ГЛАВА 1

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1 Базовые определения модели

В данной главе введем основные понятия и обозначения, которые будем использовать в дальнейшем для решения задачи оптимизации портфеля.

Портфель – совокупность инвестиционных вложений, состоящих из ценных бумаг и свободных финансов.

Портфель состоит из N типов бумаг. Количество бумаг i-го типа в момент времени $t \geq 0$ равняется $x_i(t)$, где $x_i(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Обозначим $x_0(t)$ как количество свободных финансов в момент времени t.

Под $u_i^+(t)$ будем понимать сколько инвестор купил ценных бумаг типа i в момент времени t. Под $u_i^-(t)$ будем понимать сколько инвестор продал ценных бумаг типа i в момент времени t. При этом стоимость покупки этой бумаги равна $b_i(t)$ (buy), а продажа $s_i(t)$ (sell).

Таким образом, на каждом шаге покупаем ценнных бумаг типа i на сумму $b_i(t)u_i^+(t)$ и продаем на сумму $s_i(t)u_i^-(t)$.

Таким образом, количество свободных средств в следующий момент времени будет равно

$$x_0(t+1) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)\right). \tag{1.1}$$

Количество ценных бумаг типа i в момент времени $t+1$ будет равно

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i). \tag{1.2}$$

Представим все это в векторной форме. Введем следующие определения:

$$
\begin{aligned}
&X(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)]^T;\\
&U^+(t) = [u_1^+(t), \ldots, u_N^+(t)]^T;\\
&U^-(t) = [u_1^-(t), \ldots, u_1^-(t)]^T;\\
&B(t) = [b_1(t), \ldots, b_N(t)]^T;\\
&S(t) = [s_1(t), \ldots, s_N(t)]^T.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Сейчас используя (1.3) перепишем (1.2) для $X(t)$:

$$
X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t). \tag{1.4}
$$

Представим (1.1) в векторной форме:

$$
x_0(t+1) = x_0(t) + U^+(t)^t B(t) - U^-(t)^t S(t). \tag{1.5}
$$

На значения X, x_0, U^+, U^- накладываются следующие естественные ограничения:

$$
\begin{aligned}
&X(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0;\\
&x_0(t) \geq 0;\\
&U^+(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0;\\
&U^-(t) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть $w_i(t)$ общая стоимость бумаг типа i, и она равна сумме, которую сейчас можем выручить из ее продажи, т.е. $w_i(t) = s_i(t)x_i(t)$. Значение $w_0(t)$ будем считать равным $x_0(t)$. Тогда общая стоимость портфеля равна

$$
w(t) = \sum_{i=0}^{N} w_i(t).
$$

Или в векторном виде, используя (1.3):

$$
w(t) = x_0(t) + X(t)^T S(t).
$$

1.1.1 Данные для численных экспериментов

В данной главе описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов. Тут же дано описание того, как строятся прогнозы для значений функций $s_i(t)$ и $b_i(t)$ в случае, когда работаем с недетерминированной моделью, то есть заранее их точные значения не известны.

Будем работать с двумя типами данных, сгенерированных искусственно и реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и синусоидальной функции

$$\begin{aligned} &B_i(t) = k_{i0} + k_i t + \alpha_i \sin(r_i + g_i t); \\ &S_i(t) = 0.99 B_i(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для (1.7) значения k_{i0}, k_i, α_i, r_i, g_i подбираются таким образом, чтоб ни для каких $i \neq j$ не совпадали периоды. $S_i(t)$ выбрана в таком виде, так как это является неплохим приближением реально существующий картины, когда разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту.

Реальные же данные взяты из исторических курсов на сайте *coinmarketcap.com* за период ...

Тут вставить графики функций

Предсказание значений

В общем случае, значения $S_i(t)$ и $B_i(t)$ в будущие моменты времени не известны. В этой работе будем прогнозировать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регрессионная модель [1], зависимости стоимости от времени, в этом разделе будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Линейная регрессия — метод восстановления зависимости между двумя переменными.

Для заданного множества из m пар (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$, значений свободной и зависимой переменной требуется построить зависимость. Назначена линейная модель

$$y_i = f(\mathbf{w}, x_i) + \varepsilon_i$$

с аддитивной случайной величиной ε. Переменные x, y принимают значения на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определим модель зависимости как

$$y_i = w_1 + w_2 x_i + \varepsilon_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор параметров $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ есть решение нормального уравнения

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y},$$

где $\mathbf{y}$ — вектор, состоящий из значений зависимой переменной, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Столбцы матрицы A есть подстановки значений свободной переменной $x_i^0 \mapsto a_{i1}$ и $x_i^1 \mapsto a_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$. Матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}.$$

Зависимая переменная восстанавливается по полученным весам и заданным значениям свободной переменной

$$y_i^* = w_1 + w_2 x_i,$$

иначе

$$\mathbf{y}^* = A\mathbf{w}.$$

Для оценки качества модели используется критерий суммы квадратов регрессионных остатков, SSE — Sum of Squared Errors.

$$SSE = \sum_{i=1}^{m} (y_i - y_i^*)^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*).$$

[1]Стрижов В. В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей. – Вычислительный центр им. АА Дородницына РАН, 2008.

Оценка прогнозирования

В данной секции рассказывается о качестве найденных оценок[2]. Находится их смещение, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

[2]Боровков А. А. Глава 4. Числовые характеристики случайных величин;—5-е изд //М.: Либроком. – 2009.

Для нахождения математического ожидания и вариации ошибки будем использовать встроенные $Matlab$ функции var, $mean$. Данные функции вы-

t	mean	var
1	0.0007	0.0036
2	0.0007	0.0083
3	0.0012	0.0162
4	0.0032	0.0265
5	0.0043	0.0389
6	0.0064	0.0545

Таблица 1.1: Ошибки прогнозирования

числяют следующие значения:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i$$

$$V = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} |A_i - \mu|^2$$

В процессе прогнозирования, вычисляется ошибка следующим образом

$$e(t) = \frac{x_{predicted}(t) - x_{real}(t)}{x_{real}(t)}$$

Данная ошибка была подсчитана для прогнозирования от одного до шести шагов вперед. На рисунке (1.1) изображены распределения ошибок прогнозирование будущих стоимостей продаж ценных бумаг.

В таблице (**??**) приведены численные значения математического ожидания и вариации для предсказаний

Дисперсия будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости перехода в виде

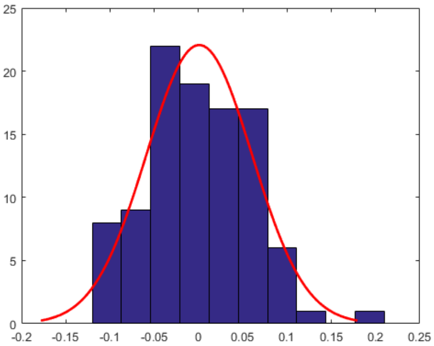
$$L_t(U^+(t), U^-(t)) = \alpha * D[e(t)] \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)^2$$

Где $W(t)$ это собственно и сама ошибка прогнозирования.

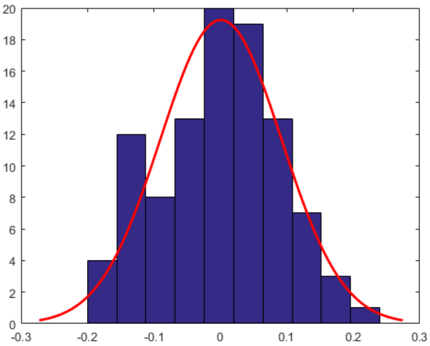
Так как значения математического ожидания, представленные в таблице **??**, близки к нулю, то будем считать, что полученные оценки являются несмещенными.

1.1.2 Детерменированная модель

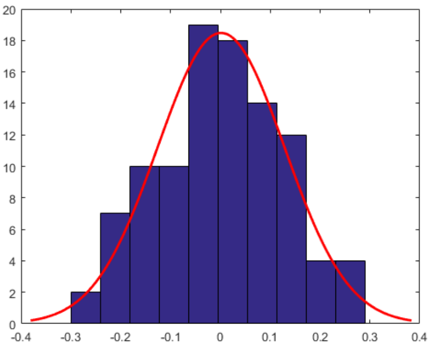
В данной главе рассмотрим детерминированную модель, а именно, когда нам точно известны наперед все значения $s_i(t)$ и $b_i(t)$.



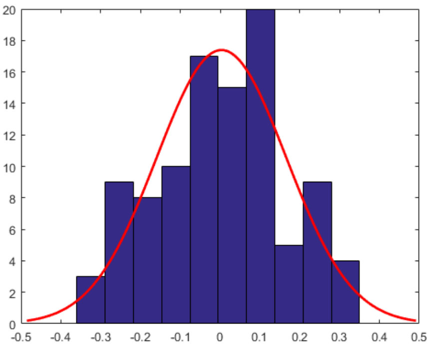
(a) На 1 шаг



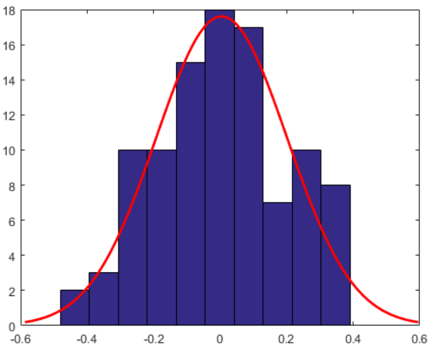
(b) На 2 шага



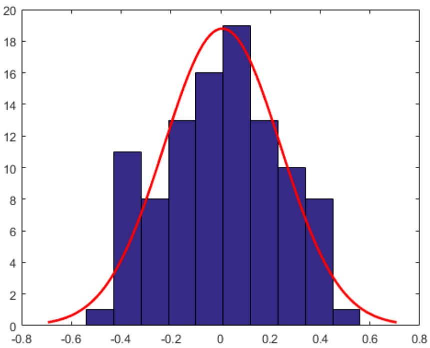
(c) На 3 шага



(d) На 4 шага



(e) На 5 шагов



(f) На 6 шагов

Рис. 1.1: Распределение ошибок предсказания

Иными словами $\bar{S}(t) = S(t)$ и $\bar{B}(t) = B(t)$

В таком случае, можем рассмотреть следующие модели:

- максимизация стоимости портфеля без терминального множества
- максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Максимизация стоимости портфеля без терминального множества

Рассмотрим следующую задачу MPC на горизонте планирования T

$$
\begin{aligned}
&\max_{U^+,U^-} J(X_0, x_0, U^+, U^-) = w(t_0+T) = x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T);\\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t);\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t)\\
&X(t_0) = X_0;\\
&x_(t_0) = x_0;\\
&X(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&x_0(t) \geq 0;\\
&U^+(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1};\\
&U^-(t) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Отметим, что в данной задаче функция стоимости не ограничена, кроме того, тут отсутствует функция стоимости этапа а есть только терминальная стоимость.

Так как предположение $J^*_\infty(x_0) < \infty$ из главы (**??**) не выполняется, то не можем гарантировать устойчивость и исследовать на субоптимальность.

Проведем численные эксперименты для $T = 6$ и $N = 2$ для синтетических и настоящих данных.

На рисунке (1.2) представлены данные численного эксперимента. Верхний график показывает количество ценных бумаг первого и второго типа в каждый момент времени. Нижний график представляет собой общую стоимость базового портфеля (с тревиальным управление) и стоимость портфеля под управлением MPC.

Как видим, у нас происходят частые операции вида: продать все бумаги типа i и на освободившиеся деньги купить бумаги типа j. Это может представлять собой проблему, так как инвестору приходится постоянно перестра-

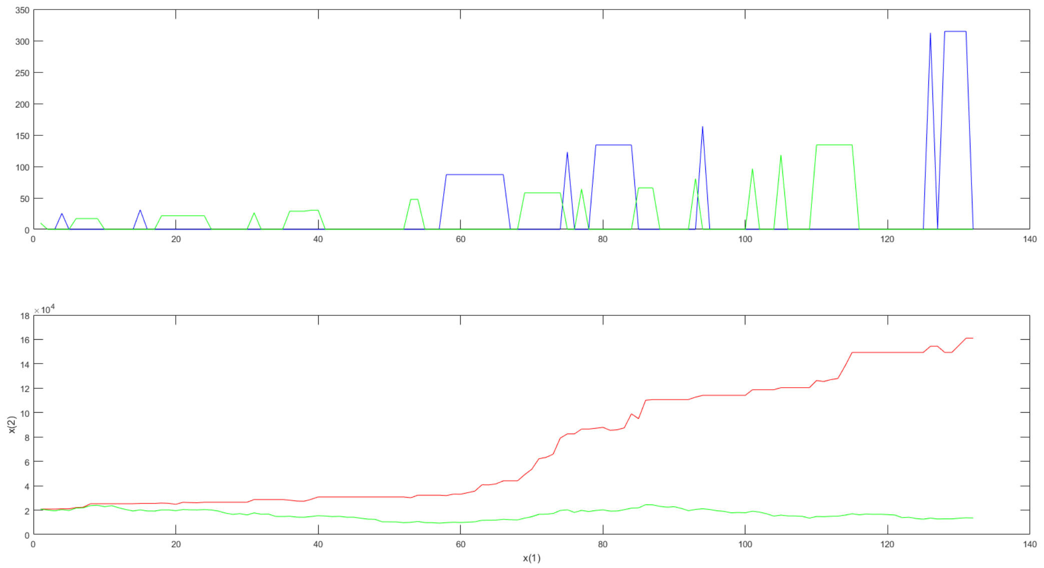


Рис. 1.2: Детерменированная модель без регуляризации

ивать портфель, что может привносить с собой большие риски (подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерменированной моделью).

Изменим функцию стоимости таким образом, чтоб добавить в нее стоимость этапа.

$\min_{U^+,U^-} J(x,u) = \sum_{i=0}^{T} L(U^+(i),U^-(i)) - w(T)$.

Если в качестве функции стоимости взять, скажем

$$L(U^+(t),U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))^2,$$

то есть весь оборот денег, который был в момент t, то наши графики изменятся уже следующим образом (для $\alpha = 0.01$) рисунок 1.3.

Представим результаты аналогичных экспериментов, но уже с генерированными тестовыми данными. Без стоимости этапа рисунок 1.4, со стоимостью этапа 1.5.

Максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Рассмотрим следующую задачу MPC на горизонте планирования T

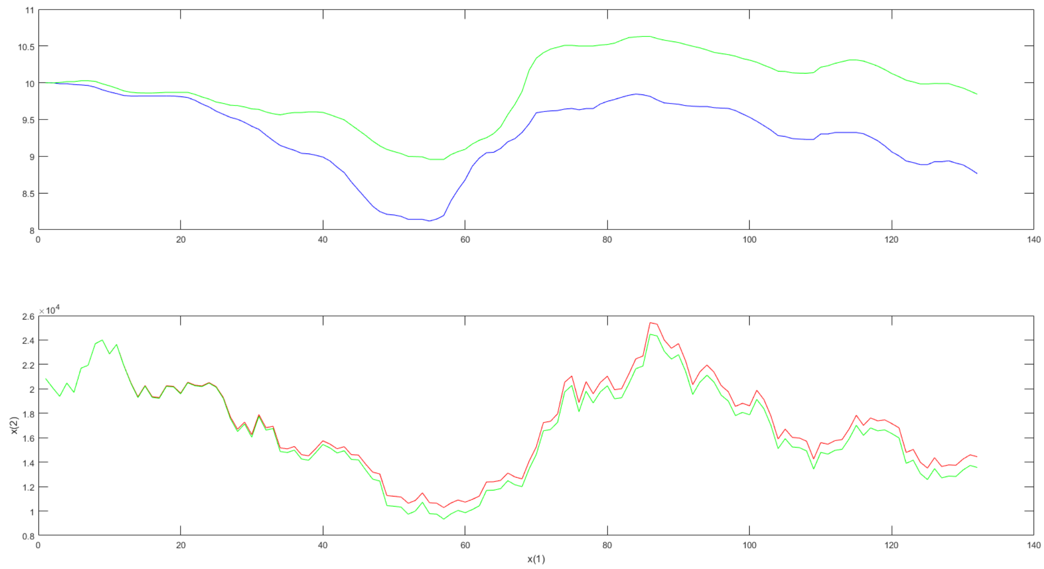


Рис. 1.3: Детерменированная модель с регуляризацией

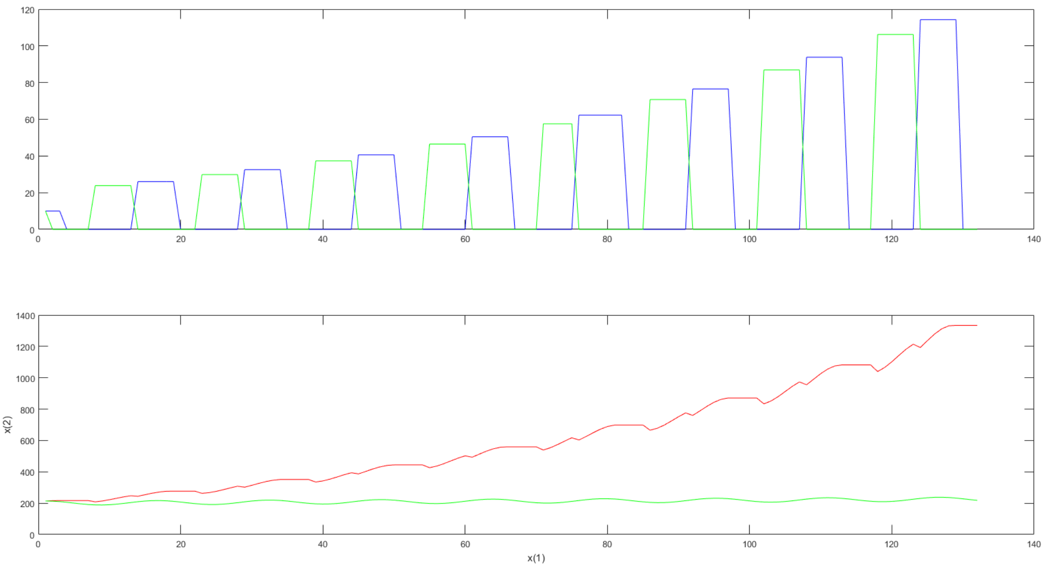


Рис. 1.4: Детерменированная модель без регуляризацией

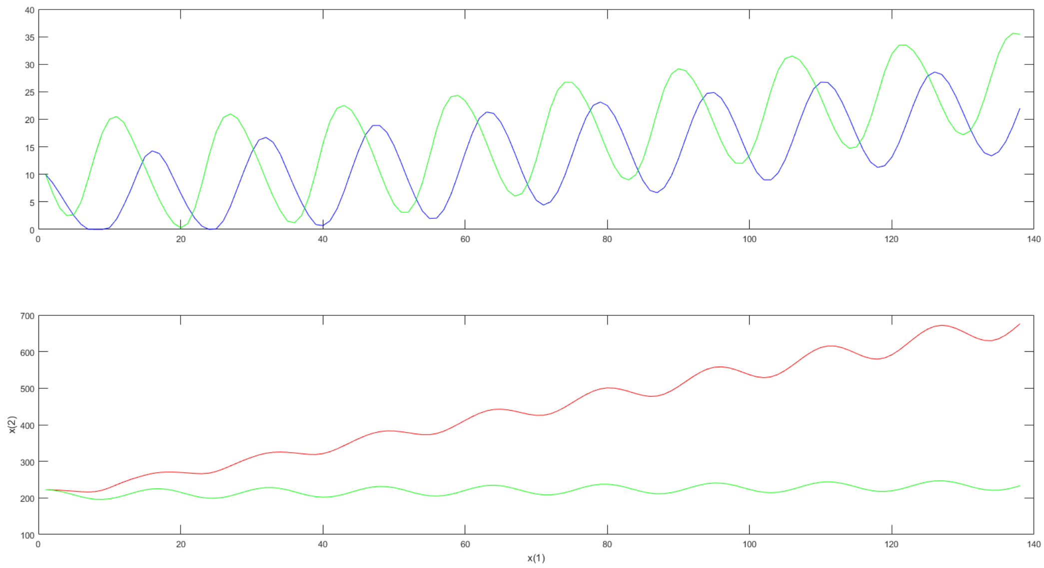


Рис. 1.5: Детерменированная модель с регуляризацией

$$
\begin{aligned}
&\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-) = x_0(t_0+T) + X(t_0+T)^T S(t_0+T);\\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t);\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t);\\
&X(t_0) = X_0;\\
&x_(t_0) = x_0;\\
&X(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&x_0(t) \geq 0;\\
&U^+(t) \geq 0, \quad t = overlinet_0, t_0+T-1;\\
&U^-(t) \geq 0;\\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0, N}.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Иначе говоря, требуется, чтоб в момент времени t_0+T пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом MPC (только там в качестве устойчивого состояния используется точка x_s, а в данном случае это целый луч, содержащий значения с одинаковыми пропорциями). Кроме того, этот подход дает возможность сравнивать эффективность управления MPC без учета колебания курсов. Так как отношения стоимостей портфелей с тривиальным управление, и с управлением MPC, если они содержат одинаковые пропорции, не зависит от текущих курсов.

Теорема 1.1 Задача (1.15) разрешима

Доказательство. Заметим, что управление

$$U^+(t_0+t) = U^-(t_0+t) \equiv 0, \quad \forall t = \overline{0, T-1}$$

является допустимым, кроме того, при этом управлении значение функции $\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-)$ из (1.15) следовательно наша задача разрешима.

Теорема 1.2 Пусть для $x_0(0), X(0)$ из задачи (**??**) получено управление MPC

$$\{(U^+(0), U^-(0)), (U^+(1), U^-(1)), \dots\},$$

и соответствующая ей траектория

$$\{(\hat{X}(0), \hat{x}_0(0)), (\hat{X}(1), \hat{x}_0(1)), \dots\}$$

тогда любого $m \in \mathbb{Z}_+$ верно:

$$\max_{U^+,U^-} J(\hat{X}(m), \hat{x}_0(m), U^+, U^-) \geq x_0(0) + X(0)^T S(m+T).$$

Доказательство. Будет добавлено позже

Иными словами, это означает, что в любой момент времени, портфель, управляемый MPC за T шагов может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет не меньше, нежели бы постоянно использовалось тривиальное управление.

Приведем пример, как будет вести себя наша система с терминальным множеством. На рисунке 1.6 представлен результат численного эксперимента для сгенерированных данных. Как видно, результативная стоимость получается меньше, нежели в случае без терминального множества (рисунок 1.5). Но при этом уже диапазон, в котором изменяется количество ценных бумаг каждого типа.

1.1.3 Недетерминированная модель

В данной главе рассмотрен случай, когда точно не известны будущие стоимости активов и модель должна оперировать прогнозируемыми значениями на горизонте планирования.

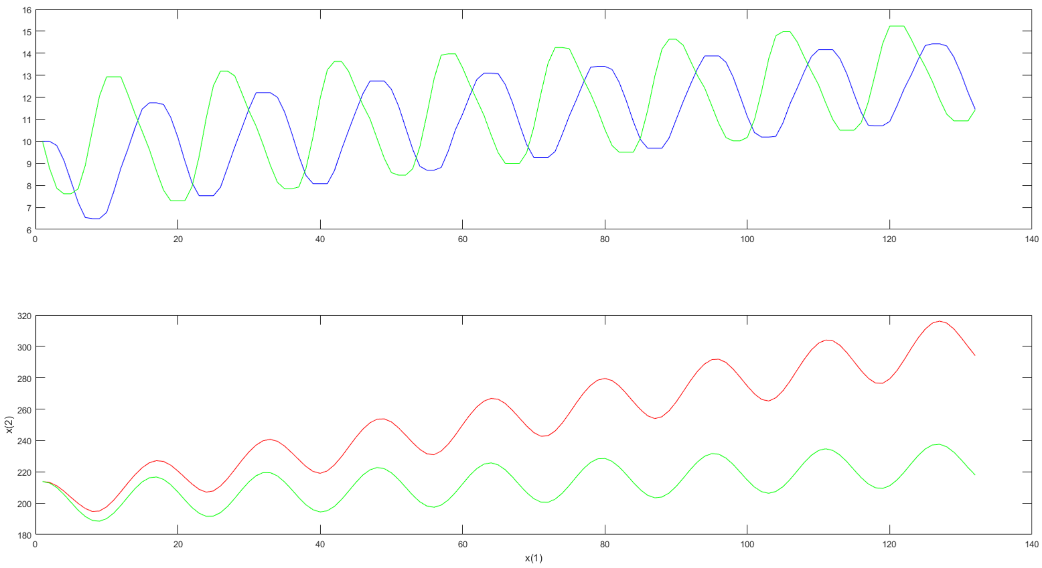


Рис. 1.6: Детерменированная модель с регуляризацией

Покажем, что для недетерминированного случая нельзя просто использовать предсказания и работать как в детерминированном случае без регуляризации.

На рисунке 1.7 представлен такой случай, при этом на нижнем графике видно, что стоимость портфеля при тривиальном управлении будет выше, нежели при управлении MPC.

Это связано с тем, что управление строится на основе прогнозируемых данных, и при этом одинаково учитывается весь горизонт планирования. А хотелось бы сделать так, чтоб более дальним прогнозам уделялось меньше внимания.

Из это делаем вывод, что необходимо вводить функцию стоимости этапа, которая будет учитывать ошибки прогнозирования.

В случае, когда точно не известны значения $s_i(t)$ и $b_i(t)$, наша функция перехода для $x_0(t)$, в соответствии с (1.5) имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t). \tag{1.10}$$

Где $B(t)$ и $S(t)$ описаны в (1.3).

И при этом $B(t) = (I + E_1(t))\bar{B}(t)$, где $\bar{B}(t)$ это прогнозируемое значение, I – единичная матрица, $E_1(t)$ – случайная диагональная матрица ошибок, при этом $M[E_1(t)] = 0$ (ссылка на часть с оценкой ошибок прогнозирования). Аналогично для $S(t) = \bar{S}(t)(1 + E_2(t))$.

Так как изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что $E_1(t) \equiv E_2(t) = E(t)$

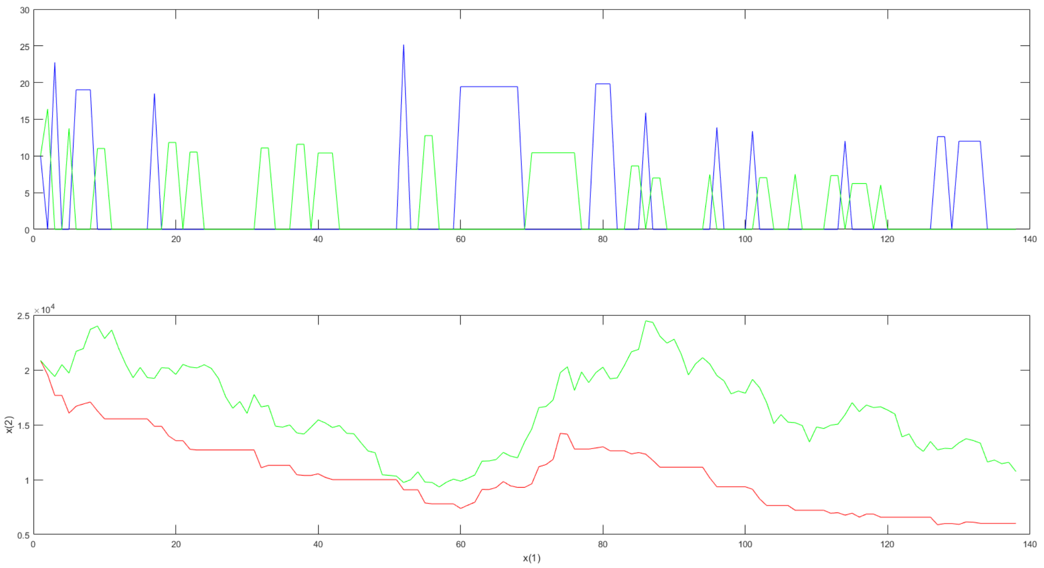


Рис. 1.7: Недетерменированная модель без регуляризацией

Сейчас перепишем (1.5):

$$x_0(t+1) = x_0(t) - \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) - \\ - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t). \tag{1.11}$$

Оценим для величины $x_0(t+1)$ математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \tag{1.12}$$

Будем считать, что величины $x_0(t)$ и $W(t)$ независимы, кроме того, стоимости активов не коррелируют

$$D[x_0(t+1)] = D[x_0(t) - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] = \\ = D[x_0(t)] + D[\left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] \leq \\ = D[x_0(t)] + \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t)\rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t)\rangle^2. \tag{1.13}$$

Сейчас можем добавить учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будит служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания. Введем функцию стоимости этапа следующим образом:

$$L(U^+(t), U^-(t)) = \alpha \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t) \rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t) \rangle^2. \quad (1.14)$$

Оценки на значения $D[E(t)]$ зависят от способа предсказания векторов $S(t)$ и $B(t)$.

$$\begin{aligned}
&\max_{U^+, U^-} -\sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0+t), U^-(t_0+t)) + \\
&\qquad + x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T); \\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t) \\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t) \\
&X(t_0) = X_0; \\
&x_(t_0) = x_0; \\
&X(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T}; \\
&x_0(t) \geq 0; \\
&U^+(t) \geq 0, \quad t = overline t_0, t_0+T-1; \\
&U^-(t) \geq 0; \\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad \forall k \in \overline{0, N}.
\end{aligned} \quad (1.15)$$

Результат применения данного управления представлен на рисунке 1.8. Тут видим, что применение управления MPC уже лучше, нежели тривиальное управление.

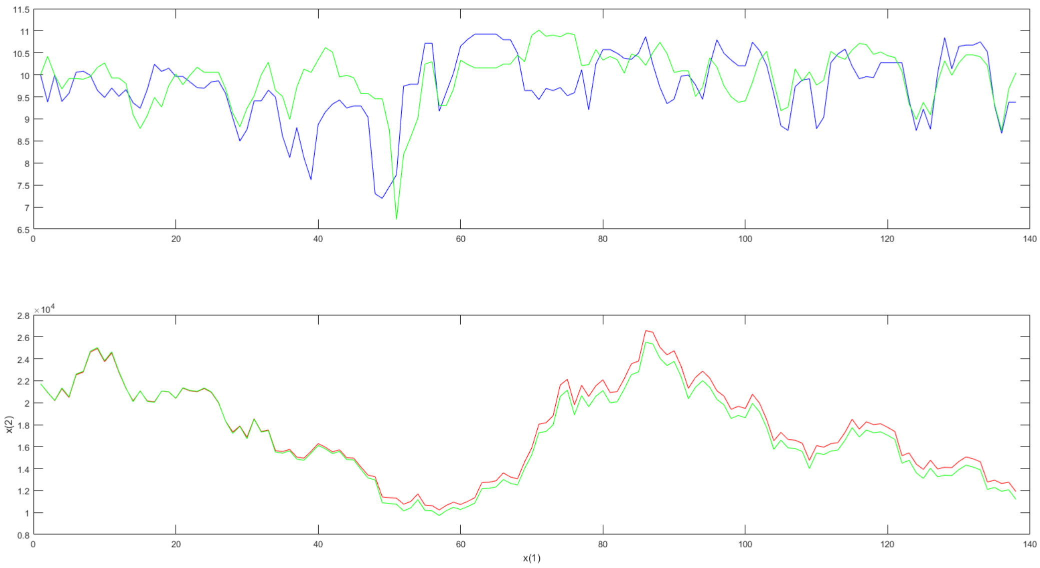


Рис. 1.8: Недетерменированная модель с регуляризацией