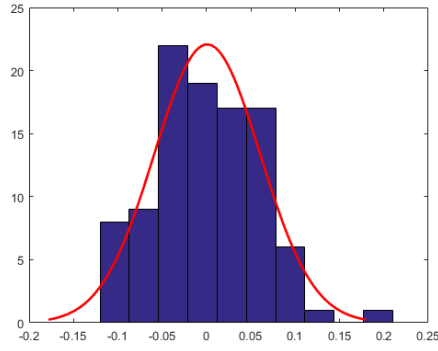
Для нахождения математического ожидания и вариации ошибки будем использовать встроенные *Matlab* функции *var*, *mean*. Данные функции вычисляют следующие значения:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i,$$

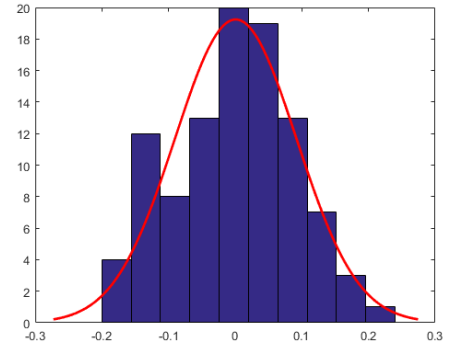
$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N |A_i - \mu|^2.$$

В процессе прогнозирования вычисляется ошибка следующим образом

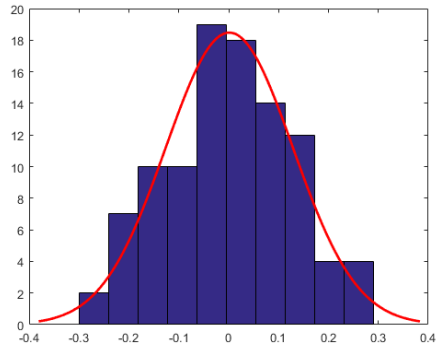
$$e(t) = \frac{x_{predicted}(t) - x_{real}(t)}{x_{real}(t)}.$$



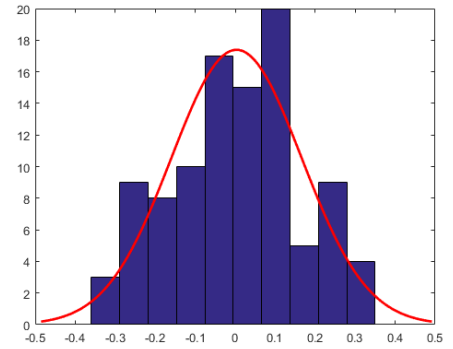
(a) На 1 шаг



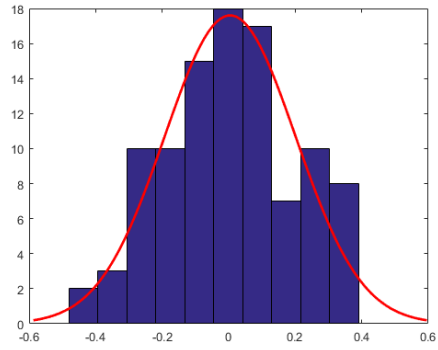
(b) На 2 шага



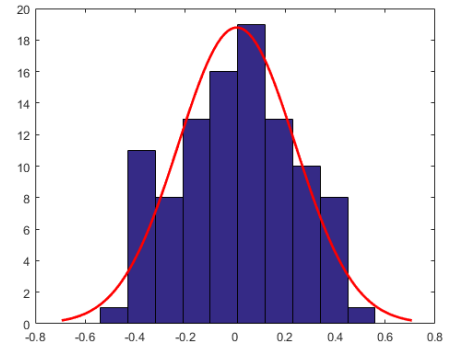
(c) На 3 шага



(d) На 4 шага



(e) На 5 шагов



(f) На 6 шагов

Рис. 1.1: Распределение ошибок предсказания

Данная ошибка была подсчитана для прогнозирования (**УКАЗАТЬ КАКИЕ ДАННЫЕ**) от одного до шести шагов вперед. На рисунке 1.1 изображены распределения ошибок прогнозирования будущих стоимостей продаж ценных бумаг.

В таблице 1.1 приведены численные значения математического ожидания и вариации для предсказаний.

Дисперсия  $D[e(t)]$  будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости этапа, которая имеет вид

$$L_t(U^+(t), U^-(t)) = \alpha D[e(t)] (\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t))^2,$$

t	mean	var
1	0.0007	0.0036
2	0.0007	0.0083
3	0.0012	0.0162
4	0.0032	0.0265
5	0.0043	0.0389
6	0.0064	0.0545

Таблица 1.1: Ошибки прогнозирования

где  $W(t)$  это собственно и сама ошибка прогнозирования.

Так как значения математического ожидания, представленные в таблице 1.1, близки к нулю, то будем считать, что полученные оценки являются несмещенными **(ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ)**.

## 1.2 Детерминированная модель

Настоящий раздел посвящен исследованию детерминированной модели оптимизации портфеля, т.е. случаю, когда в начальный момент времени  $t_0$  точно известны все значения цены продажи и покупки  $s_i(t)$  и  $b_i(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

**(ДУМАЮ, ЭТО НЕ НУЖНО В ДЕТ, СЛУЧАЕ)** Иными словами  $\bar{S}(t) = S(t)$  и  $\bar{B}(t) = B(t)$ .

Будем применять методы МРС, описанные в главе 1 для задачи оптимизации портфеля. При этом рассматриваются две прогнозирующие задачи МРС с конечным горизонтом прогнозирования  $T$ :

- задача максимизации стоимости портфеля без условий в терминальный момент времени  $t_0 + T$  (без терминального множества);
- задача максимизации стоимости портфеля с условиями в терминальный момент времени  $t_0 + T$  (с терминальным множеством).

### 1.2.1 Максимизация стоимости портфеля без терминального множества

Рассмотрим следующую задачу МРС с горизонтом планирования  $T$

$$\begin{aligned} \max_{U^+, U^-} J(X_0, x_{00}, U^+, U^-) &= w(t_0 + T) = \\ &= x_0(t_0 + T) + S(t_0 + T)^T X(t_0 + T), \end{aligned} \quad (1.8)$$

при условиях

$$\begin{aligned} X(t+1) &= X(t) + U^+(t) - U^-(t), \\ x_0(t+1) &= x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \\ X(t_0) &= X_0, \\ x_0(t_0) &= x_{00}; \\ X(t) &\geq 0, \\ x_0(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T}; \\ U^+(t) &\geq 0, \\ U^-(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отметим, что в задаче оптимального управления (1.8) – (1.9) функция стоимости не ограничена, кроме того, тут отсутствует функция стоимости этапа  $L_t(\cdot)$ , а максимизируется только терминальная стоимость портфеля.

Так как предположение  $J_\infty^*(x_0) < \infty$  из главы ?? не выполняется, то невозможно гарантировать устойчивость процесса, замкнутого обратной связью, построенной в результате применения МРС-алгоритма из главы ?? с прогнозирующей задачей оптимального управления (1.8) – (1.9). Также невозможно исследовать полученное решение на субоптимальность.

Приведем типичную картину поведения инвестора, использующего для управления портфелем задачу (1.8) – (1.9). Для этого приведем результаты численных экспериментов для двух ценных бумаг ( $N = 2$ ) при горизонте прогнозирования  $T = 6$  и используя синтетические и реальные данные.

На рисунке 1.2 представлены данные проведенного численного эксперимента. Верхний график показывает количество ценных бумаг первого и второго типа в каждый момент времени. Нижний график представляет собой общую стоимость базового портфеля (с тривиальным управлением — зеленая кривая) и стоимость портфеля под управлением МРС (красная кривая).

Как видно из рисунка 1.2, при использовании задачи (1.8) – (1.9) происходят частые операции вида: продать все бумаги типа  $i$  и на освободившиеся



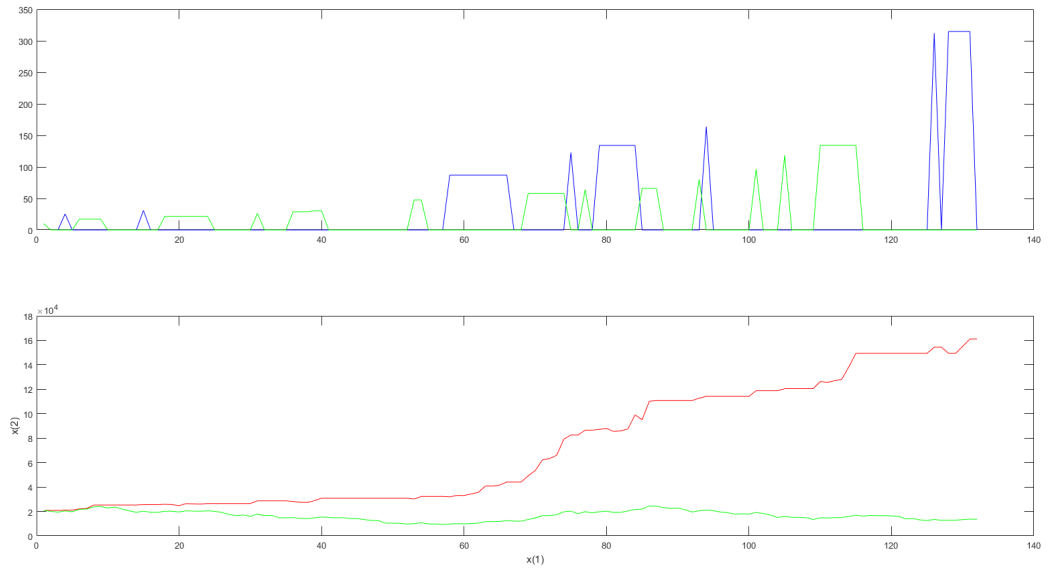


Рис. 1.2: Детерминированная модель без регуляризации

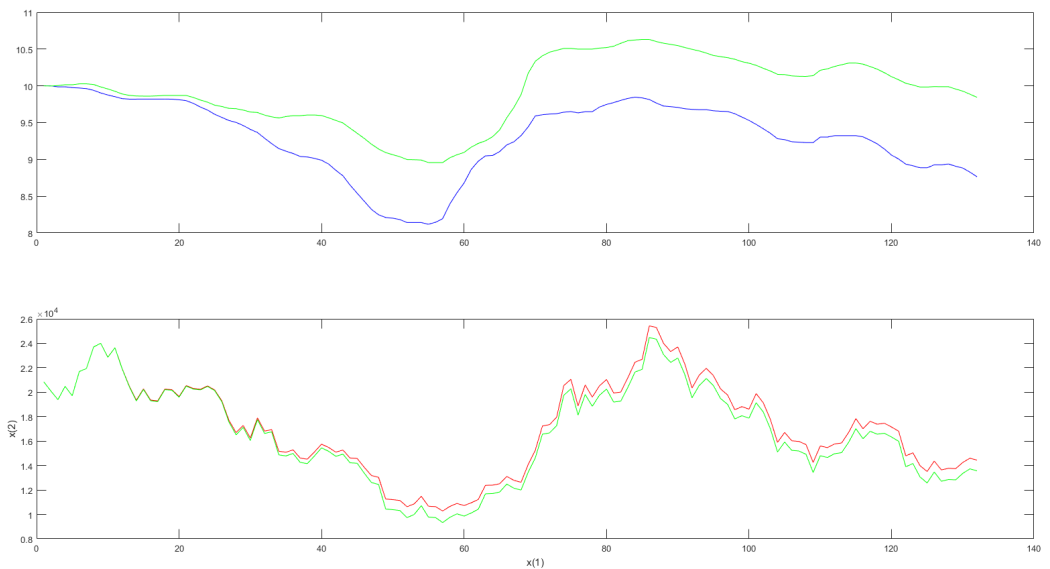


Рис. 1.3: Детерминированная модель с регуляризацией

деньги купить бумаги типа  $j$ ,  $i, j = 1, 2$ . Для инвестора такое поведение может приводить к проблемам, поскольку ему приходится постоянно перестраивать портфель, что приносит в его поведение большие риски. Подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерминированной моделью.

Изменим критерий качества (1.8), добавив в него с целью регуляризации стоимость этапа  $L(U^+(t), U^-(t))$ .

Получим следующую задачу

$$\min_{U^+, U^-} J(x, u) = \sum_{i=0}^T L(U^+(i), U^-(i)) - w(T),$$

при условиях (1.9). Заметим, что здесь критерий качества минимизируется, стоимость портфеля взята за знаком  $-$ .

Если в качестве функции этапа взять, например, функцию вида

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))^2,$$

которая характеризует весь оборот денег, произошедший в момент времени  $t$ , то графики изменятся (для  $\alpha = 0.01$ ) как представлено на рисунке 1.3.

Аналогичная картина получается в численных экспериментах со сгенерированными тестовыми данными. Без функции стоимости этапа результаты представлены на рисунке 1.4, со стоимостью этапа — на рисунке 1.5.

### 1.2.2 Максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Рассмотрим теперь в качестве прогнозирующей задачи MPC — задачу оптимального управления с горизонтом планирования  $T$  и ограничениями, накладываемыми на состав портфеля в терминальный момент времени  $t_0 + T$ :

$$\max_{U^+, U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) = x_0(t_0 + T) + X(t_0 + T)^T S(t_0 + T); \quad (1.10)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \max_{U^+, U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) &= x_0(t_0 + T) + S(t_0 + T)^T X(t_0 + T); \\ X(t + 1) &= X(t) + U^+(t) - U^-(t), \\ x_0(t + 1) &= x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t), \\ X(t_0) &= X_0, \\ x_0(t_0) &= x_{00}; \\ X(t) &\geq 0, \\ x_0(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T}; \\ U^+(t) &\geq 0, \\ U^-(t) &\geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1}; \\ \frac{x_k(t_0 + T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0 + T)} &= \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

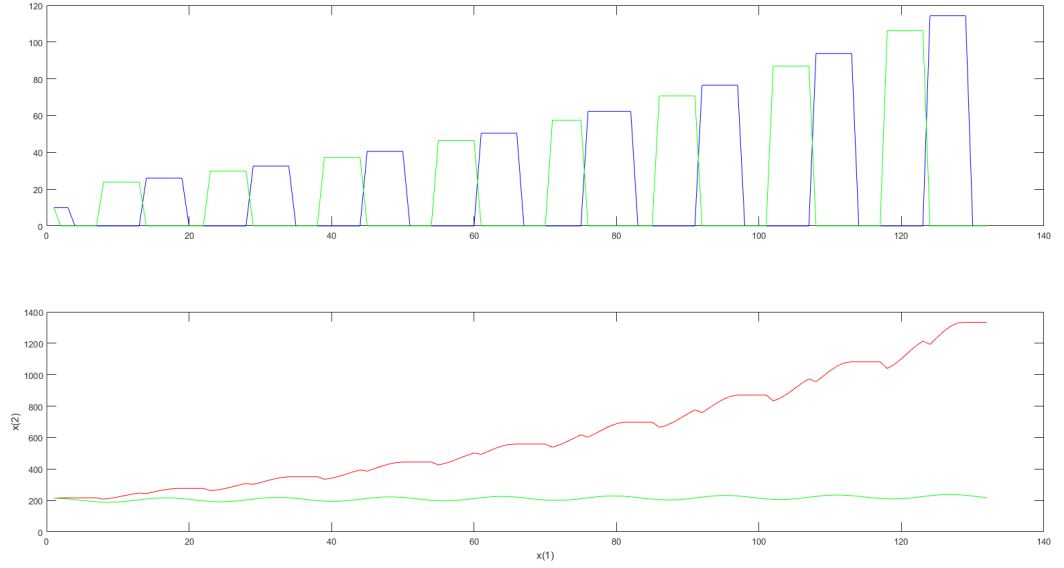


Рис. 1.4: Детерминированная модель без регуляризаций

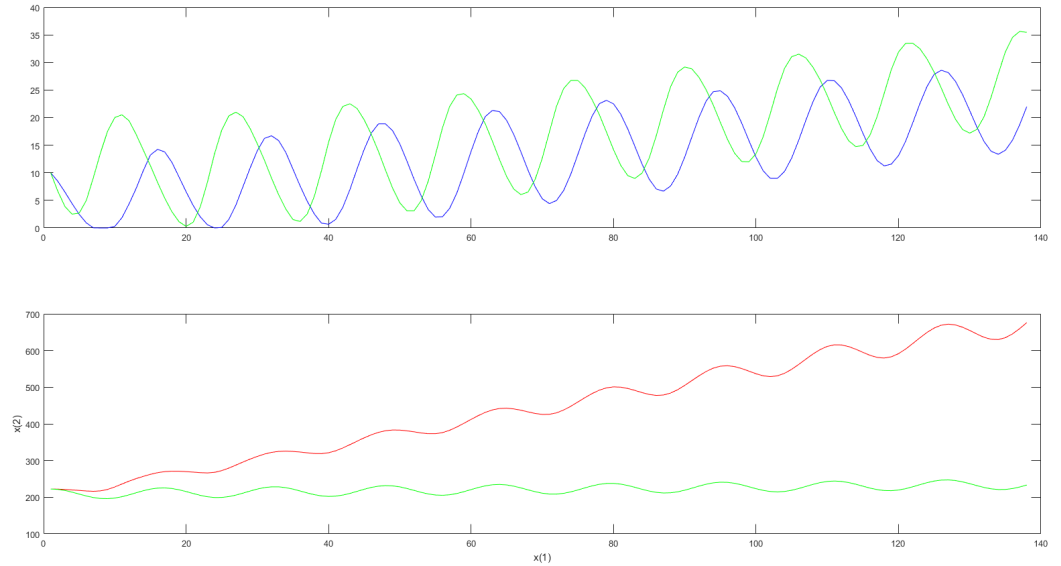


Рис. 1.5: Детерминированная модель с регуляризацией

Поясним смысл введенного ограничения

$$\frac{x_k(t_0 + T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0 + T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Здесь требуется, чтобы в момент времени  $t_0 + T$  пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом MPC с той лишь разницей, что в стандартных схемах экономического MPC в качестве устойчивого

состояния используется точка  $x_s$ , а в данном случае это целый луч, содержащий значения с одинаковыми пропорциями.

Предлагаемый подход, кроме того, дает возможность сравнивать эффективность управления МРС без учета колебания курсов, поскольку отношения стоимостей портфелей с тривиальным управлением, и с управлением МРС, если они содержат одинаковые пропорции, не зависят от текущих курсов.

**Теорема 1.1** Задача (1.10) – (1.11) разрешима.

Доказательство. Заметим, что тривиальное управление

$$U^+(t_0 + t) = U^-(t_0 + t) \equiv 0, \quad t = \overline{0, T-1},$$

является допустимым. Кроме того, при этом управлении значение функции  $\max_{U^+, U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-)$  в (1.10) **(ПРОПУЩЕНА ФРАЗА)**, следовательно, задача (1.10) – (1.11) разрешима.

**Теорема 1.2** Пусть для начальных условий  $x_{00}, X_0$  из задачи (1.10) – (1.11) получено управление МРС

$$\{(U^+(0), U^-(0)), (U^+(1), U^-(1)), \dots\},$$

и соответствующая ей траектория

$$\{(\hat{X}(0), \hat{x}_0(0)), (\hat{X}(1), \hat{x}_0(1)), \dots\}$$

тогда любого  $m \in \mathbb{Z}_+$  верно:

$$\max_{U^+, U^-} J(\hat{X}(m), \hat{x}_0(m), U^+, U^-) \geq x_0(0) + X(0)^T S(m + T).$$

Данная теорема утверждает, что в любой момент времени портфель, управляемый МРС за  $T$  шагов, может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет не меньше, чем в случае, когда постоянно используется тривиальное управление (инвестор не управляет портфелем).

Доказательство. Будет добавлено позже **(НЕ ЗАБЫТЬ ДОБАВИТЬ)**

Приведем пример того, как будет вести себя система при управлении МРС-регулятором, использующим задачу оптимального управления с терминальным множеством. На рисунке 1.6 представлен результат численного

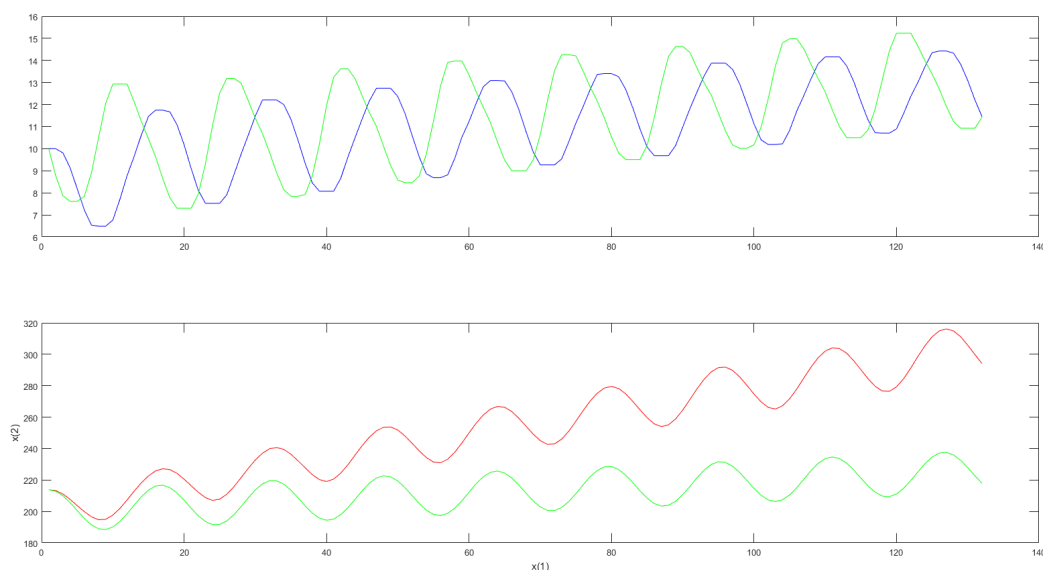


Рис. 1.6: Детерминированная модель с регуляризацией

эксперимента для сгенерированных данных. Как видно, результирующая стоимость получается меньше, нежели в случае без терминального множества (рисунок 1.5). Но при этом уже диапазон, в котором изменяется количество ценных бумаг каждого типа.

### 1.3 Недетерминированная модель

В настоящем разделе рассмотрим случай, когда точно не известны будущие стоимости активов, и модель должна оперировать прогнозируемыми значениями на горизонте планирования.

Покажем, что для недетерминированного случая нельзя просто использовать предсказания и работать как в детерминированном случае без регуляризации.

На рисунке 1.7 представлен такой случай, при этом на нижнем графике видно, что стоимость портфеля при тривиальном управлении будет выше, нежели при управлении MPC.

Это связано с тем, что управление строится на основе прогнозируемых данных, и при этом одинаково учитывается весь горизонт планирования. А хотелось бы сделать так, чтоб более дальним прогнозам уделялось меньше внимания.

Из это делаем вывод, что необходимо вводить функцию стоимости этапа, которая будет учитывать ошибки прогнозирования.

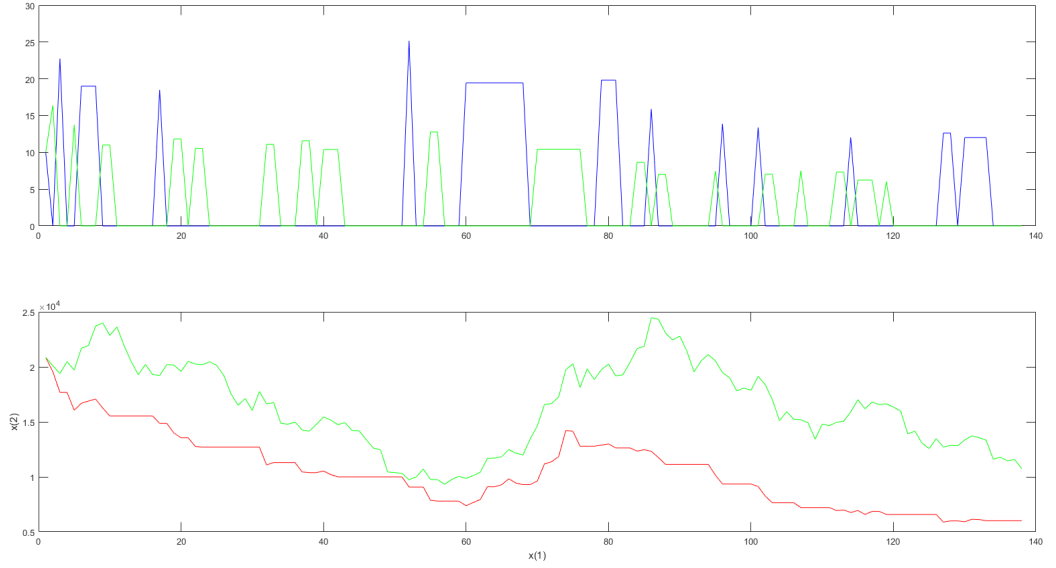


Рис. 1.7: Недетерменированная модель без регуляризаций

В случае, когда точно не известны значения  $s_i(t)$  и  $b_i(t)$ , наша функция перехода для  $x_0(t)$ , в соответствии с (??) имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t). \quad (1.12)$$

Где  $B(t)$  и  $S(t)$  описаны в (1.3).

И при этом  $B(t) = (I + E_1(t))\bar{B}(t)$ , где  $\bar{B}(t)$  это прогнозируемое значение,  $I$  – единичная матрица,  $E_1(t)$  – случайная диагональная матрица ошибок, при этом  $M[E_1(t)] = 0$  (ссылка на часть с оценкой ошибок прогнозирования). Аналогично для  $S(t) = \bar{S}(t)(1 + E_2(t))$ .

Так как изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что  $E_1(t) \equiv E_2(t) = E(t)$

Сейчас перепишем (??):

$$\begin{aligned} x_0(t+1) = x_0(t) - \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) - \\ - (E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Оценим для величины  $x_0(t+1)$  математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \quad (1.14)$$

Будем считать, что величины  $x_0(t)$  и  $W(t)$  независимы, кроме того, сто-

имости активов не коррелируют

$$\begin{aligned}
D[x_0(t+1)] &= D[x_0(t) - (E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t)] = \\
&= D[x_0(t)] + D[(E(t)\bar{B}(t))^T U^+(t) + (E(t)\bar{S}(t))^T U^-(t)] \leq \\
&= D[x_0(t)] + \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t) \rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t) \rangle^2.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Сейчас можем добавить учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будет служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания. Введем функцию стоимости этапа следующим образом:

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t) \rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t) \rangle^2. \tag{1.16}$$

Оценки на значения  $D[E(t)]$  зависят от способа предсказания векторов  $S(t)$  и  $B(t)$ .

$$\begin{aligned}
&\max_{U^+, U^-} - \sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0+t), U^-(t_0+t)) + \\
&\quad + x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T); \\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t) \\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \\
&X(t_0) = X_0; \\
&x(t_0) = x_0; \\
&X(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T}; \\
&x_0(t) \geq 0; \\
&U^+(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1}; \\
&U^-(t) \geq 0; \\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0, N}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Результат применения данного управления представлен на рисунке 1.8. Тут видим, что применение управления МРС уже лучше, нежели тривиальное управление.

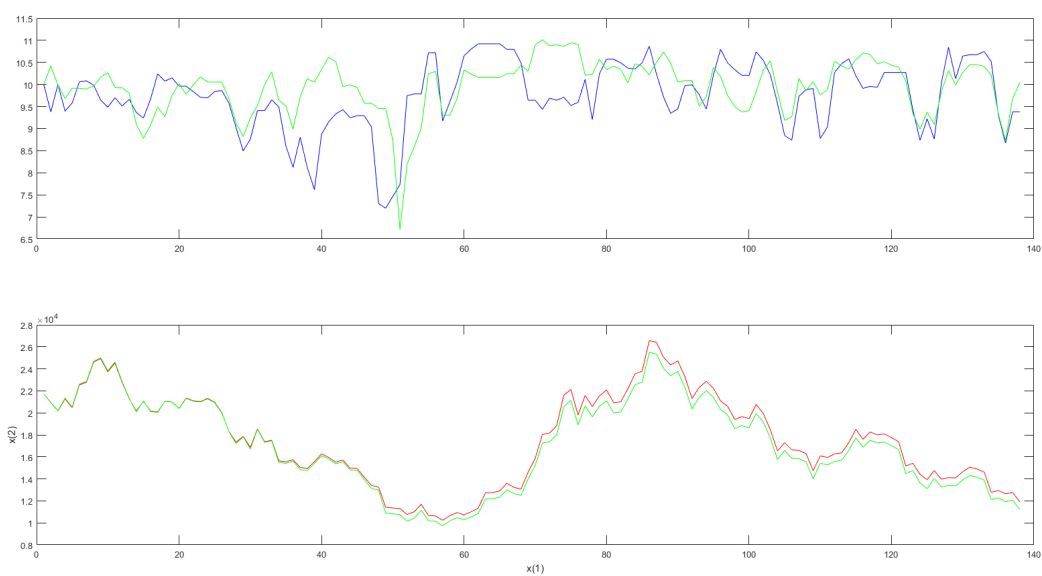


Рис. 1.8: Недетерминированная модель с регуляризацией