ГЛАВА 1

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей главе вводятся основные понятия и определения, строятся математические модели, описывающие динамику инвестиционного портфеля, и формулируются задачи его оптимизации. Рассматриваемые модели можно разбить на два класса: детерминированные, в которых заданы функции цены покупки и продажи ценных бумаг, и недетерминированные, в которых указанные функции прогнозируются на заданном горизонте планирования. Описываются данные, которые будут использоваться для проведения численных экспериментов, и методы прогнозирования. Обсуждаются достоинства и недостатки различных подходов при оптимизации портфелей.

1.1 Основные положения модели

Портфель — совокупность инвестиционных вложений, состоящих из ценных бумаг и свободных финансов.

Портфель состоит из N типов бумаг. Количество бумаг i-го типа ($i = \overline{1, N}$) в момент времени $t \geq t_0$ равняется $x_i(t)$, где $x_i(t) \geq 0$. Обозначим через $x_0(t)$ — количество свободных финансов в момент времени $t \geq t_0$.

Через $u_i^+(t)$ будем обозначать количество ценных бумаг типа i, которые инвестор купил в момент времени t. Соответственно, через $u_i^-(t)$ обозначим, сколько инвестор продал ценных бумаг типа i в момент времени t. Пусть стоимость покупки i-ой бумаги равна $b_i(t) \geq 0$ (buy), а продажа $s_i(t) \geq 0$ (sell). Конкретный вид функций $s_i(t)$, $b_i(t)$, $t \geq t_0$ будет обсуждаться ниже, в разделе **??**.

Таким образом, на в момент времени t инвестор покупает ценных бумаг типа i на сумму $b_i(t)u_i^+(t)$ и продает на сумму $s_i(t)u_i^-(t)$.

Тогда количество свободных средств в следующий момент времени $t+1$ будет равно

$$x_0(t+1) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(-u_i^+(t)b_i(t) + u_i^-(t)s_i(t)\right). \tag{1.1}$$

Количество ценных бумаг типа i в момент времени $t+1$ будет равно

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u^+(i) - u^-(i). \tag{1.2}$$

Считаем, что в начальный момент времени t_0 заданы начальные условия — количество бумаг каждого типа и объем свободных средств, которыми располагает инвестор:

$$x_i(t_0) = x_{i0},\ i = \overline{1,N};\quad x_0(t_0) = x_{00}.$$

Введенные переменные и уравнения (1.1), (1.2) представим в векторной форме. Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned}
&X(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)]^T;\\
&U^+(t) = [u_1^+(t), \ldots, u_N^+(t)]^T;\\
&U^-(t) = [u_1^-(t), \ldots, u_N^-(t)]^T;\\
&B(t) = [b_1(t), \ldots, b_N(t)]^T;\\
&S(t) = [s_1(t), \ldots, s_N(t)]^T;\\
&X_0 = [x_{10}, \ldots, x_{N0}]^T.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Используя (1.3), перепишем (1.2) для $X(t)$:

$$X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\quad X(t_0) = X_0,\quad t \geq t_0. \tag{1.4}$$

Представим (1.1) в векторной форме:

$$x_0(t+1) = x_0(t) + B(t)^T U^+(t) - S(t)^T U^-(t),\quad x_0(t_0) = x_{00},\quad t \geq t_0. \tag{1.5}$$

На значения $X(t)$, $x_0(t)$, $U^+(t)$, $U^-(t)$ в каждый момент времени t накладываются следующие естественные ограничения:

$$\begin{aligned}
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0,\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0,\\
&t \geq t_0.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

С точки зрения теории оптимального управления, в динамической модели (1.4) – (1.6): переменные $X(t) \in \mathbb{R}^N$, $x_0(t) \in \mathbb{R}$ — фазовые переменные (зависимые), переменные $U^+(t) \in \mathbb{R}^N$, $U^-(t) \in \mathbb{R}^N$ — управляющие переменные (управления, независимые), динамическая модель нестационарная в силу зависимости от времени функций цены покупки $B(t)$, $t \geq t_0$, и цены продажи $S(t)$, $t \geq t_0$. Ограничения (1.6), накладываются как на управляющие, так и на фазовые переменные.

Введем понятие общей стоимости портфеля.

Пусть $w_i(t)$ — общая стоимость бумаг типа i, и она равна сумме, которую инвестор может выручить из ее продажи в момент времени t:

$$w_i(t) = s_i(t)x_i(t), \quad t \geq t_0.$$

Значение $w_0(t)$ будем считать равным $x_0(t)$. Тогда общая стоимость портфеля равна

$$w(t) = \sum_{i=0}^{N} w_i(t).$$

В векторном виде, используя (1.3), получим следующую формулу для общей стоимости портфеля:

$$w(t) = x_0(t) + S(t)^T X(t).$$

Задачи оптимизации портфеля, динамика которого описывается согласно (1.4), (1.5) и подчиняется ограничениям (1.6) будет связана с максимизацией введенной стоимости портфеля при различных дополнительных требованиях. Первая такая модель будет рассмотрена в разд. 1.2, а до этого опишем данные, которые будут использоваться для численных экспериментов.

1.1.1 Данные для численных экспериментов

В данном пункте будут описаны данные, которые используются для проведения численных экспериментов, а также приводится описание того, как строятся прогнозы для значений функций цен $S(t)$, $B(t)$, $t \geq t_0$, при рассмотрении недетерминированной модели (см. разд. 1.3), когда их точные значения не известны заранее.

Будем работать с двумя типами данных:

1. сгенерированных искусственно;

2. реальными котировками на рынке криптовалют.

Сгенерированные данные представляют собой сумму линейной и синусоидальной функции

$$\begin{aligned} &b_i(t) = k_{i0} + k_i t + \alpha_i \sin(r_i + g_i t); \\ &s_i(t) = 0.99 b_i(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для (1.7) значения k_{i0}, k_i, α_i, r_i, g_i подбираются таким образом, чтобы ни для каких $i \neq j$ не совпадали периоды. Выбор функции $s_i(t)$ в представленном виде обусловлен тем наблюдением реально существующий картины, что разница между покупкой и продажей приблизительно равна фиксированному проценту, и таким образом, она будет хорошим приближением для используемых данных.

Реальные данные взяты из исторических курсов на сайте *coinmarketcap.com* за период ...

Тут вставить графики функций **(НЕ ЗАБЫТЬ ВСТАВИТЬ :)**

1.1.2 Предсказание значений

В общем случае, значения $S(t)$ и $B(t)$ в будущие моменты времени не известны. В настоящей работе будем прогнозировать будущие значения на основе предыдущих наблюдений.

В работе используется линейная регрессионная модель [19], зависимости стоимости от времени. В этом пункте будет дано краткое теоретическое ее описание и пример использования для приближенного нахождения будущих значений.

Линейная регрессия — метод восстановления зависимости между двумя переменными.

Пусть даны предыдущие наблюдениям за стоимостями фиксированной бумаги $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ в моменты времени $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Для заданного множества из m пар (t_i, p_i), $i = 1, \ldots, m$, значений свободной и зависимой переменной требуется построить зависимость. Назначена линейная модель

$$p_i = f(\mathbf{w}, t_i) + \varepsilon_i$$

с линейной функцией f и аддитивной случайной величиной ε. Переменные t, p принимают значения на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определим модель зависимости как

$$p_i = w_1 + w_2 t_i + \varepsilon_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор параметров

$\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ есть решение нормального уравнения

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P}$ — вектор, состоящий из значений зависимой переменной: $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_m)$. Столбцы матрицы A есть подстановки значений свободной переменной $t_i^0 \mapsto a_{i1}$ и $t_i^1 \mapsto a_{i2}$, $i = 1, \dots, m$. Матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}.$$

Зависимая переменная восстанавливается по полученным весам и заданным значениям свободной переменной

$$p_i^* = w_1 + w_2 t_i,$$

иначе

$$\mathbf{P}^* = A\mathbf{w}.$$

Для оценки качества модели используется критерий суммы квадратов регрессионных остатков, SSE — Sum of Squared Errors.

$$SSE = \sum_{i=1}^{m} (p_i - p_i^*)^2 = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*)^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*).$$

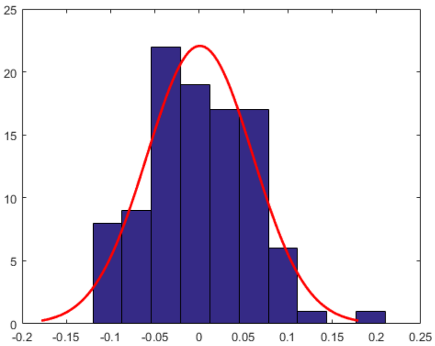
1.1.3 Оценка прогнозирования

В данном пункте рассматривается вопрос о качестве найденных оценок [18]. Находится их смещение, вычисляется распределение и дисперсия ошибки.

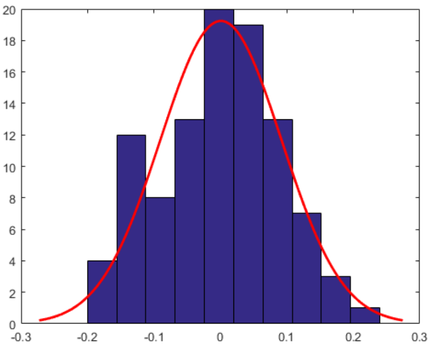
Для нахождения математического ожидания и вариации ошибки будем использовать встроенные *Matlab* функции *var*, *mean*. Данные функции вычисляют следующие значения:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

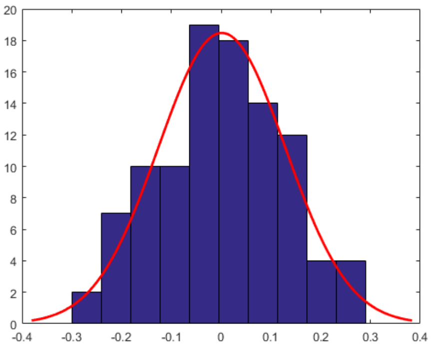
$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} |A_i - \mu|^2.$$



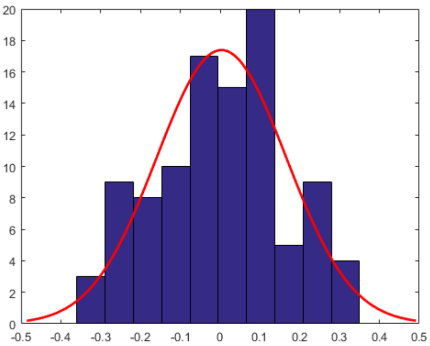
(a) На 1 шаг



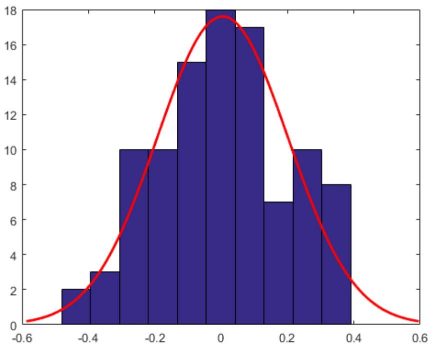
(b) На 2 шага



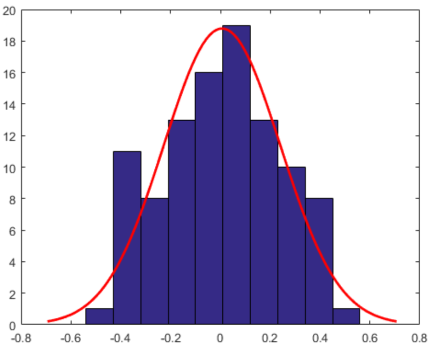
(c) На 3 шага



(d) На 4 шага



(e) На 5 шагов



(f) На 6 шагов

Рис. 1.1: Распределение ошибок предсказания

В процессе прогнозирования вычисляется ошибка следующим образом

$$e(t) = \frac{x_{predicted}(t) - x_{real}(t)}{x_{real}(t)}.$$

Данная ошибка была подсчитана для прогнозирования **(УКАЗАТЬ КАКИЕ ДАННЫЕ)** от одного до шести шагов вперед. На рисунке 1.1 изображены распределения ошибок прогнозирование будущих стоимостей продаж ценных бумаг.

В таблице 1.1 приведены численные значения математического ожида-

t	mean	var
1	0.0007	0.0036
2	0.0007	0.0083
3	0.0012	0.0162
4	0.0032	0.0265
5	0.0043	0.0389
6	0.0064	0.0545

Таблица 1.1: Ошибки прогнозирования

ния и вариации для предсказаний.

Дисперсия $D[e(t)]$ будет в дальнейшем использоваться для функции стоимости этапа, которая имеет вид

$$L_t(U^+(t), U^-(t)) = \alpha D[e(t)] \left(\bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t)\right)^2,$$

где $W(t)$ это собственно и сама ошибка прогнозирования.

Так как значения математического ожидания, представленные в таблице 1.1, близки к нулю, то будем считать, что полученные оценки являются несмещенными **(ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ)**.

1.2 Детерминированная модель

Настоящий раздел посвящен исследованию детерминированной модели оптимизации портфеля, т.е. случаю, когда в начальный момент времени t_0 точно известны все значения цены продажи и покупки $s_i(t)$ и $b_i(t)$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, N}$.

Будем применять методы MPC, описанные в главе 1 для задачи оптимизации портфеля. При этом рассматриваются две прогнозирующие задачи MPC с конечным горизонтом прогнозирования T:

- задача максимизации стоимости портфеля без условий в терминальный момент времени $t_0 + T$ (без терминального множества);
- задача максимизации стоимости портфеля с условиями в терминальный момент времени $t_0 + T$ (с терминальным множеством).

1.2.1 Максимизация стоимости портфеля без терминального множества

Рассмотрим следующую задачу MPC с горизонтом планирования T

$$\begin{aligned}\max_{U^+,U^-} J(X_0, x_{00}, U^+, U^-) = w(t_0+T) = \\ = x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T),\end{aligned} \tag{1.8}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t),\\
&X(t_0) = X_0,\\
&x_0(t_0) = x_{00};\\
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Отметим, что в задаче оптимального управления (1.8) – (1.9) функция стоимости не ограничена, кроме того, тут отсутствует функция стоимости этапа $L_t(\cdot)$, а максимизируется только терминальная стоимость портфеля.

Так как предположение $J^*_\infty(X_0, x_{00}, U^+, U^-) < \infty$ из главы **??** не выполняется, то невозможно гарантировать устойчивость процесса, замкнутого обратной связью, построенной в результате применения MPC-алгоритма из главы **??** с прогнозирующей задачей оптимального управления (1.8) – (1.9). Также невозможно исследовать полученное решение на субоптимальность.

Приведем типичную картину поведения инвестора, использующего для управления портфелем задачу (1.8) – (1.9). Для этого приведем результаты численных экспериментов для двух ценных бумаг ($N = 2$) при горизонте прогнозирования $T = 6$ и используя синтетические и реальные данные.

На рисунке 1.2 представлены данные проведенного численного эксперимента. Верхний график показывает количество ценных бумаг первого и второго типа в каждый момент времени. Нижний график представляет собой общую стоимость базового портфеля (с тривиальным управлением — зеленая кривая) и стоимость портфеля под управлением MPC (красная кривая).

Как видно из рисунка 1.2, при использовании задачи (1.8) – (1.9) происходят частые операции вида: продать все бумаги типа i и на освободившиеся

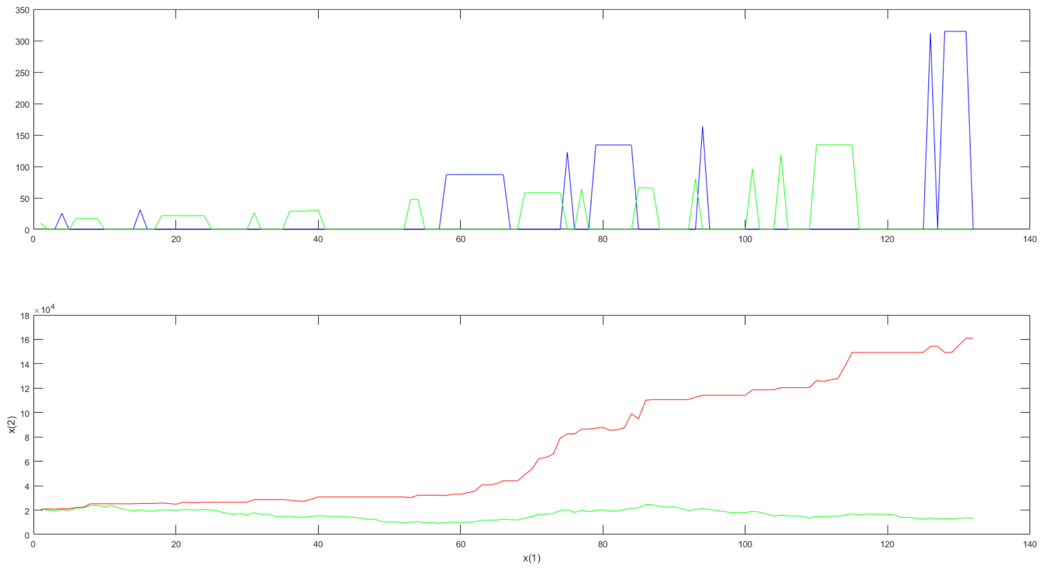


Рис. 1.2: Детерминированная модель без регуляризации

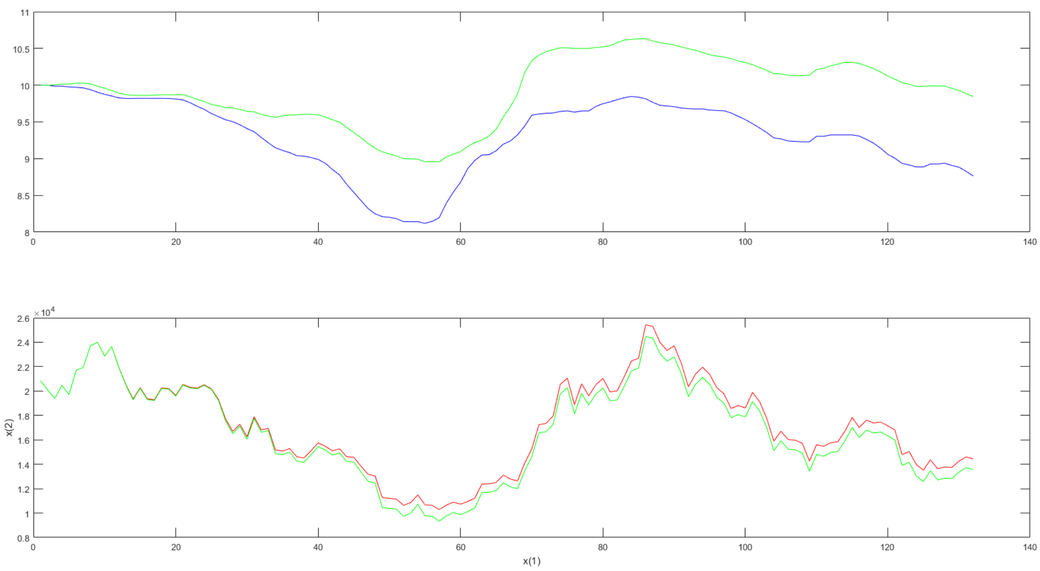


Рис. 1.3: Детерминированная модель с регуляризацией

деньги купить бумаги типа j, $i, j = 1, 2$. Для инвестора такое поведение может приводить к проблемам, поскольку ему приходится постоянно перестраивать портфель, что привносит в его поведение большие риски. Подробнее об этом будет рассказано в главе с недетерминированной моделью.

Изменим критерий качества (1.8), добавив в него с целью регуляризации стоимость этапа $L(U^+(t), U^-(t))$.

Получим следующую задачу

$$\min_{U^+,U^-} J(x,u) = \sum_{i=0}^{T} L(U^+(i),U^-(i)) - w(T),$$

при условиях (1.9). Заметим, что здесь критерий качества минимизируется, стоимость портфеля взята за знаком $-$.

Если в качестве функции этапа взять, например, функцию вида

$$L(U^+(t),U^-(t)) = \alpha(B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t))^2,$$

которая характеризует весь оборот денег, произошедший в момент времени t, то графики изменятся (для $\alpha = 0.01$) как представлено на рисунке 1.3.

Аналогичная картина получается в численных экспериментах со сгенерированными тестовыми данными. Без функции стоимости этапа результаты представлены на рисунке 1.4, со стоимостью этапа — на рисунке 1.5.

1.2.2 Максимизация стоимости портфеля с терминальным множеством

Рассмотрим теперь в качестве прогнозирующей задачи MPC — задачу оптимального управления с горизонтом планирования T и ограничениями, накладываемыми на состав портфеля в терминальный момент времени t_0+T:

$$\max_{U^+,U^-} J(x_0,X_0,U^+,U^-) = x_0(t_0+T) + X(t_0+T)^T S(t_0+T); \tag{1.10}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&\max_{U^+,U^-} J(x_0,X_0,U^+,U^-) = x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T);\\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t),\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t),\\
&X(t_0) = X_0,\\
&x_0(t_0) = x_{00};\\
&X(t) \geq 0,\\
&x_0(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T};\\
&U^+(t) \geq 0,\\
&U^-(t) \geq 0, \quad t = \overline{t_0, t_0+T-1};\\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad k = \overline{0,N}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

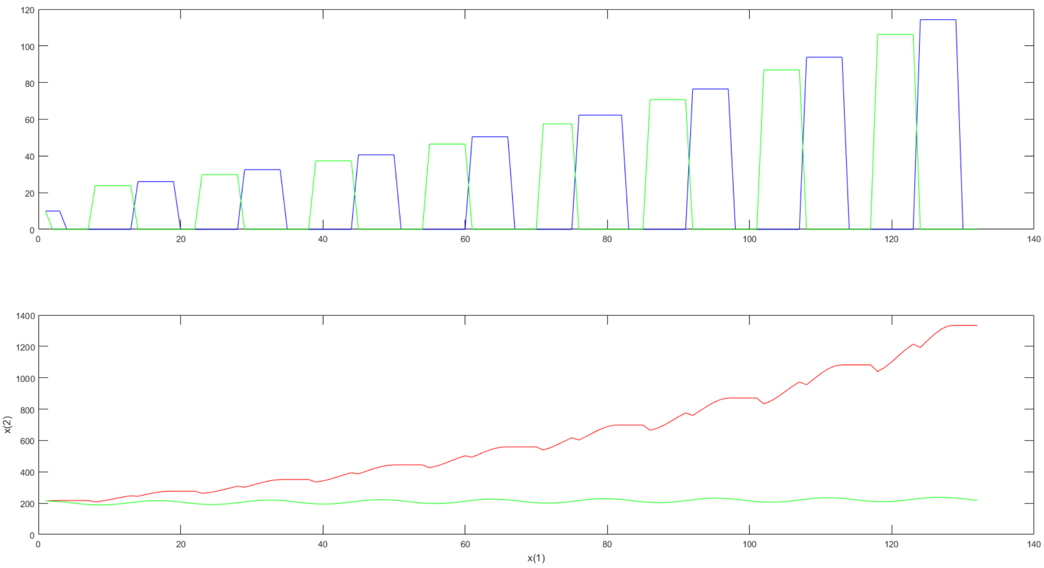


Рис. 1.4: Детерминированная модель без регуляризацией

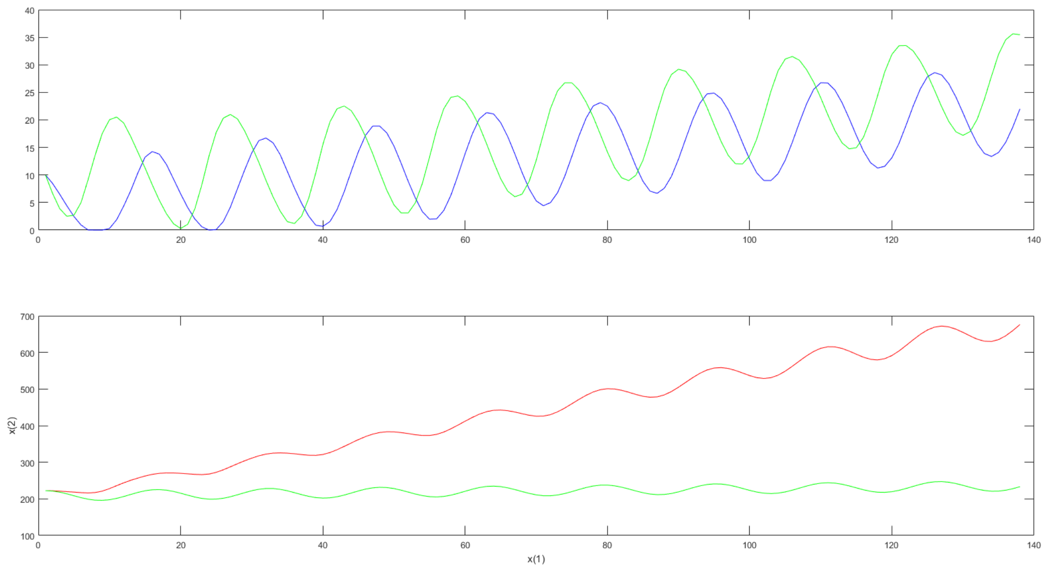


Рис. 1.5: Детерминированная модель с регуляризацией

Поясним смысл введенного ограничения

$$\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^{N} x_i(0)}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Здесь требуется, чтобы в момент времени $t_0 + T$ пропорции в портфеле вернулись к тем, что были в нулевой момент времени. Идея данного подхода совпадает с той, что используется в экономическом MPC с той лишь разницей, что в стандартных схемах экономического MPC в качестве устойчивого состояния используется точка x_s, а в данном случае это целый луч, содержащий значения с одинаковыми пропорциями.

Предлагаемый подход, кроме того, дает возможность сравнивать эффективность управления MPC без учета колебания курсов, поскольку отношения стоимостей портфелей с тривиальным управление, и с управлением MPC, если они содержат одинаковые пропорции, не зависит от текущих курсов.

Теорема 1.1 Задача (1.10) – (1.11) разрешима.

Доказательство Заметим, что тривиальное управление

$$U^+(t) = U^-(t) \equiv 0, \quad t = \overline{t_0, t_0 + T - 1},$$

является допустимым. Кроме того, при этом управлении значение функции $\max_{U^+,U^-} J(x_0, X_0, U^+, U^-)$ в (1.10) **(ПРОПУЩЕНА ФРАЗА)**, следовательно, задача (1.10) – (1.11) разрешима.

Теорема 1.2 Пусть для начальных условий x_{00}, X_0 из задачи (1.10) – (1.11) получено управление MPC

$$\{(U^+(0), U^-(0)), (U^+(1), U^-(1)), \dots\},$$

и соответствующая ей траектория

$$\{(\hat{X}(0), \hat{x}_0(0)), (\hat{X}(1), \hat{x}_0(1)), \dots\}$$

тогда любого $m \in \mathbb{Z}_+$ верно:

$$\max_{U^+,U^-} J(\hat{X}(m), \hat{x}_0(m), U^+, U^-) \geq x_0(0) + X(0)^T S(m + T).$$

Данная теорема утверждает, что в любой момент времени портфель, управляемый MPC за T шагов, может быть приведен в терминальное множество и при этом стоимость портфеля будет не меньше, чем в случае, когда постоянно используется тривиальное управление (инвестор не управляет портфелем).

Доказательство Будет добавлено позже **(НЕ ЗАБЫТЬ ДОБАВИТЬ)**

Приведем пример того, как будет вести себя система при управлении MPC-регулятором, использующим задачу оптимального управления с терминальным множеством. На рисунке 1.6 представлен результат численного эксперимента для сгенерированных данных. Как видно, в результате стоимость портфеля получается меньше, нежели в случае без терминального множества (рисунок 1.5). Но при этом ѝже диапазон, в котором изменяется количество ценных бумаг каждого типа.

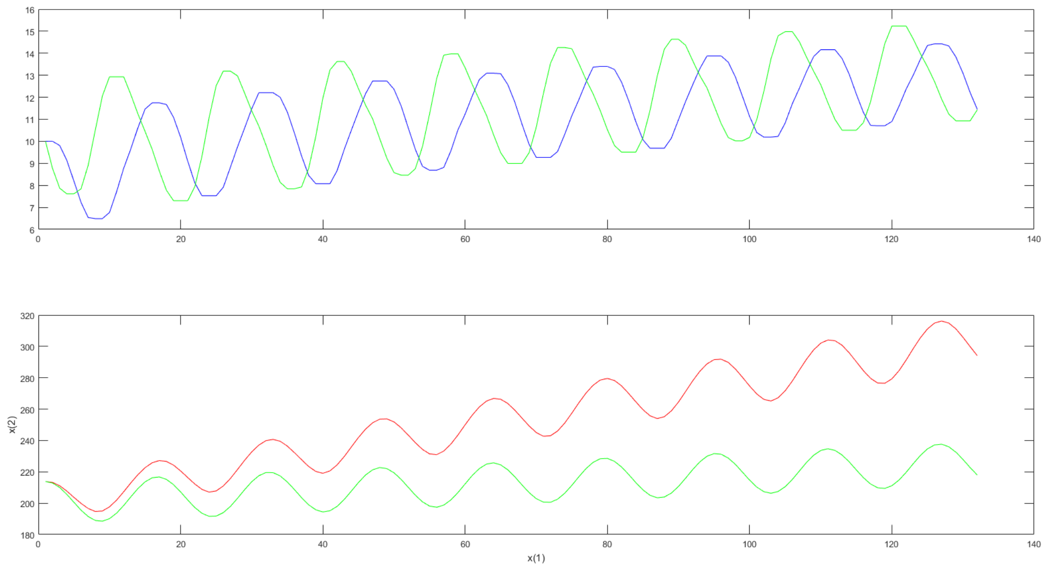


Рис. 1.6: Детерминированная модель с регуляризацией

1.3 Недетерминированная модель

В настоящем разделе рассмотрим случай, когда точно не известны будущие стоимости активов, и модель должна оперировать прогнозируемыми значениями на горизонте планирования.

Покажем, что для недетерминированного случая нельзя просто использовать предсказания и работать как в детерминированном случае без регуляризации.

На рисунке 1.7 представлен такой случай, при этом на нижнем графике видно, что стоимость портфеля при тривиальном управлении будет выше, нежели при управлении MPC.

Это связано с тем, что управление строится на основе прогнозируемых данных, и при этом одинаково учитывается весь горизонт планирования. А хотелось бы сделать так, чтоб более дальним прогнозам уделялось меньше внимания.

Из это делаем вывод, что необходимо вводить функцию стоимости этапа, которая будет учитывать ошибки прогнозирования.

В случае, когда точно не известны значения $s_i(t)$ и $b_i(t)$, наша функция перехода для $x_0(t)$, в соответствии с (**??**) имеет следующий вид:

$$x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t). \tag{1.12}$$

Где $B(t)$ и $S(t)$ описаны в (1.3).

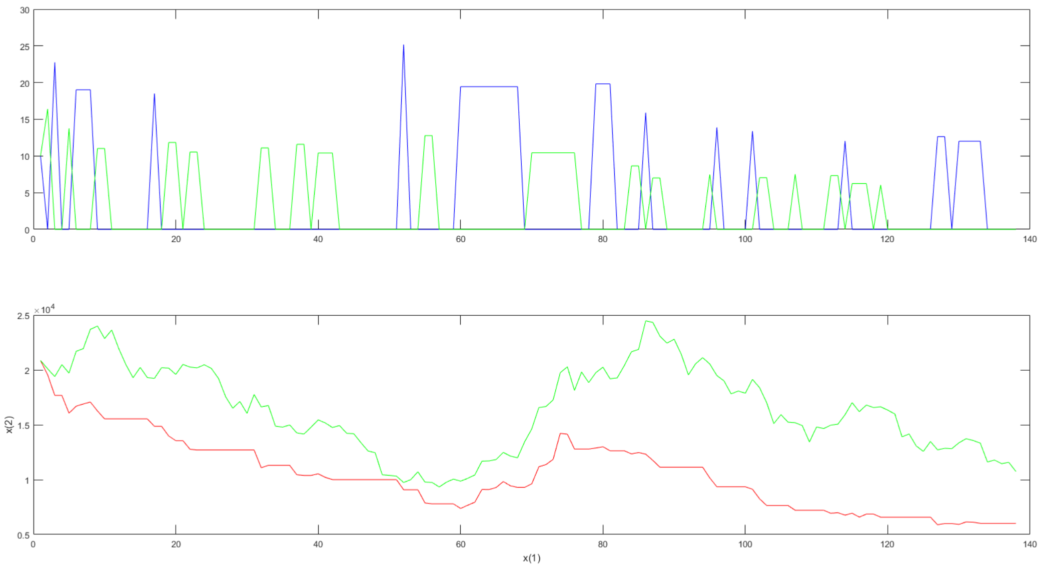


Рис. 1.7: Недетерменированная модель без регуляризацией

И при этом $B(t) = (I + E_1(t))\bar{B}(t)$, где $\bar{B}(t)$ это прогнозируемое значение, I – единичная матрица, $E_1(t)$ – случайная диагональная матрица ошибок, при этом $M[E_1(t)] = 0$ (ссылка на часть с оценкой ошибок прогнозирования). Аналогично для $S(t) = \bar{S}(t)(1 + E_2(t))$.

Так как изменение цены покупки и продажи происходит одинаково, то будем считать, что $E_1(t) \equiv E_2(t) = E(t)$

Сейчас перепишем (**??**):

$$\begin{aligned} x_0(t+1) = x_0(t) - \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) - \\ - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Оценим для величины $x_0(t+1)$ математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x_0(t+1)] = M[x_0(t)] + \bar{B}(t)^T U^+(t) + \bar{S}(t)^T U^-(t) \tag{1.14}$$

Будем считать, что величины $x_0(t)$ и $W(t)$ независимы, кроме того, стоимости активов не коррелируют

$$\begin{aligned} D[x_0(t+1)] &= D[x_0(t) - \left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] = \\ &= D[x_0(t)] + D[\left(E(t)\bar{B}(t)\right)^T U^+(t) + \left(E(t)\bar{S}(t)\right)^T U^-(t)] \le \\ &= D[x_0(t)] + \langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t)\rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t)\rangle^2. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Сейчас можем добавить учет дисперсии в функцию перехода, эта добавка будит служить своего рода ограничением дисперсии при максимизации математического ожидания. Введем функцию стоимости этапа следующим образом:

$$L(U^+(t),U^-(t)) = \alpha\left(\langle \bar{B}(t)^T D[E(t)], U^+(t)\rangle^2 + \langle \bar{S}(t)^T D[E(t)], U^-(t)\rangle^2\right). \tag{1.16}$$

Оценки на значения $D[E(t)]$ зависят от способа предсказания векторов $S(t)$ и $B(t)$.

$$\begin{aligned}
&\max_{U^+,U^-} -\sum_{t=0}^{T-1} L_t(U^+(t_0+t),U^-(t_0+t))+\\
&\qquad\qquad + x_0(t_0+T) + S(t_0+T)^T X(t_0+T);\\
&X(t+1) = X(t) + U^+(t) - U^-(t)\\
&x_0(t+1) = x_0(t) - B(t)^T U^+(t) + S(t)^T U^-(t)\\
&X(t_0) = X_0;\\
&x_(t_0) = x_0;\\
&X(t) \geq 0,\quad t=\overline{t_0,t_0+T};\\
&x_0(t) \geq 0;\\
&U^+(t) \geq 0,\quad t = overline t_0, t_0+T-1;\\
&U^-(t) \geq 0;\\
&\frac{x_k(t_0+T)}{\sum_{i=0}^N x_i(t_0+T)} = \frac{x_k(0)}{\sum_{i=0}^N x_i(0)},\quad \forall k\in\overline{0,N}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Результат применения данного управления представлен на рисунке 1.8. Тут видим, что применение управления MPC уже лучше, нежели тривиальное управление.

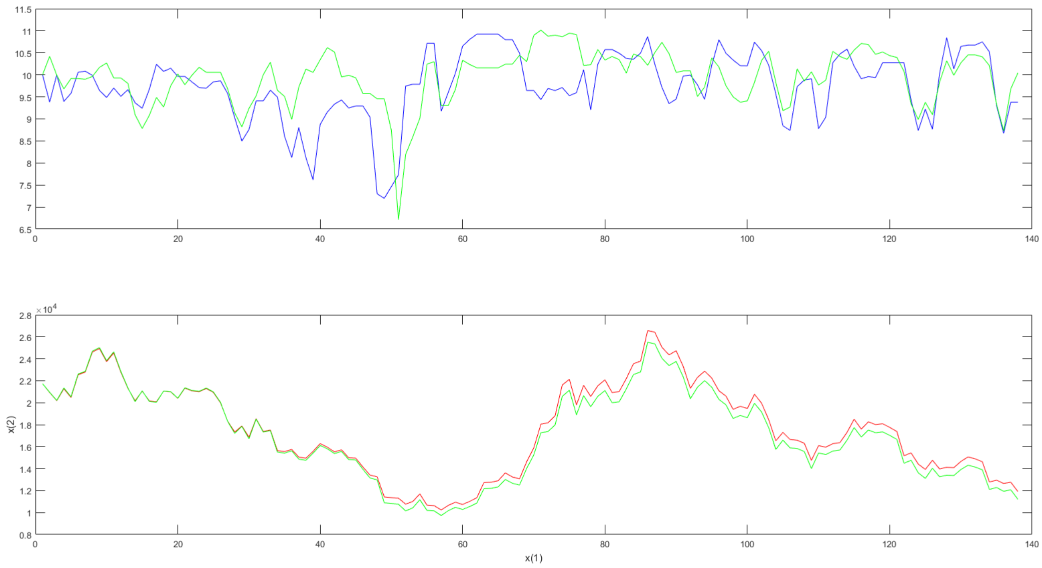


Рис. 1.8: Недетерменированная модель с регуляризацией

ГЛАВА 2

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Идея использования методов MPC для управления портфелями в настоящий момент очень актуальна, на это указывают ряд исследований, проводимых за последние годы.

Одним из ранних исследований является работа [4] в которой доходность является линейной функцией от некой нормально распределенной случайной величины, тут же появляется идея о представлении целевой функции, как некого взвешенного между доходностью портфеля и рискованностью управления. Продолжение данных исследований можно обнаружить в [3], где строится уже более классическая задача робастного MPC, но при этом используется инвариантная во времени модель, где все доходности фиксируются в самом начале и не изменяются во времени.

Одновременно с составлением моделей происходило исследование подходов для их решения и для моделирования будущих цен активов. В работе [2] динамика изменения доходности активов моделируется при помощи марковского процесса, затем применяется MPC для максимизации математического ожидания доходности. В работе [7] результаты [2] улучшаются при помощи использования фильтра Калмана.

В работе [1] для решения задачи MPC применяются уравнения Рикатти.

Из более современных исследований стоит отметить работу [5]. Тут уже используется неинвариантная во времени модель. И для прогнозирования будущих значений доходности учитываются и текущие доходности активов. Используемая в работе [6] модель дает возможность работать одновременно как с длинными, так и короткими позициями.

К основным недостаткам большинства работ следует отнести то, что цена покупки приравнивается к цене продажи, что не соответствует реальному положению вещей и, как будет показано в данной работе, является очень существенным допущением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Marigo A., Piccoli B. MODEL PREDICTIVE CONTROL FOR PORTFOLIO OPTIMIZATION.

2 Dombrovskii V., Obyedko T. Dynamic Investment Portfolio Optimization under Constraints in the Financial Market with Regime Switching using Model Predictive Control //arXiv preprint arXiv:1410.1136. – 2014.

3 Alenmyr S., ?gren A. Model Predictive Control for Stock Postfolio Selection //MSc Theses. – 2010.

4 Herzog F. et al. Model predictive control for portfolio selection //American Control Conference, 2006. – IEEE, 2006. – С. 8 pp.

5 Nystrup P. et al. Multi-period portfolio selection with drawdown control //Annals of Operations Research. – 2017. – С. 1-27.

6 Yamada Y., Primbs J. A. Model Predictive Control for Optimal Pairs Trading Portfolio with Gross Exposure and Transaction Cost Constraints //Asia-Pacific Financial Markets. – 2018. – Т. 25. – №. 1. – С. 1-21.

7 Fitria I., Apriliani E., Putri E. R. M. Investment ManagementUsing Portfolio Optimizationwith Stock Price Forecasting //Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Т. 10. – №. 48. – С. 2405-2413.

8 Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. – Cambridge university press, 2004.

9 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

10 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.

11 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.

12 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.

13 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.

14 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Инностранная литература, 1960. – 400 с.

15 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

16 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

17 Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов/ Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

18 Боровков, А.А. Числовые характеристики случайных величин. 5-е изд. / А.А. Боровков // М.: Либроком. – 2009. – Глава 4.

19 Стрижов, В.В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей / В.В. Стрижов – М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2008.