سوال ۱: الف) از عنصر اول تا اخر آرایه را پیمایش کرده و با عناصر متناظرش جمع میکنیم به n وابسته است

ب) به n وابسته است از عنصر اول تا آخر را پیمایش کرده با max مقایسه میکنیم و در صورتی که بزرگتر بود آن را max قرار میدهیم

ج) از عنصر اول شروع کرده و آن را با عدد مورد نظر مقایسه میکنیم تا پیدا شود

سوال ۲:

$$\log n \leq c\sqrt{n} \longrightarrow c \geq \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{Hop} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)' = \frac{1}{2n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2} - \log n\right) \longrightarrow$$ از $n>10$ سیب اکیدا نزدیکی میشود

$$\lceil \sqrt{10} \rceil = 4 \qquad (c, n_0) = (\log 2, 4)$$

سوال ۳:

$$n^3 \leq c(n!) \longrightarrow c \geq \frac{n^3}{n!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1) = (6n^3 - 18n + 12)(n-3)(n-4)\dots(5)(4$$

$$6n^3 - 18n + 12 \geq n^3 \longrightarrow 5n^3 - 18n + 12 \geq 0, \quad n>0 \Big\} \longrightarrow n > \frac{9+\sqrt{21}}{5}, \quad n \geq 6 \Big\} \longrightarrow n \geq 6$$

$$(c, n_0) = \left(\frac{3}{10}, 6\right)$$

سوال ۴

$f(n) \in O(1) \rightarrow f(n) \leq c \rightarrow f'(n) \leq 0$
$\begin{cases} f'(n) = 0 \rightarrow \text{تابع ثابت} \\ f'(n) < 0 \end{cases}$

$f(n) = \frac{1}{n}$ or $\frac{1}{n^2}$ or $\frac{1}{n\sqrt{n}}$

سوال ۵

$f(n) = A_0 + A_1 n + \dots + A_r n^r$

$g(n) = B_0 + B_1 n + \dots + B_r n^r$

$f(n) \in \theta(g(n)) \rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{A_r}{B_r} + 1 \\ c_1 = \frac{A_r}{B_r} - 1 \end{cases}$

$g(n) \in \theta(f(n)) \rightarrow c_3 f(n) \leq g(n) \leq c_4 f(n) \rightarrow \begin{cases} c_4 = \frac{B_r}{A_r} + 1 \\ c_3 = \frac{B_r}{A_r} - 1 \end{cases}$

$\leftarrow$ از θ یکدیگر هستند

سوال ۶:

$f(n) = f(n-1) + n^2$
$\begin{cases} \text{همگن}: (n-1) \\ \text{ناهمگن}: (n-1)^3 \end{cases} \Rightarrow f(n) = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = 5 \\ f(3) = 14 \\ f(4) = 30 \end{array}\right\} \longrightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 1/6,\ c_3 = 1/2,\ c_4 = 1/3$

$\rightarrow f(n) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

سوال ۷ :

$f(n) = 2f(n-2) + 1$

$\rightarrow \begin{cases} \text{همگن}: (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \\ \text{ناهمگن}: (x-1) \end{cases} \longrightarrow f(n) = c_1\sqrt{2}^n + c_2(-\sqrt{2})^n + c_3$

$= c'_1\sqrt{2}^n + c'_2$

$\rightarrow \begin{matrix} f(0) = 0 \\ f(2) = 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} c'_1 = 1 \\ c'_2 = -1 \end{matrix} \qquad f(n) = \sqrt{2}^n + (-1)$

سوال ۸ :

$f(n) = f(n-2) + 1 \rightarrow \begin{cases} \text{همگن}: x-1 \\ \text{ناهمگن}: x-1 \end{cases}$

$\rightarrow f(n) = c_1 + c_2 n \longrightarrow \begin{matrix} f(0) = 0 \\ f(2) = 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} c_2 = 1/2 \\ c_1 = 0 \end{matrix}$

$f(n) = \frac{1}{2}n$

سوال ۹ : $\frac{1}{2}n \in O(\sqrt{2}^n - 1)$

سوال ۱۰ :

سوال ۱۱ :

سوال ۱۲ : عناصر را بصورت جفت جفت مقایسه می‌کنیم و در max و min ذخیره می‌کنیم

$n/2$ مقایسه بین $max_{n/2}$ و $n/2$ مقایسه بین $min_{n/2}$ ماکسیمم و مینیمم را پیدا می‌کنیم

سوال ۱۳ : $i{\cdot}{\cdot}$, $j = 0$

($A[i] + B[j]$ را با عدد ۱۰۰ مقایسه می‌کنیم اگر بزرگتر بود j-- و اگر کوچکتر i++) ۱۰۰p

$vall = A[0]$

سوال ۱۴

$count = 0$

آرایه A را طی می‌کنیم اگر هر عنصر با vall برابر $count{+}{+}$ و گرنه برابر بود $count{-}{-}$

در صورتی که $count == 0$ شد $A[i]$ را در vall می‌ریزیم زمانی که به انتها رسیدیم اگر

$count > 0$

بود تعداد vall را شمرده و در صورتی که از $\frac{n}{2}$ بیشتر آن را به عنوان عنصر اصلی معرفی می‌کنیم.

سوال ۱۵:

$$n \log n \leq c \log n!$$

$$\log n! = \log n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1) = \log n + \log 2n-2 + \dots + \log \frac{n^2}{4}$$

تعداد جملات $\frac{n}{2}$ است

$$n\log n = \log \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{n}$$

تعداد جملات $\log n!$ نصف $n \log n$ است پس با قرار دادن $c=2$ به فرض مسئله می‌رسیم

سوال ۱۶:

الف) $n^{O(1)}$ $\quad f(n) \in n^{O(1)} \rightarrow f(n) = n^{g(n)} \rightarrow g(n) \in O(1)$

$$\rightarrow g(n) \leq c \rightarrow g'(n) \leq 0 \left\{ \begin{array}{l} g'(n) = 0 \rightarrow g(n) = 2 \\ g'(n) < 0 \rightarrow g(n) = \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\log n} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$f(n) = n^{m}$ or $f(n) = n^{1/n}, n^{\frac{1}{\log n}}$

۱۶) ب) هیچ تابع عضو $O(n^{O(1)})$ نیست منظور از $n^{O(1)}$ توابع $1, n, n^2, n^3, \ldots$

پس تنها تابع عضو $O(n^{O(1)})$ ، $C^{\epsilon N}$ است

ج) مانند بالا C است هر تعداد O به عبارت اضافه شود پاسخ همین است

سوال ۱۸:

الف) $T(n) \begin{cases} 2T(n-1)+1 & n>1 \\ 1 & n=1 \end{cases}$ همگن : $(x-2)$ ، $1^n \cdot 1$: $(x-1)$

$T(n) = c_1 2^n + c_2 \longrightarrow c_1 = 1,\ c_2 = -1$

ب) $2^n - 1 \in O(2^n)$

سوال ۱۹:

سوال ۲۰:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{n!} = 0 \longrightarrow n^{100} \in O(n!)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^{100}}{a^n} = \lim \frac{100}{a} \times \frac{\log n}{n} = 0 \quad n^{100} \in O(a^n) \quad a>1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a^n \in O(n!)$$

$$n! > a^n > n^{100}$$