

陀螺仪漂移测试原理 及其实验技术

胡恒章 主编

国防工业出版社

V241.5
51

2872

陀螺仪漂移测试原理 及其实验技术

胡 恒 章 主编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书比较系统地介绍了陀螺仪的漂移测试原理及其实验技术，以及作者近期的工作小结。从陀螺仪漂移的数学模型的建立与分析开始，较详细地介绍了陀螺仪漂移的各种测试方法；各类现代化陀螺测试设备及其应用；并对分析陀螺仪漂移起因的各种数据处理方法作了详细阐述；最后对计算机在陀螺仪测试中的应用、陀螺仪漂移的实时补偿等作了全面介绍。各章内容具有相对的独立性。

本书可作高等院校陀螺仪、导航、自动控制等专业学生、研究生的教材；也可作为教师及有关科技人员自学的参考书。

陀螺仪漂移测试原理及其实验技术

胡恒章 主编

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092¹/₁₆ 印张 9³/₄ 225千字

1981年3月第一版 1981年3月第一次印刷 印数：0,001—2,300册

统一书号：15034·2155 定价：1.05元

前 言

陀螺仪是飞机、导弹、舰船等运载体的控制系统及惯性导航系统不可缺少的重要元件。随着航海、航空和宇宙航行事业的发展，对运载体的控制和导航精度的要求越来越高。由于陀螺仪的误差常常是整个控制和导航系统的重要误差源，所以，对陀螺仪的精度要求越来越严。

陀螺仪在运行过程中受到干扰力矩的作用而产生漂移。漂移角速度是评价陀螺仪性能优劣的重要指标。陀螺仪在不同的使用场合对其漂移角速度的要求是不同的。目前，在惯性导航系统中对陀螺仪漂移角速度的要求在 0.01 度/小时 ~ 0.001 度/小时的数量级之间，甚至更高。为了评定陀螺仪的质量，必须对陀螺仪漂移角速度进行测试，从而对其有规律的漂移和随机漂移作精确分析，在此基础上对陀螺仪进行误差补偿和改进。对陀螺仪的精度要求越高，则对陀螺仪的测试要求也就越高。因此，提高陀螺仪测试设备精度、改进测试技术就成为亟待解决的问题。近年来，由于科学技术的迅速发展，各个技术领域的相互渗透与促进，因而陀螺仪的测试设备和测试技术发展很快。我国第一台陀螺仪漂移测试台问世以来，已有十多年历史了。随着陀螺仪精度不断提高，陀螺仪测试人员对提高测试理论和实验技术有了迫切要求，高等院校有关专业也相应开设了陀螺仪漂移测试课程，为此，根据六机部一九七八年五月教材大纲审定会确定的大纲，特编写此书以供教学之用。

本书对国内外陀螺仪漂移测试的理论和实践以及作者近期的工作小结都作了较系统的介绍：第一、二、三章介绍陀螺仪漂移的概念、误差的数学模型及测试的基本原理和方法；第四章介绍陀螺仪漂移的分析—数据处理方法；第五章介绍陀螺仪测试设备；第六章介绍计算机在陀螺测试中的应用。

本书由哈尔滨工业大学胡恒章主编，参加编写的有：田自耘、冯幼田、邓正隆、范钦义。

本书承南京工学院王明峰、金振华同志审阅，提出了宝贵意见，在此谨致谢意。

由于编者的水平有限，实践经验不足，定有谬误之处，恳请读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 绪论	1
§ 1 陀螺仪测试的目的与分类	1
§ 2 陀螺仪漂移的概念	2
第二章 陀螺仪的误差模型	4
§ 1 陀螺仪误差模型的实验确定法	4
§ 2 陀螺仪的误差模型	5
第三章 陀螺仪漂移测试原理和方法	22
§ 1 陀螺仪漂移测试方法的概述	22
§ 2 陀螺仪漂移测试的力矩反馈法	22
§ 3 陀螺仪漂移测试的转台伺服法	42
§ 4 陀螺仪测试方法的比较	58
附录一 信号传感器、力矩器主要参数的测定	58
附录二 双轴陀螺仪漂移测试转台的十二种安装方式	60
第四章 陀螺仪漂移测试中的数据处理方法	62
§ 1 转台伺服法中转台瞬时角速度的测取	62
§ 2 谐波分析法在数据处理中的应用	64
§ 3 回归分析方法简介	77
§ 4 最佳平方逼近与 Gram-Schmidt 正交化方法	84
§ 5 线性平稳模型	86
§ 6 卡尔曼滤波在陀螺仪测试中的应用	90
第五章 陀螺仪测试设备及测试准备工作	93
§ 1 引言	93
§ 2 精密机械转台	94
§ 3 陀螺漂移测试转台的基本组成及发展概况	94
§ 4 双轴陀螺漂移测试台	101
§ 5 陀螺漂移测试转台误差分析	108
§ 6 实验环境	131
§ 7 转台的初始对准	136
§ 8 陀螺测试误差源	137
第六章 计算机在陀螺仪测试中的应用	140
§ 1 测试台的计算机控制	140
§ 2 用计算机进行数据处理, 研究测试误差及陀螺仪漂移的补偿	144
附录 卡尔曼滤波与平滑公式的证明	147
参考文献	152

第一章 绪 论

§ 1 陀螺仪测试的目的与分类

一、陀螺仪测试的目的

由于科学技术的飞跃发展，陀螺仪的品种越来越多，而它们的精度指标也不断提高。

在惯性导航系统中，陀螺仪是影响整个系统精度的关键部件。为此，如何鉴定以及用什么样的设备条件来鉴定陀螺仪的质量及其技术性能便成为非常重要、非常迫切的问题。近些年来，国内外在这方面的理论与实践工作都有很大的发展，积累了相当丰富的经验，使“陀螺测试”已经成为一门综合性的科学技术。

尽管陀螺仪的种类繁多，使用对象也不尽相同，又不可能有统一的试验规范，但是，对陀螺仪进行试验的目的却可大致归纳有如下几个方面：

1. 检验装配工艺过程（通常称为验收试验）；
2. 验证设计参数（通常称为批准试验或技术鉴定试验）；
3. 导出陀螺仪误差模型方程式；
4. 确定不能按预期要求工作的原因（通常称为诊断试验）；
5. 提出新的试验技术；
6. 指出需要研制的先进试验设备。

总之，通过试验可以鉴定陀螺仪的性能和质量指标，找出其缺陷与误差规律及产生这些误差的原因，以期补偿与改进。

本书主要讨论在一个 g 的重力场中的实验室条件下，对陀螺仪进行测试的问题，并以单自由度与二自由度液浮陀螺仪为主要测试对象进行讨论，同时对摆式加速度计的测试方法也作了介绍。

二、陀螺仪测试的分类

基于陀螺仪的种类繁多，各自的用途、工作条件等等都不尽相同，为此难于制订统一的试验规范，因此，讨论陀螺仪测试的分类也是相当粗略的。

一种是模拟陀螺仪使用的实际环境条件进行陀螺测试。可以想象，如果在陀螺仪工作的实际环境条件下来鉴定陀螺仪的技术性能和质量指标是最为理想的。但是在实验室条件下要人为地模拟陀螺仪使用的实际环境条件，这就要求我们必须详尽地了解陀螺仪在实际系统中工作时将要承受的电气、机械、热、磁性、振动、线加速度以及其它等等情况。陀螺测试工作人员必须在规定的环境条件下对陀螺仪性能进行周密的测量。不过要使陀螺仪同时承受几种环境条件是相当困难的。

另外，如果陀螺测试工作者对某一特定类型的陀螺仪经过大量的统计实验，可以得到

一个误差数学模型来全面地描述这种陀螺仪在比较广泛的环境条件下工作的性能，当然必要时还要扩大与完善这一数学模型。这时只需在实验室条件下确定出这一数学模型中的未知参数，则陀螺仪在给定环境条件下的性能就无需再在该特定环境条件下进行试验便可预测出来。

但这需要几种试验共同配合。例如：敏感加速度的误差系数应该用精密振动和离心试验在高 g 条件下来校核。在一个 g 的实验情况下，根据试验方法的不同又可分为力反馈试验、翻滚试验以及转台伺服试验等等。这些内容将在以后章节中详细讨论。

§ 2 陀螺仪漂移的概念

一、陀螺仪漂移的含义

现以液浮陀螺仪为例来阐述这个问题。对单个陀螺仪而言，其漂移角速度是指当干扰力矩作用时，引起的陀螺仪主轴相对惯性空间在单位时间内角度的变化率。然而，液浮陀螺仪一般都工作在闭环系统中。当系统没有输入，而陀螺仪本身又是一个理想而没有误差的元件时，则陀螺仪输出轴上的信号传感器应当没有输出信号。可是实际上无论是轴承的磨擦力矩、陀螺仪的质心偏离框架的几何中心面引起的干扰力矩，还是电磁干扰力矩以及信号传感器本身的不理想情形等原因，都将使信号传感器有输出信号，引起整个系统的运动。因此用液浮陀螺仪组成闭环系统时，由于上述干扰力矩的存在，这个系统并不是在没有输入时达到平衡状态，相反地，它是在有了输入时，由于输入所产生的效果，与陀螺仪本身不理想因素所产生的效果互相抵消时，才处于平衡状态。

在应用浮子式积分陀螺仪组成闭环系统时，一般可以考虑沿着它的输入轴的转动角速度是整个系统的输入，所以在描述浮子式陀螺仪的不理想情形时，可以设法求出：当沿着陀螺输入轴的角速度等于什么数值时，才能使一个在闭环系统中实际使用的陀螺仪信号传感器的输出信号为零或者等于一个很小的、恒定的数值。这个角速度称为浮子式陀螺仪的漂移角速度。所以陀螺仪漂移角速度并不单纯地表示陀螺仪本身的真正漂移角速度，而是具有更为广泛的意义；它代表浮子式陀螺仪在闭环系统中应用时性能好坏的一个综合性指标。其量纲是“角度/时间”。

二、陀螺仪漂移的分类

对高精度的惯性导航陀螺仪而言，引起漂移的主要原因是来自其自身的不完善所造成的干扰力矩。引起陀螺仪漂移的力矩可以分成两大类：

1. 有规律性的力矩

这种力矩可以进行调整或补偿。由于这种类型的干扰力矩所引起的陀螺仪漂移大致有三种形式：

- 1) 与加速度无关的漂移 一般由弹性力矩、电磁力矩以及陀螺仪转子轴与框架轴不垂直时，转子转速又改变所引起的力矩等等。
- 2) 与加速度成比例的漂移 一般由质量不平衡所引起。
- 3) 与加速度平方成比例的漂移 一般由陀螺仪结构中非等弹性变形所引起。

2. 随机性质的干扰力矩

如由轴承的噪声、摩擦、温度梯度等引起的干扰力矩就属于这种性质。这种力矩没有一定的规律性，因此不能用简单的方法进行补偿。

由这一类型的干扰力矩所引起的陀螺仪的漂移就是随机漂移，陀螺仪的随机漂移一般是用大量漂移试验做统计分析来确定的，它是限制陀螺仪性能和精度指标的关键。

三、测试陀螺仪漂移的重要性

惯性导航系统对陀螺漂移角速度的要求是很高的。一般要求惯性导航陀螺仪的漂移角速度小于 $0.01^\circ/\text{小时}$ 、 $0.001^\circ/\text{小时}$ 或更小。连续使用时间越长，对陀螺仪精度的要求就越高。如果单从对材料性能、制造与装配工艺、使用环境等等方面提出苛刻要求来满足上述精度的话，那是很难实现的。

例如，假设浮子式积分陀螺仪的角动量

$$H = 2 \times 10^6 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^2 / \text{秒}$$

陀螺仪的质量

$$m = 250 \text{ 克}$$

重力加速度

$$g = 980 \text{ 厘米/秒}^2$$

漂移角速度为一个 meru 即 $\omega_d = 0.01541^\circ/\text{小时}$ (地球自转角速度的千分之一)。

如果引起漂移的干扰力矩是完全由于陀螺仪的质量中心偏离了框架轴的轴线而引起的，则很容易算出偏心距离

$$l = -\frac{H\omega_d}{mg} \approx \frac{0.145}{250 \times 980} \approx 6 \times 10^{-7} \text{ 厘米}$$

可见，如果要求 $\omega_d \leq 1 \text{ meru}$ 时，必须限制 l 在 6×10^{-7} 厘米之内。我们知道，试验整个陀螺仪之前，在这样尺寸容差之内平衡浮子组件是很难达到要求的，而通常采用的是从外部进行补偿的办法来进一步减小陀螺仪的漂移，这就要求我们事先必须对陀螺仪进行大量的漂移试验，从中找出它的规律性（包括随机漂移的统计规律），然后采取补偿措施及在系统中采用现代的滤波技术，将会进一步提高陀螺仪在系统中的工作精度。这充分说明，陀螺仪测试工作是一项非常关键，非常重要的工作。

第二章 陀螺仪的误差模型

陀螺仪的误差模型是指陀螺仪误差的数学表达式，它有动态误差模型与静态误差模型之分。确定误差模型是对陀螺仪进行补偿和改进所必须的。研究误差模型中各系数的大小及稳定性，分析各系数与有关物理因素的因果关系，就可以找到改进陀螺仪的方向及途径。

§ 1 陀螺仪误差模型的实验确定法

一、什么叫模型的实验确定法

对于长时间工作的惯性导航系统，陀螺仪的漂移角速度是系统的主要误差源。系统要工作在最优状态，如利用最佳递推滤波理论，即卡尔曼滤波，使系统导航误差的累积减到接近最小，则此滤波器要求系统的干扰是独立随机干扰。如果系统的随机干扰只考虑主要的，即陀螺仪的漂移，则必须对陀螺漂移角速度的测试数据进行数学分析，掌握它的统计规律，把陀螺漂移角速度的随机过程化成不相关的白噪声序列，建立陀螺漂移角速度的精确的数学模型，使它适应卡尔曼滤波器对系统输入干扰的统计特性要求，使系统达到尽可能接近最优状态。也就是说，从系统应用卡尔曼滤波器的要求出发，根据实验测得的陀螺仪漂移的数据，进行数学分析，建立适合于系统应用的数学模型，这种方法叫作陀螺仪误差模型的实验确定法，这是陀螺仪漂移数学模型辨识的内容之一。

二、模型的建立过程

通过实验，取得有限个测试数据，然后根据这些有限个测试数据来确定数学模型，其方法可以是多种多样的。一般往往都先假设存在某些特殊的模型公式，再由数据确定有关的参数。这样建立数学模型，最根本的问题是模型公式是否正确。如果模型公式正确，余下的问题是确定有关的参数。但有时即使测试数据都能适当地被这一模型公式所描述，但仍可能不真实地描述产生这些测试数据的过程。

目前有另一种方法，它把测试数据纯粹当作一个随机的过程，事先不需要假设某种模型的存在，而是根据对数据本身的分析来判断确定性的现象是否存在于数据中。这种数学模型的建立，一般包括识别模型，估计参数和对结果进行统计检验的三个阶段的重叠过程。

识别模型，就是利用测试所得的数据（即序列），根据一定的数学分析，对序列必然引起考虑某一类数学模型。

估计参数，就是在所确定的数学模型中，利用测试数据，作出关于参数的结论。

检验，就是校验有关参数所组成的模型适当与否。如不适当，必须继续改进模型。

以上只是一般叙述了陀螺仪误差模型的实验确定法，即陀螺仪误差模型的辨识问题。对于这方面的数学方法，此处从略，有兴趣的读者可以参阅有关数学模型辨识方面的资料文献。

§ 2 陀螺仪的误差模型

上一节介绍的是陀螺仪误差模型的实验确定法, 它根据实验测试的数据, 利用数学分析的方法, 识别它的数学模型的类型, 再进一步估计参数, 检验它的显著程度。本节是针对二自由度液浮陀螺仪或单自由度液浮积分陀螺仪的具体结构, 根据具体的工作情况, 推导出它的误差模型, 并在此基础上开展一些讨论。由于这类模型中的系数物理意义明显, 易与陀螺仪的结构情况相联系, 所以目前这种模型较为广泛地为人们所注意。

一、作用在陀螺仪上的干扰力矩

此处讨论的对象是二自由度框架式液浮陀螺仪, 它的结论对于单自由度液浮积分陀螺仪也是适用的。

作用于陀螺上的干扰力矩是由很多因素引起的, 如比力、电场、磁场、温度等等。这些因素有的可以通过适当的控制(如电场、磁场)或补偿(如温度)使其影响减到最小, 有的则难于控制(如比力)。因此研究干扰力矩时, 常以比力作为基准分成与之有关的和无关的两大类。

1. 比力

某一点的比力, 就是此点单位质量的惯性力, 其大小与方向等于该单位质量在那一点处由于加速度所引起的加在它的支承结构上的力。一般以向量 \overline{SF} 表示比力。这样有

$$\overline{SF} = \overline{G} - \overline{a} \quad (2-1)$$

式中 \overline{G} ——质量引力场所引起的加速度;

\overline{a} ——从地球中心到地球表面点 P 的矢量 \overline{R} 相对于惯性空间的二阶导数, 即 $\overline{a} = d^2\overline{R}/dt^2$ (图 2-1)。

举例来说, 在一个车箱里, 车顶悬挂一个重为 $m\overline{G}$ 的物体。如果车箱是静止的, 那么物体重量通过绳子作用在作为支承结构的车顶上的力就是 $m\overline{G}$ (图 2-2 a)。这里的 G 是质量 m 的重力引力所引起的加速度。但是当车箱以加速度 \overline{a} 相对惯性空间运动时, 则质量 m 将有一个惯性力 $-m\overline{a}$ 作用于车顶上。此时物体 m 作用于车顶上的总合力为

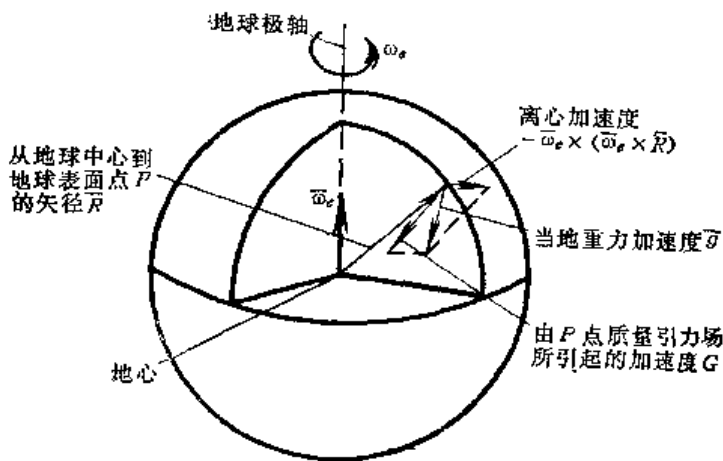


图2-1 确定P点处重力加速度



图2-2 关于比力的说明

$m\bar{G} - m\bar{a}$ 。所以比力的大小和方向就是

$$\overline{SF} = \frac{m\bar{G} - m\bar{a}}{m} = \bar{G} - \bar{a}$$

由此可见：比力矢量是单位质量重力引力所引起的加速度矢量与载体相对于惯性空间的加速度矢量之和（图 2-2b）。

2. 引力加速度 \bar{G} 与当地重力加速度 \bar{g} 的关系

当地重力加速度 \bar{g} 是质量引力场所引起的加速度和地球离心加速度的矢量和，即

$$\bar{g} = \bar{G} - \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{R}) \quad (2-2)$$

式中 $\bar{\omega}_e$ ——地球自转角速度；

R ——地球半径。

所以

$$\bar{G} = \bar{g} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{R}) \quad (2-3)$$

3. 比力 \overline{SF} 与当地重力加速度 \bar{g} 的关系

将 (2-3) 式代入 (2-1) 式得

$$\overline{SF} = \bar{g} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{R}) - \bar{a} \quad (2-4)$$

如果单位质量相对地球不动，则它相对惯性空间的加速度 \bar{a} 就是向心加速度 $\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{R})$ ，此时 (2-4) 式可简化为

$$\overline{SF} = \bar{g} \quad (2-5)$$

即在此情况下，比力 \overline{SF} 等于重力加速度 \bar{g} 。

4. 用比力表示作用于陀螺仪上的干扰力矩

大家知道，在比力作用下，出现干扰力矩的必要条件是质量中心偏离支承中心。而偏离原因是由于质量分布不均匀和结构的各向弹性变形不一致所引起的。由于力是正比例于比力的，因此弹性变形也正比于比力。可见，若偏离是由于质量分布不均匀所引起，则干扰力矩与比力一次方成比例；若偏离是由于非等弹性变形所引起，则干扰力矩应与比力的二次方成比例。

若采用图 2-3 所示的内环坐标系时，则对支承中心 0 的干扰力矩 \bar{M} 可写为

$$\bar{M} = K_0 (\overline{SF})^0 + K_1 (\overline{SF}) + K_2 (\overline{SF})^2 \quad (2-6)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_0 (\overline{SF})^0]_x \\ [K_0 (\overline{SF})^0]_y \\ [K_0 (\overline{SF})^0]_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_1 (\overline{SF})]_x \\ [K_1 (\overline{SF})]_y \\ [K_1 (\overline{SF})]_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_2 (\overline{SF})^2]_x \\ [K_2 (\overline{SF})^2]_y \\ [K_2 (\overline{SF})^2]_z \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

式中 K_0, K_1, K_2 分别为对应于比力的零次方 $(\overline{SF})^0$ ，一次方 (\overline{SF}) ，二次方 $(\overline{SF})^2$ 成

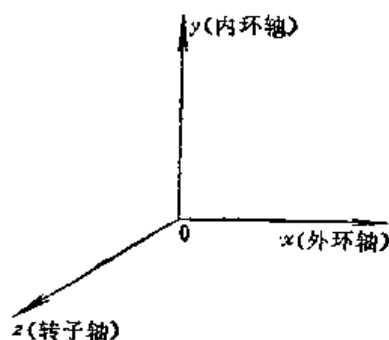


图2-3 内环坐标系

比例的力矩系数。

如与比力零次方成比例的干扰力矩用 M_{a0} 表示, 与比例一次方成比例的干扰力矩用 M_{a1} 表示, 与比例二次方成比例的干扰力矩用 M_{a2} 表示, 则 (2-6), (2-7) 式可以写成

$$\bar{M} = \bar{M}_{a0} + \bar{M}_{a1} + \bar{M}_{a2} \quad (2-8)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{M}_{a0})_x \\ (\bar{M}_{a0})_y \\ (\bar{M}_{a0})_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{M}_{a1})_x \\ (\bar{M}_{a1})_y \\ (\bar{M}_{a1})_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{M}_{a2})_x \\ (\bar{M}_{a2})_y \\ (\bar{M}_{a2})_z \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

比较 (2-7), (2-9) 式得与比力无关 (即比力的零次方) 的干扰力矩

$$\bar{M}_{a0} = K_0 (\bar{SF})^0 \quad (2-10)$$

或

$$\begin{bmatrix} (M_{a0})_x \\ (M_{a0})_y \\ (M_{a0})_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_0 (\bar{SF})^0]_x \\ [K_0 (\bar{SF})^0]_y \\ [K_0 (\bar{SF})^0]_z \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

一般说来, 它是由导电丝弹性约束、力矩器和信号传感器的电磁力矩等所组成。

与比力一次方成比例的干扰力矩是由质量分布不均匀所引起。设 \bar{l} 为浮子组合件质心相对于支承中心的向径, m 为组合件的质量, 则惯性力为 $m(\bar{SF})$ 。这样就有力矩

$$\bar{M}_{a1} = K_1 (\bar{SF}) = \bar{l} \times [m(\bar{SF})] \quad (2-12)$$

或

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (M_{a1})_x \\ (M_{a1})_y \\ (M_{a1})_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [K_1 (\bar{SF})]_x \\ [K_1 (\bar{SF})]_y \\ [K_1 (\bar{SF})]_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m(\bar{SF})]_x \\ [m(\bar{SF})]_y \\ [m(\bar{SF})]_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ml_y(SF)_z - ml_z(SF)_y \\ ml_z(SF)_x - ml_x(SF)_z \\ ml_x(SF)_y - ml_y(SF)_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-13)$$

与比力二次方成比例的干扰力矩是由构件的不等弹性引起的。设 $\bar{\delta}$ 为构件弹性变形时质心偏离支承中心的向径, 则有

$$\bar{M}_{a2} = K_2 (\bar{SF})^2 = \bar{\delta} \times [m(\bar{SF})] \quad (2-14)$$

或

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (M_{a2})_x \\ (M_{a2})_y \\ (M_{a2})_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [K_2 (\bar{SF})^2]_x \\ [K_2 (\bar{SF})^2]_y \\ [K_2 (\bar{SF})^2]_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_x & \delta_y \\ \delta_x & 0 & -\delta_z \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m(\bar{SF})]_x \\ [m(\bar{SF})]_y \\ [m(\bar{SF})]_z \end{bmatrix} \\ &= m \begin{bmatrix} \delta_y(SF)_z - \delta_z(SF)_y \\ \delta_z(SF)_x - \delta_x(SF)_z \\ \delta_x(SF)_y - \delta_y(SF)_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-15)$$

再设 \bar{q} 为构件的弹性变形张量, K' 为构件的弹性系数的倒数 (或叫柔性系数, 即单位力引起的变形位移), 而 K'_{ij} 表示沿 j 方向的力引起 i 方向的变形位移, 于是

$$\bar{\delta} = \bar{q} \cdot [m(\overline{SF})] \quad (2-16)$$

而

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} K'_{xx} & K'_{xy} & K'_{xz} \\ K'_{yx} & K'_{yy} & K'_{yz} \\ K'_{zx} & K'_{zy} & K'_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

将 $\bar{\delta}$ 和 (\overline{SF}) 写成矩阵形式, 代 (2-17) 式到 (2-16) 式得

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{xx} & K'_{xy} & K'_{xz} \\ K'_{yx} & K'_{yy} & K'_{yz} \\ K'_{zx} & K'_{zy} & K'_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m(\overline{SF})]_x \\ [m(\overline{SF})]_y \\ [m(\overline{SF})]_z \end{bmatrix} \\ = m \begin{bmatrix} K'_{xx}(SF)_x + K'_{xy}(SF)_y + K'_{xz}(SF)_z \\ K'_{yx}(SF)_x + K'_{yy}(SF)_y + K'_{yz}(SF)_z \\ K'_{zx}(SF)_x + K'_{zy}(SF)_y + K'_{zz}(SF)_z \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

再将 (2-18) 式代入 (2-15) 式得

$$\begin{bmatrix} (M_{a0})_x \\ (M_{a0})_y \\ (M_{a0})_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_z(\overline{SF})^2]_x \\ [K_z(\overline{SF})^2]_y \\ [K_z(\overline{SF})^2]_z \end{bmatrix} \\ = m^2 \begin{bmatrix} [K'_{yx}(SF)_x + K'_{yy}(SF)_y + K'_{yz}(SF)_z](SF)_x - [K'_{xx}(SF)_x \\ + K'_{xy}(SF)_y + K'_{xz}(SF)_z](SF)_y \\ [K'_{xx}(SF)_x + K'_{xy}(SF)_y + K'_{xz}(SF)_z](SF)_x - [K'_{yx}(SF)_x \\ + K'_{yy}(SF)_y + K'_{yz}(SF)_z](SF)_y \\ [K'_{xx}(SF)_x + K'_{xy}(SF)_y + K'_{xz}(SF)_z](SF)_y - [K'_{yx}(SF)_x \\ + K'_{yy}(SF)_y + K'_{yz}(SF)_z](SF)_z \\ -K'_{xx}(SF)_x(SF)_y + (K'_{yy} - K'_{zz})(SF)_y(SF)_z + K'_{yx}(SF)_x(SF)_z \\ -K'_{zy}(SF)_y^2 + K'_{yz}(SF)_z^2 \\ K'_{zy}(SF)_x(SF)_y - K'_{xy}(SF)_y(SF)_z + (K'_{zz} - K'_{xx})(SF)_x(SF)_z \\ + K'_{zx}(SF)_x^2 - K'_{xz}(SF)_z^2 \\ (K'_{xx} - K'_{yy})(SF)_x(SF)_y + K'_{xz}(SF)_y(SF)_z - K'_{yz}(SF)_x(SF)_z \\ -K'_{yx}(SF)_x^2 + K'_{xy}(SF)_y^2 \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

将 (2-11)、(2-12)、(2-19) 代入 (2-9) 式, 便可得出作用在陀螺仪上的干扰力矩诸分量。下面仅将沿内、外环轴的干扰力矩分量写出, 即

$$\begin{aligned} M_x &= (M_{a0})_x - ml_x(SF)_y + ml_y(SF)_z \\ &\quad - m^2 K'_{xx}(SF)_x(SF)_y + m^2 (K'_{yy} - K'_{zz})(SF)_y(SF)_z \\ &\quad + m^2 K'_{xx}(SF)_x(SF)_z + m^2 K'_{yz}(SF)_z^2 \\ &\quad - m^2 K'_{zy}(SF)_y^2 \end{aligned} \quad (2-20)$$

$$\begin{aligned}
M_y = & (M_{a0})_y - ml_x(SF)_z + ml_z(SF)_x \\
& + m^2 K'_{zy}(SF)_x(SF)_y - m^2 K'_{xy}(SF)_y(SF)_z \\
& + m^2(K'_{zz} - K'_{xx})(SF)_x(SF)_z \\
& + m^2 K'_{zx}(SF)_x^2 - m^2 K'_{xz}(SF)_z^2
\end{aligned} \quad (2-21)$$

将 (2-5) 式代入 (2-20)、(2-21) 式得

$$\begin{aligned}
M_x = & (M_{a0})_x - ml_x g_y + ml_y g_z \\
& - m^2 K'_{zx} g_x g_y + m^2 (K'_{yy} - K'_{zz}) g_y g_z \\
& + m^2 K'_{yx} g_x g_z - m^2 K'_{zy} g_y^2 + m^2 K'_{yz} g_z^2
\end{aligned} \quad (2-22)$$

$$\begin{aligned}
M_y = & (M_{a0})_y - ml_x g_z + ml_z g_x \\
& + m^2 K'_{zy} g_x g_y - m^2 K'_{xy} g_y g_z \\
& + m^2 (K'_{zz} - K'_{xx}) g_x g_z \\
& + m^2 K'_{zx} g_x^2 - m^2 K'_{xz} g_z^2
\end{aligned} \quad (2-23)$$

对于单自由度液浮积分陀螺仪只采用 (2-21) 式。考虑到所用符号的一致性。将适合于单自由度陀螺仪用的作用在其输出轴 y (相当于二自由度陀螺仪的内环轴) 上的干扰力矩 (2-21) 式改写如下:

$$\begin{aligned}
M_y = & M_{F0} - ml_x(SF)_z + ml_z(SF)_x \\
& + m^2 K'_{zy}(SF)_x(SF)_y - m^2 K'_{xy}(SF)_y(SF)_z \\
& + m^2 (K'_{zz} - K'_{xx})(SF)_x(SF)_z \\
& + m^2 K'_{zx}(SF)_x^2 - m^2 K'_{xz}(SF)_z^2
\end{aligned} \quad (2-24)$$

将 (2-5) 式代入 (2-24) 式得

$$\begin{aligned}
M_y = & M_{F0} - ml_x g_z + ml_z g_x \\
& + m^2 K'_{zy} g_x g_y - m^2 K'_{xy} g_y g_z \\
& + m^2 (K'_{zz} - K'_{xx}) g_x g_z \\
& + m^2 K'_{zx} g_x^2 - m^2 K'_{xz} g_z^2
\end{aligned} \quad (2-25)$$

式中 (见图 2-4)

x —— 输入轴, 对应二自由度陀螺仪的外环轴;

y —— 输出轴, 对应内环轴;

z —— 转子轴;

M_{F0} —— 作用在输出轴 y 上的与比力零次方成比例的力矩, 即常值力矩;

l_x, l_y, l_z —— 浮子组合件质心相对于支承中心的向径 \vec{l} 分别在输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 上的分量;

$(SF)_x, (SF)_y, (SF)_z$ —— 比力 (\overline{SF}) 在输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 上的分量;

K'_{ij} —— i, j 分别为 x, y, z , 弹性变形张量矩阵 $\bar{\psi}$ 中的各元, 即

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} K'_{xx} & K'_{xy} & K'_{xz} \\ K'_{yx} & K'_{yy} & K'_{yz} \\ K'_{zx} & K'_{zy} & K'_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

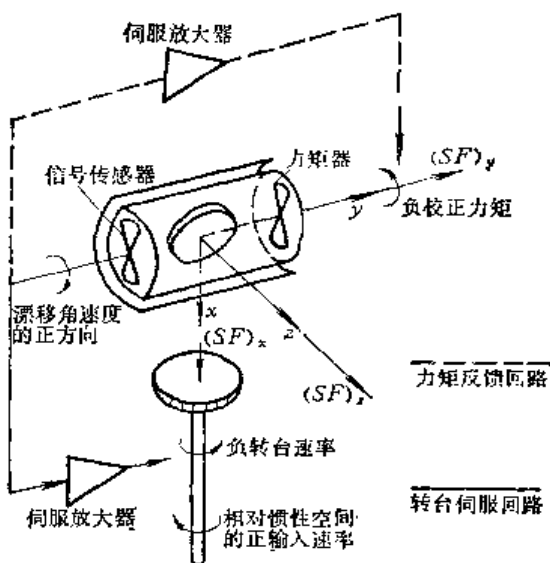


图2-4 单自由度液浮积分陀螺仪符号的规定

二、陀螺仪的稳态误差模型——物理模型

陀螺仪的误差是用干扰力矩所引起的漂移角速度来衡量的。若用 ω_{dx} 和 ω_{dy} 分别表示绕外、内环轴的漂移角速度时，则有

$$\omega_{dx} = -\frac{M_y}{H} \quad (2-27)$$

$$\omega_{dy} = \frac{M_x}{H} \quad (2-28)$$

将 (2-20) (2-21) 式分别代入 (2-27) (2-28) 式，并采用新的符号，得

$$\begin{aligned} \omega_{dx} = & D(x)_0 + D(x)_x(SF)_x + D(x)_z(SF)_z \\ & + D(x)_{xy}(SF)_x(SF)_y + D(x)_{yz}(SF)_y(SF)_z \\ & + D(x)_{zx}(SF)_x(SF)_z \\ & + D(x)_{xx}(SF)_x^2 + D(x)_{zz}(SF)_z^2 \end{aligned} \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned} \omega_{dy} = & D(y)_0 + D(y)_y(SF)_y + D(y)_x(SF)_x \\ & + D(y)_{xy}(SF)_x(SF)_y + D(y)_{yz}(SF)_y(SF)_z \\ & + D(y)_{zx}(SF)_x(SF)_z \\ & + D(y)_{yy}(SF)_y^2 + D(y)_{zz}(SF)_z^2 \end{aligned} \quad (2-30)$$

式中的符号 $D(i)_i$ 和 $D(i)_{jk}$ 表示与沿 j ($j = x, y, z$) 方向的比力成比例或 j 方向和 k ($k = x, y, z$) 方向的比力乘积成比例，且绕 i ($i = x, y$) 轴的漂移系数。当 i 为 x (或为 y) 轴时，则引起漂移的干扰力矩为相对于 y (或 x) 轴的。

现将 (2-29) (2-30) 式中各符号的内容和量纲等列表说明如下：

符 号	内 容	量 纲	与比力的关系	漂移或是漂移系数
$D(x)_0$	$-\frac{(M_{10})_y}{If}$	度/小时	与比力无关	漂 移
$D(x)_x$	$\frac{ml_x}{H}$	度/小时/SF	$(SF)_x$	漂移系数
$D(x)_y$	$-\frac{ml_y}{H}$	度/小时/SF	$(SF)_y$	漂移系数
$D(x)_{xy}$	$-\frac{m^2 K_{zy}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x(SF)_y$	漂移系数
$D(x)_{yz}$	$\frac{m^2 K_{zy}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_y(SF)_z$	漂移系数
$D(x)_{xz}$	$-\frac{m^2 (K_{zx}^0 - K_{xz}^0)}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x(SF)_z$	漂移系数
$D(x)_{xx}$	$-\frac{m^2 K_{zx}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x^2$	漂移系数
$D(x)_{zz}$	$\frac{m^2 K_{zx}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_z^2$	漂移系数
$D(y)_0$	$\frac{(M_{10})_x}{H}$	度/小时	与比力无关	漂 移
$D(y)_y$	$\frac{ml_y}{H}$	度/小时/SF	$(SF)_y$	漂移系数
$D(y)_x$	$-\frac{ml_x}{H}$	度/小时/SF	$(SF)_x$	漂移系数
$D(y)_{xy}$	$-\frac{m^2 K_{zx}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x(SF)_y$	漂移系数
$D(y)_{yz}$	$\frac{m^2 (K_{zy}^0 - K_{yz}^0)}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_y(SF)_z$	漂移系数
$D(y)_{xz}$	$\frac{m^2 K_{zy}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x(SF)_z$	漂移系数
$D(y)_{yy}$	$\frac{m^2 K_{zy}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_y^2$	漂移系数
$D(y)_{zz}$	$-\frac{m^2 K_{zy}^0}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_z^2$	漂移系数

将 (2-5) 式代入 (2-29) (2-30) 式得

$$\begin{aligned}
 \omega_{dx} = & D(x)_0 + D(x)_x g_x + D(x)_y g_y \\
 & + D(x)_{xy} g_x g_y + D(x)_{yz} g_y g_z \\
 & + D(x)_{xz} g_x g_z + D(x)_{xx} g_x^2 \\
 & + D(x)_{zz} g_z^2
 \end{aligned} \quad (2-31)$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{dy} = & D(y)_0 + D(y)_y g_y + D(y)_x g_x \\
 & + D(y)_{xy} g_x g_y + D(y)_{yz} g_y g_z \\
 & + D(y)_{xz} g_x g_z + D(y)_{yy} g_y^2 \\
 & + D(y)_{zz} g_z^2
 \end{aligned} \quad (2-32)$$

同样, 对于单自由度液浮积分陀螺仪对应应有

$$\begin{aligned}
\omega_d = & D_0 + D_x(SF)_x + D_y(SF)_y \\
& + D_{xy}(SF)_x(SF)_y + D_{yz}(SF)_y(SF)_z \\
& + D_{xz}(SF)_x(SF)_z \\
& + D_{xx}(SF)_x^2 + D_{zz}(SF)_z^2
\end{aligned} \quad (2-33)$$

式中各符号的内容和量纲等列表说明如下:

符 号	内 容	量 纲	与比力的关系	漂移或漂移系数
D_0	$-\frac{M_{T0}}{H}$	度/小时	与比力无关	漂 移
D_x	$\frac{ml_x}{H}$	度/小时/(SF)	$(SF)_x$	漂移系数
D_y	$-\frac{ml_y}{H}$	度/小时/(SF)	$(SF)_y$	漂移系数
D_{xy}	$-\frac{m^2 K'_{xy}}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x(SF)_y$	漂移系数
D_{yz}	$\frac{m^2 K'_{yz}}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_y(SF)_z$	漂移系数
D_{zx}	$-\frac{m^2 (K'_{zx} - K'_{xz})}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x(SF)_z$	漂移系数
D_{xx}	$-\frac{m^2 K'_{xx}}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_x^2$	漂移系数
D_{zz}	$\frac{m^2 K'_{zz}}{H}$	度/小时/(SF) ²	$(SF)_z^2$	漂移系数

将 (2-5) 式代入 (2-33) 式得

$$\begin{aligned}
\omega_d = & D_0 + D_x g_x + D_y g_y \\
& + D_{xy} g_x g_y + D_{yz} g_y g_z \\
& + D_{xz} g_x g_z + D_{xx} g_x^2 + D_{zz} g_z^2
\end{aligned} \quad (2-34)$$

三、陀螺仪的静态误差模型——数学模型

1. 为什么要建立误差数学模型

上一小节从误差的来源, 即干扰力矩, 建立陀螺仪的误差模型。这种模型各项的物理性质是明显的, 因此对于陀螺研制人员改进陀螺的结构, 提高精度较为方便。

由于负责系统工作的技术人员从使用陀螺的角度出发, 研究尽可能提高陀螺仪使用精度的措施, 也用误差模型的方式表示陀螺仪的误差规律。由于系统工作人员不一定重视误差源的物理性质, 其表示方法就抽象些, 一般化些, 本章第一节就是这种性质的误差模型建立方法之一。这里再介绍一种目前常用的与上一小节类似的误差数学模型。

2. 误差数学模型的建立

为了方便起见, 下面针对着单自由度液浮积分陀螺仪来介绍, 最后再给出二自由度液浮陀螺仪的误差数学模型。

由前面知道, 单自由度液浮积分陀螺仪的漂移角速度包含着三个基本分量: 不敏感比力的分量; 正比于比力的分量和正比于比力平方的分量, 即

$$\omega_d = D_0 + D_1(\overline{SF}) + D_2(\overline{SF})^2 \quad (2-35)$$

再沿陀螺各轴（图 2-4）的分量写出比力，并包括全部可能的组合，则（2-35）式可变为

$$\begin{aligned}\omega_d = & D_0 + D_x(SF)_x + D_y(SF)_y + D_z(SF)_z \\ & + D_{xy}(SF)_x(SF)_y + D_{yz}(SF)_y(SF)_z \\ & + D_{zx}(SF)_z(SF)_x + D_{xx}(SF)_x^2 \\ & + D_{yy}(SF)_y^2 + D_{zz}(SF)_z^2\end{aligned}\quad (2-36)$$

式中 D_0 ——不敏感比力的漂移角速度；

D_x, D_y, D_z ——分别是正比于沿输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 的比力的陀螺仪漂移系数；

D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} ——分别是正比于沿输入轴 x 和输出轴 y 、输出轴 y 和转子轴 z 、转子轴 z 和输入轴 x 的比力乘积的陀螺仪漂移系数；

D_{xx}, D_{yy}, D_{zz} ——分别是正比于输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 的比力平方的陀螺仪漂移系数。

方程（2-36）反映了陀螺仪的静态工作情况，但其中假设：

1) 陀螺仪工作于闭环伺服回路或力矩回路（图 2-4）。这意味着转子轴和转子参考轴近似地保持重合，因此交叉耦合作用可以忽略。

2) 陀螺仪与线振动和角振动隔离，因此圆柱形和各向不等弹性的谐振作用以及锥形力矩可以略去。

3) 不存在高于二阶的与比力有关的项。

4) 由绕陀螺仪输入轴 x 输入的角速度引起的陀螺力矩和由力矩器产生的控制力矩为零。

将（2-1）式代入（2-36）式得

$$\begin{aligned}\omega_d = & D_0 + D_x(G_x - a_x) + D_y(G_y - a_y) + D_z(G_z - a_z) \\ & + D_{xy}(G_x - a_x)(G_y - a_y) + D_{yz}(G_y - a_y)(G_z - a_z) \\ & + D_{zx}(G_z - a_z)(G_x - a_x) + D_{xx}(G_x - a_x)^2 \\ & + D_{yy}(G_y - a_y)^2 + D_{zz}(G_z - a_z)^2\end{aligned}\quad (2-37)$$

式中 G_x, G_y, G_z ——地球引力场所引起的加速度在输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 上的分量；

a_x, a_y, a_z ——向量 \bar{a} （见（2-1）式）在输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 上的分量。

对于惯性导航系统或对于在实验室的应用，误差模型（2-37）都是成立的。但是对于在实验室作陀螺仪测试时，将公式（2-5）代入（2-36）得到较为方便的模型，其结果是

$$\begin{aligned}\omega_d = & D_0 + D_x g_x + D_y g_y + D_z g_z \\ & + D_{xy} g_x g_y + D_{yz} g_y g_z + D_{zx} g_z g_x \\ & + D_{xx} g_x^2 + D_{yy} g_y^2 + D_{zz} g_z^2\end{aligned}\quad (2-38)$$

式中 g_x, g_y, g_z ——分别是沿输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 的当地重力加速度分量。

比较（2-38）、（2-31）式可知：从数学上考虑的误差模型比从物理意义推导的模型多了两项，即多了 $D_y g_y$ 与 $D_{yy} g_y^2$ 两项。

3. 误差模型中各项系数的物理意义

模型（2-38）式中第一项 D_0 是不敏感加速度的漂移，它是误差模型的固定项或偏移

项。它是由下列因素所引起的:

- 1) 陀螺仪中软导线所产生的弹性力矩;
- 2) 信号传感器电磁反作用力矩, 它正比于信号传感器激励电流的平方;
- 3) 磁悬浮反作用力矩, 它正比于磁悬浮激励电流的平方;
- 4) 以上三项取决于时间的变化率;
- 5) 浮子径向和轴向速度的效应。

以上几项用公式的形式表示为

$$D_0 = D_K \left(1 + \frac{dD_K}{dt} \cdot t \right) + D_{ax} d_x + D_{ay} d_y + D_{az} d_z \quad (2-39)$$

式中 D_K ——由以上 1、2、3 各项所引起的漂移;

t ——时间;

D_{ax}, D_{ay}, D_{az} ——分别为对沿输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 浮子组合件线位移速度敏感的陀螺仪漂移系数;

d_x, d_y, d_z ——分别为沿输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 浮子组合件线位移速度。

模型 (2-38) 式中第二、三、四项是敏感加速度的漂移, 并正比于加速度一次幂的全部效应, 它们是:

- 1) 质量不平衡力矩;
- 2) 质量不平衡力矩随时间的变化;
- 3) 由陀螺仪两端的温度梯度引起的力矩。这一力矩包含液体力矩, 由浮子浮心移动引起的力矩和由浮子重心移动引起的力矩;
- 4) 由温度梯度引起的力矩随时间的变化;
- 5) 由陀螺元件平均温度变化引起的力矩;
- 6) 由转子电压变化引起的力矩。

如果陀螺的平均温度和陀螺马达电压能严格地保持在规定限度内, 可以略去由最后两种效应引起的力矩。这样, 敏感加速度的静态漂移可以表示为

$$\begin{aligned} D_x(SF)_x &= [U_x(1 + P_x t) - D_{Txx} \Delta T_x](SF)_x \\ D_y(SF)_y &= [U_y(1 + P_y t) + D_{Tyy} \Delta T_y](SF)_y \\ D_z(SF)_z &= [-U_z(1 + P_z t) + D_{Tzz} \Delta T_z](SF)_z \end{aligned} \quad (2-40)$$

式中 U_x, U_z ——分别为沿输入轴 x 、转子轴 z 的质量不平衡的漂移系数;

U_y ——沿输出轴 y 的比力与漂移分量联系起来的比例系数;

P_x, P_y, P_z ——分别为 U_x, U_y, U_z 随时间的变化;

D_{Tij} ——敏感沿 i 轴温度梯度和沿 j 轴比力的组合陀螺漂移系数。 i 、 j 或为 x , 或为 y 、 z ;

$\Delta T_x, \Delta T_y, \Delta T_z$ ——分别为陀螺仪沿输入轴 x 、输出轴 y 、转子轴 z 的温度梯度。

(2-40) 式中每一项的代数符号都是具有物理意义的, 正号代表正向力矩或漂移, 而负号代表反向力矩或漂移。在误差模型中, $(SF)_y$ 项的极性选为正, 在图 2-5 a 中沿转子轴的质量不平衡 $+U_z$ 与沿正输入轴的比力 $+(SF)_x$ 相作用, 得出绕输出轴的正向力矩。另一方面, 沿正输入轴的质量不平衡 $+U_x$ 与沿正转子轴的比力 $+(SF)_z$ 相作用, 得出绕输出轴

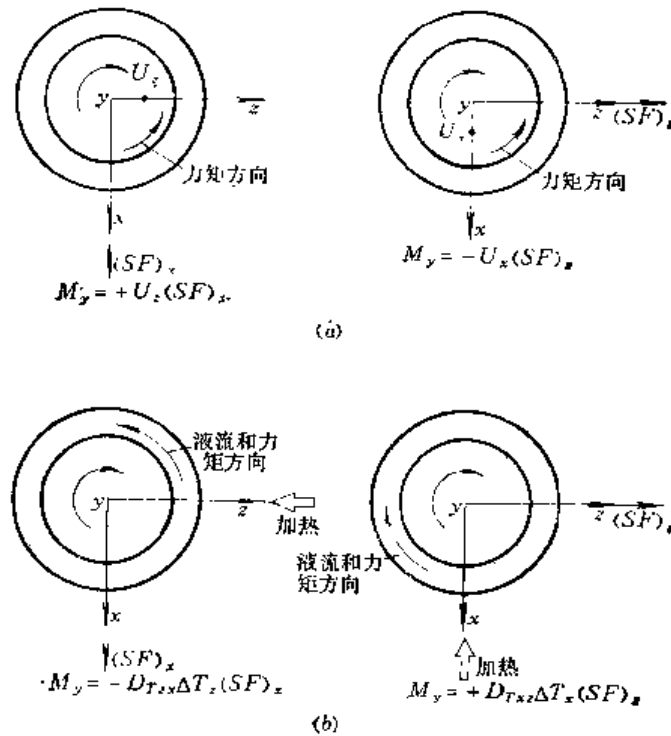


图2-5 敏感加速度项的极性规定

a—质量不平衡；b—热梯度。

的负向力矩。当在陀螺仪从正转子轴到负转子轴两端作用着一个热梯度时，如图 2-5 b 的左图所示，在正转子轴一端的液体变得热些，密度小些，从而在 $(SF)_x$ 作用下按标志的方向逆时针流动，形成的力矩是沿 y 轴负向的。当热加给正输入轴时，如图 2-5 b 右图所示，液体在 $(SF)_x$ 的作用下按标志方向顺时针流动，引起绕输出轴 y 的正向力矩。

模型 (2-38) 式中后六项是敏感加速度平方的漂移项，又叫陀螺仪的柔性项。这些项是由陀螺仪结构各向不等刚度造成的。它们在全部误差项中是最稳定的，没有表现出随时间的变化或者随环境的变化（如由温度引起的变动）。各柔性项的物理意义是

$$\left. \begin{aligned}
 D_{xx}(SF)_x^2 &= K_{xx}(SF)_x^2 \\
 D_{yy}(SF)_y^2 &= K_{yy}(SF)_y^2 \\
 D_{zz}(SF)_z^2 &= -K_{zz}(SF)_z^2 \\
 D_{xy}(SF)_x(SF)_y &= (K_{yx} + K_{xy})(SF)_x(SF)_y \\
 D_{yz}(SF)_y(SF)_z &= (K_{yz} - K_{zy})(SF)_y(SF)_z \\
 D_{zx}(SF)_z(SF)_x &= (K_{zx} - K_{xz})(SF)_z(SF)_x
 \end{aligned} \right\} \quad (2-41)$$

式中 K_{ij} ——沿 j 向的比力引起沿 i 向的位移与某一比力相结合形成的漂移系数， i 、 j 可分别为 x 、 y 、 z 且

$$K_{ij} = m^2 K''_{ij} \quad (2-42)$$

K''_{ij} ——沿 j 的比力引起沿 i 的柔性系数；

m ——位移质量。沿不同的轴可能是不一样的。

柔性项的代数符号具有类似于那些敏感加速度项的物理意义，因此可以用类似的方式来确定。

4. 二自由度陀螺仪的误差数学模型

对于二自由度液浮陀螺仪, 类似单自由度液浮积分陀螺仪有

$$\begin{aligned}\omega_{dx} = & D(x)_0 + D(x)_x(SF)_x + D(x)_y(SF)_y + D(x)_z(SF)_z \\ & + D(x)_{xy}(SF)_x(SF)_y + D(x)_{yz}(SF)_y(SF)_z \\ & + D(x)_{zx}(SF)_z(SF)_x + D(x)_{xx}(SF)_x^2 \\ & + D(x)_{yy}(SF)_y^2 + D(x)_{zz}(SF)_z^2\end{aligned}\quad (2-43)$$

$$\begin{aligned}\omega_{dy} = & D(y)_0 + D(y)_x(SF)_x + D(y)_y(SF)_y + D(y)_z(SF)_z \\ & + D(y)_{xy}(SF)_x(SF)_y + D(y)_{yz}(SF)_y(SF)_z \\ & + D(y)_{zx}(SF)_z(SF)_x + D(y)_{xx}(SF)_x^2 \\ & + D(y)_{yy}(SF)_y^2 + D(y)_{zz}(SF)_z^2\end{aligned}\quad (2-44)$$

在实验室应用时, 误差模型 (2-43) (2-44) 根据 (2-5) 式, 同样可得

$$\begin{aligned}\omega_{dx} = & D(x)_0 + D(x)_x g_x + D(x)_y g_y + D(x)_z g_z \\ & + D(x)_{xy} g_x g_y + D(x)_{yz} g_y g_z \\ & + D(x)_{zx} g_z g_x \\ & + D(x)_{xx} g_x^2 + D(x)_{yy} g_y^2 + D(x)_{zz} g_z^2\end{aligned}\quad (2-45)$$

$$\begin{aligned}\omega_{dy} = & D(y)_0 + D(y)_x g_x + D(y)_y g_y + D(y)_z g_z \\ & + D(y)_{xy} g_x g_y + D(y)_{yz} g_y g_z \\ & + D(y)_{zx} g_z g_x \\ & + D(y)_{xx} g_x^2 + D(y)_{yy} g_y^2 + D(y)_{zz} g_z^2\end{aligned}\quad (2-46)$$

至于误差模型 (2-45) (2-46) 式中各项的物理意义, 类似于单自由度液浮积分陀螺仪的情况, 此处不再重复。

四、陀螺仪稳态误差模型的讨论

引起陀螺仪漂移的原因是很多的, 如电源的电压、频率、工作环境的电场、磁场、温度、气压、线加速度、角运动以及时间等等。为了使误差模型确切地反映陀螺仪的误差规律, 就要将这些误差源都作为自变量出现于误差模型中。这样的误差模型是很难建立的, 就是建立了, 也一定是很复杂的, 往往缺乏使用价值。实际上在设计时常常已把一些可以控制的误差源, 如电源电压、频率、工作温度等控制在一定范围内, 并把一些可以屏蔽的外界干扰源与陀螺仪内部的误差源隔离开, 使之不引起干扰。这样, 误差模型只要考虑加速度、角运动和时间三项。

对于时间这一项误差因素, 根据使用条件不同, 处理方法也不一样, 如在舰艇、卫星、飞船上, 一次启动长期工作, 时间因素很重要, 应将它作为一个变量加入到误差模型中去。但在导弹中应用时, 工作时间不长, 如果有可能在最后一次测试后立即投入使用, 利用陀螺仪的短期稳定性, 在误差模型中就可以不考虑时间的影响。如果不能在测试后立即使用, 那就要求陀螺仪性能的长时间稳定性良好, 只有这样才能有效地发挥误差模型的作用。这就要求将一些可能引起陀螺仪性能不稳定的因素, 如输电导线; 支承中的接触摩擦; 框架联结部位的薄弱环节; 结构或加工工艺中的残余应力等等作妥善处理, 以便改善陀螺仪性能的时间稳定性。

陀螺仪误差模型中各项系数大小不同,有些项系数的量级与该项系数的随机分布相近,列出的意义不大,可以略去。

陀螺仪每一输出轴完整的静态误差模型有十项之多,由于有些项的相互相关,数据处理时不能分开,因此往往将 D_{yy} 项略去。再说 D_{yy} 的物理概念也不明确,并在一般陀螺仪中都很小,略去后不会影响误差模型的真实性的。

每一陀螺仪误差模型各系数求出后,为了进一步简化,可以根据实际情况,将一些影响较小的项略去。注意,此处所谓影响较小,不能单纯从误差模型本身各系数相比较,还要注意该陀螺仪使用中安装位置,从使用角度看影响系统精度的大小来决定取舍。

关于陀螺仪误差模型的应用问题,这里引用国外资料介绍某仪表试验室应用单自由度液浮积分陀螺仪的静态误差模型的历史情况,也许对模型应用的理解,会有所帮助。

一开始,这种陀螺仪的误差模型只包含三项:一个与比力无关的常值项和两个正比于比力的质量不平衡项(沿转子轴和输入轴的质量不平衡),即

$$\omega_d = D_0 + D_x(SF)_x + D_z(SF)_z \quad (2-47)$$

从现在的情况看,当时的陀螺仪性能是粗糙的,只有主要项能够测试出来,其它各项都被陀螺仪的不定性掩盖了。

当陀螺仪性能得到改进时,另外一项在测试数据中变得明显起来,它是比力平方的函数。经过分析得出,这一项是由浮子组合件的各向不等弹性引起的。换句话说,浮子组合件在各个方向上不是等刚度的。当时假设柔性轴与转子轴同向,因此只有单独一项柔性项。这样加到模型方程便有了第四项,即

$$\omega_d = D_0 + D_x(SF)_x + D_z(SF)_z + D_{zx}(SF)_x^2 \quad (2-18)$$

当陀螺仪输出轴平行于地球极轴,利用单轴转台作翻滚试验时,由于陀螺仪柔性引起的误差对于二次谐波中的正弦项是明显的。但是同时也出现一个二次谐波的余弦项。这点通过假设这柔性轴不与转子轴同向,但处于输入轴与转子轴平面内而得到了解释。这两个柔性项称为主柔性项和次柔性项,从而使误差模型发展到五个项,即

$$\omega_d = D_0 + D_x(SF)_x + D_z(SF)_z + D_{zx}(SF)_x^2 + D_{xx}(SF)_x^2 \quad (2-49)$$

进一步的分析和试验,把柔性导向三度空间,根据这种原理,柔性轴既不与转子轴同向,也不在输入轴与转子轴平面内,从而使误差模型包含了八个项,即式(2-33)。

虽然人们相信在数学上用八项误差模型已经能完全地描述了陀螺的误差情况,但在某些方位上的测试数据中还继续出现矛盾。进一步深入地试验和分析表明,有一个,可能还有一个附加项应当考虑在误差模型中。这样就变成总共为十个项。这最后两项是沿输出轴的比力和比力平方的函数。具有十项的误差模型公式即为式(2-36)。

前面提到过,式(2-36)在应用时,又往往略去沿输出轴比力平方 $D_{yy}(SF)_y^2$ 项,成为九项的模型。

在本节第二小节中可以看到,对于八项的误差模型式(2-33),可以用物理概念推导出容易理解的质量不平衡项和柔性项。在十项的模型式(2-36)中附加的两项,即使发展到目前,其物理意义也还是不易理解的。举例来说,如何能设想沿某一轴的比力会引起绕该轴的力矩呢?

此外,还简单表示为质量不平衡的那些误差项,已经知道不仅包括质量不平衡,而且

也包括着温度梯度的影响, 元件平均温度变化的影响, 转子电源变化的影响等。因此把严格的物理误差模型变成一个数学误差模型, 也就是用数学的形式, 即本节第二小节中所讨论的情况, 来描述陀螺仪的误差, 显得更为合适。

五、陀螺仪的动态性能函数

陀螺仪的误差模型, 根据情况不同, 应作不同的考虑。用于惯性导航稳定平台上的陀螺仪, 平台起到将角运动隔离的作用, 因此就可以只考虑静态误差模型。而在捷联式系统中, 运载体的角运动直接作用在陀螺仪上, 因此除考虑静态误差模型外, 不能忽视陀螺仪的动态性能函数。

静态误差模型是以比力 (或线加速度) 为自变量列出的, 不考虑角运动的影响, 因此在建立过程中应保持转子轴相对于壳体处于零位。而动态性能函数是以角运动作自变量列出的, 没有考虑比力的影响, 因此在建立过程中应保持比力不变。

一般可以认为由比力引起的误差与由角运动所引起的误差无关, 因此总的误差应是两种误差模型计算出来的误差之和。

对于二自由度液浮陀螺仪, 它的章动运动一般是不考虑的, 因此动态问题可以不去研究。对于单自由度液浮积分陀螺仪, 它的动态误差模型问题, 在这里就是研究它的动态性能函数。

为了推导单自由度液浮积分陀螺仪的基本运动方程, 在不影响结果的有效性的情况下, 可作如下假设:

- (1) 没有陀螺力矩不定性的存在;
- (2) 转子轴与转子参考轴保持重合;
- (3) 陀螺转子绕一个对称轴旋转;
- (4) 陀螺转子转速恒定;
- (5) 陀螺转子的角动量相对其它部份的角动量言, 比较大;
- (6) 转子质量中心与浮子组合件的质量中心重合;
- (7) 转子轴承的结构是坚固的;
- (8) 电磁元件, 电源导线等都是理想的。

这样, 陀螺仪的浮子组合件的基本运动方程可以表示为 (图 2-6)、(图 2-7):

$$I_y \ddot{\theta}_{(IF)y} + C_{(CF)y} \dot{\theta}_{(CF)y} = H \omega_{(IC)x} + M_{zg} \quad (2-50)$$

式中 $\theta_{(IF)y} = \theta_{(IC)y} + \theta_{(CF)y}$ —— 陀螺仪浮子组合件相对惯性空间绕陀螺输出轴的转角, 单位为弧度;

$\theta_{(IC)y}$ —— 陀螺仪壳体相对惯性空间绕陀螺输出轴的转角, 单位为弧度;

$\theta_{(CF)y}$ —— 陀螺仪浮子组合件相对壳体绕陀螺输出轴的转角, 单位为弧度;

I_y —— 陀螺仪浮子组合件绕陀螺输出轴的转动惯量, 单位为克·公分²;

$C_{(CF)y}$ —— 陀螺仪浮子组合件和壳体间绕陀螺仪输出轴的阻尼系数;

H ——陀螺仪的角动量;
 $\omega_{(IC)x}$ ——陀螺仪壳体相对惯性空间绕输入轴的角速度;
 M_{tg} ——由力矩器加在浮子组合件上的控制力矩。

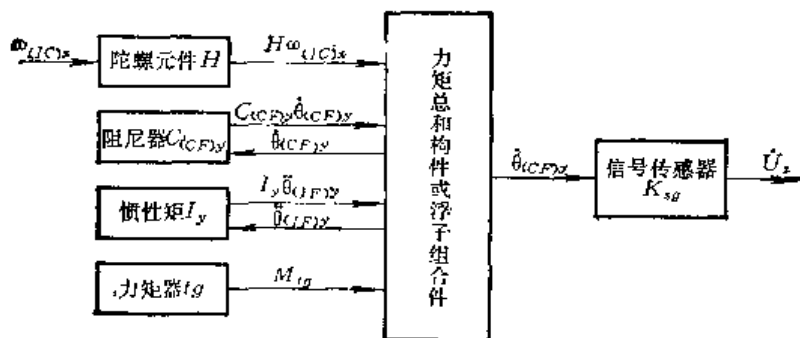


图2-6 单自由度液浮积分陀螺仪的方块图

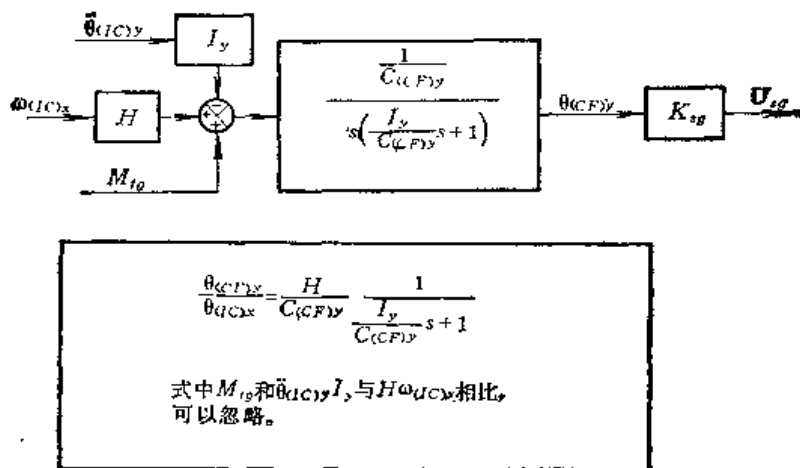


图2-7 单自由度液浮积分陀螺仪浮子组合件一阶运动方程的结构图

方程 (2-50) 可以写成算子形式:

$$s^2 I_y \theta_{(IC)y} + s^2 I_y \theta_{(CF)y} + s C_{(CF)y} \theta_{(CF)y} = H \omega_{(IC)x} + M_{tg} \quad (2-51)$$

解 $\theta_{(CF)y}$, 并令 $\tau = I_y / C_{(CF)y}$, 则根据 (2-51) 式有:

$$\theta_{(CF)y} = \frac{1}{s(\tau s + 1)} \left[\frac{H}{C_{(CF)y}} \omega_{(IC)x} + \frac{M_{tg}}{C_{(CF)y}} - \tau s^2 \theta_{(IC)y} \right] \quad (2-52)$$

式中 τ ——陀螺仪的时间常数。

设陀螺仪的输出信号为 u_{sg} , 则

$$u_{sg} = K_{sg} \theta_{(CF)y} \quad (2-53)$$

式中 K_{sg} ——信号传感器输出电压对输入角度的灵敏度, 单位为毫伏/毫弧。

注意: 由方程 (2-52), (2-53) 可知, 在绕输出轴不存在壳体角加速度时, 陀螺仪的输出信号 u_{sg} 直接与输入轴角速度 $\omega_{(IC)x}$ 和控制力矩之和有关。即使绕输出轴存在角加速度时, 该加速度也要乘上陀螺时间常数 τ 。对于目前一般的惯性陀螺仪而言, 时间常数 τ 约为 0.001 秒。

也应该注意, 由绕输入轴的输入角速度引起的陀螺输出信号的变化, 在低频范围内正比于角速度的时间积分,

$$\theta_{(CF)y} = \frac{H}{C_{(CF)y}} \int_0^t \frac{\omega_{(IC)x}}{(\tau s + 1)} dt \quad (2-54)$$

在静态情况下,

$$\theta_{(CF)y} = \frac{H}{C_{(CF)y}} \int_0^t \omega_{(IC)x} dt \quad (2-55)$$

由于在解这一时间积分时, 要求一个积分常数, 而理想的积分陀螺仪没有一个优先选用的输出角位置, 因此必须用于零位置的伺服回路。

如果初始条件取零值, 由 (2-55) 式可有

$$\frac{\omega_{(CF)y}}{\omega_{(IC)x}} = \frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} = \frac{H}{C_{(CF)y}} \quad (2-56)$$

式中 H 对 $C_{(CF)x}$ 之比通常称为积分陀螺仪的角度增益, 或称为陀螺仪的速度增益。

下面再简单介绍一下高阶效应问题。

从单自由度积分陀螺仪测量出的时间常数和根据角动量与输出轴阻尼计算出来的时间常数有显著的差别。国外有人通过计入框架和转子轴轴承绕输入轴的柔性效应的方法了解释。如果将陀螺仪的转子轴轴承和框架绕输入轴和输出轴的总的刚度 $K_{(FW)x}$ 和 $K_{(FW)y}$ 包括在内, 陀螺仪的性能函数可用下面之三阶传递函数表示:

$$\frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} = \frac{H}{C_{(CF)y}} \frac{1}{\Delta(s)} \quad (2-57)$$

式中

$$\Delta(s) = \frac{H^2 J_y}{K_{(FW)y} K_{(FW)x} C_{(CF)y}} s^3 + \frac{H^2}{K_{(FW)y} K_{(FW)x}} s^2 + \left(\frac{J_y}{C_{(CF)y}} + \frac{H^2}{K_{(FW)x} C_{(CF)y}} \right) s + 1 \quad (2-58)$$

式中 $K_{(FW)y}$ ——陀螺仪转子相对浮子组合件绕输出轴的总的刚度;

$K_{(FW)x}$ ——陀螺仪转子相对浮子组合件绕输入轴的总的刚度。

1. 如前所述, 陀螺仪的静态灵敏度仍是

$$\frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} = \frac{H}{C_{(CF)y}}$$

2. 对于比较低的频率, 传递函数 (2-57) 式的特征函数 (2-58) 式中仅有两个最低阶项是重要的, 因此传递函数近似为

$$\frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} = \frac{H}{C_{(CF)y}} \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2-59)$$

此时时间常数 τ 为

$$\tau = \frac{J_y}{C_{(CF)y}} + \frac{H^2}{K_{(FW)x} C_{(CF)y}} = \frac{J_y}{C_{(CF)y}} \left[1 + \frac{H^2}{J_y K_{(FW)x}} \right] \quad (2-60)$$

式 (2-59) 的幅值比为

$$\left| \frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} \right| = \frac{H}{C_{(CF)y}} \left(\frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \right)^{1/2} \quad (2-61)$$

而其相角为

$$\varphi = -\operatorname{tg}^{-1}(\tau \omega) \quad (2-62)$$

式中 ω ——频率, 单位为弧度/秒。

如果 $K_{(FW)x}$ 无限大, 则由 (2-60) 式可以看出 $\tau = I_y/C_{(CF)y}$, 即为积分陀螺仪的时间常数。因此可以从 (2-60) 式看出, 时间常数随着角动量的平方除以乘积 $I_y K_{(FW)x}$ 的增加而增大。这样, 在低频时, 确定陀螺仪的动态性能时 $K_{(FW)x}$ 是个重要的参数之一。

3. 对于高频, 陀螺仪性能必须用一个三阶系统来近似, 在设计应用陀螺仪的高性能伺服系统时, 必须计算附加相移。

陀螺仪的实际性能也受到壳体绕输出轴相对于惯性空间的运动的影响。如果这种壳体运动存在, 则使浮子组合件相对壳体绕输出轴的运动与壳体相对惯性空间的运动联系起来的方程变成

$$\frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} = - \frac{K_{(FW)y} K_{(FW)x} C_{(CF)y}}{\Delta(s)} s^3 + \left(\frac{I_y}{C_{(CF)y}} + \frac{H^2}{C_{(CF)y} K_{(FW)x}} \right) s \quad (2-63)$$

特征方程 $\Delta(s)$ 同于 (2-58) 式。

1. 对于静态情况, (2-63) 式为

$$\frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} = 0 \quad (2-64)$$

2. 对于比较低的频率, 输入对输出的关系可以表达为

$$\frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} = \frac{\tau s}{1 + \tau s} \quad (2-65)$$

式中时间常数 τ 同于 (2-60) 式。

传递函数 (2-64) 的幅值比为

$$\left| \frac{\theta_{(CF)y}}{\theta_{(IC)x}} \right| = \left(\frac{\tau^2 \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2} \right)^{1/2} \quad (2-66)$$

其相角为

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1}(\tau\omega) \quad (2-67)$$

比较 (2-57) (2-63) 式可以看出, 壳体绕输入轴运动的特征方程与壳体绕输出轴运动的特征方程相同。这是因为所考虑的物理系统是相同的。这也是所期望的。对于一阶近似值, 陀螺仪框架和陀螺仪转子轴承绕输入轴的刚度显得更为重要。

陀螺仪的组合件对壳体绕输入轴和输出轴运动的全部响应可能是非常复杂的, 因为即使按前述进行的简化假设, 其动态性能也必须由三阶系统来近似表示。

第三章 陀螺仪漂移测试原理和方法

§ 1 陀螺仪漂移测试方法的概述

本章将要讨论的在一个 g 重力场中, 陀螺仪漂移的测试方法, 主要是利用精密光学机械分度头、高精度速率台或者高精度的伺服转台来实现的。近年来随着我国科学技术的迅速发展, 这些高、精、尖的现代化设备不断涌现, 为更好地开展惯性器件的测试工作提供了有力的物质条件。

在对陀螺仪漂移进行测试的时候, 可以用开环方式测量, 也可以用闭环方式进行。

所谓开环试验方式, 人工伺服法就属这种类型。这种试验方法是这样进行的, 在测量时间之内, 人为地转动陀螺仪壳体, 让它跟踪陀螺仪转子轴的转动, 使陀螺仪信号传感器的输出信号归零。这时陀螺仪壳体相对惯性空间所转过的角度, 就表征了陀螺仪转子轴相对惯性空间的转角。这一转角是陀螺仪漂移角速度对时间的积分。实际上一陀螺仪信号传感器的工作区间很小, 致使测量时间很短。另外由于跟踪时可能引起阻尼、弹性等产生, 这势必会增加测试结果的误差。但是由于实验设备简单, 经济性较好, 人工伺服法是生产过程中常用的一种试验方法。

闭环试验 大致分为两类, 一类是利用伺服转台所进行的伺服试验, 主要用来测量陀螺仪的长期性能。另一类是力矩反馈试验。如力矩反馈式的位置试验, 利用速率转台的翻滚试验等都属此类。而翻滚试验主要是测量陀螺仪的短期性能。

这两种闭环试验某种程度上是模拟了两种导航系统的工作状态, 前者有效地模拟了一个框架系统, 而后者在一定程度上模拟了无框架系统或捷联式系统。

§ 2 陀螺仪漂移测试的力矩反馈法

一、引言

大家知道, 有些类型的陀螺仪设有力矩反馈回路, 如图 3-1 所示。

这类陀螺仪采用力矩反馈法试验是很简便的。力矩反馈回路是这样工作的: 当有干扰力矩作用于陀螺仪时, 则陀螺仪的信号传感器将产生相应的输出信号, 这信号经过滤波, 放大、解调等环节转换成电流, 输入到陀螺仪相应的力矩器, 力矩器便产生与输入信号相适应的控制力矩同作用在陀螺仪上的外干扰力矩相平衡。测量力矩器的输入电流, 并根据力矩器的传递系数, 考虑地球自转的影响, 就可求得外加等效力矩的数值。有时把陀螺仪的力矩反馈状态也叫做锁定

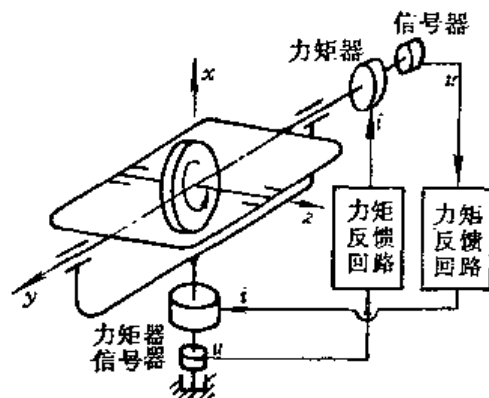


图3-1 有力矩反馈回路的二自由度陀螺仪

u —信号传感器的输出电压; i —力矩器的输入电流。

状态。

一般定义产生沿坐标轴正方向进动角速度的电流为正。

然而没有设置力矩反馈回路的陀螺仪显然是不能采用上述试验方法的。

二、固定位置试验

这是一种最经济、最简便的测量陀螺仪综合漂移的方法，试验时，将陀螺仪以一定方位（模拟陀螺仪在平台中实际的工作方位）安装在固定基座上，并工作在力反馈状态。则陀螺仪输出轴上力矩器输入电流的稳态值便是该轴外干扰力矩的度量（运算中考虑力矩器的传递系数和地球自转角速度的影响）。为考查陀螺仪的长期稳定性，对陀螺仪的逐日、逐月漂移都须进行鉴定。

三、陀螺仪的位置试验

现在以二自由度液浮陀螺仪为例来讨论整个试验过程。

取坐标系 xyz 与陀螺仪内环固联， XYZ 与陀螺仪壳体相固联。初始时，令 x 与陀螺仪外环轴相重合，而 y 、 z 分别与陀螺仪内环轴和转子轴相重合构成右手直角坐标系。这时 XYZ 的取向应与 xyz 分别重合。因为在整个试验过程中陀螺仪一直工作在力矩反馈状态，因而坐标系 xyz 相对 XYZ 各轴间的微小转角可以忽略，则认为坐标系 xyz 与 XYZ 在试验过程中始终重合。

下面将深入讨论一种比较典型的八位置试验。这里只考虑与重力加速度无关和与重力加速度成比例的干扰力矩对陀螺仪的影响，并假设质量中心沿各坐标轴正向偏移量为 l_x 、 l_y 及 l_z 。

位置 1

使陀螺仪外环轴 x 指东，内环轴 y 指北， z 轴 H 垂直向上与当地地垂线 ζ 重合。则有力矩平衡方程式

$$\begin{cases} I_{x1}K_x = -(M_{Bx} - H\omega_e \cos \varphi - mgl_y) \\ I_{y1}K_y = M_{By} + mgl_x \end{cases} \quad (3-1)$$

式中 I_{x1} 、 I_{y1} 分别是陀螺仪在位置 1 试验时 x 轴和 y 轴力矩器的输入电流（毫安）并定义产生沿坐标轴正方向进动角速度的电流为正；

K_x 、 K_y 分别是 x 轴和 y 轴力矩器的传递系数（克·厘米/毫安）；

M_{Bx} 、 M_{By} 分别是作用在陀螺仪的 x 和 y 轴上与 g 无关的干扰力矩；

m 是陀螺仪的剩余不平衡质量。

将（3-1）式两端除以陀螺仪角动量 H ，则原来的力矩平衡式变成了绕其垂直轴的角速度平衡式了。这时

$$\begin{cases} I_{x1} = -\frac{1}{k_x} (R_x - \omega_e \cos \varphi - u_y) \\ I_{y1} = \frac{1}{k_y} (R_y + u_x) \end{cases} \quad (3-2)$$

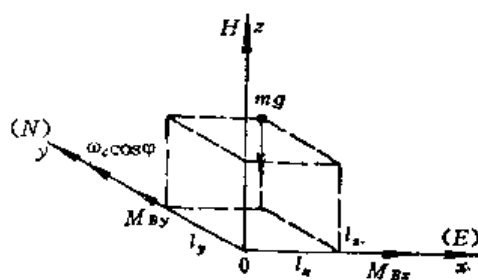


图3-2 位置 1 的简图

式中 $k_x = K_x/H$ 为 x 轴上力矩器的标度因数 (度/小时·毫安);
 $k_y = K_y/H$ 为 y 轴上力矩器的标度因数 (度/小时·毫安);
 $R_x = M_{Bx}/II$ 此角速度出现在与 M_{Bx} 相垂直的测量轴上 (度/小时);
 $R_y = M_{By}/H$ (度/小时) 此角速度出现在与 M_{By} 相垂直的测量轴上;
 $u_x = mgl_x/II$ (度/小时);
 $u_y = mgl_y/II$ (度/小时);
 ω_e —— 地球自转角速度;
 φ —— 当地纬度角。

位置 2

使陀螺仪外环轴 x 指北, 内环轴 y 指西, 转子轴 z 垂直向上,

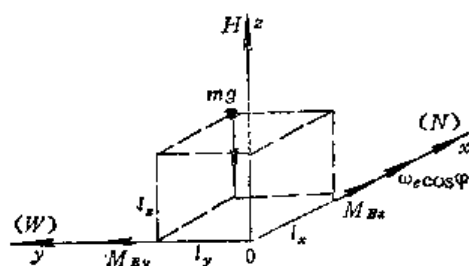


图3-3 位置 2 的简图

则有

$$\left. \begin{aligned} I_{x2} &= -\frac{1}{k_x} (R_x - u_y) \\ I_{y2} &= \frac{1}{k_y} (R_y + \omega_e \cos \varphi + u_x) \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

位置 3

使陀螺仪外环轴 x 指西, 内环轴 y 指南, 转子轴 z 垂直向上,

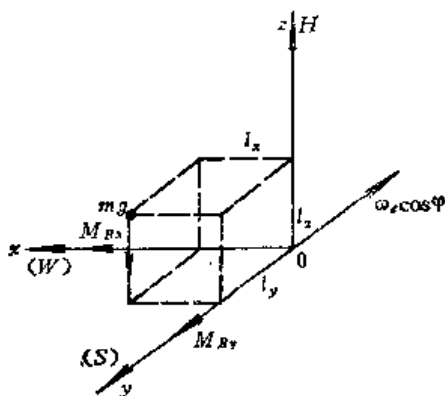


图3-4 位置 3 的简图

这时

$$\left. \begin{aligned} I_{x3} &= -\frac{1}{k_x} (R_x + \omega_e \cos \varphi - u_y) \\ I_{y3} &= -\frac{1}{k_y} (R_y + u_x) \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

位置 4

使陀螺仪外环轴 x 指南，内环轴 y 指东，转子轴 z 垂直向上。

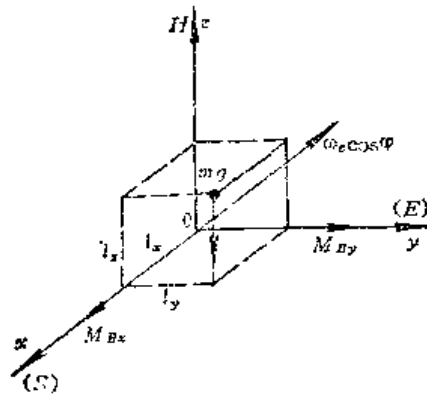


图3-5 位置 4 的简图

则有

$$\left. \begin{aligned} I_{x4} &= -\frac{1}{k_x} (R_x - u_y) \\ I_{y4} &= -\frac{1}{k_y} (R_y - \omega_e \cos \varphi + u_x) \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

位置 5

使陀螺仪外环轴 x 垂直向上，内环轴 y 指东，转子轴 z 指北，

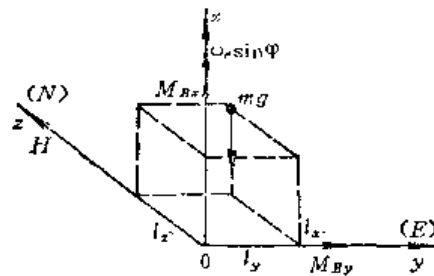


图3-6 位置 5 的简图

则

$$\left. \begin{aligned} I_{x5} &= -\frac{1}{k_x} (R_x) \\ I_{y5} &= \frac{1}{k_y} (R_y + \omega_e \sin \varphi - u_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

式中 $u_{xy} = m' gl_z / H$ (度/小时) (其中没考虑外环)。

位置 6

使陀螺仪的外环轴 x 指西，内环轴 y 垂直向上，转子轴 z 指北。

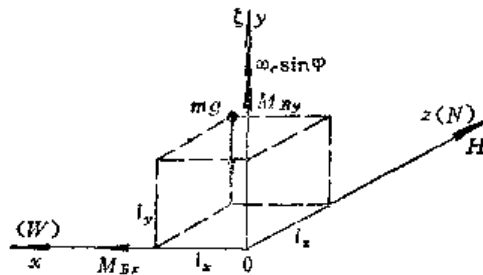


图3-7 位置 6 的简图

这时

$$\left. \begin{aligned} I_{x6} &= -\frac{1}{k_x} (R_x - \omega_e \sin \varphi + u_{zx}) \\ I_{y6} &= \frac{1}{k_y} R_y \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

式中 $u_{zx} = mgl_z/H$ (度/小时) (其中考虑了外环)。

位置 7

使陀螺仪的外环轴 x 垂直向下 (与地垂线 ζ 反向), 内环轴 y 指西, 转子轴 z 指北。

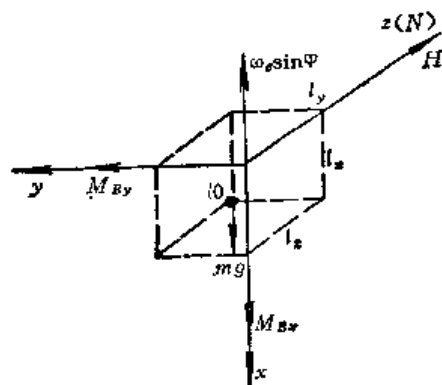


图3-8 位置 7 的简图

则有

$$\left. \begin{aligned} I_{x7} &= -\frac{1}{k_x} (R_x) \\ I_{y7} &= -\frac{1}{k_y} (R_y - \omega_e \sin \varphi + u_{zy}) \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

位置 8

使陀螺仪外环轴 x 指东, 内环轴 y 垂直向下 (与地垂线 ζ 反向), 转子轴 z 指北。

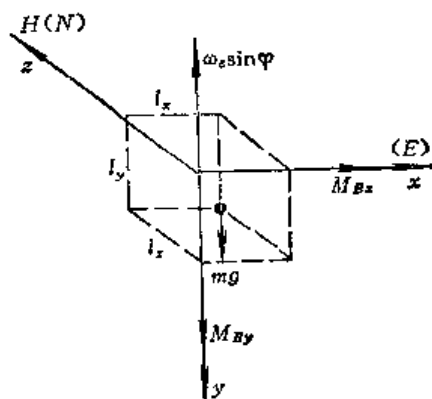


图3-9 位置 8 的简图

这时有

$$\left. \begin{aligned} I_{x8} &= -\frac{1}{k_x} (R_x + \omega_e \sin \varphi - u_{zx}) \\ I_{y8} &= -\frac{1}{k_y} (R_y) \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

考虑 (3-2), (3-4) 及 (3-3), (3-5) 式得出

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\omega_e \cos \varphi}{I_{x1} - I_{x3}} \\ k_y &= \frac{2\omega_e \cos \varphi}{I_{y2} - I_{y4}} \end{aligned} \quad (3-10)$$

综合相应位置的实验数据便获得其余的待估参数。

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -I_{x5}k_x \\ R_x &= -I_{x7}k_x \\ R_y &= I_{y6}k_y \\ R_y &= I_{y8}k_y \end{aligned} \right\} \bar{R}_x (\text{平均值})$$

$$\left. \begin{aligned} R_y &= I_{y6}k_y \\ R_y &= I_{y8}k_y \end{aligned} \right\} \bar{R}_y$$

$$\left. \begin{aligned} u_{zx} &= \omega_e \sin \varphi - \bar{R}_x - I_{x8}k_x \\ u_{zx} &= \omega_e \sin \varphi + \bar{R}_x + I_{x3}k_x \end{aligned} \right\} \bar{u}_{zx}$$

$$\left. \begin{aligned} u_{xy} &= \omega_e \sin \varphi + \bar{R}_y - I_{y6}k_y \\ u_{xy} &= \omega_e \sin \varphi - \bar{R}_y + I_{y7}k_y \end{aligned} \right\} \bar{u}_{xy}$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= I_{y1}k_y - \bar{R}_y \\ u_x &= I_{y2}k_y - \bar{R}_y - \omega_e \cos \varphi \\ u_x &= I_{y3}k_y - \bar{R}_y \\ u_x &= I_{y4}k_y - \bar{R}_y + \omega_e \cos \varphi \end{aligned} \right\} \bar{u}_x$$

$$\left. \begin{aligned} u_y &= I_{x1}k_x + \bar{R}_x - \omega_e \cos \varphi \\ u_y &= I_{x2}k_x + \bar{R}_x \\ u_y &= I_{x3}k_x + \bar{R}_x + \omega_e \cos \varphi \\ u_y &= I_{x4}k_x + \bar{R}_x \end{aligned} \right\} \bar{u}_y$$

$$(3-11)$$

本试验宜做多次循环 (如8-10次), 每一循环对各实验位置可间隔一定时间, 取其10次试验数据的平均值作为一次循环的数据, 然后再将各次循环相应位置的试验数据进行平均, 得出一次试验的数据, 并算出相应的均方根偏差 σ 。

为了考查陀螺仪的长期性能, 可相隔数日做一次试验 (间隔时间长短依对陀螺仪的使用要求而定), 如此试验多次, 并对试验数据进行统计平均, 算出均方根偏差 σ (随机漂移的量度), 作为陀螺仪长期性能的参数。对已隔数月或隔年的数据须重新试验鉴定之。

兹列表 3-1 以示具体说明。

表3-1 八个位置试验的测试结果

陀螺 代号	时 间	k_x 度/小时·毫安	k_y 度/小时·毫安	R_x 度/小时	u_x 度/小时	u_{zx} 度/小时	R_y 度/小时	u_y 度/小时	u_{xy} 度/小时
	3月6日	108000	104000	-802	-12604	11078	5830	-7734	11074
	某3月10日	108060	103940	-806	-12621	11073	5831	-7731	11081
	3月10日	108060	104030	-804	-12624	11071	5832	-7720	11006
	年3月16日	108060	104150	-800	-12613	11070	5836	-7724	11101
	4月7日	108050	104150	-800	-12612	11068	5836	-7720	11036
	4月28日	108020	104000	-801	-12604	11071	5832	-7721	11088
	4月29日	108010	103980	-806	-12608	11069	5837	-7726	11080
	平 均	108037	104036	-803	-12612	11071	5833	-7725	11075
	σ 值	26.3	82.6	2.6	7.9	3.3	2.9	5.2	19.1

注: 表中所列数据为相对单位。

四、翻 滚 试 验

1. 引言

在一个 g 的重力场中进行翻滚试验时, 将陀螺仪置于转台上, 工作在力反馈状态, 转台恒速转动 (一般取转台转速为十倍的 ω_e)。人为地造成一种条件, 使得重力加速度 g 相对陀螺的取向不断变化, 就好象陀螺仪在围绕重力加速度 g 的作用线滚转一样, 因而试验由此得名。

当选择陀螺仪在转台上的安装方位时, 应使陀螺仪的输入轴垂直于转台轴, 以避免陀螺仪感受转台的角速度分量。由于陀螺仪安装不精确而带来的影响, 可通过令转台正转和反转所取得的结果进行平均的办法消除。

翻滚试验可为连续式翻滚试验, 亦可是间歇式翻滚试验。试验时选择那种方式须视试验目的与要求而定。

翻滚试验可测出产生陀螺漂移的各种因素 (与加速度无关的漂移; 静不平衡引起的漂移; 由于非等弹性变形而引起的漂移及浮油中的气泡等等)。整个试验可做若干循环, 试验中陀螺仪的力矩器的输入电流呈周期性变化。因而对这一电流曲线可进行富氏分析, 以便用来计算陀螺仪的各种误差系数。相邻的几个周期相比较, 便得到陀螺仪的短期可重复性或工作性能。

陀螺仪的试验方法可以是多种多样的, 并非一成不变, 数据处理的方法也在不断地发展, 试验设备更是日新月异, 为此这里只能从一般性的试验原理出发, 并对目前常用的一些数据处理方法加以介绍, 对新理论新技术在陀螺测试中的应用只占有一定的比重。

2. 单轴翻滚试验

1) 单自由度液浮积分陀螺仪的翻滚试验

现在以单自由度液浮积分陀螺仪为例来讨论在单轴速率台上所进行的翻滚试验。

a) 陀螺仪初始安装方位的选择

取单自由度液浮陀螺仪的输入轴为 x , 输出轴为 y , 转子轴为 z , 单轴转台以 $10\omega_e$ 与地球自转方向反向恒速旋转, 为避免陀螺仪感受转台的角速度, 使转台轴平行于地球自转轴, 而令被试验陀螺仪的输出轴 y 平行于转台轴安装, 其输入轴与转台轴垂直, 初始时指东, 转台转角 θ 以顺时针方向增量为正, 试验过程中陀螺工作在力矩反馈状态, 陀螺仪的具体安装方位如图 3-10 所示。

b) 陀螺仪运动方程式的建立

大家知道单自由度液浮积分陀螺仪有如下静态误差模型方程

$$\begin{aligned} i k = & D_0 + D_x g_x + D_y g_y + D_z g_z + D_{xx} g_x^2 + D_{yy} g_y^2 + D_{zz} g_z^2 + D_{xy} g_x g_y \\ & + D_{xz} g_x g_z + D_{yz} g_y g_z \end{aligned} \quad (3-12)$$

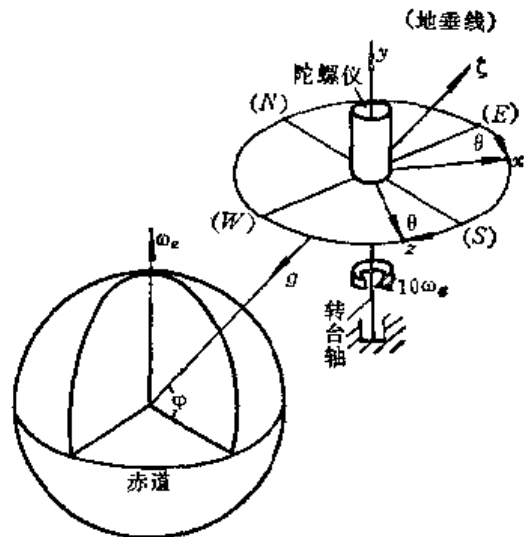


图3-10 翻滚试验示意图之一

从图3-10知道

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -g \cos \varphi \sin \theta \\ g_y &= -g \sin \varphi \\ g_z &= -g \cos \varphi \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

将上式代入 (3-12) 式经整理得

$$\begin{aligned} i_1 k &= \left(D_0 - D_y g \sin \varphi + \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \\ &+ \left(-D_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi \right) \cos \theta + \left(-D_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D_{xy} g^2 \sin 2\varphi \right) \sin \theta \\ &+ \left(-\frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \cos 2\theta \\ &+ \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \sin 2\theta \\ &= A_{01} + A_{11} \cos \theta + B_{11} \sin \theta + A_{21} \cos 2\theta + B_{21} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3-14)$$

记录 $i_1(\theta)$ 曲线, 试验可多次循环进行。

再将上述陀螺仪绕其 x 轴的初始位置 ($X_0 - E$) 翻转 180° 安装在转台上, 如图3-11所示, 其它条件不变, 重复上述试验, 这时

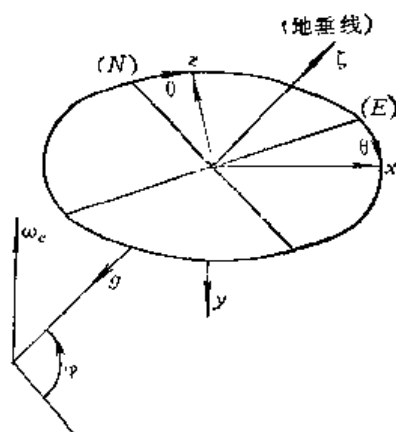


图3-11 翻滚试验示意图之二

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -g \cos \varphi \sin \theta \\ g_y &= g \sin \varphi \\ g_z &= g \cos \varphi \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

将 (3-15) 代入 (3-12) 式得到

$$\begin{aligned} i_2 k &= \left(D_0 + D_y g \sin \varphi + \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \\ &+ \left(D_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi \right) \cos \theta + \left(-D_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} D_{xy} g^2 \sin 2\varphi \right) \sin \theta \\ &+ \left(-\frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \cos 2\theta \\ &+ \left(-\frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \right) \sin 2\theta \\ &= A_{02} + A_{12} \cos \theta + B_{12} \sin \theta + A_{22} \cos 2\theta + B_{22} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3-16)$$

记录电流 $i_2(\theta)$ 曲线, 试验进行多次循环。

再使转台轴平行当地地垂线 ζ , 陀螺仪输出轴平行于转台轴向上, 输入轴 x 指东 (E), 转台固定不动 (这时变成了固定位置试验)。见图 3-12 所示。这时

$$g_x = g_z = 0, \quad g_y = -g \quad (3-17)$$

将上式代入 (3-12) 式, 有

$$i_3 k = D_0 - D_y g \quad (3-18)$$

记录电流 i_3 (连续曲线或采样所得离散值)。

然后再将陀螺仪绕 x 轴转 180° 安装, 其它条件不变, 重复上述试验。这时

$$g_y = g, \quad g_x = g_z = 0 \quad (3-19)$$

将上式代入 (3-12) 式得

$$i_4 k = D_0 + D_y g \quad (3-20)$$

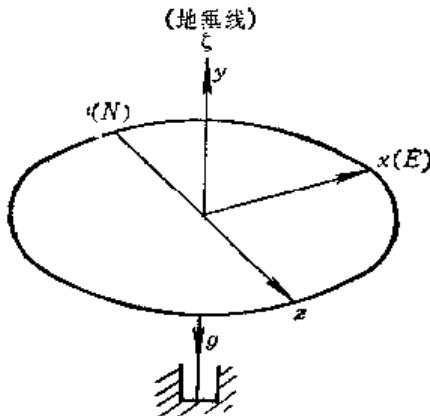


图3-12 翻滚试验示意图之三

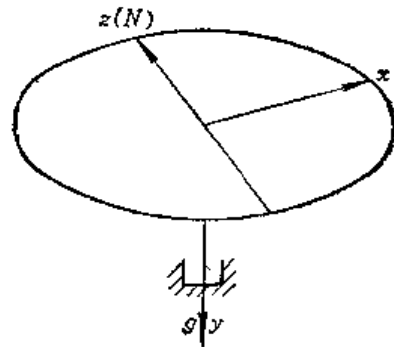


图3-13 翻滚试验示意图之四

c) 误差系数的分离

由 (3-14)、(3-16) 式可知

$$A_{01} = D_0 - D_y g \sin \varphi + \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi$$

$$A_{11} = -D_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi$$

$$A_{21} = -\frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi$$

$$B_{11} = -D_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi$$

$$B_{21} = -\frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi$$

$$A_{02} = D_0 + D_y g \sin \varphi + \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi$$

$$A_{12} = D_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi$$

$$A_{22} = -\frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi$$

$$B_{12} = -D_{xy} \cos \varphi - \frac{1}{2} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi$$

$$B_{22} = -\frac{1}{2} D_{xz} g^2 \cos^2 \varphi$$

以上各式分别是曲线 $i_1 k$ 及 $i_2 k$ 的各次谐波的幅值, 这通过试验数据可以很容易计算出来。

从式 (3-19), (3-20) 及 (3-21) 算得

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2} k (i_3 + i_4) && [\text{度/小时}] \\ D_x &= -(B_{11} + B_{12})/2g \cos \varphi && [\text{度/小时} \cdot g] \\ D_y &= (i_4 - i_3)/2g && [\text{度/小时} \cdot g] \\ D_z &= (A_{12} - A_{21})/2g \cos \varphi && [\text{度/小时} \cdot g] \\ D_{xx} &= [A_{01} + A_{02} - A_{21} - A_{22} - k(i_3 + i_4)]/2g^2 \cos^2 \varphi && [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D_{xz} &= [A_{01} + A_{02} + A_{21} + A_{22} - k(i_3 + i_4)]/2g^2 \cos^2 \varphi && [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D_{xy} &= (B_{11} - B_{12})/g^2 \sin 2\varphi && [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D_{xz} &= 2B_{22}/g^2 \cos^2 \varphi && [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D_{yz} &= (A_{11} + A_{12})/g^2 \sin 2\varphi && [\text{度/小时} \cdot g^2] \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

2) 二自由度液浮陀螺仪的单轴翻滚试验

在进行陀螺仪的漂移试验时, 陀螺仪静态误差模型中项数的选取须视对陀螺仪的精度要求而定。如对陀螺仪的精度要求不高, 则取项应少。使得既满足精度要求, 简化了测试工作又可达到经济效果。

a) 考虑陀螺仪结构非等弹性影响时二自由度液浮陀螺仪的单轴翻滚试验

在 (3-2)~(3-9) 式中, 考虑陀螺仪结构非等弹性的影响时, 其运动方程式的推导请参阅第二章及文献 [2]。试验初始时, 二自由度液浮陀螺仪转子轴 z 平行转台轴, 同时将轴平行地轴安装, 陀螺仪内环轴 y 指西, 进行单轴翻滚试验。这时有

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \cos \varphi \cos \theta \\ g_y &= g \cos \varphi \sin \theta \\ g_z &= -g \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{x1} k_x &= -R_x - u_y \sin \varphi - u_{zx} \cos \varphi \sin \theta + \frac{1}{2} m^2 g^2 (C_y - C_z) \sin 2\varphi \sin \theta \\ i_{y1} k_y &= R_y - u_x - u_{zy} \cos \varphi \cos \theta - \frac{1}{2} m_1^2 g^2 (C'_z - C_x) \sin 2\varphi \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

式中 C_x 、 C_y 、 C_z (包括浮球和外环), C'_z (只是浮球) 为陀螺仪结构沿各坐标轴方向弹性系数的倒数。其它符号意义同前。

将上述陀螺仪绕其初始时的 x_0 轴翻转 180° 即 $y_0 \rightarrow E$, $-z \parallel \omega_e$ 安装, 见图3-15重复上述试验。

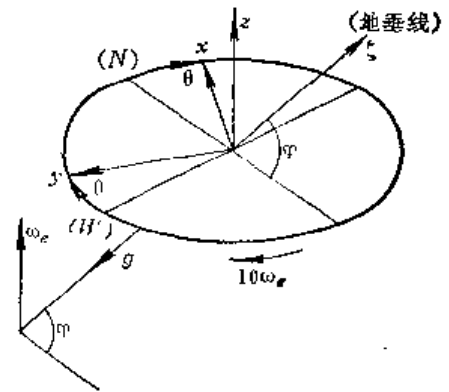


图3-14 二自由度陀螺仪翻滚试验之一

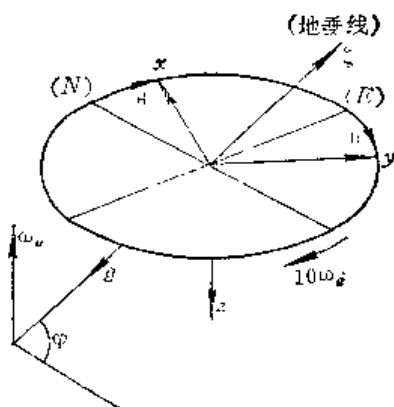


图3-15 二自由度陀螺仪翻滚试验之二

这时

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \cos \varphi \cos \theta \\ g_y &= -g \cos \varphi \sin \theta \\ g_z &= g \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} i_{x_2} k_x &= -R_x + u_x \sin \varphi + u_{zx} \cos \varphi \sin \theta + \frac{1}{2} m^2 g^2 (C_y - C_x) \sin 2\varphi \sin \theta \\ i_{y_2} k_y &= R_y + u_y \sin \varphi - u_{zy} \cos \varphi \cos \theta + \frac{1}{2} m_1^2 g^2 (C'_z - C_x) \sin 2\varphi \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

读者可用谐波分析的方法自行算出式中各待估计的参数。兹将实验数据列入表 3-2 中供参考。

表3-2 二自由度液浮陀螺仪单轴翻滚试验的测试结果

k_x	k_y	R_x	R_y	u_{zx}	u_{zy}	u_x	u_y	$\frac{1}{2} m^2 (C_y - C_x)$	$\frac{1}{2} m_1^2 (C'_z - C_x)$
度/小时·毫安	度/小时·毫安	度/小时	度/小时	度/小时	度/小时	度/小时	度/小时	度/小时·g ²	度/小时·g ²
17.227	17.180	-0.05	+0.54	-0.60	-0.53	-1.24	-0.90	+0.20	-0.14
		+0.03	+0.47	-0.55	-0.60	-1.18	-1.10	+0.19	-0.17
		-0.12	+0.55	-0.80	-0.64	-1.30	-1.19	+0.18	-0.09

b) 高精度二自由度液浮陀螺仪的单轴翻滚试验

i) 陀螺仪初始安装方位的选择

如图3-16调整单轴转台，使转台轴平行地球自转轴，而陀螺仪转子轴 z 平行转台轴与地轴安装，陀螺仪外环轴 x 与内环轴 y 都与此垂直，初始时 x 指西，陀螺仪工作在力矩反馈状态，转台以 $10\omega_e$ 与地球自转角速度反向恒速旋转，记录电流 i_x ， i_y 。

ii) 二自由度液浮陀螺仪的静态误差模型

一般知道目前高精度二自由度液浮陀螺仪的静态误差模型有如下形式：

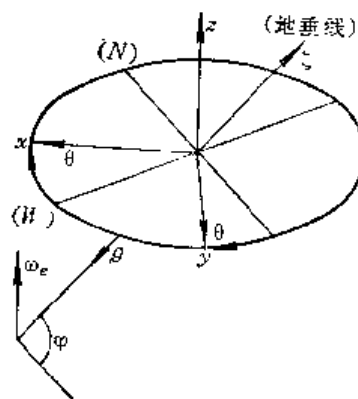


图163- 二自由度陀螺仪翻滚试验之三

$$\left. \begin{aligned} i_y k_y &= D(x)_0 + D(x)_x g_x + D(x)_y g_y + D(x)_z g_z + D(x)_{xx} g_x^2 \\ &\quad + D(x)_{yy} g_y^2 + D(x)_{xy} g_x g_y + D(x)_{xz} g_x g_z + D(x)_{yz} g_y g_z \\ i_x k_x &= D(y)_0 + D(y)_x g_x + D(y)_y g_y + D(y)_z g_z + D(y)_{yy} g_y^2 \\ &\quad + D(y)_{zz} g_z^2 + D(y)_{xy} g_x g_y + D(y)_{xz} g_x g_z + D(y)_{yz} g_y g_z \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

式中 i_x 、 i_y 分别是 x 轴与 y 轴力矩器的输入电流 (毫安);

k_x 、 k_y 分别是 x 轴与 y 轴力矩器的标度因数 (度/小时·毫安);

$D(x)$ 、 $D(y)$ 分别是 x 轴与 y 轴的漂移系数。

陀螺仪在图3-16的安装方式下有

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \cos \varphi \sin \theta \\ g_y &= -g \cos \varphi \cos \theta \\ g_z &= -g \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

代入 (3-26) 式有:

$$\left. \begin{aligned} i_y k_y &= \left[D(x)_0 - D(x)_x g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + D(x)_{zz} g^2 \sin^2 \varphi \right] \\ &\quad + \left[-D(x)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{yy} g^2 \sin 2 \varphi \right] \cos \theta \\ &\quad + \left[D(x)_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \sin 2 \varphi \right] \sin \theta \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \right] \cos 2 \theta + \left[-\frac{1}{2} D(x)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi \right] \sin 2 \theta \\ &= A_{01} + A_{11} \cos \theta + B_{11} \sin \theta + A_{21} \cos 2 \theta + B_{21} \sin 2 \theta \\ i_x k_x &= \left[D(y)_0 - D(y)_x g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi + D(y)_{zz} g^2 \sin^2 \varphi \right] \\ &\quad - \left[-D(y)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \sin 2 \varphi \right] \cos \theta \\ &\quad - \left[D(y)_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} D(y)_{xx} g^2 \sin 2 \varphi \right] \sin \theta \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi \right] \cos 2 \theta + \left[-\frac{1}{2} D(y)_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \right] \sin 2 \theta \\ &= C_{01} + C_{11} \cos \theta + D_{11} \sin \theta + C_{21} \cos 2 \theta + D_{21} \sin 2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{01} &= D(x)_0 - D(x)_x g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + D(x)_{zz} g^2 \sin^2 \varphi \\ A_{11} &= -D(x)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{yy} g^2 \sin 2 \varphi \\ B_{11} &= D(x)_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \sin 2 \varphi \\ A_{21} &= -\frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \\ B_{21} &= -\frac{1}{2} D(x)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 C_{01} &= D(y)_0 - D(y)_x g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi + D(y)_{xz} g^2 \sin^2 \varphi \\
 C_{11} &= -D(y)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yz} g^2 \sin 2\varphi \\
 D_{11} &= D(y)_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} D(y)_{xz} g^2 \sin 2\varphi \\
 C_{21} &= \frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi \\
 D_{21} &= -\frac{1}{2} D(y)_{xy} g^2 \cos^2 \varphi
 \end{aligned} \quad (3-29)$$

试验进行多次循环, 记录 i_{x1} 、 i_{y1} 。

上面试验结束时, 将陀螺仪绕其 x 轴的初始位置翻转 180° 安装。其它试验条件不变, 重复上述试验, 见图3-17。

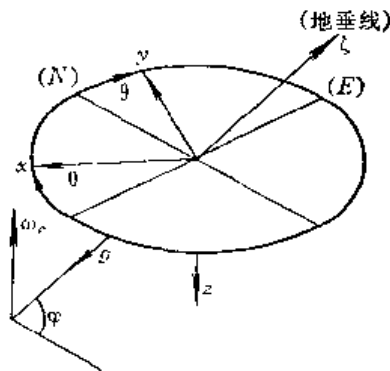


图3-17 二自由度陀螺仪翻滚试验之四

这时有:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \cos \varphi \sin \theta \\ g_y &= g \cos \varphi \cos \theta \\ g_z &= g \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

代入 (3-26) 式得

$$\begin{aligned}
 i_{y2} k_y &= \left[D(x)_0 + D(x)_x g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + D(x)_{xz} g^2 \sin^2 \varphi \right] \\
 &\quad + \left[D(x)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{yz} g^2 \sin 2\varphi \right] \cos \theta \\
 &\quad + \left[D(x)_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{xz} g^2 \sin 2\varphi \right] \sin \theta \\
 &\quad + \left[-\frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \right] \cos 2\theta + \left[\frac{1}{2} D(x)_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \right] \sin 2\theta \\
 &= A_{02} + A_{12} \cos \theta + B_{12} \sin \theta + A_{22} \cos 2\theta + B_{22} \sin 2\theta \\
 i_{x2} k_x &= \left[D(y)_0 + D(y)_x g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi + D(y)_{xz} g^2 \sin^2 \varphi \right] \\
 &\quad + \left[D(y)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yz} g^2 \sin 2\varphi \right] \cos \theta + \left[D(y)_x g \cos \varphi \right. \\
 &\quad + \left. \frac{1}{2} D(y)_{xz} g^2 \sin 2\varphi \right] \sin \theta + \left[\frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi \right] \cos 2\theta \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2} D(y)_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \right] \sin 2\theta \\
 &= C_{02} + C_{12} \cos \theta + D_{12} \sin \theta + C_{22} \cos 2\theta + D_{22} \sin 2\theta
 \end{aligned} \quad (3-31)$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
 A_{02} &= \left[D(x)_0 + D(x)_z g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + D(x)_{xz} g^2 \sin^2 \varphi \right] \\
 A_{12} &= D(x)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{yz} g^2 \sin 2\varphi \\
 A_{22} &= -\frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \\
 B_{12} &= D(x)_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(x)_{xx} g^2 \sin 2\varphi \\
 B_{22} &= \frac{1}{2} D(x)_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \\
 C_{02} &= D(y)_0 + D(y)_z g \sin \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi + D(y)_{yz} g^2 \sin^2 \varphi \\
 C_{12} &= D(y)_y g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{yz} g^2 \sin 2\varphi \\
 C_{22} &= -\frac{1}{2} D(y)_{yy} g^2 \cos^2 \varphi \\
 D_{12} &= D(y)_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} D(y)_{xz} g^2 \sin 2\varphi \\
 D_{22} &= \frac{1}{2} D(y)_{xy} g^2 \cos^2 \varphi
 \end{aligned} \right\} \quad (3-32)$$

为了分离全部误差系数尚须使转台轴平行于当地地垂线 ζ ，使陀螺仪内环轴 y 平行于转台轴向上，外环轴 x 指东，如图3-18所示。

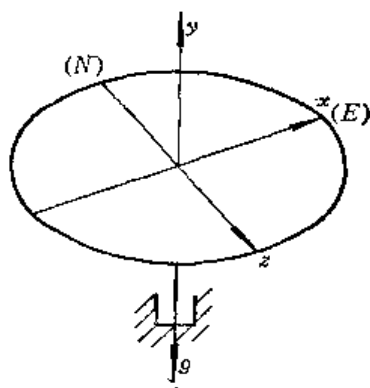


图3-18 二自由度陀螺仪翻滚试验之五

采用固定位置式试验，转台固定不动，测量 i_{x_3} 及 i_{y_3} 。这时

$$g_x = g_z = 0, \quad g_y = -g \quad (3-33)$$

代入(3-26)式得

$$\left. \begin{aligned}
 i_{x_3} k_x &= D(y)_0 - D(y)_y g + D(y)_{yy} g^2 - \omega_s \sin \varphi \\
 i_{y_3} k_y &= D(x)_0 - D(x)_y g
 \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

再将陀螺仪绕 x 轴翻转 180° 安装，重复上述试验。有

$$g_x = g_z = 0, \quad g_y = g \quad (3-35)$$

代入(3-26)式得

$$\left. \begin{aligned} i_{x_4} k_x &= D(y)_0 + D(y)_y g + D(y)_{yy} g^2 + \omega_g \sin \varphi \\ i_{y_1} k_y &= D(x)_0 + D(x)_y g \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

iii) 误差系数的分离

综合 (3-29)、(3-32)、(3-34) 及 (3-36) 式可得

$$\left. \begin{aligned} D(x)_0 &= \frac{1}{2} k_y (i_{y_3} + i_{y_1}) & [\text{度/小时}] \\ D(x)_x &= (B_{11} + B_{12}) / 2g \cos \varphi & [\text{度/小时} \cdot g] \\ D(x)_y &= (A_{12} - A_{11}) / g \cos \varphi & [\text{度/小时} \cdot g] \\ D(x)_z &= (A_{02} - A_{01}) / 2g \sin \varphi & [\text{度/小时} \cdot g] \\ D(x)_{xx} &= -(A_{21} + A_{22}) / g^2 \cos^2 \varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(x)_{xz} &= (A_{01} + A_{02} + A_{21} + A_{22} - k_y (i_{y_3} + i_{y_4})) / 2g^2 \sin 2\varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(x)_{xy} &= (B_{22} - B_{21}) / g^2 \cos^2 \varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(x)_{xz} &= (B_{12} - B_{11}) / g^2 \sin 2\varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(x)_{yz} &= (A_{11} + A_{12}) / g^2 \sin 2\varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(y)_0 &= \frac{1}{2} k_x (i_{x_3} + i_{x_4}) - (C_{21} + C_{22}) / \cos^2 \varphi & [\text{度/小时}] \\ D(y)_x &= (D_{11} + D_{12}) / 2g \cos \varphi & [\text{度/小时} \cdot g] \\ D(y)_y &= (C_{12} - C_{11}) / 2g \cos \varphi & [\text{度/小时} \cdot g] \\ D(y)_z &= (C_{02} - C_{01}) / 2g \sin \varphi & [\text{度/小时} \cdot g] \\ D(y)_{yy} &= (C_{21} + C_{22}) / g^2 \cos^2 \varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(y)_{xz} &= [C_{01} + C_{02} - C_{21} - C_{22} - k_x (i_{x_3} + i_{x_4})] / 2g^2 \sin^2 \varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ &\quad + 4(C_{21} + C_{22}) / g^2 \sin^2 2\varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(y)_{xy} &= (D_{22} - D_{21}) / g^2 \cos^2 \varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(y)_{xz} &= (D_{12} - D_{11}) / g^2 \sin 2\varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\ D(y)_{yz} &= (C_{11} + C_{12}) / g^2 \sin 2\varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

3) 摆式加速度计的测试

在这里将讨论摆式加速度计在 $\leq 1g$ 情况下的测试方法。

取坐标系 xyz 与摆面联。

x —— 输入轴;

y —— 输出轴;

z —— 通过不平衡质量中心与摆轴重合。

调整转台的方位:

a) 使转台轴与地垂线相垂直, 将加速度计安装在转台上, 初始时使 x 轴水平, y 轴平行于转台轴, 摆轴 z 平行于地垂线向上, 如图3-19所示。试验中加速度计工作在力矩反馈状态。大家知道, 一般摆式加速度计的输入输出有如下关系式:

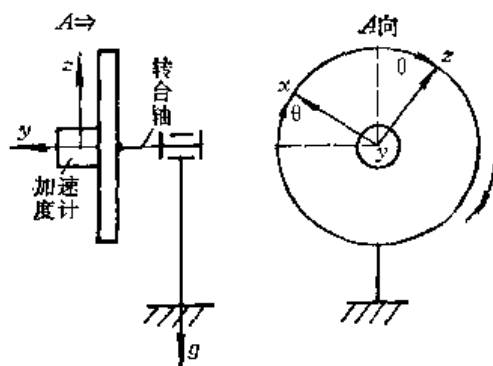


图3-19 摆式加速度计的测试图之一

$$\lambda \dot{z} = k_0 + k_1 a_x + k_2 a_x^2 + k_3 a_x^3 + k_4 a_x a_y + k_5 a_x a_z \quad (3-38)$$

对弹性支承加速度计而言, 上式中交叉耦合项是由于其两弹簧片的长度及刚度不等而造成的。同陀螺仪的位置试验相同, 试验中旋转转台先后停到若干需要的位置上, 测量力矩器的输入电流 i , 即使加速度计感受从 $-1g$ 到 $+1g$ 的变化量, 转台转角 θ 顺时针增量为正, λ 是力矩器的传递系数 (g/ma), 这时有:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -g \sin(\theta + \theta_0) \\ a_y &= 0 \\ a_z &= -g \cos(\theta + \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

式中 $\theta + \theta_0$ —— 输入轴与水平面 (初始零位) 的夹角;

θ_0 —— 当 θ 为零时, 输入轴 x 与水平面的实际微小误差角。

因为 θ_0 属于微量, 则 (3-39) 式可写成

$$\left. \begin{aligned} a_x &\approx -g (\sin \theta + \theta_0 \cos \theta) \\ a_y &= 0 \\ a_z &\approx -g (\cos \theta - \theta_0 \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

上述安装方式称为输出轴水平对准状态。

b) 摆轴水平对准

加速度计的安装方式亦可是摆轴水平对准, 如图3-20所示。

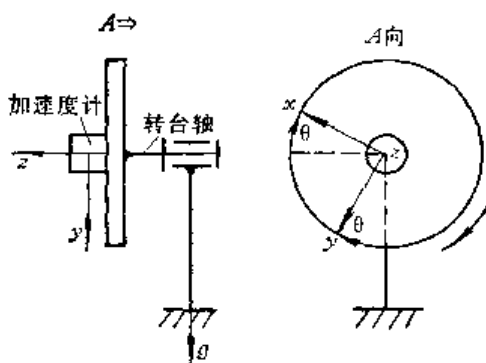


图3-20 摆式加速度计的测试图之二

这时有

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -g \sin(\theta + \theta_0) \approx -g (\sin \theta + \theta_0 \cos \theta) \\ a_y &= g \cos(\theta + \theta_0) \approx g (\cos \theta - \theta_0 \sin \theta) \\ a_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

将 (3-40)、(3-41) 式代入 (3-38) 式中并略去 θ_0 的高次项及 $k_2\theta_0$ 、 $k_3\theta_0$ 、 $k_4\theta_0$ 和 $k_5\theta_0$ 等, 得出当输出轴水平时:

$$\begin{aligned} \lambda i &= \left(k_0 + \frac{1}{2} g^2 k_2 \right) + \left(-gk_1 - \frac{3}{4} g^3 k_3 \right) \sin \theta + (-gk_1 \theta_0) \cos \theta + \left(\frac{1}{2} g^2 k_5 \right) \sin 2\theta \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} g^2 k_2 \right) \cos 2\theta + \left(\frac{1}{4} g^3 k_3 \right) \sin 3\theta \end{aligned} \quad (3-42)$$

当摆轴水平时:

$$\begin{aligned} \lambda i &= \left(k_0 + \frac{1}{2} g^2 k_2 \right) + \left(-gk_1 - \frac{3}{4} g^3 k_3 \right) \sin \theta + (-gk_1 \theta_0) \cos \theta + \left(-\frac{1}{2} g^2 k_4 \right) \sin 2\theta \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} g^2 k_2 \right) \cos 2\theta + \frac{1}{4} g^3 k_3 \sin 3\theta \end{aligned} \quad (3-43)$$

可将式 (3-42)、(3-43) 写成通式

$$\lambda i = A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + B_3 \sin 3\theta \quad (3-44)$$

式中各富氏系数

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= k_0 + \frac{1}{2} g^2 k_2 \\ A_1 &= -gk_1 \theta_0 \\ A_2 &= -\frac{1}{2} g^2 k_2 \\ A_3 &= 0 \\ B_1 &= -gk_1 - \frac{3}{4} g^3 k_3 \\ B_2 &= \frac{1}{2} g^2 k_5 \text{ 或等于 } -\frac{1}{2} g^2 k_4 \\ B_3 &= \frac{1}{4} g^3 k_3 \end{aligned} \right\} \quad (3-45)$$

因为各富氏系数由实验曲线 λi 很容易算出, 则得:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= A_0 + A_2 & (\mu_g) \\ k_1 &= -(B_1 + 3B_3)/g & (g/g) \\ k_2 &= -2A_2/g^2 & (\mu_g/g^2) \\ k_3 &= 4B_3/g^3 & (\mu_g/g^3) \\ k_4 &= -2B_2/g^2 & (\mu_g/g^2) \text{ (摆轴水平试验状态)} \\ k_5 &= 2B_2/g^2 & (\mu_g/g^2) \text{ (输出轴水平试验状态)} \\ \theta_0 &= A_1/(B_1 + 3B_3) \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

上述试验亦可用直接算法即四点或八点法试验等等。

3. 双轴翻滚试验

这里仍以单自由度液浮积分陀螺仪为例来讨论本试验。

1) 试验原理

本试验与前述试验的主要区别只是应用了双轴转台。转台工作台面可绕自转轴又称转台内环轴旋转, 也可围绕在结构上与转台内环轴相垂直的转台外环轴旋转, 整个转台亦可绕方位轴旋转, 以实现方位的调整, 然后机械固定。如图 3-21 所示。

试验时, 单自由度液浮积分陀螺仪置于转台上, 起始时, 使陀螺仪输出轴 y_0 平行转台外环轴及 ω_e , 陀螺仪输入轴 x_0 与转台内环轴平行, 陀螺仪转子轴 z_0 指西, 见图 3-22。

这时, 陀螺仪输入轴在试验过程中始终垂直于地球自转轴, 因而它不敏感地球的自转角速度, 试验中陀螺仪一直工作在力矩反馈状态, 可近似认为陀螺仪的 xyz

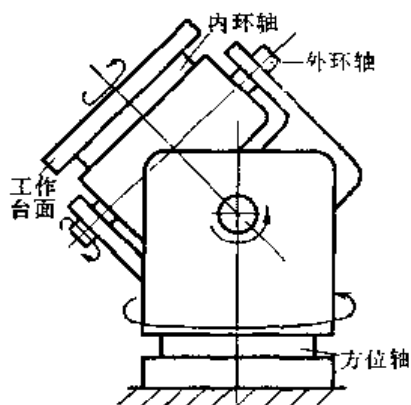


图3-21 双轴翻滚试验所用之测试转台

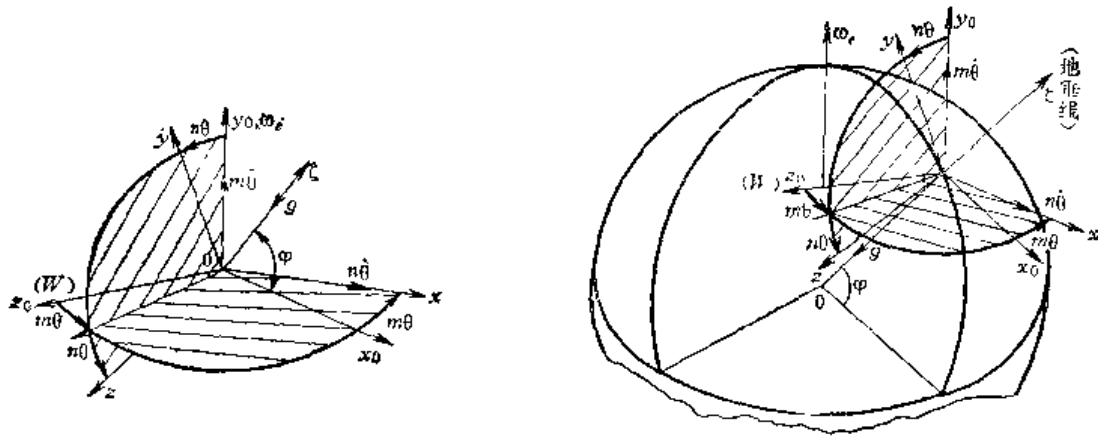


图3-22 双轴翻滚试验时的坐标关系

坐标系与壳体（基座即转台工作面）相对位置始终不变，并随同转台内环轴一起相对转台外环轴转动，由于转台内环轴的旋转角速度直接被陀螺仪输入轴所敏感，为此可进行间歇式的翻滚试验，也就是在陀螺仪承受大的输入角速度时，不进行数据采样，而是在转台转到所需要的每一新位置时，将转台及陀螺仪固定，然后对力矩器电流采样。如果需要计算加权值或求平滑的平均值，可以在每个位置上重复几次采样。这种试验方式还可消除由于转台两轴速率传动不精确而产生的误差。

这种测试方法不需要转台逆向回转，试验可多次循环进行。

2) 运动方程式

为了通过实验求解 (3-12) 式中的静态误差漂移系数，须选择转台外环轴及内环轴之间角运动的恰当比例，各坐标函数之间相关性的大小直接与此比例有关，令转台外，内环轴相对基座角位置之比为 $\frac{m\theta}{n\theta} = \frac{m}{n}$

$m\theta$ ——转台外环轴相对基座的转角；

$n\theta$ ——转台内环轴相对基座的转角。

参阅图 3-22 知道

$$\left. \begin{aligned} g_{x_0} &= -g \cos \varphi \\ g_{y_0} &= -g \sin \varphi \\ g_{z_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-47)$$

而

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos m\theta & 0 & -\sin m\theta \\ \sin n\theta \sin m\theta & \cos n\theta & \sin n\theta \cos m\theta \\ \cos n\theta \sin m\theta & -\sin n\theta & \cos n\theta \cos m\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

得出

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -g \cos \varphi \cos m\theta \\ g_y &= \frac{1}{2} g \cos \varphi [\cos(m+n)\theta - \cos(m-n)\theta] - g \sin \varphi \cos n\theta \\ g_z &= -\frac{1}{2} g \cos \varphi [\sin(m+n)\theta + \sin(m-n)\theta] + g \sin \varphi \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

将上式代入 (3-12) 则得

$$\begin{aligned}
 ik = & \left(D_0 + \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \sin^2 \varphi \right) \\
 & + \left(-\frac{1}{4} D_{zz} g^2 \sin 2\varphi \right) \cos(m-2n)\theta + \frac{1}{4} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi \sin(m-2n)\theta \\
 & + \left(-\frac{1}{2} D_y g \cos \varphi + \frac{1}{4} D_{xy} g^2 \sin 2\varphi \right) \cos(m-n)\theta \\
 & + \left(-\frac{1}{2} D_x g \cos \varphi + \frac{1}{4} D_{xz} g^2 \sin 2\varphi \right) \sin(m-n)\theta + (-D_y g \sin \varphi) \cos n\theta \\
 & + D_z g \sin \varphi \sin n\theta + \left(-\frac{1}{8} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \cos 2(m-n)\theta \\
 & + \frac{1}{8} (D_{yz} g^2 \cos^2 \varphi) \sin 2(m-n)\theta + (-D_x g \cos \varphi) \cos m\theta \\
 & + \left(\frac{1}{4} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \sin^2 \varphi \right) \cos 2n\theta + \left(\frac{1}{4} D_{yz} g^2 \cos^2 \varphi \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} D_{yx} g^2 \sin^2 \varphi \right) \sin 2n\theta + \left(-\frac{1}{4} D_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \right) \cos(2m-n)\theta \\
 & + \frac{1}{4} D_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \sin(2m-n)\theta + \left(\frac{1}{2} D_y g \cos \varphi \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} D_{xy} g^2 \sin 2\varphi \right) \cos(m+n)\theta + \left(-\frac{1}{2} D_x g \cos \varphi \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} D_{xz} g^2 \sin 2\varphi \right) \sin(m+n)\theta + \left(\frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \cos 2m\theta + \left(-\frac{1}{4} D_{zz} g^2 \sin 2\varphi \right) \cos(m+2n)\theta \\
 & + \left(\frac{1}{4} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi \right) \sin(m+2n)\theta + \left(-\frac{1}{4} D_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \right) \cos(2m+n)\theta \\
 & + \frac{1}{4} D_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \sin(2m+n)\theta + \left(-\frac{1}{8} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \cos 2(m+n)\theta \\
 & + \left(-\frac{1}{8} D_{yz} g^2 \cos^2 \varphi \right) \sin 2(m+n)\theta \quad \quad \quad (3-50)
 \end{aligned}$$

式中 k ——力矩器的标度因数 (度/小时·毫安);

i ——力矩器的输入电流 (毫安)。

3) 陀螺仪误差系数的分离

选择的 m 和 n 值将确定坐标函数之间的相关程度, 相关性也与解误差系数方程式时所使用的数据点数有关。

式 (3-50) 可写成如下通式:

$$\begin{aligned}
ik = & A_0 + A_1 \cos(m-2n)\theta + B_1 \sin(m-2n)\theta + A_2 \cos(m-n)\theta \\
& + B_2 \sin(m-n)\theta + A_3 \cos n\theta + B_3 \sin n\theta + A_4 \cos 2(m-n)\theta \\
& + B_4 \sin 2(m-n)\theta + A_5 \cos m\theta + B_5(0) \sin m\theta + A_6 \cos 2n\theta + B_6 \sin 2n\theta \\
& + A_7 \cos(2m-n)\theta + B_7 \sin(2m-n)\theta + A_8 \cos(m+n)\theta \\
& + B_8 \sin(m+n)\theta + A_9 \cos 2m\theta + B_9(0) \sin 2m\theta \\
& + A_{10} \cos(m+2n)\theta + B_{10} \sin(m+2n)\theta + A_{11} \cos(2m+n)\theta \\
& + B_{11} \sin(2m+n)\theta + A_{12} \cos 2(m+n)\theta + B_{12} \sin 2(m+n)\theta
\end{aligned} \quad (3-51)$$

式中

$$\begin{aligned}
A_0 &= D_c + \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi + D_{zz} \left(-\frac{1}{4} g^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} g^2 \sin^2 \varphi \right) \\
A_1 &= -\frac{1}{4} D_{zz} g^2 \sin 2\varphi \\
A_2 &= -\frac{1}{2} D_x g \cos \varphi + \frac{1}{4} D_{xy} g^2 \sin 2\varphi \\
A_3 &= -D_y g \sin \varphi \\
A_4 &= -\frac{1}{8} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \\
A_5 &= -D_x g \cos \varphi \\
A_6 &= \frac{1}{4} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} D_{zz} g^2 \sin^2 \varphi \\
A_7 &= \frac{1}{4} D_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \\
A_8 &= \frac{1}{2} D_y g \cos \varphi + \frac{1}{4} D_{xy} g^2 \sin 2\varphi \\
A_9 &= \frac{1}{2} D_{xx} g^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \\
A_{10} &= \frac{1}{4} D_{zz} g^2 \sin 2\varphi \\
A_{11} &= -\frac{1}{4} D_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \\
A_{12} &= -\frac{1}{8} D_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \\
B_1 &= \frac{1}{4} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi \\
B_2 &= -\frac{1}{2} D_x g \cos \varphi + \frac{1}{4} D_{xx} g^2 \sin 2\varphi \\
B_3 &= D_x g \sin \varphi \\
B_4 &= \frac{1}{8} D_{yz} g^2 \cos^2 \varphi \\
B_5 &= 0 \\
B_6 &= \frac{1}{4} D_{yz} g^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} D_{yz} g^2 \sin^2 \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_7 &= -\frac{1}{4} D_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \\
B_8 &= -\frac{1}{2} D_x \cos \varphi - \frac{1}{4} D_{xz} g^2 \sin 2\varphi \\
B_9 &= 0 \\
B_{10} &= \frac{1}{4} D_{yz} g^2 \sin 2\varphi \\
B_{11} &= \frac{1}{4} D_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \\
B_{12} &= -\frac{1}{8} D_{yz} g^2 \cos^2 \varphi
\end{aligned} \tag{3-52}$$

这些富氏系数通过谐波分析的方法求得之后，即可算出陀螺仪的静态漂移系数。

$$\begin{aligned}
D_0 &= A_0 + A_9 + 3(A_4 + A_{12}) - A_6 & [\text{度/小时}] \\
D_x &= -A_5/g \cos \varphi & [\text{度/小时} \cdot g] \\
D_y &= \frac{1}{2g} \left[\frac{A_8 - A_2}{\cos \varphi} - \frac{A_3}{\sin \varphi} \right] & [\text{度/小时} \cdot g] \\
D_z &= -\frac{1}{2g} \left[\frac{B_8}{\sin \varphi} - \frac{B_2 + B_4}{\cos \varphi} \right] & [\text{度/小时} \cdot g] \\
D_{xx} &= 2(A_9 - A_4 - A_{12})/g^2 \cos^2 \varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\
D_{xx} &= \frac{1}{g^2} \left[\frac{A_{10} - A_{12}}{\sin 2\varphi} - \frac{2(A_4 + A_{12})}{\cos^2 \varphi} \right] & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\
D_{xy} &= \frac{1}{g^2} \left[\frac{A_2 + A_8}{\sin 2\varphi} + \frac{A_7 - A_{11}}{\cos^2 \varphi} \right] & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\
D_{xz} &= 2(B_7 + B_{11})/g^2 \cos^2 \varphi & [\text{度/小时} \cdot g^2] \\
D_{yz} &= \frac{4}{3g^2} \left[\frac{B_1 + B_{10}}{\sin 2\varphi} + \frac{B_4 - B_{12}}{\cos^2 \varphi} \right] & [\text{度/小时} \cdot g^2]
\end{aligned} \tag{3-53}$$

可以看出，从分离陀螺仪静态漂移系数的角度来看，双轴转台通过一次翻滚试验即可完成。而单轴转台通过几次翻滚试验亦可完成，单轴转台所有的工作状态，双轴转台都可实现，但双轴转台由于它有“双轴”，具备了某些功能并且它能模拟陀螺装置的工作状态，这些是单轴转台所不能替代的。

§ 3 陀螺仪漂移测试的转台伺服法

一、转台伺服法实验原理

伺服法的特点在于它测试漂移的过程，类似于陀螺仪在系统中的工作过程。最主要的测试设备是陀螺仪漂移测试转台（以下简称转台）和它的附属电子线路。图 3-23 给出双轴转台台体结构示意图。由固定陀螺用的台面以及内环轴、外环轴、方位轴、基座等五部分组成。对单轴转台来说，内环轴上固定有力矩电机、测角元件，测速发电机等电器元件。这些元件和外加电子线路组成伺服系统。外环轴（对单轴台来说，常叫做耳轴）、方位轴仅供台面机械定位用。对双轴转台来说，外环轴也具有和内环轴相同的电器元件和外加电子线路，有相同的功能。图 3-24 给出转台伺服法工作状态方块图。主要由以下几大

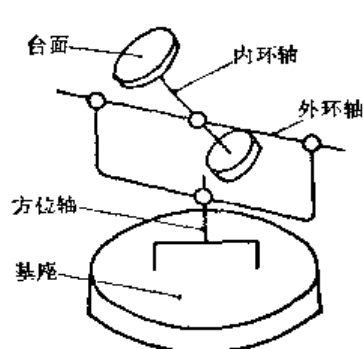


图3-23 转台台体结构示意图

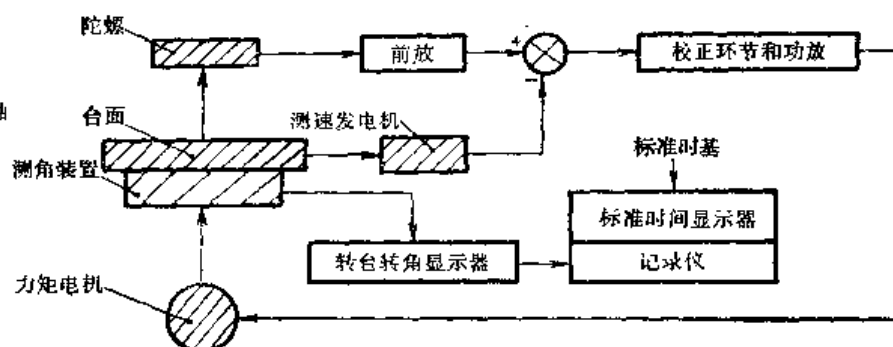





图3-24 转台伺服法工作状态方块图

图示说明

-  表示固定在内环轴上的部分
-  表示相互有机械联系
-  表示相互有电的联系

部分组成：转台台体、伺服系统（包括前放、测速发电机、校正环节、功放和力矩电机）、测角系统、标准时间显示器和记录仪等四大部分。转台台体保证为被测陀螺仪提供所需要的安装方位。伺服系统则保证转台测量轴跟踪陀螺仪相对惯性空间的漂移，或使转台相对惯性空间稳定。测角系统则给出转台相对基座的转角。标准时间显示器给出与所测转角相对应的标准时间（通常称做时基部分）并将数据记录下来。

在这一节里，如不经特殊指出，所用的伺服转台为单轴伺服转台，被测陀螺仪为单自由度浮子式积分陀螺仪。

实验时，我们通过夹具把陀螺仪固定在转台上，使陀螺仪的输入轴与转台的旋转轴（内环轴）相重合。陀螺仪信号传感器的输出，通过转台伺服系统放大器、校正环节、功率放大器、力矩电机、使转台旋转，从而构成了闭环系统。

为讨论方便，设转台内环轴平行地轴。当转台的基座相对惯性坐标系有转动运动时（地球自转角速度 ω_e ），转台将强迫带动积分陀螺仪绕陀螺仪的输入轴方向转动，这将在陀螺仪输出轴的方向产生陀螺仪力矩，使陀螺仪转子绕其输出轴转动。因而，信号传感器有输出信号。通过转台的伺服系统，使整个转台台面向着与其基座转动运动方向相反的方向转动，以保持转台台面以及陀螺仪的壳体在陀螺仪输入轴方向相对惯性空间稳定。所以，在陀螺仪没有漂移时，这个系统中的陀螺仪及转台在输入轴方向都将相对惯性空间稳定。此时所测得的转台相对基座的转角，正是基座相对惯性空间的转角。在转台轴平行地轴的情况下，这个角度就是地球自转角速度的积分。实际上，陀螺仪是存在各种干扰力矩的，此时，测得的转台相对基座的转动角速度（包括陀螺仪的漂移角速度）和基座相对惯性空间的角速度两部分。如果基座相对地球是静止的，那么，基座相对惯性空间的角速度就是地球的自转角速度，这是已知的，因此，只要测得转台相对基座的角速度，就可知道陀螺仪的漂移角速度了。

下面通过求取系统传递函数的办法，说明转台伺服法为什么能够测量陀螺仪漂移角速度。

可将图 3-24 的系统转化为图 3-25 的方块图。

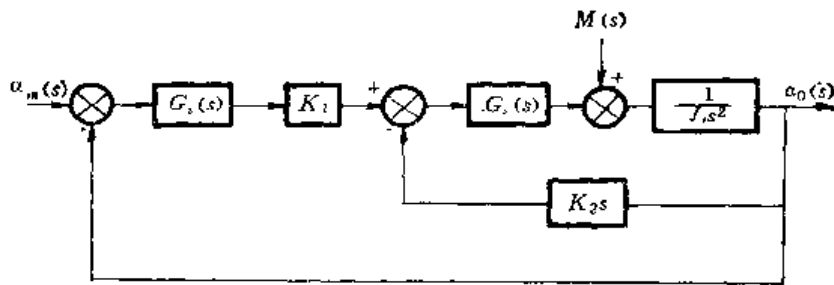


图3-25 转台伺服回路方块图

图示说明:

$\alpha_{in}(s)$ ——被测陀螺仪漂移角度的拉氏变换式; $G_g(s)$ ——被测陀螺仪的传递函数;

$$G_g(s) = \frac{HK_s}{J_p s - C}$$

H ——陀螺仪角动量; J_g ——陀螺仪转子的转动惯量; C ——陀螺仪的阻尼系数;
 K_s ——陀螺仪信号传感器的灵敏度; K_1 ——伺服系统前置放大器放大系数;
 $G_s(s)$ ——伺服系统的校正环节、功率放大器、力矩马达的总的传递函数; J_s ——转台绕内环轴的转动惯量; K_2 ——测速发电机的反馈系数; $\alpha_0(s)$ ——转台相对基座转角拉氏变换式。

为了突出所讨论的问题, 假定相对惯性空间没有转动, 测得的转台相对基座的转角就是陀螺仪的漂移角速度。同时, 假定系统只有干扰力矩 M 作用在台体上。它是由轴承的摩擦力矩或粘滞力矩、台体的静不平衡力矩、转台内环轴上力矩电机的波动力矩等所造成。

在这种情况下, 这个系统的传递函数为:

$$\alpha_0(s) = \frac{K_1 G_0(s) G_s(s)}{J_s s^2 + K_2 G_s(s) s + K_1 G_g(s) G_s(s)} \alpha_{in}(s) + \frac{1}{J_s s^2 + K_2 G_s(s) s + K_1 G_g(s) G_s(s)} M(s) \quad (3-54)$$

当 $s = 0$ 时 (α_{in} 和 M 为常值)

$$\alpha_0 = \alpha_{in} - \frac{M}{K_1 G_g G_s} \quad (3-55)$$

(3-55) 式表明, 只要 $\frac{M}{K_1 G_g G_s}$ 项小到可以忽略的程度, 转台相对基座的转角就代表了陀螺仪的漂移角度 α_{in} 。 G_g 、 G_s 分别代表 $G_g(s)$ 、 $G_s(s)$ 的静态放大系数。 $K_1 G_g G_s$ 常被称为伺服回路的伺服刚度, 是由伺服系统设计者根据干扰力矩大小来选择的。

总之, 转台伺服法, 就是通过测量转台相对地球的转角, 并根据地球自转角速度在转台轴方向的分量, 来求得陀螺仪的漂移角速度。首先, 在一个确定的时间间隔内, 利用转台的测角系统, 观测转台相对于它的基座 (即地球) 的转角, 然后, 再根据地球自转角速度沿着转台轴方向的分量, 通过计算而求得在这一段时间内基座相对惯性坐标系的转角。根据这两个转角的代数和, 可以求得, 在同一段时间内, 转台绕它自身的转轴相对惯性坐标系的转角, 这个转角的大小和观测时间一旦定下来, 漂移角速度的大小也就定下来。所以, 在这种测试方法中, 不是直接地测量漂移角速度, 而是测量它的积分。只要允许延长

观测时间, 就可以测得很小的漂移角速度。这一点是转台伺服法独有的特点。

二、陀螺仪测试初始方位的选择原则与运动方程式的建立

转台伺服法用于陀螺仪的测试, 目的是要指出陀螺仪的漂移值或者分离它们的漂移系数。也可以说, 是为了建立漂移角速度的误差数学模型, 数学模型项数的多少, 主要取决于陀螺仪精度对测试的要求。在仅仅要求测出陀螺仪漂移角速度的时候, 陀螺仪在转台上初始安装方位选择的唯一条件是要求实现陀螺仪在系统中工作的方式。因此, 陀螺仪在系统中工作方式的不同, 要求测试时其初始方位的选择也是不同的。为了分离误差系数, 在建立漂移角速度的数学模型时, 选择陀螺仪初始安装方位的条件就是尽可能的让陀螺仪的误差源暴露出来, 即让重力加速度和角动量 H 之间的夹角在测试时不断地发生变化, 以使各个轴上和重力加速度 g 以及和 g^2 成比例的干扰力矩都能显示出来。根据对数学模型项数的要求不同, 而取不同的安装方位。

转台伺服法测试陀螺仪漂移时所用的运动方程式, 仍是陀螺仪的基本运动方程式。

$$\bar{M}_y = \bar{\omega}_a \times \bar{H} \quad (3-56)$$

式中 \bar{M}_y ——作用在输出轴上的外力矩, 单位: 克·厘米;

H ——陀螺仪的角动量;

ω_a ——绕陀螺仪输入轴的进动角速度, 单位: 弧度/秒。

通常因输出角很小或接近于零, 故可认为输入轴与自转轴相垂直, 则可写成如下形式:

$$M_y = H \omega_a \quad (3-57)$$

应该注意, 外力矩 M_y 不仅包括了通过陀螺仪力矩器附加给陀螺仪的电的力矩, 而且, 还包括了由于陀螺仪制造的不完善而引起的绕陀螺仪输出轴的力矩, 如前边已提到的常值干扰力矩, 和 g 成比例的干扰力矩以及和 g^2 成比例的干扰力矩。当 H 是常值的时候, 力矩 M_y 可以被认为相当于进动角速度 ω_a 的度量。反之, 进动角速度 ω_a 也可以被认为是相当的干扰力矩 M_y 的度量。在转台伺服法中, 测量的就是进动角速度 ω_a 。下面给出单自由度液浮陀螺仪参考坐标系示意图。

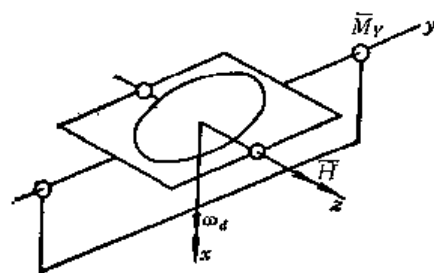


图3-26 单自由度陀螺仪参考坐标系

正象以前指出的那样, 陀螺仪输入轴 x 和转台内环轴是重合的。为了便于转台伺服法的计算, 依照这个坐标系的关系, 将式 (3-57) 扩大为以角速度形式表示的陀螺仪漂移误差模型。

$$\omega_a = R + U_x g_x - U_z g_z + (K_{xx}) g_x g_x + K_{xx} g_x^2 - K_{xz} g_x^2 + K_{zy} g_x g_y - K_{zy} g_y g_z \quad (3-58)$$

式中 g_x 、 g_y 、 g_z ——分别代表重力加速度 g 沿陀螺仪输入轴、输出轴、旋转轴方向的分量。单位: 厘米/秒²;

R ——沿 y 轴正向常值干扰力矩引起的漂移角速度。单位: 度/小时;

U_x ——沿输入轴正方向质量不平衡引起的漂移角速度。单位：度/小时/g；

U_z ——沿旋转轴正方向质量不平衡引起的漂移角速度。单位：度/小时/g；

$K_{zx}, K_{xz}, K_{xx}, K_{zz}, K_{zy}, K_{yz}$ ——陀螺仪结构非等弹性变形系数引起的漂移角速度。单位：度/小时/g²。其意义为：脚标 x 代表输入轴方向；脚标 y 代表输出轴方向；脚标 z 代表转子轴方向。如 K_{zx} 表示在第二个脚标正方向加速度作用下，陀螺仪结构的重心沿第一个脚标方向发生了位移，由于此位移，在 x 方向加速度的作用下，将引起沿陀螺仪输出轴的力矩或等效于漂移角速度。上述符号表示了单位加速度引起的力矩所等效的漂移角速度。其它符号意义类推。

在实际测试中，如果考虑地球自转角速度在陀螺仪输入轴的投影，则转台测量到的转台旋转角速度 $\dot{\theta}$ 为如下形式：

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = -\omega_{ex} - \omega_d = -\omega_{ex} - (R + U_x g_x - U_z g_z + (K_{zx} - K_{xz}) g_z g_x \\ + K_{zx} g_x^2 - K_{xz} g_z^2 + K_{zy} g_x g_y - K_{yz} g_y g_z) \end{aligned} \quad (3-59)$$

式中 ω_{ex} ——地球自转角速度在陀螺仪输入轴方向的投影。

因此，只要当被测试的陀螺仪的初始安装方位确定之后，就可以确定 g_x 、 g_y 、 g_z 和 ω_{ex} 的变化公式，将其代入 (3-59) 式，这样，就可以得到一个分离误差系数的最后表达式。

三、转台伺服法主要安装方式

伺服法实验时，陀螺仪的输入轴一定要和转台轴平行。根据输入轴相对地理坐标系的位置不同，陀螺仪的输入轴可以有三类安装方式：

- 1) 陀螺仪的输入轴在当地地垂线方向；
- 2) 陀螺仪的输入轴在当地的水平面内；
- 3) 陀螺仪的输入轴和地轴平行。

由于转子轴和输出轴相对地理坐标系的方位不同，上述三类安装方式又可进一步分成多种安装方式。现将其主要的几种安装方式列写如下。为计算方便，设转台转速矢量 $\dot{\theta}$ 的正方向总是和 x 轴的正向相同。

第一类安装方式——输入轴在垂线方向

a ——陀螺仪的输入轴在地垂线方向且指向下，如图 3-27 所示，可以得出如下公式：

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \\ g_y &= 0 \\ g_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-60)$$

$$\omega_{ex} = -\omega_e \sin \varphi$$

式中 φ ——当地纬度。

将式 (3-60) 代入 (3-59) 中

$$\dot{\theta} = \omega_e \sin \varphi - R - U_x g - K_{zx} g^2 \quad (3-61)$$

b ——陀螺仪的输入轴在地垂线方向，且指向上，如图 3-28 所示。可以得出如下公式：

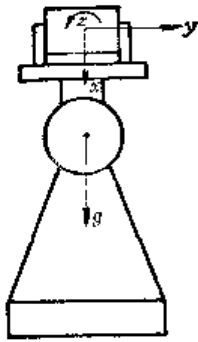


图3-27 漂移实验之一

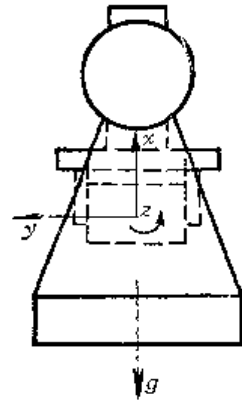


图3-28 漂移实验之二

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -g \\ g_y &= 0 \\ g_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$

$$\omega_{ex} = \omega_e \sin \varphi$$

将式 (3-62) 代入 (3-59) 式中

$$\dot{\theta} = -\omega_e \sin \varphi - R + U_z g - K_{rx} g^2 \quad (3-63)$$

上述两种安装方式，无论输入轴绕转台轴的转角如何，公式 (3-61) 和 (3-63) 都是正确的。

第二类安装方式——输入轴在水平面内，这类实验往往叫小角度伺服实验或特定角度伺服实验。

a ——陀螺仪的输出轴在地垂线方向且向上，如图 3-29 所示。可以得出如下公式：

$$\left. \begin{aligned} g_x &= 0 \\ g_y &= -g \\ g_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-64)$$

$$\omega_{ex} = \begin{cases} 0 & \text{输入轴指东} \\ \omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指北} \\ 0 & \text{输入轴指西} \\ -\omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指南} \end{cases}$$

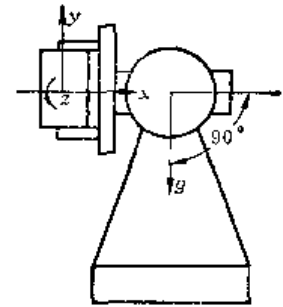


图3-29 小角度伺服实验之一

将式 (3-64) 代入 (3-59) 式中，有：

输入轴指东

$$\dot{\theta} = -R \quad (3-65)$$

输入轴指北

$$\dot{\theta} = -\omega_e \cos \varphi - R \quad (3-66)$$

输入轴指西

$$\dot{\theta} = -R \quad (3-67)$$

输入轴指南

$$\dot{\theta} = \omega_e \cos \varphi - R \quad (3-68)$$

b ——陀螺仪的输出轴在地垂线方向且向下, 如图 3-30 所示, 可以得出如下公式:

$$\left. \begin{array}{l} g_x = 0 \\ g_y = g \\ g_z = 0 \end{array} \right\} \quad (3-69)$$

$$\omega_{ex} = \begin{cases} 0 & \text{输入轴指东} \\ \omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指北} \\ 0 & \text{输入轴指西} \\ -\omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指南} \end{cases}$$

将式 (3-69) 代入 (3-59) 式中, 有:

输入轴指东

$$\dot{\theta} = -R \quad (3-70)$$

输入轴指北

$$\dot{\theta} = -\omega_e \cos \varphi - R \quad (3-71)$$

输入轴指西

$$\dot{\theta} = -R \quad (3-72)$$

输入轴指南

$$\dot{\theta} = \omega_e \cos \varphi - R \quad (3-73)$$

c ——陀螺仪转子轴在垂线方向且向下, 如图 (3-31) 所示。可以得出如下公式:

$$\left. \begin{array}{l} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = g \end{array} \right\} \quad (3-74)$$

$$\omega_{ex} = \begin{cases} 0 & \text{输入轴指东} \\ \omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指北} \\ 0 & \text{输入轴指西} \\ -\omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指南} \end{cases}$$

将式 (3-74) 代入 (3-59) 式中, 有

输入轴指东

$$\dot{\theta} = -R + U_x g + K_{xx} g^2 \quad (3-75)$$

输入轴指北

$$\dot{\theta} = -\omega_e \cos \varphi - R + U_x g + K_{xx} g^2 \quad (3-76)$$

输入轴指西

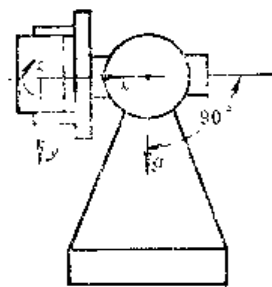


图3-30 小角度伺服实验之二

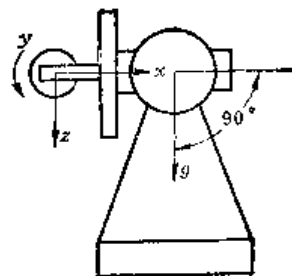


图3-31 小角度伺服实验之三

$$\dot{\theta} = -R + U_x g + K_{xz} g^2 \quad (3-77)$$

输入轴指南

$$\dot{\theta} = \omega_e \cos \varphi - R + U_x g + K_{xz} g^2 \quad (3-78)$$

d ——陀螺仪转子轴在垂线方向且向上, 如图 3-32 所示。

可以得出如下公式:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= 0 \\ g_y &= 0 \\ g_z &= -g \end{aligned} \right\} \quad (3-79)$$

$$\omega_{ex} = \begin{cases} 0 & \text{输入轴指东} \\ \omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指北} \\ 0 & \text{输入轴指西} \\ -\omega_e \cos \varphi & \text{输入轴指南} \end{cases}$$

将式 (3-79) 代入 (3-59) 式中, 有

输入轴指东

$$\dot{\theta} = -R - U_x g + K_{xz} g^2 \quad (3-80)$$

输入轴指北

$$\dot{\theta} = -\omega_e \cos \varphi - R - U_x g + K_{xz} g^2 \quad (3-81)$$

输入轴指西

$$\dot{\theta} = -R - U_x g + K_{xz} g^2 \quad (3-82)$$

输入轴指南

$$\dot{\theta} = \omega_e \cos \varphi - R - U_x g + K_{xz} g^2 \quad (3-83)$$

第三类安装方式——输入轴平行地轴, 又常叫做极轴伺服实验。

α ——输入轴指南, 输出轴的初始位置指西, 如图 3-33 所示。可以得出如下公式:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \sin \varphi \\ g_y &= g \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ g_z &= g \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ \omega_{ex} &= -\omega_e \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

将式 (3-84) 代入 (3-59) 式中, 有

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & \omega_e - \left(R + U_x g \sin \varphi + K_{xz} g^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} K_{xz} g^2 \cos \varphi \right) \\ & - \frac{1}{2} K_{zy} g^2 \sin 2\varphi \sin \theta - \left[\frac{1}{2} (K_{zz} - K_{xx}) g^2 \sin 2\varphi \right. \\ & \left. - U_x g \cos \varphi \right] \cos \theta + \frac{1}{2} K_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \sin 2\theta + \frac{1}{2} K_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3-85)$$

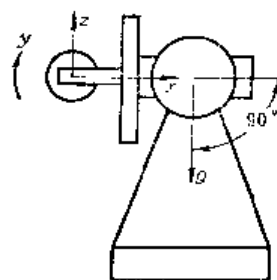


图 3-32 小角度伺服实验之四

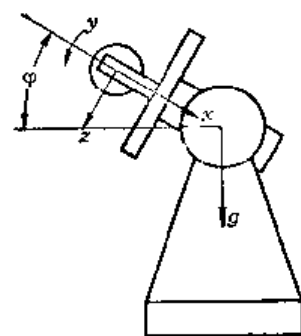


图 3-33 极轴伺服实验之一

b ——输入轴指北，输出轴初始位置指西，如图 3-34 所示。可得如下公式：

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -g \sin \varphi \\ g_y &= -g \cos \varphi \sin \theta \\ g_z &= -g \cos \varphi \cos \theta \\ \omega_{ex} &= \omega_e \end{aligned} \right\} \quad (3-86)$$

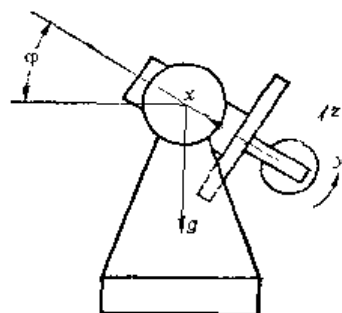


图3-34 极轴伺服实验之二

将式 (3-86) 代入 (3-59) 式中，有

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\omega_e - \left[R - U_x g \sin \varphi + K_{zx} g^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} K_{xx} g^2 \cos^2 \varphi \right] \\ & - \frac{1}{2} K_{zy} g^2 \sin 2\varphi \sin \theta - \left[U_x g \cos \varphi + \frac{1}{2} (K_{xx} - K_{yy}) g^2 \sin 2\varphi \right] \cos \theta \\ & + \frac{1}{2} K_{xy} g^2 \cos^2 \varphi \sin \theta + -\frac{1}{2} K_{zz} g^2 \cos^2 \varphi \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3-87)$$

第一类安装方式对测试时间的长短无限制，其表达式 (3-61)、(3-63) 总是正确的。第二类安装方式的 a 、 b 、 c 、 d 四种方式对测试时间都有要求，只有在转台转角较小（一般为 $\pm 1^\circ$ ）的情况下，所引入的公式才被认为是正确的，称之为小角度伺服实验或称做特定角度伺服实验。因此，在不采用补偿力矩的情况下，实验时间受到了限制。第三类安装方式所推导的公式对测试时间无限制，采用这种方式对陀螺仪进行测试，通常是连续工作 24 个小时，取得一组完整的实验数据，以供数据处理之用。

四、误差系数的分离

从实验的数据中分离出误差系数，其方法有两种。当仅仅要求分离出 R 、 U_x 、 U_z 三项时，依据习惯和方便，采用第一类和第二类安装方式中的几种实验，对其实验结果进行简单的代数运算就可以。在一些实验应用中，对于这六种安装方式的表达式，其中所含的非等弹性项系数可以忽略，这是由于非等弹性项系数往往比 R 、 U_x 、 U_z 小一个数量级，这时 (3-61) 式可改写为：

$$\dot{\theta} = \omega_e \sin \varphi + R - U_x g \quad (3-61)'$$

而 (3-63) 式可改写为：

$$\dot{\theta} = -\omega_e \sin \varphi + R + U_x g \quad (3-63)'$$

而 (3-75) 式可改写为：

$$\dot{\theta} = -R + U_x g \quad (3-75)'$$

从这三个式中求出 R 、 U_x 、 U_z ，那是很容易的事情。

第二种方法，也是主要的方法，采用富氏分析的方法，这个方法将给出全部误差系数。

从高等数学中，可以知道，任何一个周期函数都可以展为富氏级数，即由它的基波和高次谐波所组成。

在陀螺仪测试中，取其前五项为近似等式，做如下的排列

$$\omega_d = A_0 + A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta + A_2 \sin 2\theta + B_2 \cos 2\theta \quad (3-88)$$

在这五个富氏系数中就包括了陀螺仪误差数学模型中的九项系数。下面给出用转台伺服法解得九项系数的办法。对照第三类安装方式中的 a 和 b 两种安装方式的公式 (3-85) 和

(3-87), 可以发现陀螺仪的漂移角速度刚好包括以下三个部分:

- 1) 和转台转角无关的常数项;
- 2) 和转台转角一次谐波有关的项;
- 3) 和转台转角二次谐波有关的项。

因此可以对 (3-85) 和 (3-87) 式进行富氏分析, 得富氏系数和陀螺仪漂移误差系数的对应关系如表 3-2 所示。

表3-2 系数对照表之一

富氏系数	输入轴平行地轴指向南	输入轴平行地轴指向北
A_0	$\omega_e = \left[R + U_x g \sin \varphi + K_{zx} g^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} K_{xz} g^2 \cos^2 \varphi \right]$	$-\omega_e = -R - U_x g \sin \varphi + K_{zx} g^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} K_{xz} g^2 \cos^2 \varphi$
A_1	$-\frac{1}{2} K_{zy} g^2 \sin 2\varphi$	$-\frac{1}{2} K_{zy} g^2 \sin 2\varphi$
B_1	$U_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} (K_{zz} - K_{xx}) g^2 \sin 2\varphi$	$-U_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} (K_{zz} - K_{xx}) g^2 \sin 2\varphi$
A_2	$\frac{1}{2} K_{xy} g^2 \cos^2 \varphi$	$\frac{1}{2} K_{xy} g^2 \cos^2 \varphi$
B_2	$\frac{1}{2} K_{xz} g^2 \cos^2 \varphi$	$\frac{1}{2} K_{xz} g^2 \cos^2 \varphi$

从表 3-2 的对应关系, 可以求得漂移角速度的误差系数和富氏系数之间的关系如表 3-3 所示:

表3-3 系数对照表之二

误差系数	单 位	富 氏 系 数
R	度/小时	$\frac{A_{0S} + A_{0N}}{2} - B_2 + \frac{2B_2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$
U_x	度/小时·g	$\frac{B_{1S} - B_{1N}}{2 \cos \varphi}$
U_z	度/小时·g	$\frac{A_{0N} - A_{0S} + 2\omega_e}{2 \sin \varphi}$
$K_{zx} - K_{xz}$	度/小时·g ²	$\frac{B_{1S} + B_{1N}}{\sin 2\varphi}$
K_{zx}	度/小时·g ²	$\frac{2B_2}{\cos^2 \varphi}$
K_{xz}	度/小时·g ²	$-\frac{2B_2}{\cos^2 \varphi}$
K_{zy}	度/小时·g ²	$\frac{A_{1N} - A_{1S}}{\sin 2\varphi}$
K_{xy}	度/小时·g ²	$\frac{2A_{2S}}{\cos^2 \varphi}$ 或 $-\frac{2A_{2N}}{\cos^2 \varphi}$

注意:

- 1) A_{0S} 、 A_{0N} 、 A_{1S} 、 A_{1N} 等脚标S或N表示输入轴指南或指北时的富氏系数;
- 2) 假定 $K_{zx} = K_{xz}$, 所以 K_{zx} 才能如表所示;
- 3) 如从其它实验能得到R的话, 则有

$$K_{zx} = \frac{A_{0S} + A_{0N} - 2B_2 + 2R}{2 \sin 2\varphi} \quad \bullet$$

因此,可以看出,只要进行输入轴平行地轴的 $a)$ 和 $b)$ 两种方式的实验,就可以解得九项系数。不过要假定 $K_{zx} = K_{xz}$, 或者通过其它辅助实验给出 R 之后,才可以解出 K_{zx} 。而 K_{zz} 和 K_{xx} 两个系数,是以 $(K_{zz} - K_{xx})$ 形式给出的。 $(K_{zz} - K_{xx})$ 差值的物理意义是说明陀螺仪结构沿输入轴和自转轴两个方向的不对称性。以上为富氏分析方法在转台伺服法分离陀螺仪误差系数方面的应用。

在工程实践中,往往只要求有 R 、 U_x 和 U_z 和 $K = (K_{zz} - K_{xx})$ 四项系数的误差模型,并且将它们分离出来。这时,把方程 (3-85) 改写为如下形式

$$\dot{\theta} = \omega_e - [R + U_z g \sin \varphi] + \left[U_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} (K_{zz} - K_{xx}) g^2 \sin 2\varphi \right] \cos \theta \quad (3-89)$$

把方程 (3-87) 改写为

$$\dot{\theta} = -\omega_e - [R - U_z g \sin \varphi] + \left[-U_x g \cos \varphi - \frac{1}{2} (K_{zz} - K_{xx}) g^2 \sin 2\varphi \right] \cos \theta \quad (3-90)$$

从方程 (3-89) 和 (3-90) 两式,可以很容易解出 R 、 U_x 、 U_z 和 $K = K_{zz} - K_{xx}$ 四项系数来。当然这样做会把一部分有规律误差当做随机误差处理,从而降低了陀螺仪性能指标。

有两个问题再说明一下:

1) 采用富氏分析方法分离误差系数时要求提供完整周期的实验数据,因此,每次至少要进行约24小时的实验。这是利用转台伺服法分离误差系数的一个主要缺点;

2) 从式 (3-89) 和 (3-90) 可见,在数据处理时,需要的是转台角速度 $\dot{\theta}$, 因此,必须把测试到的转台转角换算成角速度以后,才能进行数据处理。

五、综合漂移角速度的测试

转台伺服法进行陀螺仪测试,不仅可以用来分离陀螺仪漂移误差系数,而且,更主要的是用来测定陀螺仪的综合漂移角速度。综合漂移角速度是指对所测得的陀螺仪漂移角速度的值不去分离它们的各项系数大小,而仅仅分别给出漂移角速度的有规律部分和随机部分的大小。有规律的陀螺仪漂移角速度的值可在系统中进行补偿,如果补偿完善,则这一项不影响陀螺仪的使用精度。但通过实验,这一项的数值必须给出。随机部分的大小则由于在系统中不易补偿,因而影响了陀螺仪的使用精度。因此,用综合漂移角速度来定义陀螺仪的精度时,常常把随机部分的大小定义为陀螺仪的误差。通常所指的陀螺仪漂移 $0.01^\circ/\text{小时}$ 或 $0.001^\circ/\text{小时}$ 就是这个随机部分的大小。

在第一类安装方式和第二类安装方式所测得的陀螺仪漂移角速度,其有规律部分则表现为常值,可以用角速度的平均值去近似:

$$\omega_{a\text{平均}} = \bar{\omega} = \frac{\sum \dot{\alpha}_i}{n} \quad i = 1, 2, 3 - n, \quad (3-91)$$

式中 $\omega_{a\text{平均}}$ 、 $\bar{\omega}$ ——常值漂移角速度;

$\dot{\alpha}_i$ ——第 i 个测试点的瞬时漂移角速度;

n ——所取测试点的数目。

这里的常值漂移角速度不仅包括了误差模型中的常数项,而且还可能部分的包括了和

g 一次方或二次方成比例的项, 这些项的数值不是和转台转角无关, 就是由于测试时转台转角很小可以被认为是常值。

随机漂移角速度的统计特性可用标准方差和自相关函数 (自相关时间) 来表示。

标准方差

$$\sigma_{\dot{\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (\dot{\alpha}_i - \bar{\dot{\alpha}})^2} \quad (3-92)$$

自相关函数:

$$\psi_{\tau} = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} [\dot{\alpha}_i (\dot{\alpha}_{i+\tau})] \quad (3-93)$$

其中 τ 为自相关时间, $\tau = 0, 1, 2, \dots, \tau < n$

实际测试时, 只有在转台旋转角速度中去掉地球自转角速度的分量之后, 才可以运用式 (3-91)、(3-92)、(3-93) 求得相应的常值漂移平均角速度 ω_d , 标准方差 $\sigma_{\dot{\alpha}}$ 和自相关时间 τ 。

通过进一步讨论可以发现, 伺服实验时, 如果角动量 H 和当地重力加速度 g 之间的夹角始终保持不变的话 (或可以近似的认为保持不变), 则陀螺仪漂移有规律部分, 其大小是一个常值。在伺服实验时, 当所采用的初始安装方位不能保证它的角动量 H 和重力加速度 g 之间的夹角不变, 这时所测量到的漂移角速度的有规律部分就不是一个常值, 而是一个转台转角的周期函数。前述的和极轴平行的伺服实验 (第三类安装方式) 是这种情况。这种测试方法, 在测试时, 实质上是让陀螺仪相对惯性空间稳定, 因而造成角动量 H 和重力加速度 g 之间的夹角不断发生变化。这时, 所测量的漂移角速度, 将和转台的转角有关。这种安装方式的伺服实验, 除可用于分离误差系数之外, 较多的用于测试陀螺仪的长期性能。因此, 需要进行多转实验。此时可将第一转的数据做为漂移的有规律部分, 用以后各转的数据和第一转的数据逐点比较, 其差值的统计特性, 描述了漂移的随机部分。在求其差值时应将相应的地球自转角速度分量除掉。

六、二自由度液浮陀螺仪的测试

采用转台伺服法对二自由度液浮陀螺仪进行测试, 人们较习惯采用单轴伺服转台和单自由度液浮陀螺仪的测试方法对二自由度液浮陀螺仪进行测试。从陀螺仪原理可以知道, 由于二自由度液浮陀螺仪的阻尼系数很低, 从工程角度来看, 两个轴之间的交叉耦合影响可以忽略不计。因此, 一个二自由度液浮陀螺仪就可以被看作是二个单自由度液浮陀螺仪的组合, 如图 3-35 所示。但它又和单自由度陀螺仪有两点不同。首先, 二自由度陀螺仪的两个轴 (转子轴除外) 的每一个轴, 它们既是输入轴, 同时又是输出轴, 不像单自由度陀螺仪那样, 输入轴和输出轴之间是互相垂直的。其次, 就是二自由度液浮陀螺仪同名轴上的力矩器和信号传感器并不是在一个轴上, 而是在两个相互垂直的轴上, 即 x 轴信号传感器在 x 轴上, 而与其对应的力矩器则在 y 轴上, y 轴信号传感器在 y 轴上, 而与其对应的力矩器则在 x 轴上。这一点, 在联接力反馈回路时是应该特别注意的。力反馈法测量二自由度液浮陀螺仪的漂移角速度, 是采用二套力反馈回路分别锁定二个敏感轴。单轴转台伺服法

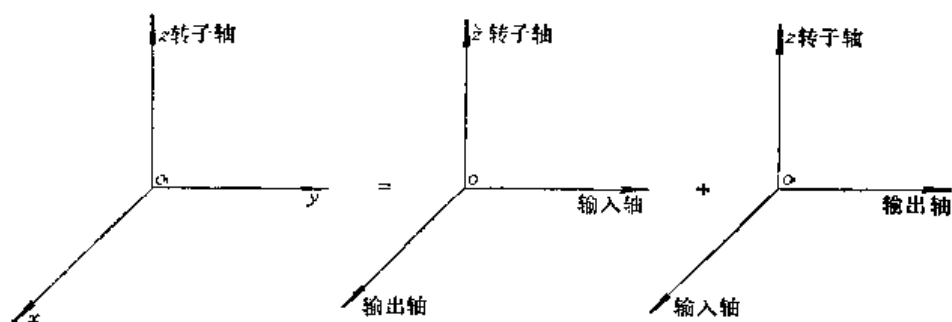


图3-35 一个二自由度陀螺仪相当于两个单自由度陀螺仪

测量二自由度液浮陀螺仪漂移时，则是采用一套力反馈回路锁定一个轴，而对没有被锁定的轴进行伺服实验。同样，要对另一个轴进行伺服实验时，不做实验的轴仍用力反馈回路锁定。这时，安装方式的考虑，方程式的建立以及数据处理的原则和单自由度液浮陀螺仪的伺服测试是一样的。

近年来，随着双轴陀螺仪漂移测试转台问世，尤其是静电陀螺仪的研制要求，人们也就越来越重视采用双轴陀螺仪漂移测试转台对二自由度液浮陀螺仪测试理论的研究工作。下面仅就基本原理加以说明。

1. 陀螺仪基本运动方程式和误差模型的建立

对于一个二自由度液浮陀螺仪来讲，陀螺仪测漂所需的方程式仍然是它的进动方程式

$$\begin{aligned} H\omega_y &= M_x \\ -H\omega_x &= M_y \end{aligned} \quad (3-94)$$

式中 $oxyz$ ——陀螺仪的内环坐标系；

ox ——初始定位时和陀螺仪外环轴重合；

oy ——和陀螺仪的内环轴重合；

oz ——和陀螺仪的角动量 H 方向重合；

M_x ——绕 ox 轴方向的外力矩、实际上由于实验时 ox 基本上和外环轴重合， M_x 也可以认为是作用在外环轴上的干扰力矩；

M_y ——作用在内环轴上的外力矩；

ω_x ——陀螺仪漂移角速度在陀螺仪内环坐标轴 ox 上的投影。实际上可认为它是绕外环轴的漂移角速度；

ω_y ——陀螺仪漂移角速度在内环轴上的分量。

在上边认为 M_x 是绕陀螺仪外环轴的外力矩， ω_x 是绕陀螺仪外环轴的漂移角速度，是基于伺服实验时，转台的内环轴跟踪陀螺仪内环轴的精度很好，保证陀螺仪内环坐标的 x 轴和

陀螺仪的外环轴之间的夹角永远小于 $1 \sim 2$ 角秒, 因此, 这种等价是允许的。

和单自由度陀螺仪一样, M_x 、 M_y 不仅代表了由 x 轴或 y 轴上的力矩器给出的修正力矩, 而且, 也包括了由于陀螺仪制造不完善引起的干扰力矩, 即包括和 y 无关的常值干扰力矩, 和 g 一次方有关的不平衡力矩以及和 g^2 有关的非等弹性项。当 H 一定时, M_x 和 M_y 则分别等效于 ω_x 和 ω_y (注意: 这里 M_x 和 ω_y 对应)。和单轴转台伺服实验一样, 仍然可以通过测定 ω_x 、 ω_y 来判定 M_y 、 M_x 的大小, 和进行误差系数的分离工作。

和单自由度液浮陀螺仪相似, 可以写出二自由度液浮陀螺仪误差数学模型

$$\begin{cases} -\omega_{dx} = R_x + U_x g_x - U_z g_z + (K_{xz} - K_{xx}) g_x g_z + K_{zx} g_x^2 \\ \quad - K_{xx} g_z^2 + K_{zy} g_x g_y - K_{xy} g_y g_z \\ \omega_{dy} = R_y - U_z g_y + U_y g_z + (K_{yy} - K_{zz}) g_y g_z - K_{zy} g_y^2 \\ \quad + K_{yz} g_z^2 - K_{zx} g_x g_y + K_{yx} g_x g_z \end{cases} \quad (3-95)$$

式中 R_x 、 R_y ——分别为沿 x 轴和 y 轴正向常值干扰力矩引起的漂移角速度。单位: 度/小时;

U_x 、 U_y 、 U_z ——分别为沿 x 轴、 y 轴、 z 轴正向质量不平衡引起的漂移角速度。单位: 度/小时 $\cdot g$;

K_{xx} 、 K_{yy} 、 K_{zz} 、 K_{xx} 、 K_{xy} 、 K_{xz} 、 K_{zy} 、 K_{yz} 、 K_{yx} ——陀螺仪结构非等弹性变形系数引起的漂移角速度。单位: 度/小时 $\cdot g^2$ 脚标 x 、 y 、 z 分别代表陀螺仪内环坐标系 ox 、 oy 、 oz 轴。如 K_{xx} 表示在第二个脚标 ox 轴正方向加速度的作用下, 陀螺仪结构发生变形, 重心沿第一个脚标方向 (ox 轴) 发生位移。由于此位移, 在 oz 方向加速度的作用下, 将引起沿 oy 轴的力矩或等效于沿 ox 轴的漂移角速度。上述符号表示了单位加速度引起的力矩等效的漂移角速度。

在实际的应用中, 误差系数可以根据陀螺仪结构的情况加以取舍, 如在结构对称的球形转子情况下, 则可以认为 $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz}$, 则有 $K_{xx} - K_{xx} = 0$, $K_{yy} - K_{zz} = 0$ 两项系数在方程式 (3-95) 中消失。同时, 也可以认为 $K_{xy} = K_{yx}$, $K_{xz} = K_{zx}$, $K_{yz} = K_{zy}$ 。当然, 为了准确的描述陀螺仪的误差特性, 对于非等弹性变形系数, 有的则应该考虑外环的质量, 有时则仅把内环质量考虑在内。

2. 陀螺仪漂移角速度和转台转角 θ_x 、 θ_y 之间的关系

和单轴转台伺服法一样, 双轴转台伺服法测试二自由度陀螺仪漂移时, 也是通过测定转台外环轴转角 θ_x 和内环轴转角 θ_y 分别求取陀螺仪漂移角速度 ω_{dx} 和 ω_{dy} 。测试时, 用专用夹具将被测试的陀螺仪固定在台面上, 使陀螺仪的内环轴平行于测试转台的内环轴。通过陀螺仪内环轴的信号传感器和转台内环伺服系统构成闭路, 使转台内环轴跟踪陀螺仪内环轴的漂移。同样, 在初始定位时, 使陀螺仪的外环轴平行于转台的外环轴, 也组成相应的闭路系统, 使转台的外环轴跟踪陀螺仪绕外环轴的漂移。这时, 双轴伺服实验就出现和单轴伺服实验不同的问题。尽管开始实验时做到了陀螺仪的内、外环轴和转台内、外环轴平行, 实验开始后, 由于陀螺仪内环轴存在漂移和地球自转角速度 ω_e 分量的视运动, 所以, 一旦转台内环轴有转角 θ_y 出现, 陀螺仪的外环轴和转台的外环轴就不能保持平行, 因

此, 转台外环轴的转角不仅和陀螺仪外环轴的漂移角速度有关, 而且还和转台内环轴的转角 θ_y 有关。如果再考虑到地球自转角速度 ω_e , 转台的转角和漂移角速度之间的关系就会更为复杂。

下面推导它们之间的数学表达式, 图 3-36 给出了转台坐标系和陀螺仪内环坐标系之间的关系。 $OXYZ$ 为转台坐标系, OX 为转台外环轴, OY 为转台内环轴, OZ 与 OX 、 OY 构成右手坐标系。 θ_x 、 θ_y 分别为转台外环轴和内环轴的转角。 $oxyz$ 为陀螺仪内环坐标系, 初始定位如图所示。为了书写的方便, 用 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 分别代替 ω_{dx} 、 ω_{dy} 。下面推导出 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 和 θ_x 、 θ_y 之间的关系。

利用方向余弦法进行变换, 有

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= A_{yY} A_{xX} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x \sin\theta_y & -\cos\theta_x \sin\theta_y \\ 0 & \cos\theta_y & \sin\theta_x \\ \sin\theta_y & -\cos\theta_y \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-96)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\theta}_x \cos\theta_y + \omega_{ex} \cos\theta_y + \omega_{ey} \sin\theta_x \sin\theta_y - \omega_{ez} \cos\theta_x \sin\theta_y \\ \dot{\beta} &= \dot{\theta}_y + \omega_{ey} \cos\theta_x + \omega_{ez} \sin\theta_x \end{aligned} \quad (3-97)$$

式 (3-97) 就是双轴伺服转台测漂的一般表达式。应用时, 根据双轴转台所选择的初始方位可求出 ω_{ex} 、 ω_{ey} 、 ω_{ez} 三个值, 将其代入式 (3-97)

以后, 就得到给定方位陀螺仪漂移表达式。例如, 图 3-37 给出一种初始方位选择示意图。转台外环轴 OX 指东且在水平面内, 内环轴 OY 在当地地垂线方向, 则 Z 在水平面内指南。从图 3-37 可得

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ex} &= 0 \\ \omega_{ey} &= \omega_e \sin \varphi \\ \omega_{ez} &= -\omega_e \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-98)$$

将式 (3-98) 代入式 (3-97) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\theta}_x \cos\theta_y + \omega_e \sin \varphi \sin\theta_x \sin\theta_y + \omega_e \cos \varphi \cos\theta_x \sin\theta_y \\ \dot{\beta} &= \dot{\theta}_y + \omega_e \sin \varphi \cos\theta_x - \omega_e \cos \varphi \cdot \sin\theta_x \end{aligned} \quad (3-99)$$

这就是转台给定初始方位后, 陀螺仪漂移角速度和转台转角之间的关系式。

为了分离误差系数, 仍采用前边推导的方向余弦 (3-96) 式, 将重力加速度在转台初

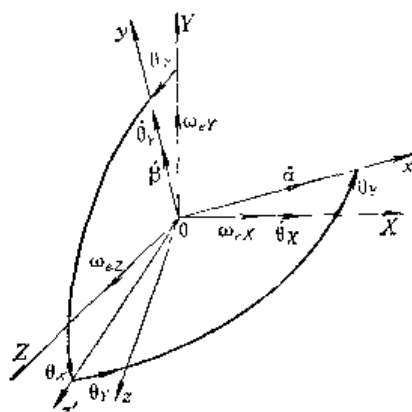


图3-36 坐标系之间关系

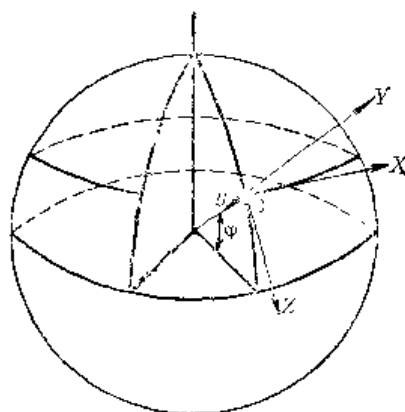


图3-37 初始方位选择示意图

始方位的分量 g_x 、 g_y 、 g_z 变换为 g_x 、 g_y 、 g_z ，然后将此三个分量代入式 (3-95) 中，得到给定方位的陀螺仪误差数学模型。现在仍以图 3-37 所示的初始安装方位为例加以说明。从图 3-37 可得

$$\left. \begin{aligned} g_x &= 0 \\ g_y &= -g \\ g_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-100)$$

利用式 (3-96) 可得

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -g \sin \theta_x \sin \theta_y \\ g_y &= -g \cos \theta_x \\ g_z &= g \sin \theta_x \cos \theta_y \end{aligned} \right\} \quad (3-101)$$

将式 (3-101) 代入式 (3-95) 中，可得

$$\begin{aligned} -\dot{\alpha} &= R_x - U_x g \sin \theta_x \sin \theta_y - U_y g \sin \theta_x \cos \theta_y - \frac{1}{2} (K_{xx} - K_{yy}) g^2 \sin^2 \theta_x \sin 2\theta_y \\ &\quad + K_{xx} g^2 \sin^2 \theta_x \sin^2 \theta_y - K_{yy} g^2 \sin^2 \theta_x \cos^2 \theta_y \\ &\quad + \frac{1}{2} K_{xy} g^2 \sin 2\theta_x \sin \theta_y + \frac{1}{2} K_{xy} g^2 \sin 2\theta_x \cos \theta_y \\ \dot{\beta} &= R_y + U_x g \cos \theta_x + U_y g \sin \theta_x \cos \theta_y - \frac{1}{2} (K_{yy} - K_{xx}) g^2 \sin 2\theta_x \cos \theta_y \\ &\quad - K_{xy} g^2 \cos^2 \theta_x + K_{yx} g^2 \sin^2 \theta_x \cos^2 \theta_y - \frac{1}{2} K_{xx} g^2 \sin 2\theta_x \sin \theta_y \\ &\quad - \frac{1}{2} K_{yy} g^2 \sin^2 \theta_x \sin 2\theta_y \end{aligned} \quad (3-102)$$

这就是要求的给定方位的陀螺仪误差数学模型最终表达式。式中的 $\dot{\alpha}$ 和 $\dot{\beta}$ 仍然是要通过 (3-99) 式求得的。

3. 小结

用双轴转台测试二自由度陀螺仪的综合漂移角速度和进行误差系数的分离方法，目前还不够成熟和完善。前边提到的用单轴转台测试单自由度液浮陀螺仪的方法在这里也都是适用的。

若分离误差系数，当要求的项数不多时，仍可采用不同位置小角度伺服法得到多组代数方程式，通过运算得到所求的系数。若分离的系数较多，则用最小二乘法原理对曲线拟合较为合理和方便。

综合漂移角速度的测定，当被测陀螺仪相对惯性空间稳定时，在伺服实验的过程中，陀螺角动量 H 和重力加速度 g 之间的夹角不是固定不变的。因此，陀螺仪的漂移角速度的有规律部分就不是常值，而是转台转角的函数，欲求出这个值的大小，在一个安装方位至少要进行两转以上的实验，对数据进行逐点比较，才能获得漂移速度的有规律部分和随机部分的大小。当然，应除掉相应的地球自转角速度的分量。

从 (3-96) 式的方向余弦可见，转台坐标系和陀螺仪内环坐标系之间的关系都是转台内、外环转角的正弦和余弦函数。因此，重力加速度 g 在陀螺仪内环轴坐标系上的投影都是转台内、外环轴转角的函数，因此，陀螺仪漂移角速度的大小也都是转台内、外环轴转角的函数。这样，在用双轴转台对二自由度陀螺仪进行测试时，就得不到一个象单轴转台

那样和转台转角有关的漂移公式来。因此,在双轴转台可能的十二种安装方式(见附录二)中,所测的陀螺仪漂移角速度的有规律部分都不是常值。

当被测陀螺仪在测试时要求相对地理坐标系稳定时,就必须给陀螺仪加以修正力矩,使 $\theta_x = 0$, $\theta_y = 0$, 从而使误差数学模型中各项系数为常值,则修正力矩的大小就是陀螺仪有规律部分的主要组成部分。转台所测数据可用公式 (3-91)、(3-92)、(3-93) 去处理。

工作时间很短的陀螺仪,不要求长时间伺服实验,而陀螺仪本身的精度要求又不是很高的话,则可以采用小角度伺服实验模拟实际情况,在忽略二阶小量的情况下对数据进行处理。

§ 4 陀螺仪测试方法的比较

本章介绍了陀螺仪漂移测试的主要方法:力矩反馈法和转台伺服法。重点介绍了单轴转台测试单自由度液浮陀螺仪的基本原理和方法。随着双轴陀螺仪漂移测试转台的研制成功,它的使用也提到了日程上,因此介绍了用双轴转台测试二自由度陀螺仪的基本原理和方法。

力反馈法(包括滚转试验)主要用来测定陀螺仪的误差系数和短周期的重复性,随着电子技术的发展,它的测试精度也越来越高。因此,力反馈法也越来越受到人们的重视和被人们应用。它的优点是在短时间内能测定所有误差系数,试验设备成本低,试验易于进行。缺点是陀螺仪力矩器的非线性将直接影响测试精度。由于回路的频带较宽,测试数据中能反映高频分量且受回路动态特性的影响。

伺服法主要用来测定陀螺仪的长周期性能,即用来测定陀螺仪的综合漂移。用此法虽然也能分离出陀螺仪的误差系数,但由于需要的时间较长,所以不常用,可是因伺服法的可靠性和高精度,往往用伺服法测得的数据去核实由力反馈法测得的数据。它的优点是测试得到的数据是角度,即漂移角速度的一次积分,因此滤除了高频分量的影响,并且采用较长的测试时间,可以提高测试精度。伺服法测得的数据,更接近于陀螺仪在系统中实际工作的数据。另外由于伺服法在试验中不采用力矩器或较少采用力矩器,避免了力矩器的非线性对陀螺仪漂移的影响。伺服法的缺点是测试时间较长,所需测试转台成本高。

二自由度陀螺仪的测试,人们首先还是应用单轴转台进行的,并且成功地解决了用单轴转台对二自由度陀螺仪的测试。随着双轴转台的出现,人们越来越重视用它对二自由度陀螺仪进行测试。明显的好处是减少了陀螺仪在转台上的安装次数,从而提高了测试精度,同时测试所需的时间比单轴转台所需的时间显著减少。

至于一个具体陀螺仪的鉴定工作,采取哪种方法,要看被测陀螺仪的要求,测试人员的习惯,具备的测试条件和设备等具体情况来决定。一般地说,分离陀螺仪的误差系数,以滚转试验为好,求取综合漂移以伺服法为好。

附录一 信号传感器、力矩器主要参数的测定

一、信号传感器的输出梯度

陀螺仪信号传感器的输出梯度和测量范围可借助于单轴伺服转台来确定。为此,陀螺

仪是这样对准的, 将需要测量传感器输出梯度的那个轴平行于转台的测量轴 (内环轴), 而转台的测量轴又垂直于地轴。如果是二自由度陀螺仪, 则另一个轴用力反馈法锁定住。在上述的位置上, 测试误差只限于陀螺仪的漂移角速度, 因为这个速度很小 (一般约为 $1^\circ/\text{小时}$), 所以, 在测量时间内出现的角度变化最大值约 5 角秒。这个试验的关键就是在尽量短的时间内, 由伺服转台的机械台体给出信号传感器的机械转角, 并立即取得信号传感器的输出电压。这样, 在给定的测量范围内, 取得十组以上的数据, 数据组的斜率将构成信号传感器的输出梯度。

二、力矩器的标度系数和线性度

这里采用转台伺服法测量陀螺仪力矩器的标度系数和线性度。象测量信号传感器输出梯度那样, 将陀螺仪固定在转台上, 使陀螺仪工作在伺服状态。如果是二自由度陀螺仪, 被测量的力矩器所在轴则应和转台测量轴相垂直。如图 3-38 所示, 若测量 y 轴力矩器的标度系数和线性度, 则使 y 轴平行于转台的测量轴, 同时使转台测量轴的方向垂直于地球自转角速度 ω_e 。图中以脚标 s 表示信号传感器, 脚标 t 表示力矩器。下面以测定 y_t 的标度系数和线性度为例加以说明。试验时, 给 y_t 通以恒定电流 i_y , 产生控制力矩 M_x , 陀螺仪则有进动角速度 ω_y , 转台绕 y 轴的角速度为:

$$\dot{\theta} = \omega_y \pm \dot{\beta} \quad (\text{附 3-1})$$

式中 $\dot{\beta}$ ——陀螺仪自身漂移角速度, 包括与加速度无关的, 与加速度成比例的和与加速度平方成比例的分量。

第一次测量时, 指令电流在正的方向输给力矩器, 而在第二次测量时, 在负的方向输给力矩器。并且假定在两次测量中经过相同角度范围时 $\dot{\beta}$ 不变, 有

$$\text{测量 1:} \quad \dot{\theta}_{y1} = \omega_y \pm \dot{\beta} \quad (\text{附 3-2})$$

$$\text{测量 2:} \quad -\dot{\theta}_{y2} = -\omega_y \pm \dot{\beta} \quad (\text{附 3-3})$$

(附 3-2) 式减去 (附 3-3) 式

$$\omega_y = \frac{\dot{\theta}_y + \dot{\theta}_{y2}}{2} \quad (\text{附 3-4})$$

则 y 轴力矩器的标度系数为

$$K = -\frac{\omega_y}{i_y} \quad (\text{附 3-5})$$

实际上, 多组测量值计算的标度系数的平均值定为该力矩器的标度系数。

力矩器的线性度则定义为

$$\frac{K_n - K}{K} \times 100\% \quad (\text{附 3-6})$$

式中 K_n ——第 n 组测试时的标度系数;

K —— n 组测试标度系数的平均值。

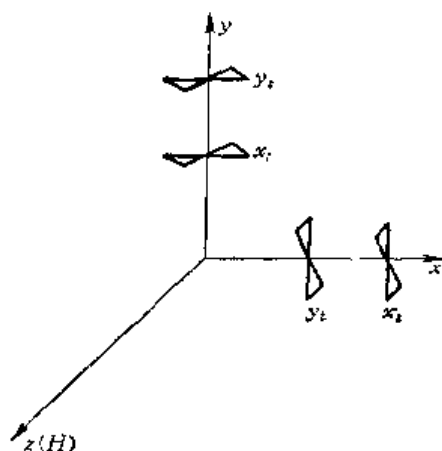


图3-38 二自由度陀螺仪力矩器和信号传感器的配置图

如某力矩器的数据如下:

i	K_n	K	$\frac{K_n - K}{K} \times 100\%$
毫 安	度/小时/毫安	度/小时/毫安	
1	17.184	17.171	+0.08
5	17.169		+0.01
10	17.166		-0.03
20	17.160		-0.06
40	17.172		+0.01
60	17.173		+0.01
80	17.170		-0.01
100	17.171		± 0

表中: $i = 1, 5, 10, 20\text{mA}$ 时, 转台转角范围为 $\pm 10^\circ$;

$i = 40, 60, 80, 100\text{mA}$ 时, 转台转角范围为 $\pm 100^\circ$ 。

附录二 双轴陀螺仪漂移测试转台的十二种安装方式

用双轴转台对二自由度陀螺仪进行漂移测试时, 双轴转台的初始安装方位是有限的, 对于转台外环轴只能在当地水平面内转动, 即只能指东西或南北时, 转台的初始安装方位只有六种。当转台的外环轴可以翘起而有平行地轴等功能时, 则又增加六种安装方式。总加起来, 就是通常所说的十二种安装方式。

下面给出在每种安装方式下的陀螺仪漂移角速度 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 和转台转角 θ_x 、 θ_y 之间的关系式。引入如下的符号:

$OXYZ$ ——转台坐标系, OX 指外环轴, OY 指内环轴;

E ——代表东向;

N ——代表北向;

ζ ——代表当地地垂线方向;

I ——在子午面内和 ω_e 垂直的方向, 与 E 、 ω_e 组成右手坐标系;

$X \rightarrow$ 表示 X 轴平行 E 方向, 其它类推。

当然, 在测试开始时, 被安装在转台上的陀螺仪, 它的内环轴和转台内环轴平行, 陀螺仪的外环轴则和转台的外环轴平行。

转台外环轴在当地水平面内的六种安装方式, 其公式如下表:

	安 放 情 况	$\dot{\alpha} =$	$\dot{\beta} =$
1	$X \rightarrow E$ $Y \rightarrow N$ ($H \rightarrow \zeta$)	$\dot{\theta}_x \cos \theta_y$ $+ \omega_e \cos \varphi \sin \theta_x \sin \theta_y$ $- \omega_e \sin \varphi \cos \theta_x \sin \theta_y$	$\dot{\theta}_y + \omega_e \cos \varphi \cos \theta_x$ $+ \omega_e \sin \varphi \sin \theta_x$
2	$X \rightarrow E$ $Y \rightarrow \zeta$ ($H \rightarrow N$)	$\dot{\theta}_x \cos \theta_y$ $+ \omega_e \sin \varphi \sin \theta_x \sin \theta_y$ $+ \omega_e \cos \varphi \cos \theta_x \sin \theta_y$	$\dot{\theta}_y + \omega_e \sin \varphi \cos \theta_x$ $- \omega_e \cos \varphi \sin \theta_x$
3	$X \rightarrow N$ $Y \rightarrow E$ ($H \rightarrow \zeta$)	$\dot{\theta}_x \cos \theta_y$ $+ \omega_e \sin \varphi \cos \theta_x \sin \theta_y$ $+ \omega_e \cos \varphi \cos \theta_x$	$\dot{\theta}_y - \omega_e \sin \varphi \sin \theta_x$

(续)

安 装 情 况		$\dot{\alpha} =$	$\dot{\beta} =$
4	$X \rightarrow N$ $Y \rightarrow \zeta$ ($H \rightarrow E$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \cos \varphi \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \sin \varphi \sin \theta_X \sin \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y + \omega_e \sin \varphi \cos \theta_X$
5	$X \rightarrow E$ $Y \rightarrow \omega_e$ ($H \rightarrow I$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \sin \theta_X \sin \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y + \omega_e \cos \theta_X$
6	$X \rightarrow E$ $Y \rightarrow I$ ($H \rightarrow \omega_e$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \cos \theta_X \sin \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y - \omega_e \sin \theta_X$

当转台外环轴有翘起的功能时，又增加六种安装方式，其公式如下表：

7	$X \rightarrow \zeta$ $Y \rightarrow N$ ($H \rightarrow E$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \sin \varphi \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \cos \varphi \sin \theta_X \sin \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y + \omega_e \cos \varphi \cos \theta_X$
8	$X \rightarrow \zeta$ $Y \rightarrow E$ ($H \rightarrow N$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \sin \varphi \cos \theta_Y$ $- \omega_e \cos \varphi \cos \theta_X \sin \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y + \omega_e \cos \varphi \sin \theta_X$
9	$X \rightarrow \omega_e$ $Y \rightarrow E$ ($H \rightarrow I$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \cos \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y$
10	$X \rightarrow \omega_e$ $Y \rightarrow I$ ($H \rightarrow E$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \cos \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y$
11	$X \rightarrow I$ $Y \rightarrow E$ ($H \rightarrow \omega_e$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $- \omega_e \cos \theta_X \sin \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y + \omega_e \sin \theta_X$
12	$X \rightarrow I$ $Y \rightarrow \omega_e$ ($H \rightarrow E$)	$\dot{\theta}_X \cos \theta_Y$ $+ \omega_e \sin \theta_X \sin \theta_Y$	$\dot{\theta}_Y + \omega_e \cos \theta_X$

第四章 陀螺仪漂移测试中的数据处理方法

§1 转台伺服法中转台瞬时角速度的测取

由于测试仪器, 电子线路, 实验室条件的不理想, 使得实验数据必然混有噪声, 因此有必要首先对实验曲线或实测数据进行平滑处理, 这方面文献较多, 可参阅有关资料, 这里不再赘述。

一、差商法

陀螺漂移角速度是一种变化相当缓慢的信号, 在测量陀螺漂移角速度的转台伺服法中, 转台的瞬时角速度通常是用在时间间隔 ΔT 内, 转台转过角度 $\Delta\theta$, 用差商方法计算的平均角速度即 $\bar{\theta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta T}$ 来逼近转台的瞬时角速度 $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ 的。

由图 4-1 看出在由 t_K 到 t_{K+1} 时刻的平均角速度是:

$$\bar{\theta}(t) = \frac{\Delta\theta}{\Delta T} = \frac{\theta(t_{K+1}) - \theta(t_K)}{\Delta T} \quad (4-1)$$

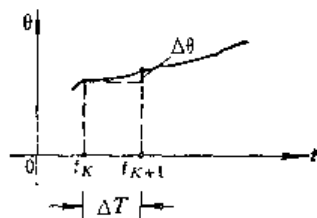


图4-1 差商法原理图

式中 $\Delta T = t_{K+1} - t_K$, $t_K \leq t \leq t_{K+1}$ 。

平均角速度 $\bar{\theta}(t)$ 的求取方法有两种: 一种叫“定时测角法”, 是事先定好了时间间隔 ΔT 的大小, 然后测定转台在 ΔT 内转过的角度 $\Delta\theta$, 从而算得转台在 ΔT 内的平均角速度 $\bar{\theta}$; 另一种叫“定角测时法”, 是先定出转台转角 $\Delta\theta$ 的大小, 然后测定转台转过转角 $\Delta\theta$ 所花去的时间间隔 ΔT , 从而算得转台在 ΔT 内的平均角速度 $\bar{\theta}$ 。实验中究竟选用哪种方法, 应视实验方案, 数据处理需要而定。

从 (4-1) 式知, ΔT 取得越小, $\bar{\theta}$ 就越接近瞬时角速度 $\dot{\theta}$ 。可是, 无论对时间间隔 ΔT , 还是对转台转角 $\Delta\theta$ 的测量总是带有一定的测量误差的。不过当前对时间 ΔT 的测量可以非常精确, 其测量误差可以忽略, 而主要的是测角精度影响较大。

如果用 ε 代表测角误差, 这时给计算转台角速度带来的误差如下式

$$\delta\bar{\theta} = \frac{\varepsilon}{\Delta T} \quad (4-2)$$

式中 $\delta\bar{\theta}$ ——角速度误差 (此地忽略了测时误差的影响)。

由 (4-2) 式看出: 要想减少测角误差 ε 对计算转台角速度 $\bar{\theta}$ 的影响, 也就是使 $\delta\bar{\theta}$ 减小, 除了对测角系统提出更高的精度要求之外, 必须增大 ΔT 的数值。但随时间间隔的增长, 系统的线性度和零位偏移的误差可能也有所增加。实际计算时, 根据采样理论为使采样后的信息相对原来的信息不产生畸变, 采样频率 ω_s 必须满足:

$$\omega_s > 2\omega \quad (4-3)$$

式中 ω 为原来的连续信号中最大的频率分量。

$$\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta T} \quad (4-4)$$

ΔT ——采样周期。

这样，原来的信号可以完满地由采样信号恢复过来，(4-3)式就是香农(Shannon)采样定理，为满足(4-3)式，采样周期 ΔT 又不能取得过大，实际上采样周期 ΔT 大小的选取是综合上述诸因素折衷的结果。

二、动平均法

动平均法计算角速度的基础仍然是差商法，不过用动平均法计算得出的平均角速度只是当作 $\Delta t = \frac{\Delta T}{n}$ 时间间隔内的角速度，在下一个 Δt 内用另一个平均角速度来代替。也就是说在整个 ΔT 内随着每移动一个 Δt 而改变求取平均角速度 $\bar{\theta}$ 时的两端点的采样值。如图 4-2 所示。其数学表达式为：

$$\bar{\theta}(t) = \frac{\theta(t_{K+n}) - \theta(t_K)}{\Delta T} \quad (4-5)$$

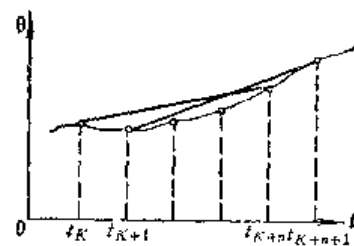


图 4-2 动平均法简图

其运算过程如图 4-3 所示，共分三个阶段：

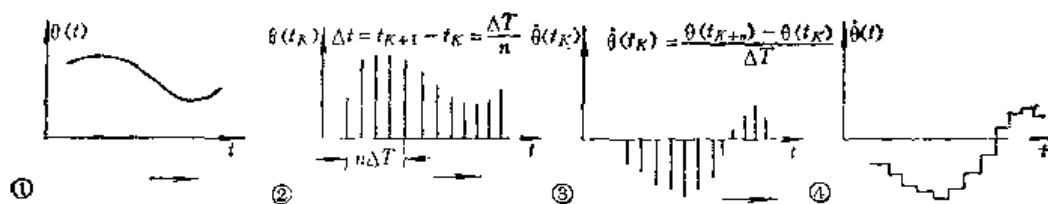


图 4-3 动平均法原理图

在图 4-3 中①至②为数据采集阶段；②至③为动平均运算阶段；而③至④是零阶保持阶段。

在动平均法中采样周期 $\Delta t = \frac{\Delta T}{n}$ ，现在的数值运算③不是在二个相邻的离散值上进行的，而是在相隔 n 个 Δt 即 ΔT 时刻的二个值上进行的。

这时采样频率 $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ ，较原来 $\frac{1}{\Delta T}$ 提高了 n 倍(当采用计算机进行处理时，根据需要还可提高这个采样频率)。由于采样周期短，从③→④这个零阶保持过程也可以认为对实际分析没有影响。

因此，整个处理过程主要由②→③这个阶段的特性所决定，或者说可以把(4-5)式看做是对一个连续函数的作用

$$\bar{\theta}(t) = \frac{\theta(t + \Delta T) - \theta(t)}{\Delta T} \quad (4-6)$$

在实际应用时，宜将式(4-6)所得的速度当作是 $t - \frac{\Delta T}{2}$ 时的速度，即把(4-6)式改写为

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta\left(t + \frac{\Delta T}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{\Delta T}{2}\right)}{\Delta T} \quad (4-7)$$

现在来分析一下这一处理过程所带来的误差。假如输入信号是一个正弦函数

$$\theta(t) = A \sin \omega t \quad (4-8)$$

$$\dot{\theta}(t) = A\omega \cos \omega t \quad (4-9)$$

考虑式(4-7)和(4-9)有

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= A \frac{\sin \omega \left(t + \frac{\Delta T}{2}\right) - \sin \omega \left(t - \frac{\Delta T}{2}\right)}{\Delta T} \\ &= 2A \frac{\sin \omega \frac{\Delta T}{2} \cos \omega t}{\Delta T} = \frac{\sin \omega \frac{\Delta T}{2}}{\omega \frac{\Delta T}{2}} A\omega \cos \omega t \end{aligned} \quad (4-10)$$

(4-10)式与(4-9)式相比可得

$$K = \sin \omega \frac{\Delta T}{2} / \omega \frac{\Delta T}{2} \quad (4-11)$$

上式表明这个处理过程只带来了幅值误差,而没有相位误差。由于幅值衰减这种误差具有固定的规律,因此在不同情况下,总可找到补偿的办法。至于在实际应用时,尚可具体情况决定是否一定要进行补偿。

总之,动平均法是在保证测速精度所要求的时间步距(ΔT)情况下,提高采样速率的。由于采样周期短,基本上保存了原有信息,而从滤波器的概念来说,这一处理过程相当于一个理想的低通滤波器,因此处理的数据基本上就是瞬时角速度曲线(只是滤掉了高次谐波)。

§2 谐波分析法在数据处理中的应用

在陀螺测试中,常常有意识地使陀螺仪自身的各种误差因素对陀螺仪漂移角速度的影响随转台转角的变化(即陀螺仪安装在测试转台上,在重力场内其敏感轴相对初始方位在不断变化)而呈现周期性的变化,这时应用谐波分析的数据处理方法来估算陀螺仪漂移的静态误差系数是很方便的。下面对这一数据处理方法作简要介绍。

一、谐波分析方法

假设转台角速度 $\dot{\theta}$ 可表成如下富氏级数形式:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \varphi(\theta) &= a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_r \cos r\theta + \cdots + a_l \cos l\theta \\ &+ b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \cdots + b_r \sin r\theta + \cdots + b_l \sin l\theta \end{aligned}$$

或

$$\dot{\theta} = \sum_{K=0}^l (a_K \cos K\theta + b_K \sin K\theta) = \sum_{K=0}^l C_K \sin(K\theta + \varphi_K) \quad (4-12)$$

$$C_K = \sqrt{a_K^2 + b_K^2} \quad (4-13)$$

$$\varphi_K = \arctg \frac{a_K}{b_K}$$

式中 $\dot{\theta}$, θ 分别是转台角速度与转角,

a_r , b_r 为待估算的未知常数。

一般的周期函数, 可以通过积分求出级数各项中的系数, 因而确定了级数本身。但在实验中, 自变量 θ 可等间隔取值。这时, 可以采用较简单的无需通过积分步骤求取级数中的各项系数。

在 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$ 之间取 n 个等分

$$\theta = 0, \frac{2\pi}{n}, 2 \frac{2\pi}{n}, \dots, m \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n}。 \quad (4-14)$$

这时测得在各采样点的 $\dot{\theta}$ 值相应的是

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_m, \dots, \dot{\theta}_{n-1}。 \quad (4-15)$$

考虑 (4-14) 和 (4-15) 式, 这时由 (4-12) 式得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_0 &= a_0 + a_1 \cos 0 + a_2 \cos 0 + \dots + a_r \cos 0 + \dots + a_l \cos 0 + b_1 \sin 0 \\ &\quad + b_2 \sin 0 + \dots + b_r \sin 0 + \dots + b_l \sin 0; \\ \dot{\theta}_1 &= a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{n} + a_2 \cos 2 \frac{2\pi}{n} + \dots + a_r \cos r \frac{2\pi}{n} + \dots + a_l \cos l \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + b_1 \sin \frac{2\pi}{n} + b_2 \sin 2 \frac{2\pi}{n} + \dots + b_r \sin r \frac{2\pi}{n} + \dots + b_l \sin l \frac{2\pi}{n}; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\theta}_m &= a_0 + a_1 \cos m \frac{2\pi}{n} + a_2 \cos 2m \frac{2\pi}{n} + \dots + a_r \cos rm \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + \dots + a_l \cos lm \frac{2\pi}{n} + b_1 \sin m \frac{2\pi}{n} + b_2 \sin 2m \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + \dots + b_r \sin rm \frac{2\pi}{n} + \dots + b_l \sin lm \frac{2\pi}{n}; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\theta}_{n-1} &= a_0 + a_1 \cos (n-1) \frac{2\pi}{n} + a_2 \cos 2(n-1) \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + \dots + a_r \cos r(n-1) \frac{2\pi}{n} + \dots + a_l \cos l(n-1) \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + b_1 \sin (n-1) \frac{2\pi}{n} + b_2 \sin 2(n-1) \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + \dots + b_r \sin r(n-1) \frac{2\pi}{n} + \dots + b_l \sin l(n-1) \frac{2\pi}{n}。 \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

$$l \leq \frac{n-1}{2} \quad (4-17)$$

将 (4-16) 式中各等式两端分别相加得

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m &= na_0 + a_1 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m \frac{2\pi}{n} + a_2 \sum_{m=0}^{n-1} \cos 2m \frac{2\pi}{n} + \dots + a_r \sum_{m=0}^{n-1} \cos rm \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + \dots + a_l \sum_{m=0}^{n-1} \cos lm \frac{2\pi}{n} + b_1 \sum_{m=0}^{n-1} \sin m \frac{2\pi}{n} + b_2 \sum_{m=0}^{n-1} \sin 2m \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + \dots + b_r \sum_{m=0}^{n-1} \sin rm \frac{2\pi}{n} + \dots + b_l \sum_{m=0}^{n-1} \sin lm \frac{2\pi}{n}。 \end{aligned} \quad (4-18)$$

因为

$$\begin{aligned}
 2 \cos 0 \sin \frac{\theta}{2} &= \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \\
 2 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} &= \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \\
 2 \cos 2\theta \sin \frac{\theta}{2} &= \sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 2 \cos(n-1)\theta \sin \frac{\theta}{2} &= \sin \frac{2n-1}{2}\theta - \sin \frac{2n-3}{2}\theta
 \end{aligned}$$

将上列各式两端相加则有

$$2 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\theta \cdot \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{2n-1}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{n\theta}{2} \cdot \cos \frac{n-1}{2}\theta,$$

所以

$$\sum_{m=0}^{n-1} \cos m\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \cos \frac{n-1}{2}\theta \quad (4-19)$$

同理可证

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sin m\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \sin \frac{2n-1}{2}\theta$$

因为

$$\theta = r \frac{2\pi}{n}, \quad r = 1, 2, \dots, l \left(l \leq \frac{n-1}{2} \right),$$

而有

$$\sin \frac{n\theta}{2} = \sin \frac{n}{2} \cdot r \frac{2\pi}{n} = \sin r\pi = 0$$

由式 (4-18) 得

$$\sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m = na_0$$

则

$$a_0 = -\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m \quad (4-20)$$

再将 (4-16) 各式乘以 a_r 的系数 $\cos rm \frac{2\pi}{n}$ 并两端分别相加有

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m \cos rm \frac{2\pi}{n} &= a_0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos rm \frac{2\pi}{n} + \dots + a_r \sum_{m=0}^{n-1} \left(\cos rm \frac{2\pi}{n} \right)^2 \\
 &+ \dots + a_l \sum_{m=0}^{n-1} \cos pm \frac{2\pi}{n} \cdot \cos rm \frac{2\pi}{n} + \dots + b_r \sum_{m=0}^{n-1} \sin pm \frac{2\pi}{n} \cdot \cos rm \frac{2\pi}{n} + \dots
 \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{m=0}^{n-1} \cos rm - \frac{2\pi}{n} = \frac{\sin \frac{n}{2} r \frac{2\pi}{n}}{\sin \frac{1}{2} r \frac{2\pi}{n}} \cdot \cos \frac{n-1}{2} \cdot r \frac{2\pi}{n} = \frac{\sin r\pi}{\sin \frac{r\pi}{n}} \cdot \cos \frac{n-1}{n} r\pi = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\cos rm - \frac{2\pi}{n} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left(1 + \cos 2rm - \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(n + \sum_{m=0}^{n-1} \cos 2rm - \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2} & \left(r \neq \frac{n}{2} \right) \\ n & \left(r = \frac{n}{2} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{n-1} \cos pm - \frac{2\pi}{n} \cdot \cos rm - \frac{2\pi}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left[\cos(p-r)m - \frac{2\pi}{n} + \cos(p+r)m - \frac{2\pi}{n} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{n-1} \sin pm - \frac{2\pi}{n} \cdot \cos rm - \frac{2\pi}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left[\sin(p+r)m - \frac{2\pi}{n} + \sin(p-r)m - \frac{2\pi}{n} \right] = 0 \end{aligned}$$

则得

$$\sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m \cos rm - \frac{2\pi}{n} = \begin{cases} \frac{n}{2} a_r & \left(r \neq \frac{n}{2} \right) \\ n a_r & \left(r = \frac{n}{2} \right) \end{cases}$$

从而求得

$$a_r = \begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m \cos rm - \frac{2\pi}{n} & \left(r \neq \frac{n}{2} \right) \\ \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m \cos m\pi & \left(r = \frac{n}{2} \right) \end{cases} \quad (4-21)$$

仿照前面方法, 将 (4-16) 各式乘以 b_r 的系数 $\sin rm - \frac{2\pi}{n}$ 然后把各式两相加可得

$$b_r = \begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \dot{\theta}_m \sin rm - \frac{2\pi}{n} & \left(r \neq \frac{n}{2} \right) \\ 0 & \left(r = \frac{n}{2} \right) \end{cases} \quad (4-22)$$

这时 (4-12) 式中的各项系数就完全确定了, 但通过实验数据做具体运算时, 还可以进一步运用技巧, 以简化运算。这方面文献较多, 读者可自行查阅。计算时可仿制下表。

N	\hat{a}_i	r = 1					r = r				
		θ_i	$\sin\theta_i$	$\cos\theta_i$	$\hat{a}_i\sin\theta_i$	$\hat{a}_i\cos\theta_i$	$r\theta_i$	$\sin r\theta_i$	$\cos r\theta_i$	$\hat{a}_i\sin r\theta_i$	$\hat{a}_i\cos r\theta_i$
0											
1											
\vdots											
m											
总 和											
$a_0 =$					$b_1 =$	$a_1 =$				$b_r =$	$a_r =$

如进行 L 次循环, 可得各系数的均方根值

$$S_{a_i} = \left[\sum_j \frac{(\bar{a}_i - a_j)^2}{L} \right]^{1/2}$$

$$S_{b_i} = \left[\sum_j \frac{(\bar{b}_i - b_j)^2}{L} \right]^{1/2}$$

式中 L —— 循环次数 (指测量的循环数)。

二、FFT 算法在计算自相关函数中的应用

FFT 算法即快速 Fourier 变换算法。大家知道, 数值谐波分析方法广泛地应用于科学技术的许多方面 (光谱和声谱分析、全息技术、数字信号处理、图形信息处理、微分方程数值解等等)。但由于计算量过于庞大, 因而未能发挥出应有的作用。自 1965 年以来, Cooley 和 Tukey 提出了快速 Fourier 变换 (以后简记为 FFT) 算法, 使计算量大为减少。即以 $N \log_2 N$ 次运算 (这里所说的“运算”是指一个复数乘法和一个复数加法) 代替 N^2 次运算 (N 是序列样本个数), 比传统算法在计算速度上有了数量级的提高。这样基本上克服了所谓“时间域”与“频率域”转换中的计算障碍。FFT 算法除了有快速的特点外, 还有, 精确度比传统方法高, 计算过程稳定, 算法简单等优点。目前它在数值谐波分析中已占主导地位。下面就来介绍 FFT 算法。

1. FFT 算法

FFT 算法是计算 N 个变量的复序列 $\{x_j\}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) 的有限离散 Fourier 变换。

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \exp(2\pi i j k / N) \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4-23)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, A_k 是复 Fourier 系数。

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp(-2\pi i j k / N) \quad (4-24)$$

(4-23) 和 (4-24) 式是等价的。对于从 x_j 计算 A_k 的算法或程序也可用来从 A_k 计算 x_j 。为了叙述和推导的方便, 将式 (4-23) 记为

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} A_k W_N^{jk} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4-25)$$

其中

$$W_N = \exp(2\pi i/N).$$

设 $N = r \times s$, (4-25) 式中的下标 j 和 k 可以分别表示为

$$\begin{aligned} j &= j_1 r + j_0 = (j_1, j_0), \quad j_0 = 0, 1, \dots, r-1; \quad j_1 = 0, 1, \dots, s-1; \\ k &= k_1 s + k_0 = (k_1, k_0), \quad k_0 = 0, 1, \dots, s-1; \quad k_1 = 0, 1, \dots, r-1. \end{aligned} \quad (4-26)$$

因为 $W_N^N = 1$ 则有

$$W^{jk} = W_N^{(j_1 r + j_0)(k_1 s + k_0)} = W_N^{j_1 k_1 r s} \cdot W_N^{j_1 k_0 r} \cdot W_N^{j_0 k_1 s} \cdot W_N^{j_0 k_0} = W_r^{j_0 k_1} \cdot W_s^{j_1 k_0} \cdot W_N^{j_0 k_0} \quad (4-27)$$

将式 (4-26) 和 (4-27) 代入 (4-25) 并记 $X(j_1, j_0) = x_j$, $A(k_1, k_0) = A_k$

则

$$X(j_1, j_0) = \sum_{k=0}^{s-1} \left\{ \sum_{k_1=0}^{r-1} A(k_1, k_0) W_r^{j_0 k_1} \right\} W_N^{j_1 k_0} \cdot W_s^{j_1 k_0} \quad (4-28)$$

上式的括号内部和 (对 k_1 求和) 只依赖于 j_0 和 k_0 。

定义一新序列

$$A_1(j_0, k_0) = W_N^{j_0 k_0} \sum_{k_1=0}^{r-1} A(k_1, k_0) W_r^{j_0 k_1} \quad (4-29)$$

这样 (4-28) 式可写成

$$X(j_1, j_0) = \sum_{k_0=0}^{s-1} A_1(j_0, k_0) W_s^{j_1 k_0} \quad (4-30)$$

在序列 A_1 中有 N 个元素, 每一元素要 r 次运算, 总共需要 Nr 次运算, 得到序列 A_1 。同样从序列 A_1 计算 X , 总共需要 NS 次运算。因而, 从序列 A 计算序列 X 所需要的总运算次数为 $T = N(r + s)$ 。

如果 $N = r_1 \times r_2 \times \dots \times r_m$, 可将式 (4-25) 中的下标 j 和 k 分解成 m 维, 重复 (4-26) 式到 (4-30) 式的步骤, 可以看出所需要的总的运算次数是

$$T = N(r_1 + r_2 + \dots + r_m)$$

若使 T 达到最小值, 应有 $r_1 = r_2 = \dots = r_m = r$ 即 $N = r^m$, $m = \log_r N$, 从而这时所需要的总运算次数 $T = Nmr = Nr = N \log_2 N \cdot r / \log_2 r$ 。列表如下:

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r / \log_2 r$	2.00	1.88	2.00	2.15	2.31	2.49	2.67	2.82	3.01

从上表可知, 取 $r = 3$, 运算的总次数 T 达到最小。然而, 当 W_N 的幂是 ± 1 时, 能够避免乘法运算。所以, 为了减少计算时间, 再考虑到编制计算机程序的方便, 还是取 $r = 2$ 较佳。此时 $T = 2N \log_2 N$ 。当 N 充分大时, $2N \log_2 N$ 与 N^2 相比, 这是一个数量级小得多的数。读者从这里可以看到 FFT 算法的运算次数是大为减少了。

对于 $r = 2$, $N = 2^m$ 的算法可按以下形式推导。令

$$\begin{aligned} j &= j_{m-1} 2^{m-1} + \dots + j_1 2^1 + j_0 = (j_{m-1}, \dots, j_1, j_0) \\ k &= k_{m-1} 2^{m-1} + \dots + k_1 2^1 + k_0 = (k_{m-1}, \dots, k_1, k_0) \end{aligned} \quad (4-31)$$

其中, j_v 和 k_v 等于 0 或 1, $v = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 。

这时 (4-25) 式变为

$$X(j_{m-1}, \dots, j_1, j_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^1 A(k_{m-1}, \dots, k_1, k_0) W_N^{k \cdot j} \quad (4-32)$$

$$W_N^{k \cdot j} = W_N^{j(k_{m-1}2^{m-1} + \dots + k_12^1 + k_0)} = W_N^{j_0 k_{m-1}2^{m-1}} \cdot W_N^{j(k_{m-2}2^{m-2} + \dots + k_12^1 + k_0)} \quad (4-33)$$

上式利用了关系式 $W_N^{2^m} = W_N^N = 1$ 。将 (4-33) 式代入 (4-32) 式, 则得

$$X(j_{m-1}, \dots, j_1, j_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \cdots \sum_{k_{m-2}=0}^1 A_1(j_0, k_{m-2}, \dots, k_0) \cdot W_N^{j_0(k_{m-2}2^{m-2} + \dots + k_12^1 + k_0)} \quad (4-34)$$

其中

$$A_1(j_0, k_{m-2}, \dots, k_0) = \sum_{k_{m-1}=0}^1 A(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0) \cdot W_N^{j_0 k_{m-1}2^{m-1}} \quad (4-35)$$

再分解

$$W_N^{j_0(k_{m-2}2^{m-2} + \dots + k_12^1 + k_0)} = W_N^{(j_12^1 + j_0)k_{m-2}2^{m-2}} \cdot W_N^{j_0(k_{m-3}2^{m-3} + \dots + k_12^1 + k_0)}$$

则

$$X(j_{m-1}, j_{m-2}, \dots, j_1, j_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \cdots \sum_{k_{m-3}=0}^1 A_2(j_0, j_1, k_{m-3}, \dots, k_1, k_0) \cdot W_N^{j_0(k_{m-3}2^{m-3} + \dots + k_12^1 + k_0)}$$

其中

$$A_2(j_0, j_1, k_{m-3}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{k_{m-2}=0}^1 A_1(j_0, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) \cdot W_N^{(j_12^1 + j_0)k_{m-2}2^{m-2}}$$

如此继续下去, 可得

$$A_l(j_0, j_1, \dots, j_{l-1}, k_{m-l-1}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{k_{m-l}=0}^1 A_{l-1}(j_0, j_1, \dots, j_{l-2}, k_{m-l}, \dots, k_1, k_0) \cdot W_N^{(j_{l-1}2^{l-1} + \dots + j_12^1 + j_0)k_{m-l}2^{m-l}} \quad (4-36)$$

$$l = 1, 2, \dots, m。$$

最后求得

$$X(j_{m-1}, j_{m-2}, \dots, j_1, j_0) = A_m(j_0, j_1, \dots, j_{m-1}) \quad (4-37)$$

这样, 可以看到, 如果序列 A 的初始排列顺序是自然次序, 那么最后得到 (4-25) 式的结果是逆二进制次序。即若 A 的初始下标

$$k = k_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + k_1 \cdot 2 + k_0$$

那么最后得到的 Fourier 序列的下标是

$$k_R = k_0 2^{m-1} + k_1 2^{m-2} + \dots + k_{m-2} \cdot 2 + k_{m-1}$$

反之, 若初始序列是按逆二进制序列, 那么最后得到的结果序列是按自然顺序排列的。

现在以 $N = 2^3$ 的例子来说明 (4-25) 式 FFT 算法的基本思想。这时有:

$$j = j_2 \cdot 2^2 + j_1 \cdot 2 + j_0 = (j_2, j_1, j_0), \quad j_{0,1,2} = 0, 1$$

$$k = k_2 \cdot 2^2 + k_1 \cdot 2 + k_0 = (k_2, k_1, k_0), \quad k_{0,1,2} = 0, 1$$

$$W_N^{j \cdot k} = W_N^{(j_2 \cdot 2^2 + j_1 \cdot 2 + j_0)(k_2 \cdot 2^2 + k_1 \cdot 2 + k_0)} = W_N^{j_0 k_2 \cdot 2^2} \cdot W_N^{(j_1 \cdot 2 + j_0)k_1 \cdot 2} \cdot W_N^{(j_2 \cdot 2^2 + j_1 \cdot 2 + j_0)k_0}$$

于是

$$\begin{aligned}
 X(j_2, j_1, j_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 A(k_2, k_1, k_0) W_N^{k_2 j_0} \\
 &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 A(k_2, k_1, k_0) \cdot W_N^{j_0 k_2 \cdot 2^2} \cdot W_N^{(j_1 \cdot 2 + j_0) k_1 \cdot 2} \cdot W_N^{(j_2 \cdot 2^2 + j_1 \cdot 2 + j_0) k_0} \\
 &= \sum_{k_0} \left\{ \sum_{k_1} \left\{ \sum_{k_2} A(k_2, k_1, k_0) W_N^{(j_0, j_0) k_2} \right\} W_N^{(j_1, j_0) k_1} \right\} W_N^{(j_2, j_1, j_0) k_0}
 \end{aligned}$$

从而得出递推公式

$$\text{令} \quad A_0(k_2, k_1, k_0) = A(k_2, k_1, k_0)$$

$$\begin{aligned}
 A_1(j_0, k_1, k_0) &= \sum_{k_2=0}^1 A_0(k_2, k_1, k_0) \cdot W_N^{(j_0, 0, 0) k_2} \\
 &= A_0(0, k_1, k_0) W_N^{(0, 0, 0)} + A_0(1, k_1, k_0) W_N^{(j_0, 0, 0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2(j_0, j_1, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 A_1(j_0, k_1, k_0) W_N^{(j_1, j_0, 0) k_1} \\
 &= A_1(j_0, 0, k_0) W_N^{(0, j_0, 0)} + A_1(j_0, 1, k_0) W_N^{(j_1, j_0, 0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3(j_0, j_1, j_2) &= \sum_{k_0=0}^1 A_2(j_0, j_1, k_0) W_N^{(j_2, j_1, j_0) k_0} \\
 &= A_2(j_0, j_1, 0) W_N^{(0, 0, 0)} + A_2(j_0, j_1, 1) W_N^{(j_2, j_1, j_0)} \\
 &= X(j_2, j_1, j_0), \quad j_2, j_1, j_0 = 0, 1.
 \end{aligned}$$

在上而的运算中 X 和 A 都是复数序列。

2. 实数序列的FFT算法

前面介绍的FFT算法是对复数而言的，然而实际上所用的样本序列 $\{x(j)\}$ 一般都是实数。当然，实数也可看作虚部为0的复数，可直接应用前面的算法进行计算。因为大量的零参加了运算，无疑在时间和存贮单元方面都造成浪费。下面来介绍实数情况的算法。

1) 正变换的计算方法。

a) 同时对两个实数序列作离散Fourier变换。

假设 $\{x_1(j)\}$ 和 $\{x_2(j)\}$ 是各有 $N=2^m$ 个点的实数序列，并设

$$\{x_1(j)\} \longleftrightarrow \{A_1(k)\} \quad (\text{称为富立叶变换对}),$$

$$\{x_2(j)\} \longleftrightarrow \{A_2(k)\}.$$

则计算 $\{A_1(k)\}$ 和 $\{A_2(k)\}$ 的步骤如下：

i) 用这两个实数序列构成一个复数序列

$$x(j) = x_1(j) + i x_2(j) \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4-38)$$

ii) 对复数序列 $\{x(j)\}$ 使用FFT程序计算它的DFT(有限离散富立叶变换)，并记为 $\{A(k)\}$ 。因为DFT具有线性性质，因此有

$$A(k) = A_1(k) + i A_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-39)$$

用 $N-k$ 代替 k ，在(4-39)式两边取共轭，并利用关系式

$$A(k) = A^*(N-k) \quad ("*" \text{ 号表示共轭复数})$$

得到

$$A^*(N-k) = A_1(k) - iA_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 \quad (4-40)$$

iii) 解式 (4-39) 和 (4-40) 可得 $A_1(k)$ 和 $A_2(k)$

$$\left. \begin{aligned} A_1(k) &= \frac{1}{2} [A(k) + A^*(N-k)] \\ A_2(k) &= \frac{1}{2i} [A(k) - A^*(N-k)] \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, N/2 \quad (4-41)$$

上述算法表明, 用一个复数序列的 FFT 算法程序, 可同时算出两个实数序列的 DFT 。

b) 一个实数序列的 DFT 。

设 $\{x(j)\}$ 是具有 $N=2^m$ 个点的实数序列, 并设

$$\{x(j)\} \Longleftrightarrow \{A(k)\}$$

如果把 $\{x(j)\}$ 分成两个子序列,

$$\left. \begin{aligned} x_1(j) &= x(2j) && \text{(偶数下标的序列)} \\ x_2(j) &= x(2j+1) && \text{(奇数下标的序列)} \end{aligned} \right\} \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (4-42)$$

并记

$$\{x_1(j)\} \Longleftrightarrow \{A_1(k)\}, \quad \{x_2(j)\} \Longleftrightarrow \{A_2(k)\}$$

而

$$\begin{aligned} A_1(k) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(j) W_2^{jk} \\ A_2(k) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(j) W_2^{jk} \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (4-43)$$

式中 $W_2 = \exp(-2\pi i / (N/2)) = W^2$, $i = \sqrt{-1}$ 。

这时有

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x(j) W^{jk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2j) W^{2jk} + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2j+1) W^{(2j+1)k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(j) W_2^{jk} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(j) W_2^{jk} W^k \end{aligned}$$

即可得到

$$A(k) = -\frac{1}{2} [A_1(k) + W^k A_2(k)] \quad (4-44)$$

上式对 $\{x(j)\}$ 是实数或复数都成立。对实数而言, 可利用 a 的算法同时算出 $\{A_1(k)\}$ 和 $\{A_2(k)\}$ 。根据

$$A(k) = A^*(N-k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2,$$

式 (4-44) 只需计算前 $\frac{N}{2} + 1$ 个点, 将这个关系应用到 $\{A_1(k)\}$ 和 $\{A_2(k)\}$, 在 (4-44) 中以 $\frac{N}{2} - k$ 代替 k , 等式两端取共轭, 并考虑 $W^{N/2} = -1$, 则有

$$A^*\left(\frac{N}{2} - k\right) = \frac{1}{2} [A_1(k) - W^k A_2(k)] \quad (4-45)$$

综上所述, 对具有 N 个点的实数序列 $\{x(j)\}$, 其 $DFT\{A(k)\}$ 的计算步骤归纳如下:

i) 按下标的奇偶把 $\{x(j)\}$ 分为两个序列

$$\begin{cases} x_1(j) = x(2j) \\ x_2(j) = x(2j+1) \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

ii) 同时算出 $\{x_1(j)\}$ 和 $\{x_2(j)\}$ 的 $DFT\{A_1(k)\}$ 和 $\{A_2(k)\}$, 其中有 (1) 构成一个复数序列

$$Z(j) = x_1(j) + ix_2(j) \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-46)$$

(2) 计算 $\{Z(j)\}$ 的 $DFT\{Z(k)\}$, $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$\begin{aligned} (3) \quad A_1(k) &= \frac{1}{2} \left[Z(k) + Z^*\left(\frac{N}{2} - k\right) \right] \\ A_2(k) &= \frac{1}{2i} \left[Z(k) - Z^*\left(\frac{N}{2} - k\right) \right] \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

iii) 应用 (4-44) 和 (4-45) 式计算 $A(k)$, 即

$$\begin{cases} A(k) = -\frac{1}{2} [A_1(k) + W^k A_2(k)] \\ A^*\left(\frac{N}{2} - k\right) = \frac{1}{2} [A_1(k) - W^k A_2(k)] \end{cases}$$

因为 $\{x(j)\}$ 是实数序列, 由

$$A(k) = A^*(N-k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2},$$

因此在编制计算程序时, 对于 $\frac{N}{2} < k < N$ 的 $A(k)$ 值, 不必计算和存贮。

2) 逆变换的计算方法。

当实数序列的 $DFT\{A(k)\}$ 给定时, 考虑如何计算其逆 DFT , 得到实数序列 $\{x(j)\}$ 。

由定义

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} A(k) W^{-jk} \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-47)$$

现在考虑一个比较经济的办法。

构造一复数序列

$$Z(j) = x(2j) + ix(2j+1) \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-48)$$

由上式有

$$\begin{aligned} Z(j) &= \sum_{k=0}^{N-1} A(k) W^{-2jk} + i \sum_{k=0}^{N-1} A(k) W^{-(2j+1)k} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} A(k) W^{-2jk} + \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{N-1} A(k) W^{-2jk} \right) \\ &\quad + i \left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} A(k) W^{-(2j+1)k} + \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{N-1} A(k) W^{-(2j+1)k} \right) \end{aligned} \quad (4-49)$$

令 $k' = k - \frac{N}{2}$, 考虑 $A(k) = A^*(N-k)$ 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{N-1} A(k) W^{-2jk} &= \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} A\left(k' + \frac{N}{2}\right) W^{-2j\left(k' + \frac{N}{2}\right)} \\ &= \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} A^*\left[N - \left(k' + \frac{N}{2}\right)\right] W^{-2j\left(k' + \frac{N}{2}\right)} \\ &= \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} A^*\left(\frac{N}{2} - k'\right) W^{-2jk'} \end{aligned} \quad (4-50)$$

类似以上推导, 并注意 $W^{N/2} = -1$ 可得

$$\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{N-1} A(k) W^{-(2j+1)k} = - \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} A^*\left(\frac{N}{2} - k'\right) W^{-2jk'} W^{-k'} \quad (4-51)$$

将 (4-50) 和 (4-51) 式代入 (4-49) 式得

$$\begin{aligned} Z(j) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\left(A(k) + A^*\left(\frac{N}{2} - k\right) \right) W^{-jk} + i \left(A(k) - A^*\left(\frac{N}{2} - k\right) \right) W^{-k} W^{-jk} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} Z(k) W^{-jk} \end{aligned} \quad (4-52)$$

$$\text{其中 } Z(k) = \left[A(k) + A^* \left(\frac{N}{2} - k \right) \right] + i \left[A(k) - A^* \left(\frac{N}{2} - k \right) \right] W^{-k} \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (4-53)$$

由定义 $\{Z(j)\} \iff \{Z(k)\}$, $j, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ 。

从 (4-52) 式看出: 当 N 个数据点的序列 $\{A(k)\}$ 给定时, 只需计算 $N/2$ 个数据点的逆 DFT, 不必计算 N 个数据点的逆 DFT。

综合以上, 归纳计算 $\{x(j)\}$ 的步骤如下:

- 按 (4-53) 式由 $\{A(k)\}$ 计算 $\{Z(k)\}$;
- 计算 $\{Z(k)\}$ 的逆 DFT, 得 $\{Z(j)\}$ $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$;
- $x(2j) = \operatorname{Re}(Z(j))$ (即 $Z(j)$ 的实部),
 $x(2j+1) = \operatorname{Im}(Z(j))$ (即 $Z(j)$ 的虚部), $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ 。

3. FFT 算法在计算自相关函数中的应用

1) 循环序列相关

循环序列相关的概念是应用 FFT 计算相关函数的基础。

设有实数序列 $x(j)$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) 且有

$$x(j) = x(\pm N + j) = x(\pm 2N + j) = \dots \quad (4-54)$$

其循环序列自相关函数定义为

$$r^c(p) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j+p)x(j) \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-55)$$

〔定理〕 若 $\{x(j)\} \iff \{A(k)\}$ 是 DFT 对, 则 $r^c(p)$ 等于 $|A(k)|^2$ 的逆 DFT, 即

$$r^c(p) = \sum_{k=0}^{N-1} A(k)A^*(k)W^{-pk}, \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-56)$$

式中 $W = \exp(-2\pi i/N)$, $i = \sqrt{-1}$ 。

〔证明〕 由定义

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} A(k)A^*(k)W^{-pk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)W^{jk} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)W^{-lk} \right) W^{-pk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(j)x(l) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-k(p+l-j)} \right) \end{aligned} \quad (4-57)$$

$$\text{式 } \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-k(p+l-j)} = \frac{1}{N} \frac{1 - W^{-N(p+l-j)}}{1 - W^{-(p+l-j)}} = \begin{cases} 1 & \text{当 } p+l-j = rN \text{ (} r \text{ 为整数)} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

因为 l, p, j 的取值范围都是 $0 \sim N-1$, 因此上式中 r 的取值只能是 0 和 1。与此相对应, j 的值只能是 $l+p$ 和 $l+p-N$ 。也就是 (4-57) 式对 j 求和时仅需对上述两个 j 值计算 (与其它 j 值相对应的是 0)。将此结果代入 (4-57) 式得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} A(k)A^*(k)W^{-pk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1-p} x(l+p)x(l) + \frac{1}{N} \sum_{l=N-p}^{N-1} x(l+p-N)x(l) \quad (4-58) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l+p)x(l) \quad p=0, 1, \dots, N-1, \quad (4-59)$$

最后的一个等号利用了 $x(l)$ 的循环性式 (4-54)。显然式 (4-59) 的右边即为式 (4-55) 定义的 $r^c(p)$ 。证毕。

$$\text{易证} \quad r^c(p) = r^c(N-p) \quad p=0, 1, \dots, N-1 \quad (4-60)$$

2) 用循环序列自相关函数计算自相关函数。

如果 $\{x(j)\}$ 已减去平均值 \bar{x} (或 $\bar{x}=0$)，则普通自相关函数为：

$$r(p) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1-p} x(j+p)x(j) \quad p=0, 1, \dots, N-1 \quad (4-61)$$

这就是 (4-58) 右边第一项。令 $l = j + (N-p)$ ，可以看出 (4-58) 式右端的第二项就是 $r(N-p)$ ，即

$$r(N-p) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1-(N-p)} x(j+N-p)x(j) \quad p=0, 1, \dots, N-1 \quad (4-62)$$

综合 (4-61) 和 (4-62) 式

$$r^c(p) = r(p) + r(N-p) \quad p=0, 1, \dots, N-1 \quad (4-63)$$

其典型图形示于图 4-4。由图看出，普通自相关函数 $r(p)$ 只是循环序列自相关函数 $r^c(p)$ 的一部分。实际计算中，当最大落后值 $p < \frac{N}{5}$ 时，亦可把 $r^c(p)$ 当作 $r(p)$ 的近似来使用。如果用 (4-61) 式来计算 $r(p)$ ，可在序列 $\{x(j)\}$ 的末尾补 0，使 (4-58) 或 (4-63) 式右端两项分开。当补加 N 个 0 之后，这两项就完全分离开了。如图 4-5 所示。

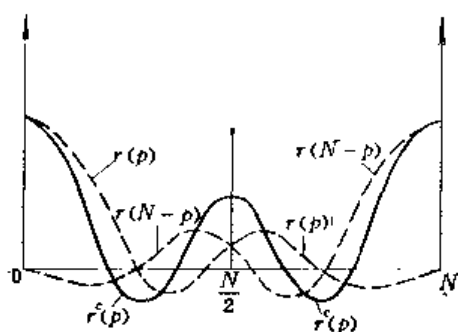


图 4-4 $r^c(p)$ 与 $r(p)$ 的关系图

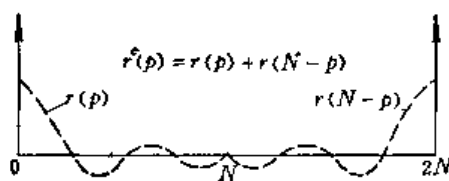


图 4-5 $r(p)$ 与 N 的关系图

综上，用 FFT 计算自相关函数 $r(p)$ 的步骤如下：

a) 假设样本序列 $\{x(j)\}$ 具有 $N=2^m$ (m 是大于 1 的正整数) 个点。并设 $x(j)$ 已减去平均值 \bar{x} 。这时在 $\{x(j)\}$ 的末尾加补 N 个 0：

$$x(0), x(1), \dots, x(N-1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N \text{ 个 } 0}$$

计算其 DFT, 结果为 $\{A(k)\}$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$;

b) 计算 $|A(k)|^2$ 的逆 DFT, 得 $\{r^c(p)\}$, $p = 0, 1, \dots, 2N-1$;

c) 取 $r^c(p)$ 的前 N 个点, 得到 $r(p)$, 即

$$r(p) = r^c(p), \quad p = 0, 1, \dots, N-1$$

而互相关函数的计算方法与自相关函数的计算方法大体相同, 这里就不再赘述了。

§ 3 回归分析方法简介

一、回 归 分 析

在科研与生产实践中, 经常会遇到一些同处于某一系统中的变量, 在这个系统中, 这些变量是相互联系、相互制约的, 也就是说它们之间客观上存在着一定的关系。为了深入了解事物的本质, 就需要找出描述这些变量之间依存关系的数学表达式, 即数学模型。然而, 在许多实际问题中, 往往这些变量之间的关系是比较复杂的, 使我们很难得到精确的数学表达式。同时由于生产或试验过程中不可避免地存在着误差的影响, 而使它们之间的关系具有某种不确定性。因此需要用统计的方法, 在大量的试验和观察中, 寻找隐藏在上述随机性当中的统计规律, 这类统计规律称为回归关系。有关回归关系的计算方法和理论通称为回归分析。它是数理统计的一个重要分支, 它在一般数据处理、产品质量控制、建立自动控制数学模型、曲线拟合、以及气象、水文、地震等预报中都有着重要的应用。

二、多元回归的数学模型

假定第 j 次被测量 y_j 和 n 个参数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 之间呈线性关系为

$$y_j = a_0 + x_{j1}a_1 + x_{j2}a_2 + \dots + x_{ji}a_i + \dots + x_{jn}a_n + e_j = a_0 + \sum_{i=1}^n x_{ji}a_i + e_j$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad N > n \quad (4-64)$$

式中 x_{ji} 是可测的已知变量, a_i 为 n 个待估计的未知参数, e_j 是 N 个相互独立服从同一正态分布 $N(0, \sigma)$ 的随机变量。

由于在实验中往往不能直接测定各个 a_i , 所以只能通过相应于诸 x_{ji} 时的观测数据 y_j 来对参数 a_i 作出估计。

记

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (4-65)$$

并有 $E\{e\} = 0$, 则有观测方程

$$Y = XA + e \quad (4-66)$$

这就是多元线性回归一般性数学模型 (4-64) 的矩阵表达形式。

三、参数 a_i 的最小二乘估计

运用最小二乘原理求取参数 a_i 的估值 \hat{a}_i 时, 有回归方程

$$\hat{y}_j = \hat{a}_0 + x_{j1}\hat{a}_1 + x_{j2}\hat{a}_2 + \cdots + x_{jn}\hat{a}_n$$

$$i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, N, \quad N > n.$$

写成矩阵形式为

$$\hat{Y} = X\hat{A} \quad (4-67)$$

应使全部观测数据 y_j 与回归值 \hat{y}_j 的偏差 v_j 平方和 Q 达到最小, 即使

$$Q = V^T V = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) = (Y - X\hat{A})^T (Y - X\hat{A}) = \text{最小} \quad (4-68)$$

式中

$V^T = (v_1, v_2, \cdots, v_N)$, V^T 是 V 的转置。

残差 $v_j = y_j - \hat{y}_j$, $\hat{A}^T = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n)$, \hat{A}^T 是 \hat{A} 的转置,

$\hat{Y}^T = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_N)$, \hat{Y}^T 是 \hat{Y} 的转置。

因为 Q 是 $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_n$ 的非负二次函数, 所以 Q 的最小值存在。

这时

$$Q = Y^T Y - \hat{A}^T X^T Y - Y^T X \hat{A} + \hat{A}^T X^T X \hat{A} \quad (4-69)$$

由于上式右端各项都是一阶矩阵, 因此有

$$Y^T X \hat{A} = (Y^T X \hat{A})^T = \hat{A}^T X^T Y \quad (4-70)$$

则

$$Q = Y^T Y - 2\hat{A}^T X^T Y + \hat{A}^T X^T X \hat{A}$$

根据微分学中的极值原理, \hat{A} 应是如下方程的解

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{A}} = -2X^T Y + 2X^T X \hat{A} = 0 \quad (4-71)$$

此式称正规方程。

所以

$$X^T X \hat{A} = X^T Y \quad (4-72)$$

令

$$C = X^T X \quad (4-73)$$

$$C^T = (X^T X)^T = X^T X = C \quad (4-74)$$

如矩阵 C 满秩 (其行列式 $|C| \neq 0$), 则 \hat{A} 的解存在, 且被唯一确定。由式 (4-72) 得到

$$C\hat{A} = X^T Y$$

$$\hat{A} = C^{-1}X^T Y = (X^T X)^{-1}X^T Y \quad (4-75)$$

(4-75) 式即为回归方程 (4-67) 式的回归系数阵。

四、线性参数最小二乘估计的性质

1. 最小二乘估计的无偏性

大家知道

$$E(\hat{A}) = E[(X^T X)^{-1}X^T Y] = (X^T X)^{-1}X^T E(Y)$$

$$= (X^T X)^{-1}X^T E(XA + e)$$

$$\begin{aligned}
&= (X^T X)^{-1} X^T [X\Lambda + E(e)] \\
&= (X^T X)^{-1} X^T X\Lambda \\
&= \Lambda
\end{aligned}$$

可见 \hat{A} 是 A 的无偏估计量。

2. 最小二乘估计的协方差阵

根据协方差的意义, 我们来讨论 \hat{a}_v 的方差和诸 \hat{a}_v 与 \hat{a}_μ ($v \neq \mu$, $v, \mu = 0, 1, 2, \dots, n$) 的相关矩。这时有

$$\begin{aligned}
E[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)^T] &= E \left[\begin{pmatrix} \hat{a}_0 - a_0 \\ \hat{a}_1 - a_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n - a_n \end{pmatrix} (\hat{a}_0 - a_0 \quad \hat{a}_1 - a_1 \cdots \hat{a}_n - a_n) \right] \\
&= \begin{pmatrix} D(\hat{a}_0) & \text{cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_1) & \cdots & \text{cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_n) \\ \text{cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_0) & D(\hat{a}_1) & \cdots & \text{cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_n) \\ \text{cov}(\hat{a}_2, \hat{a}_0) & \text{cov}(\hat{a}_2, \hat{a}_1) & \cdots & \text{cov}(\hat{a}_2, \hat{a}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(\hat{a}_n, \hat{a}_0) & \text{cov}(\hat{a}_n, \hat{a}_1) & & D(\hat{a}_n) \end{pmatrix} \quad (4-76)
\end{aligned}$$

这说明用最小二乘原理求出的诸回归系数 $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$ 相互之间存在相关性。

如记 $\Delta = Y - E(Y)$ 于是有

$$\begin{aligned}
&E[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)^T] \\
&= E \{ [(X^T X)^{-1} X^T Y - E(X^T X)^{-1} X^T Y] [(X^T X)^{-1} X^T Y - E(X^T X)^{-1} X^T Y]^T \} \\
&= E \{ [(X^T X)^{-1} X^T \Delta] [(X^T X)^{-1} X^T \Delta]^T \} \\
&= E \{ (X^T X)^{-1} X^T \Delta \Delta^T X [(X^T X)^{-1}]^T \} \\
&= (X^T X)^{-1} X^T E(\Delta \Delta^T) X (X^T X)^{-1} \quad (4-77)
\end{aligned}$$

因为

$$\Delta = Y - E(Y) = \begin{pmatrix} y_1 - E(y_1) \\ y_2 - E(y_2) \\ \vdots \\ y_n - E(y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

如果观测误差 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ 是 N 个互相独立且服从同一正态分布 $N(0, \sigma)$ 的随机变量, 则

$$E(\Delta_v \Delta_\mu) = \begin{cases} 0 & \text{当 } v \neq \mu \\ \sigma^2 & \text{当 } v = \mu \end{cases}$$

于是得到

$$E(\Delta \Delta^T) = E \begin{pmatrix} \Delta_1^2 & \Delta_1 \Delta_2 & \cdots & \Delta_1 \Delta_N \\ \Delta_2 \Delta_1 & \Delta_2^2 & \cdots & \Delta_2 \Delta_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_N \Delta_1 & \Delta_N \Delta_2 & \cdots & \Delta_N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ & \sigma^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I$$

上式中 I 是 N 阶单位矩阵, 这时即可得到

$$\begin{aligned} E[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)^T] &= \sigma^2(X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 C^{-1} = \sigma^2 P \\ P &= C^{-1} \end{aligned} \quad (4-78)$$

此式说明回归系数 \hat{A} 的协方差阵, 等于 σ^2 与系数矩阵 C 的逆矩阵 P 的乘积, 即

$$\text{cov}(\hat{a}_v, \hat{a}_\mu) = \sigma^2 p_{v\mu}, \quad v, \mu = 0, 1, 2, \dots, n.$$

有定理说明, 在观测误差具有无偏性、等精度和不相关的情况下, 线性参数的无偏最优估计是由参数的最小二乘估计而给出。

应当指出: 上述定理中“不相关”是最本质的, 而对不等精度观测时, 上述性质仍然成立, 而且对无偏性的要求也可以放宽。

3. 在观测误差相关情况下, 线性参数的无偏最优估计

假设 $E(\Delta_v \Delta_\mu) = 0$ ($v \neq \mu$)

观测误差的协方差阵一般为

$$E(\Delta \Delta^T) = \sigma^2 R \quad (4-79)$$

而

$$R = (r_{v\mu}) \quad v, \mu = 1, 2, \dots, N$$

这里 R 是已知的正定矩阵, σ^2 未知, 讨论中仍假定观测误差具有无偏性。

依据正定矩阵的性质, R 可分解成互为转置的一个上三角矩阵 S^T 和一个下三角矩阵 S 的乘积, 即

$$R = SS^T \quad (4-80)$$

对观测数据向量 Y 作代换

$$Z = S^{-1}Y \quad (4-81)$$

这时有

$$\begin{aligned} E(Z) &= S^{-1}E(Y) = S^{-1}XA \\ E\{[Z - E(Z)][Z - E(Z)]^T\} &= \{[S^{-1}Y - S^{-1}XA][S^{-1}Y - S^{-1}XA]^T\} \\ &= S^{-1}\sigma^2 R(S^{-1})^T \\ &= \sigma^2 I \end{aligned} \quad (4-82) \quad (4-83)$$

可见, 代换了 Y 的 Z , 其误差的性质就是不相关的了, 而且是等精度的。考虑到 S^{-1} 是非奇异的, $S^{-1}X$ 具有与 X 相同的秩, 等于 n , 因此 A 的线性无偏最优估计为

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= [X^T(S^{-1})^T(S^{-1}X)]^{-1}X^T(S^{-1})^TZ \\ &= (X^T R^{-1}X)^{-1}X^T R^{-1}Y \end{aligned} \quad (4-84)$$

式中 \hat{A}_0 表示 A 的无偏最优估计, 以区别于以前的 A 的最小二乘估计 \hat{A} 。

\hat{A}_0 的协方差矩阵为 (4-78) 式, 并考虑目前的代换关系, 则有

$$\begin{aligned} E[(\hat{A}_0 - A)(\hat{A}_0 - A)^T] &= \sigma^2[X^T(S^{-1})^T(S^{-1}X)]^{-1} \\ &= \sigma^2(X^T R^{-1}X)^{-1} \end{aligned} \quad (4-85)$$

而 σ^2 的无偏估计是

$$\sigma_1^2 = \frac{Q}{N - n} \quad (4-86)$$

此刻

$$\begin{aligned} Q &= (Z - S^{-1}X\hat{A}_0)^T(Z - S^{-1}X\hat{A}_0) \\ &= (Y - X\hat{A}_0)^TR^{-1}(Y - X\hat{A}_0) \end{aligned} \quad (4-87)$$

在(4-84), (4-85)和(4-87)各式中, 增加了矩阵R对线性参数估计及其估计精度的影响, 这里R反映了观测误差间相关的特性。

观测误差的相关性对估计 \hat{A}_0 的精度起着有利的作用还是不利的影晌呢? 这不能一概而论, 它随着观测误差间相关性的不同而异。

例如, 对某物理量 b 的重复观测的数据处理, 若诸观测误差间不相关, 这时有 $D(\hat{b}) = \frac{1}{N}\sigma^2$, 说明增加观测次数 N , 可使 $D(\hat{b})$ 减小。如果观测误差间是相关的, 譬如其间有固定的相关系数 ρ , 即

$$\Sigma_{\Delta} = E(\Delta\Delta^T) = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \sigma^2$$

而且 $\frac{-1}{N-1} < \rho < 1$, 因为只有此时才能保证 $-\frac{1}{\sigma^2}\Sigma_{\Delta}$ 的正定性。由(4-85)式可得

$$\begin{aligned} D(\hat{b}_0) &= \sigma^2 \left[(1 \ 1 \ \cdots \ 1) \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} \rho \right) \sigma^2 \end{aligned} \quad (4-88)$$

从上式看出, $D(\hat{b}_0)$ 与观测次数的关系必须考虑到相关系数 ρ 了。当 ρ 增加时, $D(\hat{b}_0)$ 大大增加, 当 ρ 接近1时, 增加 N 并不能起到降低 \hat{b}_0 方差的作用, 这时 $D(\hat{b}_0) \approx \sigma^2$ 。

一般说来, 如果预先知道观测误差间是相关的, 就应该寻求参数的线性无偏最优估计才是恰当的, 因为它是所有线性无偏估计中方差最小的。在观测误差间不相关时, 对参数的线性无偏最优估计与最小二乘估计是一致的。但是在实践中, 无偏最优估计使用起来最大的困难是协方差阵 Σ_{Δ} 往往并不知道。就是 Σ_{Δ} 已知, 由于线性无偏最优估计的 \hat{A}_0 表达式中一般包含着阶数很高的矩阵逆的计算, 因而计算量很大。在这种情况下, 则往往只作出线性参数的最小二乘估计。但它没有无偏最优估计来得好。

五、回归方程的显著性检验

前面对线性回归模型的假设, 是根据科学实验本身的特点及其物理背景, 并分析实验数据所具有的规律, 而提出的。但在求出线性回归方程之后, 仍需要对其进行统计检验, 以便作出肯定或者否定的结论。为此, 我们将以下的偏差平方和进行分解:

总的偏差平方和

$$S_{\Delta} = \sum_j (y_j - \bar{y})^2 = \sum_j y_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_j y_j \right)^2 \quad (4-89)$$

\bar{y} 是 y_i 的平均值。

其自由度 $f_{\text{回}} = N - 1$

$$S_{\text{总}} = S_{\text{回}} + S_{\text{剩}} \quad (4-90)$$

其中回归平方和

$$S_{\text{回}} = \sum_j (\hat{y}_j - \bar{y})^2, \quad f_{\text{回}} = n,$$

它是由于引入变量 x_1, x_2, \dots, x_n 以后引起的, 而剩余平方和如下式

$$S_{\text{剩}} = \sum_j (y_j - \hat{y}_j)^2, \quad f_{\text{剩}} = N - n - 1, \quad (4-91)$$

它是由于试验误差和其它因素而引起的。

如果变量 y 与变量 x_1, x_2, \dots, x_n 之间无线性关系, 则模型 (4-64) 中的一次项系数 a_1, a_2, \dots, a_n 都应为零. 所以要检验变量 y 与 x_1, x_2, \dots, x_n 之间是否呈线性关系, 只须检验假设

$$H_0: a_1 = 0, a_2 = 0, a_n = 0 \quad (4-92)$$

是否成立. 这可通过比较 $S_{\text{回}}$ 和 $S_{\text{剩}}$ 来实现。

可以证明, 在满足矩阵 X 满秩和假设 H_0 成立的条件下

$$\frac{S_{\text{回}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n), \quad \frac{S_{\text{剩}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(N - n - 1)$$

$S_{\text{回}}$ 与 $S_{\text{剩}}$ 相互独立, 从而

$$F = \frac{S_{\text{回}}/n}{S_{\text{剩}}/(N - n - 1)} \sim F(n, N - n - 1) \quad (4-93)$$

这时就可用上述统计量 F 来检验假设 H_0 成立与否. 若对于给定的一组数据

$$(y_j, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}), \quad j = 1, 2, \dots, N_0 \quad (4-94)$$

算得

$$F > F_{\alpha}(n, N - n - 1),$$

那么可以在显著水平 α 下, 认为线性回归方程 (4-67) 是有显著意义的. 反之, 则认为该线性回归方程没有显著意义. 这时需要进一步查明原因, 依情处理。

六、回归系数的显著性检验

大家知道回归方程显著并不意味着每个自变量 x_1, x_2, \dots, x_n 对因变量 y 的影响都是重要的, 而我们总希望从回归方程中剔除那些次要的可有可无的变量, 重新建立更为简单的线性回归方程. 这就需要对每个变量进行考察. 显然, 如果某个变量对 y 的作用不显著, 那么, 在多元线性回归模型中, 它前面的系数 a_i 就可取值为零. 因此, 检验因子 x_i 是否显著就等价于检验假设

$$H_0: a_i = 0 \quad (4-95)$$

最小二乘估计 \hat{a}_i 是服从正态分布的随机变量 y_1, y_2, \dots, y_N 的线性函数, 所以 \hat{a}_i 也是服从正态分布的随机变量, 且

$$E(\hat{a}_i) = a_i, \quad D(\hat{a}_i) = p_{ii}\sigma^2$$

式中 p_{ii} 是矩阵 P 中对角线上第 i 个元素, 于是

$$\frac{\hat{a}_i - a_i}{\sqrt{p_{ii}\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

可以证明, 随机变量 \hat{a}_i 与 $S_{\text{总}}$ 相互独立, 于是有

$$F = \frac{(\hat{a}_i - a_i)^2}{S_{\text{总}}/(N - n - 1)} \sim F(1, N - n - 1)$$

或

$$t = \frac{(\hat{a}_i - a_i)/\sqrt{p_{ii}}}{\sqrt{S_{\text{总}}/(N - n - 1)}} \sim t(N - n - 1)$$

故在假设 (4-95) 下, 可采用统计量

$$F = \frac{\hat{a}_i^2/p_{ii}}{S_{\text{总}}/(N - n - 1)} \quad (4-96)$$

或

$$t = \frac{\hat{a}_i}{\sqrt{p_{ii} S_{\text{总}}/(N - n - 1)}} = \frac{\hat{a}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{p_{ii}}} \quad (4-97)$$

来检验回归系数 \hat{a}_i 是否显著。即当 $t > t_\alpha$ 时, 则认为在显著水平 α 下回归系数 \hat{a}_i 显著。一般, 对回归系数进行一次检验后, 只能剔除其中一个因子, 这个因子是所有不显著因子中 F 值或 t 值为最小者。然后重新建立新的回归方程, 再对新的回归系数逐个进行检验, 直到其余 F 的回归系数都显著为止。

例 从 (4-64) 式知道, 用谐波分析方法求陀螺仪误差系数时, 有的参数存在重复解。而这些误差系数亦可直接应用最小二乘原理求解。在 (3-12) 式中只须令

$$k_{i1} = y_j, \quad g_{xi} = x_{j1}, \quad g_{yi} = x_{j2}, \quad g_{zi} = x_{j3}, \quad g_{\dot{x}i}^2 = x_{j4}, \quad g_{\dot{y}i}^2 = x_{j5},$$

$$g_{xi}g_{yi} = x_{j6}, \quad g_{xi}g_{zi} = x_{j7}, \quad g_{yi}g_{zi} = x_{j8}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$a_0 = D_0, \quad a_1 = D_x, \quad a_2 = D_y, \quad a_3 = D_z, \quad a_4 = D_{xx}, \quad a_5 = D_{yy}, \quad a_6 = D_{xy}, \quad a_7 = D_{xz}, \quad a_8 = D_{yz}$$

如果测试数据中的误差是等精度的, 相互独立, 并服从同一正态分布 $N(0, \sigma)$ 时, 则参数的线性最小二乘估计是最优的 (对液浮陀螺仪而言, 其漂移角速度, 除包含有规律部分之外, 还包含有强相关的随机漂移部分, 这将在以后有关章节中讨论)。这时

$$Y = \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{iN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{18} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{28} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{N8} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_8 \end{pmatrix}.$$

测量误差

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}$$

将上式代入 (4-75) 式, 即可得出各误差系数的估计值 \hat{a}_i , 并可同时对回归方程及各误差系数进行显著性检验。

测试的标准误差 σ 可由残差的均方值进行估算。

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-9} \sum_{i=1}^N e_i^2$$

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx \geq \sum_{i=0}^n a_i^2, \quad p(x) \geq 0$$

此谓 Bessel 不等式。

如果一切连续函数 $f(x)$, 等式

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \quad (4-100)$$

成立, 则正交函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 称为完全的。(4-100) 式称为 Barseval 等式。

二、Gram-Schmidt 正变化方法

设 $\{\varphi_i(x)\}$ 为 $[a, b]$ 上的一个线性独立系, 可用它们的线性组合来构成标准正交系。

令

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1(x)\|}, \quad \|\varphi_1(x)\| \neq 0,$$

显然 $\|\psi_1(x)\| = 1$ 。

再令

$$\varphi'_2(x) = a_{11}\psi_1(x) - \varphi_2(x)。$$

容易确定 a_{11} , 使 $\varphi'_2(x)$ 正交于 $\psi_1(x)$, 即

$$(\varphi'_2(x), \psi_1(x)) = a_{11} - (\varphi_2(x), \psi_1(x)) = 0$$

所以

$$a_{11} = (\varphi_2, \psi_1)。$$

令

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi'_2(x)}{\|\varphi'_2(x)\|}, \quad \text{而且} \|\varphi'_2(x)\| \neq 0,$$

显然有

$$\|\psi_2(x)\| = 1, \quad (\psi_2, \psi_1) = 0,$$

再建立

$$\varphi'_3(x) = a_{21}\psi_1(x) + a_{22}\psi_2(x) - \varphi_3(x)$$

与 $\psi_1(x)$ 、 $\psi_2(x)$ 正交, 则有

$$a_{21} - (\varphi_3(x), \psi_1(x)) = 0$$

$$a_{22} - (\varphi_3(x), \psi_2(x)) = 0,$$

所以

$$a_{21} = (\varphi_3, \psi_1)$$

$$a_{22} = (\varphi_3, \psi_2)。$$

最后令

$$\psi_3(x) = \frac{\varphi'_3(x)}{\|\varphi'_3(x)\|}。$$

显然有

$$\|\psi_3(x)\| = 1, \quad (\psi_3, \psi_1) = 0, \quad (\psi_3, \psi_2) = 0。$$

一般将有

$$\varphi'_k(x) = (\varphi_k, \psi_1)\psi_1 + (\varphi_k, \psi_2)\psi_2 + \cdots + (\varphi_k, \psi_{k-1})\psi_{k-1} \quad (4-101)$$

$$\psi_k = \frac{\varphi'_k(x)}{\|\varphi'_k(x)\|}。$$

这样就可以用 $\{\varphi_i(x)\}$ 的线性组合来构成标准正交系 $\{\psi_i(x)\}$ 。

以上的介绍可以看出: 这一方法简化了计算, 可消除回归系数间的相关性。如将

(4-64) 及 (4-65) 式构造成正交系 $\{\psi_i(x)\}$, 则这时具有正交性的 (4-99) 式中的 a_i 已与原来的回归系数不同了, 其中有一个折算的关系, 读者可自行计算。

§ 5 线性平稳模型

在讨论随机过程时, 我们希望能有一个描述这一过程的数学模型, 这对讨论和分析问题会带来很大方便。在这一节里将介绍几类实际常用的描述和分析平稳随机过程的线性平稳模型。

一、线性模型

大家知道液浮陀螺仪的随机漂移率一般可认为是一个强相关的随机过程。这一过程 $x(t)$, 总可以用一个相互独立的正态随机过程 $a(t)$ 经变换而得到, 即用一个正态白噪声 $a(t)$ 经变换得到。所以, 对随机过程 $x(t)$ 构造一个数学模型, 就是研究一个以正态白噪声 $a(t)$ 为输入, 经过一个实施变换的所谓滤波器, 给出输出过程 $x(t)$, 讨论 $a(t)$, $x(t)$ 和滤波器三者之间的关系。

在滤波器模型中, 最简单的是线性滤波器模型, 它由白噪声 $a(t)$ 经加权线性叠加给出输出过程 $x(t)$ 。如果只考虑变量的离散情形, 则有如下形式

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots \\ \mu &= E(x_t) \end{aligned} \quad (4-102)$$

称上式描述的随机过程 x_t 为线性过程。

令

$$Bx_t = x_{t-1} \quad (4-103)$$

B 称为后移算子, 且有

$$B^m x_t = B^{m-1} x_{t-1} = \cdots = x_{t-m}$$

取算子多项式

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$$

式中 $\psi_0 = 1$

使

$$\tilde{x}_t = x_t - \mu$$

这时 (4-102) 式变成

$$\tilde{x}_t = \psi(B)a_t \quad (4-104)$$

线性模型 (4-104) 可等价地用 \tilde{x}_t 的已往值 \tilde{x}_{t-i} ($i = 1, 2, \cdots$) 的加权和再加上一个噪声项 a_t 来表示, 则有

$$\tilde{x}_t = \pi_1 \tilde{x}_{t-1} + \pi_2 \tilde{x}_{t-2} + \cdots + a_t$$

取算子多项式

$$\Pi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i B^i$$

则

$$\Pi(B)\tilde{x}_t = a_t \quad (4-105)$$

根据 (4-104) 和 (4-105) 式有

$$\Pi(B)\psi(B)=1$$

因而 ψ_j 和 π_i 可相互唯一确定。而随机过程 x_t 的协方差函数可写成

$$\lambda_K = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+K} \quad (4-106)$$

式中 σ_a^2 为白噪声 a_t 的方差。如果线性过程 x_t 是一个平稳过程，它的方差

$$\sigma^2 = \lambda_0 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \quad (4-107)$$

应取有限值。这时，如果把算子 B 看成一个虚拟变量， σ^2 取有限值，则要求在 $|B| \leq 1$ 时， $\psi(B)$ 收敛。类似，若 $\Pi(B)$ 在 $|B| \leq 1$ 时收敛，(4-105) 式的表示才有实际意义，称线性过程 x_t 是可逆的。定义

$$\lambda(B) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \lambda_K B^K \quad (4-108)$$

为线性过程 x_t 的自协方差母函数。可以证明

$$\lambda(B) = \sigma_a^2 \psi(B) \psi(B^{-1}) = \sigma_a^2 \psi(B) \psi(F) \quad (4-109)$$

式中

$$F = B^{-1}$$

称为前移算子，即

$$F x_t = x_{t+1}$$

线性模型 (4-104) 和 (4-105) 尽管具有很一般性，给理论分析带来了很多方便，但由于它们都含有无限多项，实际应用的价值不大。下面简单介绍几类实际常用的线性平稳模型。

二、自回归模型

在 (4-105) 式中，如果多项式 $\Pi(B)$ 中仅仅前面 p 个系数 π_i ($i = 1, 2, \dots, p$) 不全为零，把它们记为 ϕ_i ，得到 p 阶自回归模型

$$\phi(B)\tilde{x}_t = a_t \quad (4-110)$$

式中

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (4-111)$$

今后用 $AR(p)$ 表示，其中的 x_t 称为自回归过程。在这个模型中，含有 $p+2$ 个参数 μ ； $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_a^2$ 。其中 ϕ_p 异于零。

若

$$\phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_p B) \quad (4-112)$$

考虑 (4-110) 和 (4-112) 式，则有

$$\tilde{x}_t = \phi^{-1}(B) a_t = \sum_{i=1}^p \frac{K_i}{1 - G_i B} a_t$$

如果自回归过程 x_t 是平稳的， $\psi(B) = \sum_{i=1}^p \frac{K_i}{1 - G_i B}$ 在 $|B| \leq 1$ 时收敛，因而有 $|G_i| <$

$$a_t = \theta^{-1}(B) \tilde{x}_t = \sum_{j=1}^q \frac{M_j}{1 - H_j B} \tilde{x}_t \quad (4-120)$$

若滑动平均过程 x_t 可逆, $\Pi(B) = \sum_{j=1}^q \frac{M_j}{1 - H_j B}$, 在 $|B| \leq 1$ 时收敛, 因而 $|H_j| < 1$ ($j = 1, 2, \dots, q$)。这意味着 $MA(q)$ 的特征方程

$$\theta(B) = 0$$

的全部特征根 $\frac{1}{H_j}$ 必须位于单位圆外。

根据 (4-118) 式, $MA(q)$ 的协方差函数

$$\lambda_K = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-K} - \theta_1 a_{t-K-1} - \dots - \theta_q a_{t-K-q})]$$

整理后得

$$\lambda_K = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2 & K = 0 \\ (-\theta_K + \theta_1 \theta_{K+1} + \dots + \theta_{q-K} \theta_q) \sigma_a^2 & K = 1, 2, \dots, q \\ 0 & K > q \end{cases} \quad (4-121)$$

由此可知, q 阶滑动平均过程 x_t 的协方差函数 λ_K 在 q 处有一个截止点, 成截尾状。即当 $K \leq q$ 时, λ_K 异于零; 当 $K > q$ 时, $\lambda_K = 0$ 。反之, 由于 $\Pi(B) = \sum_{j=1}^q \frac{M_j}{1 - H_j B}$ 和 x_t 可逆, 滑动平均过程 x_t 的偏自相关函数 ϕ_{KK} 随 K 的增加逐步变小, 单调或波动衰减, 呈拖尾状趋向于零。

四、自回归-滑动平均模型

为了得到高精度, 参数少, 满足更一般要求的线性平稳模型, 可以把 $AR(p)$ 模型 (4-110) 和 $MA(q)$ 模型 (4-118) 结合起来, 组成一个 p, q 阶的自回归 (Auto regression) 滑动平均 (Moving Average) 模型

$$\phi(B) \tilde{x}_t = \theta(B) a_t \quad (4-122)$$

式中

$$\begin{aligned} \phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \\ \theta(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \end{aligned} \quad (4-123)$$

今后用 $ARMA(p, q)$ 表示, 称其中的随机过程 x_t 为自回归-滑动平均过程。在此模型中, 含有 $p + q + 2$ 个参数 $\mu; \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q; \sigma_a^2$ 。其中 ϕ_p, θ_q 异于零。

显然, 若 $\phi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B) = 0$ 的特征根都位于单位圆外, x_t 是平稳的, 若

$\theta(B) = \prod_{j=1}^q (1 - H_j B) = 0$ 的特征根都位于单位圆外, x_t 是可逆的。

用 \tilde{x}_{t-K} 乘 (4-122) 两端取平均, 得到 x_t 的协方差函数

$$\begin{aligned} \lambda_K &= \phi_1 \lambda_{K-1} + \phi_2 \lambda_{K-2} + \dots + \phi_p \lambda_{K-p} + \lambda_{xa}(K) \\ &\quad - \theta_1 \lambda_{xa}(K-1) - \dots - \theta_q \lambda_{xa}(K-q) \end{aligned} \quad (4-124)$$

式中

$$\lambda_{xa}(K) = E(\tilde{x}_{t-K} a_t)$$

是自回归-滑动平均过程 x_t 和白噪声 a_t 之间的互协方差函数, 并有

$$\begin{aligned}\lambda_{xa}(K) &= 0 \quad \text{当 } K > 0 \text{ 时} \\ \lambda_{xa}(K) &\neq 0 \quad \text{当 } K \leq 0 \text{ 时}\end{aligned}\quad (4-125)$$

当 $K > q$ 时, 根据 (4-124) 和 (4-125) 式有

$$\lambda_K = \phi_1 \lambda_{K-1} + \phi_2 \lambda_{K-2} + \cdots + \phi_p \lambda_{K-p}$$

这时, 自相关函数 ρ_K 满足差分方程

$$\phi(B) \lambda_K = 0 \quad (K > q) \quad (4-126)$$

对 $ARMA(p, q)$ 模型 (4-122) 式, 有

$$\begin{aligned}\psi(B) &= \phi^{-1}(B) \theta(B) \\ \pi(B) &= \theta^{-1}(B) \phi(B)\end{aligned}$$

因而它的自相关函数 ρ_K 和偏自相关函数 ϕ_{KK} 都将随 K 的增加而逐渐变小, 单调或波动衰减拖尾趋向于零。

读者运用前面所学过的知识完全可以解决本节所讨论的线性平稳模型的识别及其参数的估计, 为此, 对这方面就不重复了。

§ 6 卡尔曼滤波在陀螺仪测试中的应用

一、卡尔曼滤波公式

这里主要考虑离散的情形。假设 n 维动态系统与 m 维量测系统分别由下面的方程描述:

$$X_K = \phi_{K, K-1} X_{K-1} + \Gamma_{K-1} W_{K-1} \quad (4-127)$$

$$Z_K = H_K X_K + V_K \quad K \geq 1 \quad (4-128)$$

式中动态噪声 $\{W_K\}$ 与量测噪声 $\{V_K\}$ 是互不相关的零均值白噪声序列, 即对所有 K, j 有

$$E(W_K) = 0, \quad \text{cov}(W_K, W_j) = E(W_K W_j^T) = Q \delta_{Kj} \quad (4-129)$$

$$E(V_K) = 0, \quad \text{cov}(V_K, V_j) = E(V_K V_j^T) = R_K \delta_{Kj} \quad (4-130)$$

$$\text{cov}(W_K, V_j) = E(W_K V_j^T) = 0 \quad (4-131)$$

符号

$$\delta_{K,j} = \begin{cases} 1 & \text{当 } K = j \\ 0 & \text{当 } K \neq j \end{cases}$$

X_K 是 n 维随机状态向量;

$\phi_{K, K-1}$ 是已知第 $K-1$ 时刻到第 K 时刻的状态 (一步) 转移阵;

Γ_K 为已知的 $n \times s$ 阶矩阵;

Z_K 是 m 维量测向量;

H_K 为已知 $m \times n$ 阶矩阵。

则对 X_K 的最优线性滤波 \hat{X}_K 可由下式递推计算:

$$\hat{X}_K = \phi_{K, K-1} \hat{X}_{K-1} + K_K (Z_K - H_K \phi_{K, K-1} \hat{X}_{K-1}) \quad (4-132)$$

$$K_K = P_{K|K-1} H_K^T (H_K P_{K|K-1} H_K^T + R_K)^{-1} \quad (4-133)$$

$$P_{K|K-1} = \phi_{K, K-1} P_{K-1} \phi_{K, K-1}^T + \Gamma_{K-1} Q_{K-1} \Gamma_{K-1}^T \quad (4-134)$$

$$P_K = E(\tilde{X}_K \tilde{X}_K^T) = E\{(\hat{X}_K - X_K)(\hat{X}_K - X_K)^T\} = (I - K_K H_K) P_{K|K-1} \quad (4-135)$$

这就是卡尔曼滤波方程组。

式中 \hat{X}_K —— t_K 时刻状态向量 X_K 的估值;

K_K —— t_K 时刻的增益矩阵;

P_K ——滤波误差的协方差阵。

如果 $t_K < t$ 称为线性平滑;

$t_K = t$, 则称之为线性滤波;

$t_K > t$, 则称为线性预测。

综上, 具体计算步骤如下:

(1) 在 t_0 时刻, 给定初值 P_0 , \hat{X}_0 , Q_0 ;

(2) 令 $t = t_1$, 计算 $P_{1|0} = \Phi_{1,0} P_0 \Phi_{1,0}^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T$;

(3) 计算增益矩阵

$$K_1 = P_{1|0} H_1^T (H_1 P_{1|0} H_1^T + R_1)^{-1};$$

(4) 根据量测值 Z_1 计算 t_1 时刻的状态值

$$\hat{X}_1 = \Phi_{1,0} \hat{X}_0 + K_1 [Z_1 - H_1 \Phi_{1,0} \hat{X}_0];$$

(5) 计算估值误差的协方差

$$P_1 = (I - K_1 H_1) P_{1|0};$$

(6) 令 $t = t_2$, 返回第二步, 重复递推运算步骤。

二、参数的最优估计

单自由度液浮积分陀螺仪的单轴伺服试验 (陀螺仪输入轴 x 平行于转台轴并平行于 ω_e), 有如下运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \omega_e &= D_0 + D_x g_x + D_y g_y + D_z g_z + D_{xx} g_x^2 + D_{xz} g_x^2 \\ &\quad + D_{xy} g_x g_y + D_{xz} g_x g_z + D_{yz} g_y g_z + \omega \\ &= \Omega + \omega \end{aligned} \quad (4-136)$$

$$\text{式中} \quad \Omega = D_0 + D_x g_x + D_y g_y + D_z g_z + D_{xx} g_x^2 + D_{xz} g_x^2 \\ + D_{xy} g_x g_y + D_{xz} g_x g_z + D_{yz} g_y g_z$$

ω ——动态相关噪声;

ω_e ——地球自转角速度;

$\dot{\theta}$ ——转台绕转台轴相对基座的旋转角速度;

D_0 、 D_x 、 D_y 、 D_z 、 D_{xx} 、 D_{xz} 、 D_{xy} 、 D_{yz} 是陀螺仪漂移的误差系数, 为待估计的常数。

这里所考虑的相关噪声, 只是一种特殊情形, 即指 $\{\omega_K\}$ 是由白色噪声序列 $\{W_K\}$ 驱动的线性系统所产生的相关噪声。即

$$\omega_K = \phi_{K,K-1}^T \omega_{K-1} + W_{K-1} \quad (4-137)$$

这时, 可以用扩大状态维数的办法, 把 $\{\omega_K\}$ 做为状态向量的一部分。

记

$$A_K = \begin{pmatrix} D_{0K} \\ D_{xK} \\ D_{yK} \\ \vdots \\ D_{yzK} \end{pmatrix}, \quad A_K = A_{K-1}, \quad \phi_{K,K-1}^A = (1 \ g_{xK} g_{yK} \cdots g_{yK} g_{xK}) \quad (4-138)$$

$$X_K = \begin{pmatrix} \omega_K \\ \dots \\ \Omega_K \\ \dots \\ A_K \end{pmatrix}, \quad \phi_{K,K-1} = \begin{pmatrix} \phi_{K,K-1}^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{K,K-1}^A \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad W_K = \begin{pmatrix} \omega_K \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则系统状态方程可写为

$$X_K = \phi_{K,K-1} X_{K-1} + W_{K-1} \quad (4-139)$$

量测方程是

$$Z_K = (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} \omega_K \\ \dots \\ \Omega_K \\ \dots \\ A_K \end{pmatrix} + V_K \quad (4-140)$$

或

$$Z_K = H_K X_K + V_K$$

式中 $H_K = (1 \ 1 \ 0)$, V_K 是量测噪声。

而且 $E\{\omega_K\} = E\{V_K\} = 0$, $E\{\omega_K V_K^T\} = 0$, $E\{\omega_K \omega_K^T\} = D_K$, $E\{V_K V_K^T\} = R_K \delta_{Kj}$,

$E\{W_K\} = 0$, $E\{W_K W_K^T\} = Q_K \delta_{Kj}$, $E\{W_K V_K^T\} = 0$ 。

如果给出初值 P_0 , \hat{x}_0 , Q_0 等参数, 根据 (4-139) 和 (4-140) 式, 用卡尔曼滤波公式就可对状态向量 X_K 进行估计运算了。可以看到: 上面的运算已经不只是局限于直观的滤波, 而是应用卡尔曼滤波来识别系统的某些参数。

卡尔曼滤波便于应用数字计算机对观测数据进行实时处理, 因此, 目前这是一种较好的数据处理方法。

第五章 陀螺仪测试设备及测试准备工作

§ 1 引言

一、测试设备的重要性

惯性元件的研制过程，是与各种类型的试验紧密相连的，在研制的全过程中，各项测试工作是贯彻始终的，试验是全面的，详尽的。

特别是，陀螺仪漂移的测试是一项重要的测试工作。测试工作根据不同的试验原理，采取不同的方法，定量地获得存在于陀螺仪内部的各种误差因素。经数据处理、分析，并与已经确定的误差数学模型相比较，得到表征各种误差的误差系数和各项性能数据，从而经过一系列测试工作，力图全面揭示和掌握陀螺仪的实际性能。

为要完成上述的任务，一方面需要研究合理的测试方案，误差的数学模型和数据处理技术等；另一方面应具备准确可靠的测试设备。因此，精确可靠的测试设备是研制精密陀螺仪和惯导系统必不可少的重要设备。

精密陀螺仪的工作条件和环境是很复杂的，多变的，因此相应地，陀螺仪的测试类型亦是多种多样的。试验有 $1g$ 条件下的试验和高倍 g 条件下的试验（如离心试验，线振动试验，角振动试验等）。面 $1g$ 条件下的试验是陀螺仪试验评定工作中的基本和主要的项目。 $1g$ 条件下的试验采用的主要测试设备有精密机械转台和陀螺漂移测试转台（有时称低速伺服转台，测试转台等）。限于本书的宗旨，本章着重讨论 $1g$ 条件下的测试设备及有关

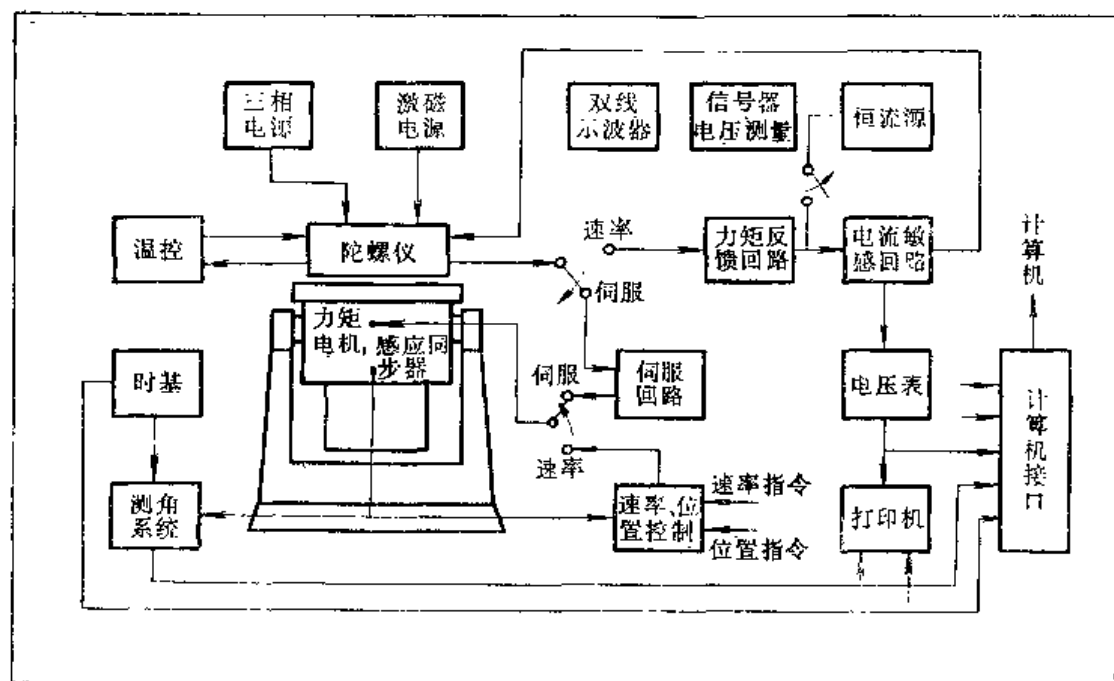


图5-1 陀螺仪漂移测试原理图

的测试技术。

二、对测试设备的要求

1. 测试原理方面的要求 目前,国内外陀螺仪漂移的测试系统方案有两种:一种是开环系统,一种是闭环系统。闭环系统又可采用两种工作方式:转台伺服法和力矩反馈法。它们的原理如图 5-1 所示。从满足陀螺仪测试工作原理出发,要求闭环测试系统采用的测试设备应具备这两种工作方式,满足通用性的要求,具备相应的多种功能。

2. 测试精度方面的要求 在测试过程中,测试设备与陀螺仪一起组成完整的体系,通过正确安排试验程序,选择精确的设备,以保证测试数据精度。因此,从满足测试精度要求出发,测试设备应具有与被测陀螺仪精度相应的精度和分辨率,长期稳定性、可靠性和具有测试参数的监控能力。

3. 使用方面的要求 测试台应具有结构简单,操作简便,使用维护方便的特点。

上述诸方面的要求,有时会互相矛盾,如简单性和通用性便是一例,故要求应综合考虑。

§ 2 精密机械转台

一般地讲,任何一种单轴或多轴的机械分度头均可作为陀螺仪位置试验用的测试转台。若能将角度的读数转换成电信号,并以数字形式输出,则可进一步提高读数分辨率。

例如图 5-2 所示的光学测量转台即是一种典型的机械转台。工作台面应用精密蜗轮蜗杆驱动,可连续地绕主轴旋转,并可锁紧之。工作台面可在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内倾斜、锁紧。转台应用光学读数装置,分辨率为 1 角秒,精度为 $6 \sim 8$ 角秒。

转台可以满足陀螺仪作力矩反馈测试方式应用的要求。但转台本身无伺服驱动装置,因而不能满足应用转台伺服法测试方式的要求。

§ 3 陀螺漂移测试转台的基本组成及发展概况

一、基本功用及基本组成

高精度陀螺漂移测试转台是精密陀螺仪测试的重要设备。如图 5-1 所示,它是既能安

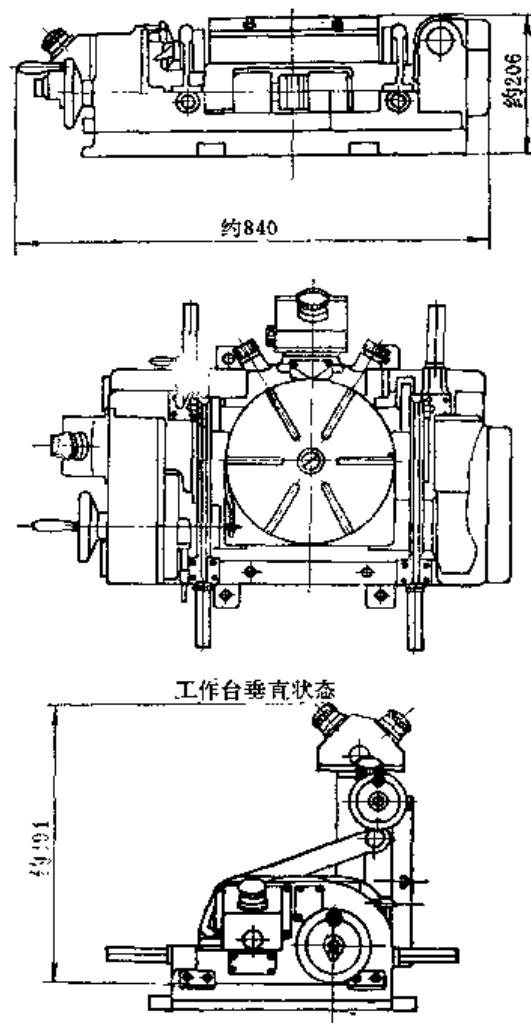


图5-2 精密光学测量转台

装被测陀螺仪而又能实现某种受控制的运动要求的试验转台。它具有很高的运动精度和位置精度，它的测角、测时系统具有很高的分辨率和精度。

测试转台可以分为三个主要部分：

- 1) 陀螺仪测试夹具；
- 2) 测试转台台体 它的主要功用在于，安装被测陀螺仪；为被测陀螺仪提供准确的初始对准位置；提供必要的运动自由度。测试台台体应有如图 5-3 所示的基本结构。除图中已示出者外，尚有转台的驱动装置、台体测角元件，滑环组件等；
- 3) 测试转台电子设备 电子设备的基本功用是，激磁，控制和监控。它应包括激磁电源、控制、测量电子设备、环境电子设备和监控电子设备等。

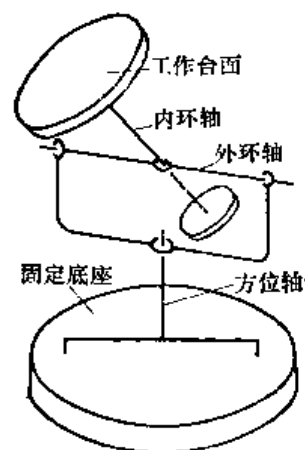


图5-3 台体结构示意图

按测试转台台轴可控制的数目，陀螺漂移测试转台相应地分为单轴、双轴和三轴测试转台。

二、陀螺仪测试夹具

陀螺仪测试夹具又称陀螺仪固紧装置。它是一种中间过渡装置，通过它将陀螺仪安装在测试转台的工作台面上。其功用为：

- 1) 装卡陀螺仪；
- 2) 为陀螺仪提供次级环境控制；
- 3) 提供安装灵活性，尤其是双轴陀螺仪测试夹具可以减少测试过程中安装次数。

对陀螺仪测试夹具提出了如下的要求：

- 1) 具有与被测陀螺仪精度相应的安装，对准精度；
- 2) 安装，对准方便，可靠，灵活；
- 3) 结构简单，具有足够的刚度和长期稳定性。

图 5-4 为陀螺测试夹具的外形图。

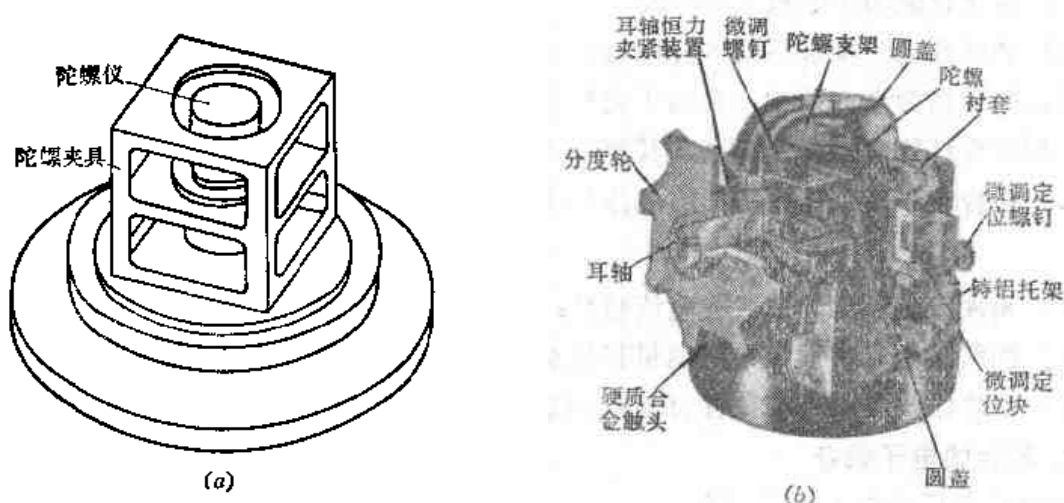


图5-4 陀螺仪测试夹具

a—简单托架式夹具； b—双轴测试夹具。

简单托架式夹具为一框架式六面体结构,陀螺仪安装在夹具的安装面上,依靠夹具自身的精度保证陀螺仪对准的精度。这种夹具有结构简单,使用方便的优点,但其缺点为灵活性不够,不能为陀螺仪提供次级环境控制。

双轴测试夹具是一种复杂的具有环境控制的夹具。它的优点是工作灵活,但缺点是结构复杂,重量及尺寸均较大。

三、陀螺漂移测试转台发展概况^[1]

陀螺仪漂移测试转台的发展概况可以从美国麻省理工学院仪表实验室早期的工作看出一个梗概。下面分测试转台台体及电子设备两方面叙述。

1. 测试转台机械台体

麻省理工学院先后研制了“A”,“B”,“C”,“D”,“E”等型转台。A型转台在1945年制成,其结构特点是:采用一般滚珠轴承;驱动元件为交流力矩电机;角位置读出装置为滚珠-微动开关式,位置分辨度为角分级;它的典型零件加工精度在0.025~0.0025毫米之间。但主要问题是材料热膨胀会导致配合零件“卡死”的现象;定位及锁定有角度偏移。

在A型转台的基础上,经修改于1950年制成B型转台。与A型转台比较主要改进之处为:用精密齿轮系代替直接驱动装置——交流力矩电机。试验时,通过台面的旋转与陀螺形成闭合回路,由交流力矩电机驱动齿轮系以完成伺服动作。进行力矩反馈试验时,以同步电机驱动齿轮系,其精度约几角分。

1953年制成的C型转台与B型转台相似,仅齿轮经过研磨加工和跑合,精度略有提高。

1954年制成的D型转台标志着陀螺漂移测试转台已进入新的发展阶段。与前相比,它有如下的改进:

- 1) 采用锥形滚柱轴承,予紧配对,角度偏差不大于2角秒,提高了回转精度;加工精度进一步提高到优于0.00127毫米;
- 2) 采用光电敏感装置作角度读出装置;
- 3) 采用直流力矩电机直接驱动。

当D型转台进一步采用液体静压轴承时,使性能改善,台轴干扰力矩降至2200克·公分,轴线的径向偏摆为0.2角秒,台轴正交性 ± 1 角秒,径向刚度达280公斤/微米。

E型转台性能又进一步提高。其特点为:

- 1) 转台轴采用带压力补偿的液体静压轴承,并首次在倾斜轴上采用了空气静压轴承;
- 2) 角度读出装置为复式光电读数盘;
- 3) 倾斜轴由光学读出系统测量其相对当地垂线的倾角,精度为 ± 1 角秒;
- 4) 主要结构材料是非磁性材料铝356,易于铸造,易于加工,且有优良的稳定性。

2. 转台的电子设备

1950年前后转台的电子设备大部分是通用仪器,小部分是专用的。精度为10%数量级,设备的自动化程度差,测试时,用人工测量和记录转台速率。

1954年前后，早期的D型转台上使用的电子设备曾力图提供特殊耐用的电子设备，设备的精度和短期稳定性都是百分之几。

1958 年前后应用的电子设备是近代设备的前身。主要改进之点为:

- 1) 陀螺仪马达电源改为精密整装式激磁装置, 信号器激磁电源改为音叉振荡器, 电源装置的长期稳定性和精度均在百分之一以上;
- 2) 应用改进的伺服回路;
- 3) 应用光电系统作测角系统;
- 4) 磁悬浮采用电子设备进行控制和调整;
- 5) 采用打印机作记录。

随着技术进一步发展,近代转台具有如下的特点:

- 1) 转台的主轴轴系采用先进的带压力补偿的空气静压轴承,并带有伺服滑环系统,从而大大降低了干扰力矩,提高了伺服精度;
- 2) 采用低脉动力矩的力矩电机直接驱动转台;
- 3) 采用高精度的感应同步器或光栅元件组成高精度和高分辨率的测角系统;石英晶体振荡器的运用进一步提高了测时系统的精度和长期稳定性;
- 4) 采用稳定性高的新型材料,采用先进的工艺方案,提高了加工精度,且整机装配精度有明显的提高,如两轴的垂直度优于零点几角秒等;

5) 近代转台的电子设备明显的改进是：数字化，且具有模拟数据记录能力，提高了参数监控能力；主要的电子设备均设有恒温控制装置；采用可靠的器件，提高设备的可靠性；数字电子计算机的运用提高了转台的自动化程度和扩展了功能。

随着惯导系统精度的提高，要求有先进的陀螺仪和加速度计，因此陀螺漂移测试转台的精度和功能亦更趋完备，有些国家研制方向向着高精度，复杂多用方向发展，亦有些国家向着单一，专用方向发展的。目前新一代具有更高精度，更低阈值，高可靠性的陀螺仪亦已问世，对于这些陀螺仪的测试工作，过去一直不被重视的一些干扰因素，将产生越来越明显的不可忽略的测试误差。因此，进一步发展了环境监控技术。随着数字计算机在陀螺测试工作中的应用，

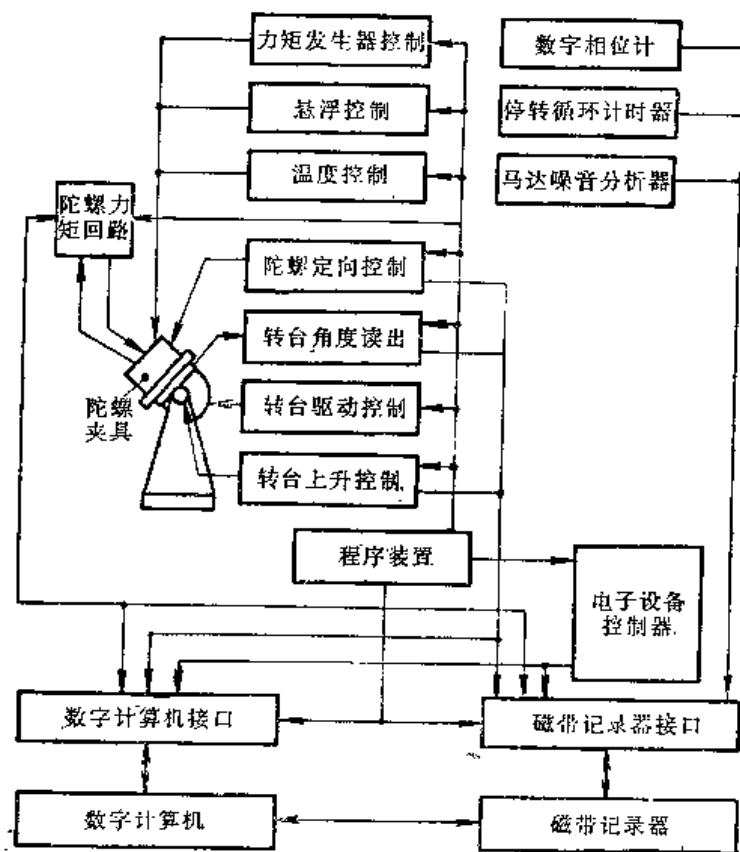


图5-5 用计算机控制的自动陀螺仪测试站方框图

表5-1 美国空气轴承低速转台比较表(结构尺寸部分)

项 目	转台型号	500 型	T 915 型	T 958 型	201 型	252 型	352 型	352 型 (0.036 角秒)	3767 型	3768 型	3769 型	5768 型 (双轴)	5569 型 (双轴)
制 造 厂	美GOERZ	Carco	Carco	Carco	Fecker	Fecker	Fecker	Fecker	Fecker	Fecker	Fecker	Fecker	Fecker
出 厂 时 间	65~67年	65~67年	67年左右	约58年	61~62年	63~64年	65~67年	68~69年	68~69年	68~69年	68~69年	68~69年	68~69年
转台总高度(英寸)	45	$37\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{4}$	$28\frac{3}{4}$	49	45	47	49	50	49	44	13	
倾斜轴高度(英寸)	35			21	39	36	39	41	43	41	36	35	
台面直径(英寸)	24	14	12	12	24	24或26	16~24	24	25	24	35	34	
转台宽度(英寸)	44		$15\frac{1}{4}$	$20\frac{3}{4}$	56	$41\frac{1}{4}$	46倾斜轴		36		94倾斜轴	84倾斜轴	
底座直径(英寸)		26	$13\frac{1}{4}$		49	$26\frac{1}{2}$	26	27		27	46	46	
台面制试体(英寸)					高 18 宽 26	高 20~24 宽 16	高 14~15 宽 17					高 17 宽 36	
支 承 形 式			三点式		三点式	三点式	三点式	三点式	二点式	二点式	三点式	三点式	三点式
起运重量(磅)		2200	125		5000	3000	2000	2400	3000	2400	7600	7600	
轴向承载(磅)	1500	1000	500	750	2000	1050	1000	800	1500	800		3000	
径向承载(磅)	1500	200		350	900	650	300	500	1200	500		500	
角刚度(磅·英寸/角秒)					200	40		50	150	50	400	400	
气源流量(英寸 ³ /分)		5.3	2	2	10	3.6	6	4	6	4	9	9	
压力稳定精度					$\pm 1\%$ 磅/英寸 ²	$\pm 1\%$ 磅/英寸 ²		$\pm 1\%$ 磅/英寸 ²	$\pm 10\%$	90 ± 2 磅/英寸 ²		85 ± 3 磅/英寸 ²	
平衡力矩能力					300磅英尺		250磅英尺		700磅英尺	500磅英尺	650磅英尺	650磅英尺	
温度保持°F					72 ± 5	72 ± 5	± 5	72 ± 5	72 ± 10	± 2			

表5-2 美国转台结构定位调整精度比较表

项 目	转 台 型 号	500型	T 915 型	T 958 型	201型	252型	352型 (0.036 角秒)	352型	3767型	3768型	3769型	5768型 (双轴)	5369型 (双轴)
主轴与倾斜轴垂直度(角秒)		±1	±0.5		±10	±1	±1	±3	±(1~2)	±2	±(1~2)	±1	±1
主轴转动范围(度)		360	无限	无限	无限	无限	无限	无限	无 限	无限	无限	无限	无限
主轴线摆动(角秒)			±0.5	5	±3	±0.5	±0.5	0.5	±0.25	0.5	±0.25	0.5	±1
平直度(英寸)			最大直径上 0.00015	0.001				0.001	±0.001 (半径 8 英寸处)				0.001
转台水平调整精度(角秒)			2	2	±1	±1	±1	±5		±1	分辨率 ±1	±1	±1
倾斜轴转动范围(度)		±190	±190	±190	±195	±190	+190	±190	±90	±190	±95	无限	无限
倾斜轴摆动(角秒)					±6	±1	±3	±1	±1	±1	±1	±1	±1
倾斜轴精度(角秒)					±3	±0.5	±0.5	±2	±1	±1	分辨率 ±1		±0.5
重复性精度(角秒)	±1				±3	0.5	0.5	±0.5	±1	±1	±1		
方位轴调整范围(度)					±5	3	5	±5	多位置 ±5	±5	±5	5	±5

表5-3 美国转台电气系统指标比较表

项 目	转台型号	500型	T 915 型	T 938 型	201型	232型	352型	351型 (0.036 角秒)	3767型	3768型	3769型	5768型(双轴)	5549型 (双轴)
精测元件	720级 感应同步器	编码盘	4 极 感应 同步器	720级 感应同步器	同 前	同 前	同 前	同 前	同 前	同 前	同 前	同 前	同 前
360°任一点峰峰精度 (角秒)	±0.5			±0.5	±0.5	±0.5	±0.5	0.0001° 精度±1.5	±1	±0.5	0.36		
间隔为1度时峰峰 精度(角秒)	±0.2			±0.2	±0.2	±0.2	±0.2		同前	同前	±0.2		±0.2
敏感能力与速率测定 精度(0/小时)		0.0001		1 小时测试 0.0001	同 前	同 前	同 前		同前	同前			
感应同步器噪声水平				2.5赫通带内 0.005角秒	同 前	同 前	同 前		同前	同 前			
读数系统显示与分 辨率(度)	0.0001	0.0001		0.0001~0.00001	0.0001	0.0001	0.0001	0.036角秒	0.00005	同 前	0.0001	0.0001	0.00005
读数位置精度(角秒)	±1			±0.5	同前	同前	同前	±1	同前	同 前		±1	
低速伺服系统限定干 扰误差(角秒)	0.01			0.02	0.03	0.03	0.03		0.1				
静态伺服刚度 (磅·英尺/角秒)				2.5	1.5	1.5	1.5		5	同前			5
力矩电机最大扭矩 (磅·英尺)	直流11	直流: 7 交流: 5	0.7	直流: 5	同前	同前	同前	交流: 5	交流: 5	5		直流: 11 交流: 7	交流: 5
速率范围	0.1 ω_e ~ 650°/秒	(0.1~2400) ω_e		1.5°/小时~ 10°/秒	同前	同前	同前		(0.1~999.9) ω_e		(0.01~ 999.99) ω_e		
伺服循环数(个)	50	80	14	30	84	80	80	68	84	68	68	倾斜轴84 主轴68	倾斜轴84
循环噪声	直流10mA 时<50mV	同前	同前	同前	同 前	同前	同前	0.005 Ω	同前	同前		有双屏蔽线 同前	同前
循环最大扭矩 (磅·英尺)	0.1	0.7	0.7	0.3					0.01	0.1	0.1	倾斜轴为 0.1	0.1
显示最大角度(度)	359.9999			359.9999	359.9999	359.9999	359.9999			359.9999		359.9999	
速率稳定精度								每一度间隔内平均速度稳定精度为0.0005°					

注: 对于表 5-1, 5-2, 5-3 的说明, 1) 此三表取自于某分析报告;

2) 由于资料不足, 未经全部核实, 仅供参考。

陀螺测试程序, 设备的控制, 环境的监控、补偿, 数据的获取、处理等多项工作已统一形成完整的系统, 即所谓新型测试站的概念已形成。图 5-5 示出了用计算机控制的自动陀螺仪测试站的原理。

表 5-1, 表 5-2, 表 5-3 为国外转台机电参数表, 供参数。

§ 4 双轴陀螺漂移测试台

图 5-6 所示计算机控制双轴测试转台可用于鉴定惯导系统, 陀螺仪及加速度计, 因而是一台多功能的测试转台。该测试转台有三根互相垂直的旋转轴, 分别为内环轴, 外环轴和方位轴。按测试需要的不同, 可以手动调整方位轴的位置, 并可精确地锁紧。而内环轴和外环轴的运动可以由控制系统控制, 故称之为双轴测试转台。转台采用一台通用计算机, 它的功用是对转台进行控制, 并对所得原始数据进行处理。该转台的内环轴和外环轴能在下列任一工作状态下分别地或同时地进行工作:

- 1) 转台伺服工作状态 此状态可以用于对陀螺仪进行单轴或双轴伺服试验,
- 2) 计算机控制状态 此状态可以使转台满足陀螺仪的连续翻滚, 间歇翻滚和位置试验。计算机可以控制单轴, 或控制双轴工作。

在上述各种工作状态下, 电子设备均能进行测量、显示和记录 (打印或穿孔) 内环轴和外环轴的速率和位置数据。

该转台的一些数据如下:

外形尺寸: 宽 2390 毫米, 高 1110 毫米, 底座直径 1170 毫米, 工作台面直径 890 毫米;

内环轴回转精度: ± 1 角秒;

外环轴回转精度: ± 1 角秒;

内、外环轴垂直度: ± 1 角秒;

内、外环轴旋转范围: 不限;

方位轴精确调整范围: 5° ;

感应同步器 1° 范围误差 (峰-峰),

± 0.2 角秒;

测角系统分辨率: 0.0001° ;

内环力矩电机最大输出力矩: 交流 1

公斤·米;

外环力矩电机最大输出力矩: 直流 1.52 公斤·米;

转台总重: 3450 公斤。

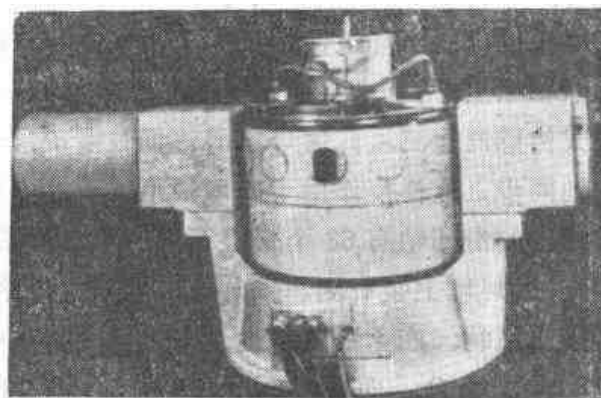


图 5-6 双轴陀螺漂移测试转台

一、测试转台台体

图 5-7 为双轴陀螺漂移测试转台结构示意图。台体是一托架式结构, 可任意连续旋转的内环轴由径向和止推轴承组成的空气静压轴承支持在外环轴上。外环轴亦可任意连续旋转。外环轴由一对球形空气静压轴承支持在台体上, 台体可绕方位轴旋转, 进行方位对准。

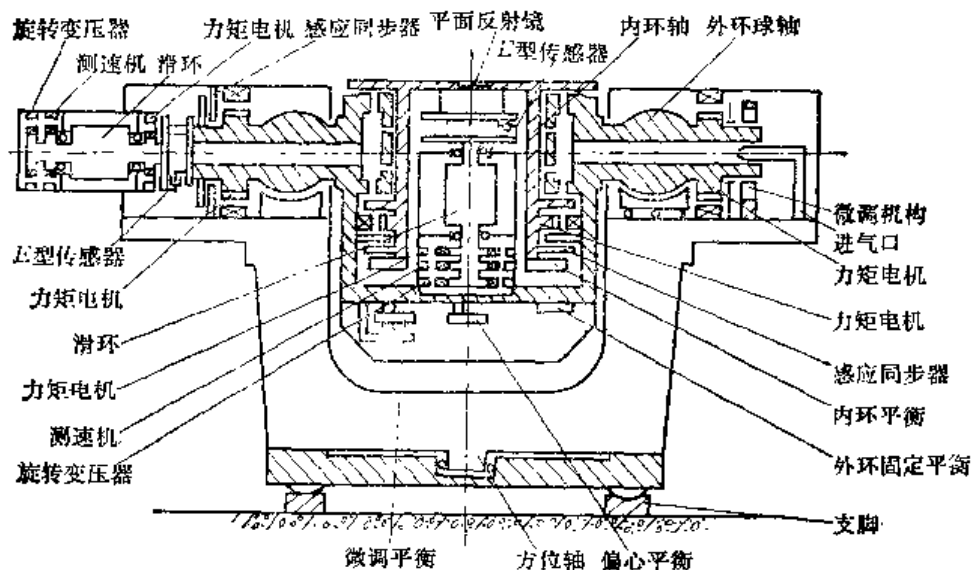


图5-7 计算机控制双轴测试转台结构示意图

转台的工作台面即内环轴空气静压轴承的上止推板，它是被测试件的安装表面。工作台面由坚硬而耐腐蚀材料制成。表面光洁度和加工精度极高。台面上有许多供安装用的螺栓孔。

内环轴由直接安装在轴上的交流力矩电机驱动。额定力矩为1公斤·米，两相激磁，频率为200赫芝。内环轴的空气静压轴承的综合角刚度为54公斤·米/角秒。内、外环轴在任一位置时，转台能承受的最大载荷为230公斤。当内环轴垂直地面时，载荷可超过1000公斤。内环轴采用伺服滑环组件以馈送激磁电流和传输信号。滑环组件安装在与内环轴同心的机械轴承轴系上，两者由软导线作电气联接。内环轴与内环滑环轴之间的位置误差由一个“E”型桥式传感器检测。此信号经滑环伺服系统，驱动滑环轴的直流力矩电机，保证滑环轴与内环轴同步。这样使作用于内环轴上的干扰力矩大大降低。

内环的滑环轴有68个带银石墨的滑环，滑环噪声电平在微伏数量级（当电流为10毫安时）。滑环轴上装有测速发电机，输出提供给滑环伺服系统作为测速反馈信号；提供给内环轴伺服系统，产生限速特性，以限制内环轴的最大速率。作用于内环轴上的摩擦力矩约为1400克·公分，而滑环轴作用于内环轴上的干扰力矩将比此值小一个数量级。

内环轴具有很高的运动精度，由于采用空气静压轴承，交流力矩电机驱动，滑环伺服组件等结构措施，因而保证了内环轴有低干扰力矩和很高的伺服精度。

内环轴的角位置的读数采用精密测角系统。测角元件为感应同步器，720极，直径为306毫米，直接装在内环轴上。粗测角元件为一对极的正余弦旋转变压器。

外环轴结构形式与内环轴相类似。内环轴可绕外环轴转动，既可手动，又可电气驱动。手动定位时，有一精密的微调机构，并有锁紧装置，以防止长期锁定时的蠕变。外环轴采用额定力矩为1.52公斤·米的直流力矩电机驱动。电刷产生1400克·公分的摩擦力矩。配有滑环组件。

外环轴的电气读数系统与内环轴相同，但有机械粗读，分辨率为 ± 30 角秒。

转台初始方位对准时，使外环轴绕方位轴旋转，有精密微调机构，可在5°范围内使对

准误差不超过 1 角秒，并有锁紧装置锁紧。

外环轴的水平调整利用按装于底座上的三个自锁螺丝，它们既提供了水平调整的可能性，又使基座固定在地基上。

二、转台的控制系统

图 5-8 为转台控制系统的总原理图。下面按分系统叙述其工作原理

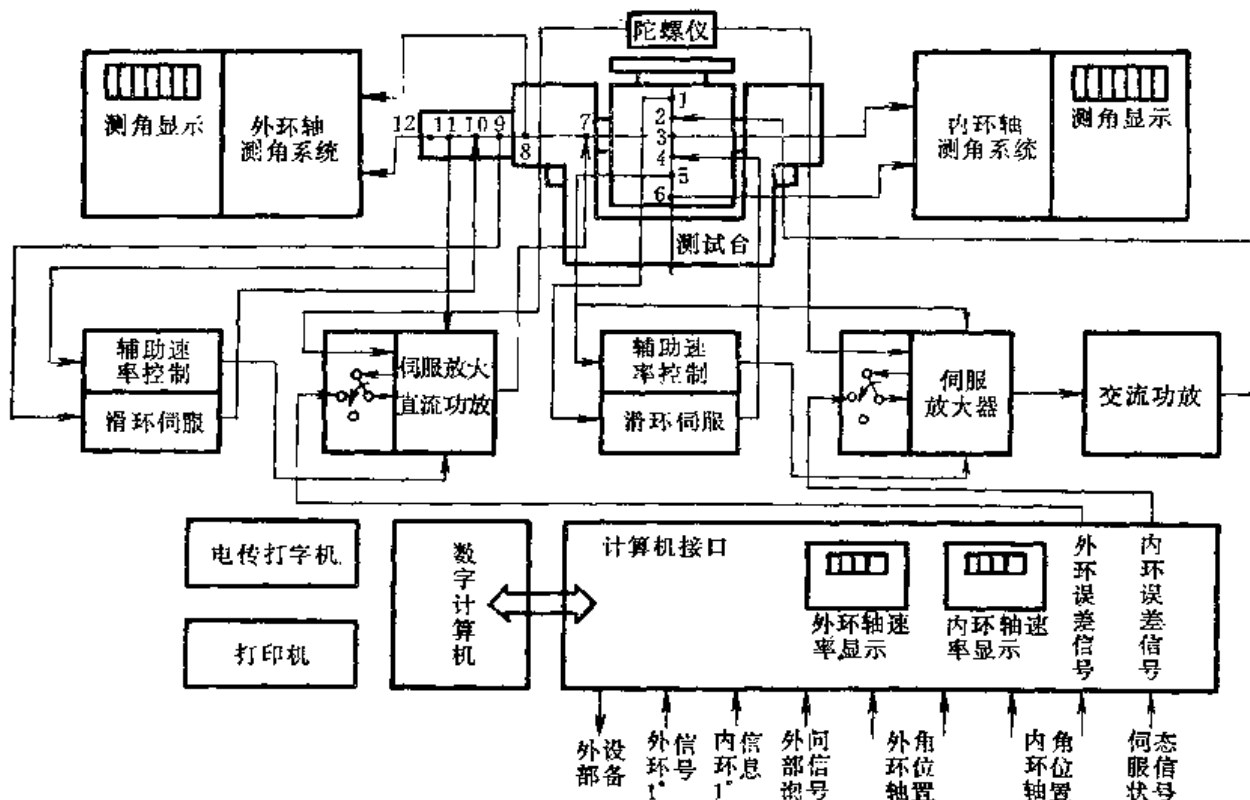


图 5-8 双轴陀螺漂移测试转台系统原理图

1, 9—E 型传感器；2—交流力矩电机；3, 8—感应同步器；5, 11—直流测速机；

4, 7, 10—直流力矩电机；6, 12—旋转变压器。

1. 转台伺服控制系统

内、外环轴伺服控制系统原理都是相同的，下面以内环轴为例说明。图 5-9 为伺服控制系统原理图。当转台处于陀螺伺服控制工作状态时，此时陀螺-伺服放大器-功率放大器-力矩电机-转台-陀螺形成闭合回路。陀螺仪信号器输出信号，送至伺服放大器。伺服放大器由三个基本通道组成：交流放大、参考信号、直流补偿通道。

工作时，陀螺仪输出信号通过一隔离变压器送至伺服放大器的交流放大通道，该通道输入阻抗大于 50 千欧， $\pm 3\text{db}$ 的频带为 50 周至 30 千周。增益按对数规律连续可调。放大后至解调器。

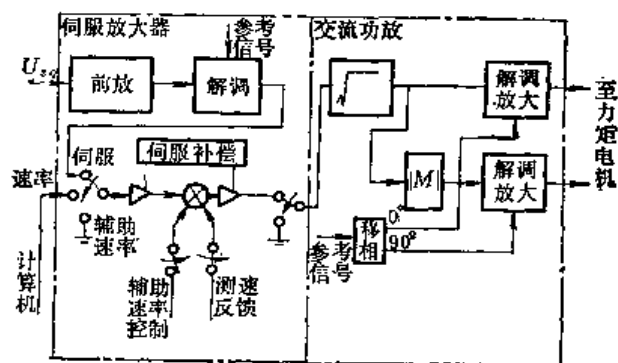


图 5-9 伺服控制系统原理图

解调器参考信号从陀螺仪激磁电源取得，相位可调，以获得在 300 周至 30 千周频率

范围内具有最佳的解调作用。解调后的信号经低通滤波，从奇次谐波中滤出直流信号。交流放大及解调器可以敏感微伏量级的输入信号，以满足高精度陀螺测试的需要。

直流补偿通道由两级运算放大器组成。输入信号由三条通道来：伺服工作状态时来自解调后的陀螺误差信号；计算机控制状态时来自计算机送出的误差信号；辅助速率控制时来自辅助速率控制输出的控制信号。上述三项输入根据需要由继电器自动切换。

对于不同的传递函数的陀螺仪，其最佳的工作状态所要求的校正参数是不同的。为此直流补偿通道是通过两个可调的超前-滞后网络来得到不同的校正参数。还可应用第三个校正网络，如图 5-10 所示。经不同的组合，时间常数从 $0 \sim \infty$ 的陀螺仪均可适用。

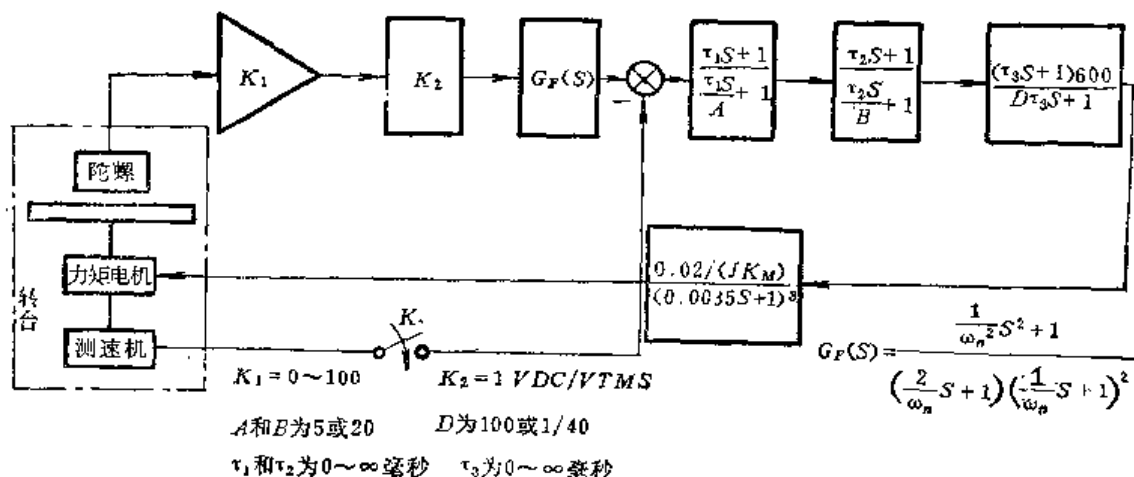


图5-10 转台伺服系统方框图

经校正后的伺服放大器输出信号馈送至交流功率放大器。由于力矩电机具有如图 5-11 所示的特性。图中 U_m 为控制电压， M 为电机产生的力矩。控制电压与力矩之间有平方的关系：

$$M = KU_m^2 \quad (5-1)$$

式中 K ——比例系数。

为获得控制电压与力矩之间的线性关系，故将伺服放大器来的控制电压经开方器、绝对值放大，按开平方规律控制调制器，产生 200 赫芝的两相激磁电流，送至力矩电机，驱动内环轴转动，从而使陀螺仪信号器趋向零位。

当伺服系统投入工作时，为便于迅速跟踪陀螺仪，可以将测速反馈与误差信号一起加到直流补偿通道，产生强烈的阻尼和限速特性。投入工作以后，立即自动切除测速反馈，可以免除由于测速机所带来的跟踪误差。

当内环轴工作时，内环滑环轴亦由滑环伺服系统驱动、随动于内环轴。失调信号由 E 型桥式传感器获得，经交流放大、解调、功放至直流力矩电机，驱动滑环轴。

2. 计算机控制系统

计算机参与测试转台的控制，可以完成各种的功能，组成不同的控制系统。

1) 同步速率控制系统 如图 5-12 所示，当陀螺仪进行力矩反馈试验时，转台按测

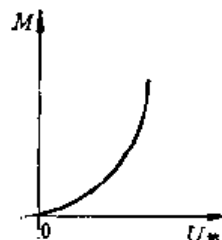


图5-11 力矩电机特性

试大纲的规定, 提供平稳而精确的转动。此项功能由同步速率控制系统完成。同步速率控制系统为一位置控制系统。

计算机按速率要求, 采用外部时基作基准, 给出以恒速增加的位置信号。它为频率准确的脉冲序列。转台转动后, 感应同步器的输出电压经幅-相变换, 模-数变换, 在内环轴角增量编码器内进行增量编码, 使转台每转过 0.00005° (0.18 角秒) 产生一个脉冲。在数据集散 (即计算机接口) 部件中与计算机给出的位置信号相比较, 即得内环轴角位置误差信号。经伺服放大器、功放至力矩电机, 驱动转台转动。

同步速率控制系统产生的速率范围是 $0.1 \sim 999.99$ 倍 ERU (ERU——地球自转速率单位)。可顺、逆时针转动。还可以得到 $1ERU \sin \varphi$ 或 $1ERU \cos \varphi$ 的速率, (φ 是当地的纬度角) 以适应在不同纬度地点进行测试的需要。同步速率控制系统产生的位置误差不大于 1.5 角秒。速率的平稳性取决于转角读数的数字量化误差和感应同步器的误差。若在 10 秒时间间隔上求速率的平均值, 对 1 倍地速的速率其量化误差小于 0.14% 。

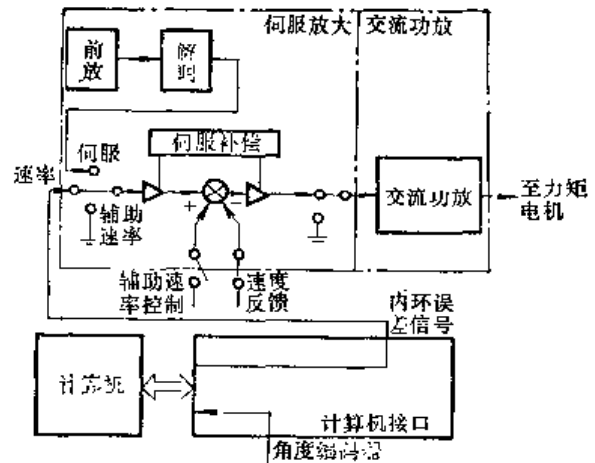


图5-12 同步速率控制系统

2) 位置给定控制系统 当要求转台转到某一固定位置时, 可应用此系统。应用位置给定系统时, 通过计算机给出:

- a) 转台要转到的角位置;
- b) 转台的速率;
- c) 转台的转动方向。

当输入上述数据后, 计算机控制转台按前述同步速率控制系统的方式进行转动。角增量编码器产生的实际角位置的信息经计算机接口在计算机内与给定的位置比较, 当转动预定的角度后, 计算机自动切断输入的位置信息, 使转台停止转动。位置给定控制系统可按同步速率的任何一种速率转动。位置给定精度 ± 1 角秒, 分辨率为 0.0001° 。

3) 自动位置给定控制系统 当陀螺仪进行间歇翻滚试验和位置试验时, 要求转台转到预定的角度后停在该位置上, 经一定时间待陀螺仪趋于稳定后测量陀螺仪力矩器的电流。按同样方法继续测量若干点, 然后进行富氏分析, 求得误差数学模型中各误差系数。转台的自动位置给定控制系统即是上述的全部过程让计算机作程序控制, 实现测试过程的自动化。

计算机输入数据有:

- a) 转台位置给定值, 最多可给 99 个;
- b) 转台在各位置上的停留时间, 从 1 分钟至 99 分钟可调;
- c) 转到上述位置的速率及转动方向。

计算机起中央控制器的作用, 按上述输入的程序, 自动控制着陀螺仪的测试工作。在上述测试过程中会自动显示停留时间。

4) 纸带程序输入 在此状态时, 可由纸带输入指令, 给出位置及速率的程序。并可在一些选定的时间间隔上给计算机输入新的位置及速率指令, 以便完成一系列复杂的运动。新指令之间的重复时间可在10~100 秒范围内选取。

计算机参与控制可组成上述的四个控制系统, 完成四项功能。

3. 辅助速率控制系统

当要求转台以较大的速率 (0.1 度/秒~ 999.9 度/秒) 转动时, 可应用辅助速率控制系统, 如图 5-13 所示。根据要求给定与速率及转向相应的输入电压的大小及极性, 经放大反馈至伺服放大器直流补偿通道, 经功放至力矩电机, 驱动转台转动。转动速率由测速发电机测出, 反馈至输入端, 产生误差电压, 控制转台转动, 形成闭环系统。由于它的输入仅有四位, 且用测速机测速反馈, 波纹及摩擦力矩均较大, 因而控制精度不高, 但可满足高转速的要求。

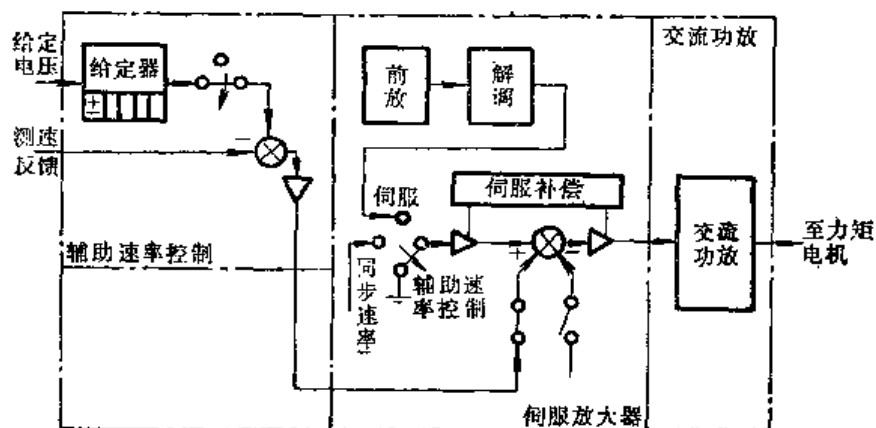


图5-13 辅助速率控制系统原理图

三、转台转角, 速率的测量和记录

为完成测试任务, 转台除具有前述之功能及相应的控制系统外, 尚有转角及速率的测量能力和数据的记录、打印, 穿孔能力。双轴陀螺漂移测试台可以进行下列各项测量, 具有相应的测角系统:

1. 精密角度读数系统

转台的内、外环轴均装有直径为 306 毫米, 720 极的感应同步器和二极正余弦旋转变压器。感应同步器为精测角元件, 旋转变压器为粗测角元件。组成精密角度读数系统。精测角原理如图 5-14 所示。粗测角原理见图 5-15 所示。合成的测角系统原理图如图 5-16 所示。

测角系统分两种工作状态: 一是设置状态; 二是累计状态。

设置状态 用以确定转台的初始角位置。当转台启动后, 测量转台的绝对角位置作为测角系统的初始读数。精测通道直接测量检零器后的相位移, 并以 24 兆周的基准频率作填充脉冲。由于是倍角测量系统, 所以精通道从 $0.00000^\circ \sim 0.49995^\circ$ 重复, 分辨率为 0.00005° 。粗测通道以 4.32 兆周的基准频率为填充脉冲, 故分辨率为 0.1° , 测量范围为 $0.1^\circ \sim 360^\circ$, 经粗精判别线路, 组合成 $0 \sim 359.99995^\circ$ 的测量范围, 并以前七位进行显示为 $000.0000 \sim$

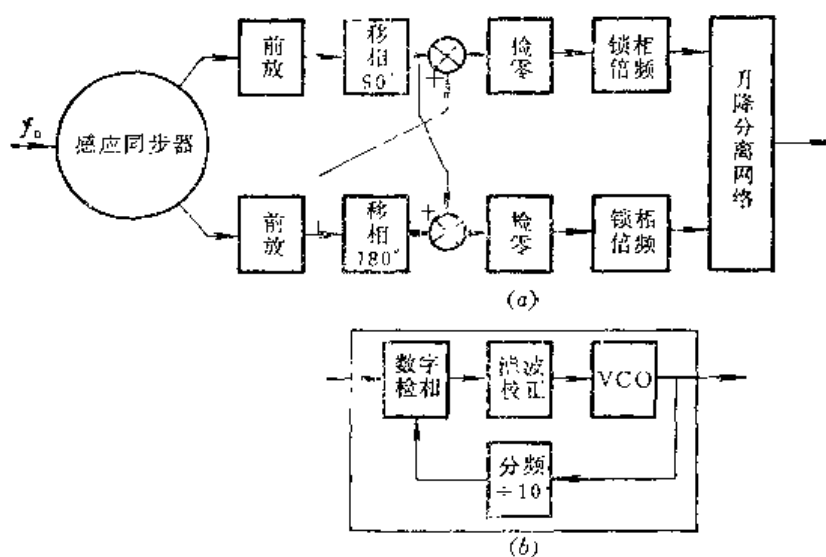


图5-14 精测角系统原理图

a—精测角原理图；b—锁相倍频器原理图。

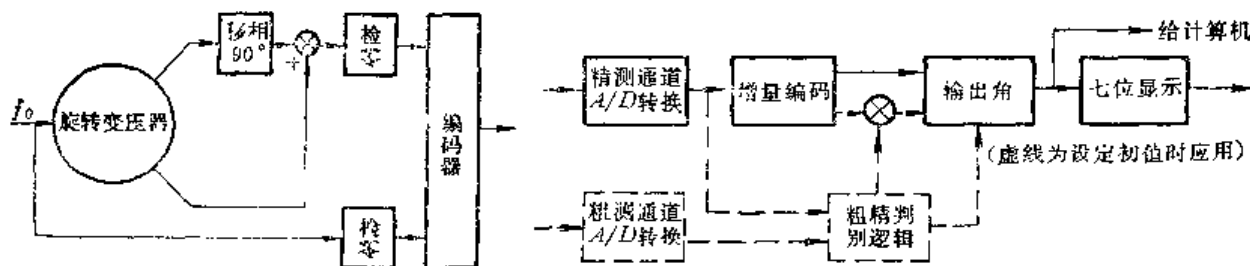


图5-15 粗测角系统原理图

图5-16 精密角度读数系统原理图

359.9999°。

粗精判别线路的功用有二：

- 由于精通道以 $0 \sim 0.49995^\circ$ 循环，因此需判别 0.1° 位需不需要增加 0.5° ；
- 判别 1° 位需不需要加 1° 或减 1° 。

由上述测量得到的读数记忆在计数器中，并显示之，作为测角系统的初始值。

累计状态 测角系统正常工作时处于累计状态。初始位置在设置状态确定后，粗测通道切断，测角系统自动切换成累计状态，即增量编码。增量编码器的工作原理是这样的：随着转台的转动，感应同步器输出一定的相位移，经检相器，锁相倍频器（倍频系数为 10^4 ），升降分离网络，使机械角每转过 0.18 角秒，即输出一个脉冲。此增量脉冲随转动方向的不同，在原数上累加或累减。

设置状态和累加状态的转换由设置逻辑控制。

该测角系统的精度为 1 角秒。

2. 逆速率读数系统

逆速率即速率的倒数。感应同步器的前置放大器输出信号经放大、解调和脉冲发生器给定精确的 1° 间隔的脉冲，至计算机，测量此角度间隔所经历的时间，得到逆速率。测量

范围从 0.0001~999.9999 秒/度, 这样可以满足定角计时测试方案的需要。

3. 速率的读数系统

计算机采用外部精密时间基准, 并接受精密测角系统来的角度增量编码, 计算一定时间间隔内的转角, 即得到速率的读数。时间间隔有 0.1, 1, 10, 100, 1000 秒。速率读数的精度与平均区间的大小以及测角系统的精度有关。

所得到的角位置和速率的数据, 可以通过打印机或穿孔机记录。

整个转台还应有连锁和安全装置, 以保证正常工作。

从上面所述内容看, 该转台无论从台体、电子设备、控制、监控、测量的功能上都采用了最新技术成果, 且有计算机作控制、数据处理用, 因此具有近代先进陀螺漂移测试转台的一切特征。

§ 5 陀螺漂移测试转台误差分析

从满足测试原理的需要出发, 转台应具有伺服工作状态, 速率工作状态, 位置给定状态。本节讨论转台由于这些系统所产生的误差及消除措施。其它的误差留在 § 8 讨论。

一、伺服系统误差分析

转台伺服法工作原理见图 5-1 所示。工作时, 陀螺仪, 转台台体, 伺服控制回路组成闭环系统, 转台通过伺服回路的控制作用随动于陀螺仪。进行转台伺服法试验时, 下列一些主要因素会产生测试误差:

1) 主要基准误差 如重力加速度 g 及地球自转角速度 ω_e 的变化均会产生测试误差, 因其变化量很微小, 当被测陀螺仪精度较低时, 该误差项可以忽略;

2) 环境因素的变化 如地震, 地基倾斜, 温、湿度等因素的变化所造成的误差;

3) 测试设备的误差 陀螺漂移测试台是测漂的主要设备, 它的误差将是主要的误差源。测试设备的误差按其表现形式可以分为两类。

a) 与地球自转角速度有关的误差项 这一类误差仅和转台台体的结构设计、制造、调整有关, 它将使转台的实际测量轴和理想的测量轴不相重合, 存在一夹角, 导致陀螺仪输入轴敏感地球自转角速度分量, 这就是不对准误差, 在不同的转台方位, 不对准误差将造成不同程度的测试误差。

b) 与地球自转角速度无关的误差项。

下面主要研究与地球自转角速度无关的误差项。伺服试验时通过测量转台轴的旋转速率 $\dot{\theta}$, 经数据处理, 间接地获得陀螺仪的漂移速率。转台轴的角速率可由下式表示:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (5-2)$$

式中 θ —— 转台的转角。

数据处理时常以有限差分 $\Delta\theta$ 及 ΔT 代替微分求得转台速率 $\dot{\theta}$ 的平均值:

$$\dot{\theta} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta T} \quad (5-3)$$

若初始值为零, 式 (5-2) 可改写为

$$\dot{\theta} \approx \frac{\theta}{T} \quad (5-4)$$

式中 T ——转台转过 θ 角所需时间。

由于各种因素, θ 及 T 有误差 $\delta\theta$ 及 δT , 因此速率 $\dot{\theta}$ 亦存在误差 $\delta\dot{\theta}$ 。它们之间的关系可由式(5-4)两端微分得到。其最大值可由式(5-5)得

$$|\delta\dot{\theta}|_{\max} \approx \left| \frac{\delta\theta}{T} \right| + \left| \frac{\theta}{T^2} \delta T \right| \quad (5-5)$$

符号 $| \cdot |$ 表示绝对值。上式表明, 转台速率误差由转角误差和定时误差两部份组成。根据实际技术发展水平, 定时误差极小, 一般在精度允许的范围内而忽略不计。因此式(5-5)可近似地表示为

$$\delta\dot{\theta} \approx -\frac{\delta\theta}{T} \quad (5-6)$$

式(5-6)说明转台速率误差与转角误差 $\delta\theta$ 成正比关系, 而与时间间隔 T , 即转台速率的平均时间成反比关系。对于伺服法来讲, T 一般为几十分钟, 例如 40 分钟或 60 分钟等。对于相同的角度误差, 若平均时间 T 愈长, 速率测量误差则愈小。通常用速率误差 $\delta\dot{\theta}$ 来衡量转台自身的精度, 此时则应指明该精度是在什么样的平均时间下取得的。

角度误差 $\delta\theta$ 主要由以下二部份产生:

- 1) 伺服系统产生的跟踪误差;
- 2) 转角测量误差。

它们产生角度读出误差。其余误差产生的测试误差如不对准误差等将在 § 5-8 中进一步讨论。

1. 转台伺服控制系统所产生的误差及消除措施

转台的伺服系统是一高精度的伺服系统。包括陀螺仪及转台伺服回路在内的整个系统的方块图如图(5-17)所示。

图中 ω_d ——被测陀螺仪的漂移率;

$K = K_{sg} \cdot K_1$ K_{sg} 为陀螺信号器灵敏度;

K_1 为伺服放大器放大倍数;

$G_g(s)$ ——陀螺仪传递函数;

$G_1(s)$ ——校正装置传递函数;

$G_M(s)$ ——力矩电机传递函数;

K_e ——力矩电机反电势常数;

J ——转台转动部分的转动惯量;

ω_{IB} ——转台基座相对惯性空间的角速率;

ω_{IT} ——转台相对惯性空间的角速率;

ω_{BT} ——转台相对基座的角速率。它们之间有关系式:

$$\bar{\omega}_{IT} = \omega_{BT} + \bar{\omega}_{IB}; \quad (5-7)$$

M_{1u} ——作用于转台轴上的干扰力矩;

ω_{IB-1u} ——作用于转台轴上的干扰角速率;

s ——拉氏变换算子。

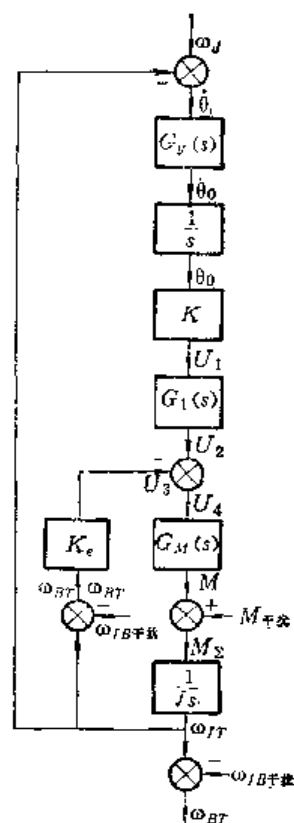


图 5-17 转台伺服系统方块图

在忽略干扰的情况下, 系统的闭环传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{\omega_{IT}(s)}{\omega_d(s)} = \frac{(K/s)G_g(s)G_l(s)G_M(s)}{JS + K_e G_M(s) + (K/s)G_g(s)G_l(s)\bar{G}_M(s)} \quad (5-8)$$

实际上, 转台测角系统测得的角速率为转台相对基座的角速率, 即 $\omega_{BT} = \dot{\theta}$ 。若考虑干扰力矩 $M_{\text{干扰}}$ 及干扰运动 ω_{IB+E} , 则转台速率 ω_{BT} 与 $G(s)$, $M_{\text{干扰}}$ 和 ω_{IB+E} 之间有如下关系

$$\omega_{BT} = G(s) \left\{ \omega_d + \frac{M_{\text{干扰}}}{(K/s)G_g(s)G_l(s)G_M(s)} + \left(\frac{K_e}{(K/s)G_g(s)G_l(s)\bar{G}_M(s)} - \frac{1}{G(s)} \right) \omega_{IB+E} \right\} \quad (5-9)$$

$$\text{式中 } \bar{\omega}_{IB} = \bar{\omega}_{IE} + \bar{\omega}_{EB} \quad (5-10)$$

ω_{IE} —— 地球相对惯性空间的角速率;

ω_{EB} —— 转台基座相对地球的角速率。

ω_{IE} 可认为是一常数, 通过计算将它扣除。此时, 转台相对基座的角速率为

$$\omega_{BT} = \omega_T = \dot{\theta} \quad (5-11)$$

$$\omega_T = G(s) \left\{ \omega_d + \frac{M_{\text{干扰}}}{(K/s)G_g(s)G_l(s)\bar{G}_M(s)} + \left(\frac{K_e}{(K/s)G_g(s)G_l(s)\bar{G}_M(s)} - \frac{1}{G(s)} \right) \omega_{EB} \right\} \quad (5-12)$$

分析式(5-8)及式(5-12)可以看出

1) 如不计干扰项时, 转台角速率为 ω_{T0} , 则

$$\omega_{T0}(s) = \omega_d(s) G(s) \quad (5-13)$$

2) 考虑干扰项时, 则干扰输入将会引起转台角速率误差 $\Delta\omega$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \Delta\omega_3 \quad (5-14)$$

式中 $\Delta\omega_1$ 为干扰力矩 $M_{\text{干扰}}$ 引起的角速率误差, 其值为

$$\Delta\omega_1 = \frac{SG(s)}{KG_g(s)G_l(s)\bar{G}_M(s)} M_{\text{干扰}} \quad (5-15)$$

$\Delta\omega_2$ 为因基座运动, 由力矩电机反电势引起的角速率误差, 其值由下式确定。一般数值较小。

$$\Delta\omega_2 = \frac{SK_e G(s)}{KG_g(s)G_l(s)G_M(s)} \omega_{EB+E} \quad (5-16)$$

$\Delta\omega_3$ 为基座运动直接造成的角速率误差, 其值为

$$\Delta\omega_3 = -\omega_{EB+E} \quad (5-17)$$

在上面所述三个误差项中, 因基座运动由力矩电机反电势所产生的角速率误差 $\Delta\omega_2$ 与其它两项相比数值较大, 因而在陀螺仪精度较低时可以不考虑。

分析式(5-15), (5-16), (5-17)可知, 为降低转台角速率误差 $\Delta\omega$, 应从两方面着手。

首先, 降低干扰力矩及干扰运动角速率。

陀螺漂移测试台产生干扰力矩的来源有:

- 1) 转台支承轴承产生的摩擦力矩;
- 2) 转台转动部份质量不平衡产生的不平衡力矩;
- 3) 固定在转台工作台面上的陀螺仪的反作用力矩, 该项数值较小;

- 4) 力矩电机输出力矩的波动;
- 5) 转台转动部分与固定部分之间信号与电源馈线引起的干扰力矩等。

造成干扰运动角速率的来源有:

- 1) 转台的弹性变形与弹性振动;
- 2) 转台地基的倾斜和运动等。

为消除这些干扰因素, 转台采取如下的措施

- 1) 采用高运动精度、低干扰力矩的空气静压气浮轴承;
- 2) 采用低脉动力矩的力矩电机;
- 3) 采用附加的输电滑环伺服系统;
- 4) 对机械台体的转动部分仔细地进行质量平衡;
- 5) 转台台体选用具有较好稳定性的材料, 合理地设计转台结构, 提高刚性, 完善转台工艺方案等一系列措施。

由于基座干扰运动产生的误差需要采取基座运动隔离或衰减的措施来加以降低, 详细可见 § 6。

其次, 合理地设计系统, 提高系统的性能。

为分析问题方便, 作如下假设:

- 1) 陀螺仪时间常数为系统校正环节的时间常数所抵消, 故视为一比例环节;
- 2) 力矩电机为一比例环节;
- 3) 忽略力矩电机反电势常数;
- 4) 忽略基座的干扰运动。

将整个系统视为位置跟踪系统。可有如图 5-18 的方块图^[20]。图中: K_T 为伺服刚度, 指失调角 ε 与系统产生的控制力矩之间的关系

$$K_T = \frac{M}{\varepsilon} \quad \text{克} \cdot \text{公分} / \text{角秒} \quad (5-18)$$

由于陀螺漂移测试台要求提高系统跟踪陀螺仪运动的精度, 即在一定的 M 数值下, 产生较小的失调角 ε , 因此伺服刚度是回路的主要设计参数。由于系统低频部分一般呈比例特性, 应用此概念, 可用下法测定伺服刚度 K_T : 台轴上加一固定力矩, 测定由此而产生的静态失调角, 两者之比, 即为伺服刚度 K_T 。提高伺服刚度, 可以降低系统的跟踪误差。但是, K_T 的增加却受到系统带宽 ω_b 的限制。图 5-19 为图 5-18 所示系统的幅频特性。该系统的频带与伺服刚度有如下的关系

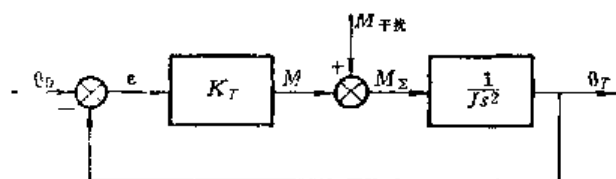


图5-18 未加校正的伺服系统方块图

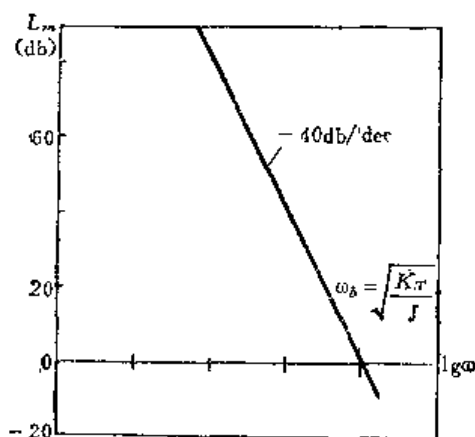


图5-19 图5-18所示系统的幅频特性

$$K_T \propto \omega_g^2 \quad (5-19)$$

这样的系统是不能稳定工作的,为此应加入适当的校正环节。对于陀螺漂移测试转台,由于下列的原因,需全面、细致地考虑校正装置的形式和参数:

1) 既要求系统有较高的伺服刚度,但系统的实际带宽又受到具体系统的限制。就是说,实际系统的带宽不可能达到太高的数值;

2) 被测陀螺仪的时间常数是极不相同的,从0至很大都有可能,甚至要求转台能测试无阻尼陀螺仪,时间常数趋于 ∞ 。不同的时间常数的陀螺仪所对应的最佳校正参数亦是不同的。对于具有一般数值的时间常数的陀螺仪,校正装置的形式和参数可取具有超前-滞后网络和滞后-超前网络来得到不同的补偿参数,例如§4中提到的转台除采用两个可调的超前-滞后网络外,尚有第三个校正环节。经过适当切换后,可以组成超前-滞后网络,亦可组成滞后-超前网络。上述的校正装置经不同的组合,可以满足不同时间常数的陀螺仪测试的需要,获得最佳的校正参数。

特别是^[22]对于无阻尼陀螺仪,其特点在于:绕陀螺仪输出轴的速率所产生的绕输入轴力矩必须加以考虑,不能忽略。从转台轴经过转台到陀螺仪的输出轴,再到力矩电机,其全部传递函数如图5-20所示。

图中 M_T ——转台力矩电机的力矩;
 J_T ——转台转动部分的转动惯量;
 J_g ——陀螺仪浮子组件的转动惯量;
 U_{sg} ——陀螺仪信号器的输出电压;
 K_{sg} ——陀螺仪信号器的灵敏度。

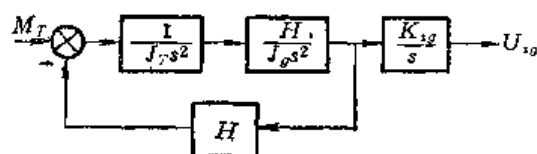


图5-20 考虑陀螺仪输出轴速率影响的方块图

由上图得

$$\frac{U_{sg}(s)}{M_T(s)} = \frac{K_{sg}}{s} \cdot \frac{1/H}{(1/\omega_{gr}^2)s^2 + 1} \quad (5-20)$$

$$\omega_{gr}^2 = \frac{H^2}{J_T J_g} \quad (5-21)$$

本质上,无阻尼陀螺仪对伺服系统的唯一限制是陀螺仪-转台回路的带宽至少应当近似地大于陀螺仪-转台组合的谐振频率的两倍。

对于无阻尼陀螺仪校正装置常采用超前-滞后网络。

转台伺服系统应考虑的另一设计问题是系统的条件稳定问题。所谓条件稳定问题,是由于下面的一些原因,使系统中某一环节首先产生饱和,而使系统的等效增益下降,导致系统不稳定。产生饱和的原因有:

- 1) 系统投入工作时,失调角过大,使传感器、放大器等环节相继饱和;
- 2) 伺服回路工作中,由于偶然的干扰,使失调角增大,与上述相同的理由,产生饱和。

当系统投入工作,形成闭路时,要求伺服系统有迅速趋向零位的能力,这即是通常所说的大偏差归零问题。一般对最大偏差角,以及由此最大偏差到系统投入正常工作所需要的时间都有一定限制。例如某转台伺服系统,要求当信号器偏差达 2° 时(实际上陀螺仪不允许达到此值)平稳归零的时间不超过5秒。详细的处理方法可参考资料^[21]。

为进一步满足更高精度陀螺仪测试的需要, 应提高转台伺服回路的伺服精度, 这应从两方面着手:

1) 提高伺服刚度 K_T 因 $K_T \propto \omega_b^2$, 若提高带宽 ω_b , 则将大大提高伺服刚度。 ω_b 的提高受到系统结构和单元线路附加相移的限制, 为此应从系统设计和线路选择, 元器件的运用上考虑;

2) 降低系统的噪声 在目前的技术水平下, 陀螺漂移测试转台的伺服刚度可以达到每角秒几千至几十万克·公分 (随转台轴转动惯量的不同而有差异)。对采用静压气浮轴承的陀螺漂移测试转台来讲, 伺服精度将优于 1 角秒。伺服系统的性能可以满足高精度陀螺仪测试的要求。但是, 通常限制伺服精度的主要因素却是陀螺仪信号器存在较大的零位误差。陀螺仪零位误差作为噪声输入, 使伺服回路产生较大的随机误差。

2. 带伺服滑环的空气静压轴承轴系所产生的误差

陀螺漂移测试转台主轴轴系的功用是按预定的安装方位准确地支持、固定被测陀螺仪, 并安装主轴的驱动元件和测角元件, 提供必要的运动自由度。对主轴轴系提出如下要求

1) 干扰力矩小, 干扰力矩小可满足主轴低速运转时无机械“爬行”现象, 亦可提高运动和伺服跟踪精度。

2) 旋转运动精度高, 有足够的支承刚度。旋转运动误差大, 会产生不允许的附加的地速输入及重力矢量偏差, 这些均会引起测试误差。支承刚度表征了轴承在外加力矩作用下, 抵抗轴线偏移和倾斜的能力, 支承刚度低亦会产生附加的输入。

陀螺漂移测试台的主轴曾经采用过一般的滚珠轴承, 精密锥形滚柱轴承, 液体静压轴承。随着惯性元件精度的提高, 要求陀螺漂移测试转台具有高精度的主轴轴系。空气静压轴承 (又称空气静压气浮轴承) 具有很小的干扰力矩, 可在极低转速下平稳工作, 旋转运动精度高, 磨损小, 寿命长, 噪声、振动小等一系列优点, 而在陀螺漂移测试台上得到了成功的应用。空气静压轴承种类很多。按功能分有圆柱轴颈轴承, 环形止推轴承, 圆锥止推轴承, 圆锥轴承和球形轴承。按将气体送入轴承间隙的节流器分有小孔节流式, 狭缝节流式, 多孔材料轴套和毛细管等形式。在陀螺漂移测试转台上应用较多的是圆柱轴承与环形止推轴承的组合形式及球轴承。节流形式为小孔节流或狭缝节流。为进一步降低干扰力矩, 主轴的输电滑环组件均配有伺服系统, 从而消除了输电滑环电刷对主轴的干扰力矩。下面在讨论空气静压轴承的特性的基础上分析带伺服滑环空气静压轴承所产生的误差。

(一) 空气静压轴承的特性 空气静压轴承在转台上的应用示例可参看图 5-7。下面以小孔节流圆柱形轴承 (图 5-21) 为例说明气浮轴承的工作。轴承上钻有两排绕圆周等距排列的进气小孔。经净化处理的压缩空气, 由外气源送至环绕轴承的气室, 压力为 p_0 。经小孔节流器节流, 压力降至 p_1 , 进入轴承间隙。然后沿轴向流至轴承端部, 排入大气, 压力降至周围大气压力 p_a 。

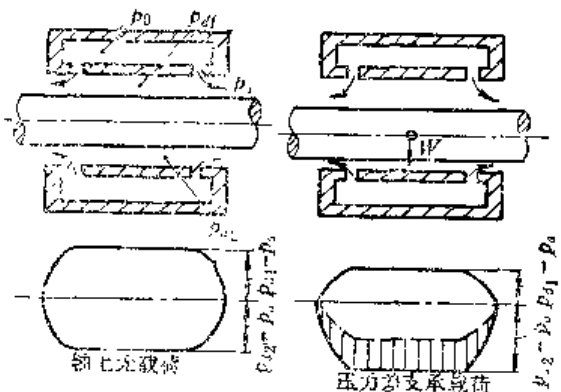


图 5-21 空气静压轴颈轴承原理图

1) 承载能力 当轴承上无外加载荷时(轴自重忽略不计),轴与轴套同心,轴承间隙处处相等均为 h_0 , 轴承环向无压力变化。当轴上加以向下的法向载荷时,轴的位置向下发生位移,偏心量为 e , 则轴承上部间隙比下部间隙大 $2e$ 。 p_{d1} 变小, p_{d2} 变大, 环向就有压力差。偏心的大小有时用无量纲的偏心率 ε 表示

$$\varepsilon = \frac{e}{h_0} \quad (5-22)$$

环向压力差在载荷作用方向上的合力与载荷平衡,形成了轴承的承载能力。图 5-22 为轴承几何尺寸及参数。经推导,承载能力 W 为

$$W = \sum_{i=1}^n p_{di} b \left[(L-2l) + \frac{4}{3} l \frac{1 - \left(\frac{\sigma}{\beta_i} \right)^3}{1 - \left(\frac{\sigma}{\beta_i} \right)^2} \right] \cos \alpha_i \quad (5-23)$$

式中 b ——平均宽度 $b = \frac{\pi D}{n}$;

n ——沿圆周方向单排进气小孔数目;

$\sigma = \frac{p_a}{p_0}$ 压力比;

$\beta_i = \frac{p_{di}}{p_0}$ 压力比。

无量纲的承载能力系数 C_w 为

$$\begin{aligned} C_w = \frac{W}{DLp_0} &= \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \left[\frac{L-2l}{L} + \frac{4}{3} \frac{l}{L} \frac{1 - \left(\frac{\sigma}{\beta_i} \right)^3}{1 - \left(\frac{\sigma}{\beta_i} \right)^2} \right] \cos \alpha_i \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n K_i \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (5-24)$$

$$K_i = \beta_i \left[\frac{L-2l}{L} + \frac{4}{3} \frac{l}{L} \frac{1 - \left(\frac{\sigma}{\beta_i} \right)^3}{1 - \left(\frac{\sigma}{\beta_i} \right)^2} \right] \quad (5-25)$$

由式 (5-24) 知, C_w (或 W) 与轴承几何尺寸参数 l/L , 喷嘴数目 n , 压力比 σ, β_i 等有关。对某一已知几何尺寸及结构的轴承, 当给定供给压力 p_0 后, 要计算 C_w (或 W), 仅 β_i 为未知参数。而 β_i 应符合小孔节流的规律, 它可以从流经喷嘴的流量方程式导出, 得到参数 ξ

$$\xi = \frac{\beta_i^2 - \sigma^2}{\sigma \psi} \quad (5-26)$$

式中 ψ ——系数, 它与 β_i 及气流速度有关。

(5-26) 式称为小孔节流气浮轴承的通用公式。以 σ 为参变量, 绘出 $\xi - \beta_i$ 的曲线称为小孔

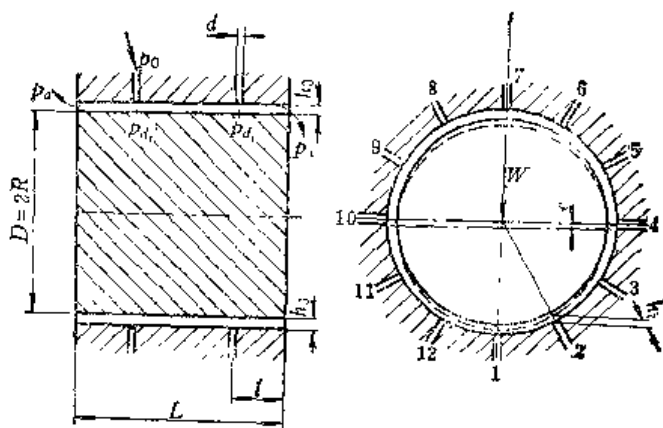


图 5-22 空气静压轴颈轴承几何尺寸及参数

节流气浮轴承的通用曲线 (图 5-23)。适用各种形式的小孔节流气浮轴承, 又有关系式

$$\xi = \frac{12\mu n l}{\pi R h^3} \Phi A \sqrt{\frac{p_0}{p_a \rho_a}} \quad (5-27)$$

式中 Φ ——孔形修正系数;

μ ——气流粘性系数;

A ——喷孔的截面积。

计算小孔节流气浮轴承承载能力的方法是: 根据已知结构及其它参数计算式(5-27), 由通用曲线, 在给定的 σ 值下求得压力比 β , 再由式 (5-23) 或式(5-24) 计算得到对应不同偏心率 ε 的 C_w 或 W 。

分析表明, 参数的组合有许多组, 均可以得到相同的承载能力。但要求某一参数, 如刚度达到最大值, 则仅有一组参数能满足此要求。这一组参数便称为轴承刚度最佳的参数。这便是轴承计算的最佳化问题。

2) 线刚度和角刚度 轴颈轴承的线刚度 K_w 定义为: 单位径向偏心量引起的承载能力的变化。即

$$K_w = \frac{dW}{de} \quad (5-28)$$

K_w 可根据 $W - \varepsilon$ 曲线求得。

轴颈轴承的角刚度 K_φ 定义为单位角度变化引起的力矩变化。即

$$K_\varphi = \frac{dM}{d\varphi} \quad (5-29)$$

式中 φ 为轴承的实际轴线相对理论轴线的偏角。

对于双排进气孔, 进气孔位置距离端面为 $l = L/4$ 处, K_w 与 K_φ 可有如下近似关系:

$$K_\varphi \approx \frac{K_w L^2}{16} \quad (5-30)$$

平均间隙 h_0 取得越小, 刚度 K_w 越大。对于陀螺漂移测试转台, 要求转台轴能精确地保持其轴线的位置, 即所谓回转精度高, 故应使轴承的刚度大。因此 h_0 应取得小些。这样加工困难。一般当总的径向尺寸误差为直径间隙的 $1/3 \sim 1/4$ 时, 才能充分发挥承载能力, 提高刚度。气膜还有均化作用, 使回转精度进一步提高, 提高至小于轴承表面圆度误差的 $1/4$, 折合至角度偏差将小于 1 角秒。

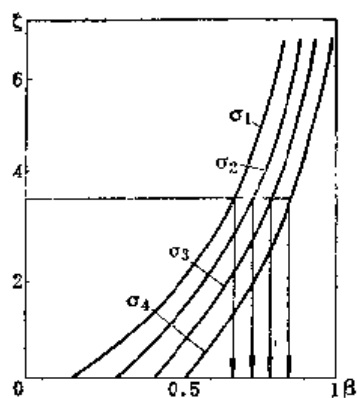


图5-23 小孔节流气浮轴承的通用曲线

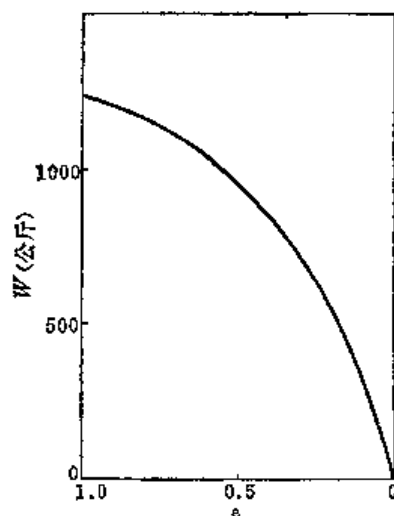


图5-24 W 与 ε 的关系

例如, 某陀螺漂移测试转台上应用的空气静压轴承, 直径为 $D = 250$ 毫米, 节流小孔

数目 $n = 2$, $(D/L) = 1$, $(l/L) = 1/4$, $p_0 = 1 \times 10^{-5}$ 公分², 经计算承载能力 H 与偏心率 ε 的关系如图 5-24 所示。角刚度 $K_\theta = 7$ 公斤·米/度。在这样的轴承刚度下, 对于一般陀螺测试的载荷, 且经过精确的质量平衡, 所产生的角偏差是很小的。完全可以满足陀螺仪测试的要求。

(二) 空气静压轴承的干扰力矩 带伺服滑环空气静压轴承的轴系, 它的干扰力矩由四部分组成:

$$M_{\text{干扰}} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \quad (5-31)$$

式中 M_1 ——轴承的粘滞力矩;

M_2 ——轴承的涡流力矩;

M_3 ——滑环轴与转台轴之间连接导线因两轴不同步引起的干扰力矩;

M_4 ——质量不平衡引起的干扰力矩。

分别讨论如下:

1) 粘滞力矩 M_1 气体是有粘性的, 当它流过轴承间隙时, 会因速度梯度的存在而产生粘滞力矩。下面通过计算, 估计 M_1 的大小。轴承的结构如图 5-7 所示。转台轴以角速率 ω 相对轴套旋转。径向轴承直径为 $D = 2r_1$, 长度为 L , 止推轴承的外径为 $2r_2$, 径向轴承间隙为 h_0 , 止推轴承间隙为 h , 轴承由一个轴颈轴承和两个止推轴承组合成。根据气体力学的知识可知, 由气体粘性会导致相对运动的轴承两表面之间存在粘性力 F , 其值为

$$F = -\mu A \frac{du}{dy} \quad (5-32)$$

式中 μ ——气体粘性系数;

A ——表面积;

$\frac{du}{dy}$ ——气膜内的速度梯度。

若设偏心率 $\varepsilon = 0$, 气膜内速度梯度为常数; 即气膜内速度是按线性分布的。

由此可得作用在径向轴颈轴承上的粘滞力矩为 M_1'

$$M_1' = F \cdot \frac{D}{2} = \frac{\mu \pi D^3 L \omega}{4 h_0} \quad (5-33)$$

同理, 可得两个止推轴承的粘滞力矩 M_1'' 为

$$M_1'' = \frac{\mu \pi \omega}{h} (r_2^4 - r_1^4) \quad (5-34)$$

例如 $r_1 = 7.5$ 公分, $r_2 = 12.5$ 公分, $L = 15.8$ 公分,

$h = h_0 = 0.02$ 公分, $\omega = 1^\circ$ /秒。

气体温度为 25°C , 则有

$$M_1 = M_1' + M_1'' = 4.26 \times 10^{-2} \text{ 克} \cdot \text{公分}。$$

当 $\varepsilon \approx 0$ 时, M_1 略有增加, 但当 $\varepsilon \leq 0.5$ 时, 增加的数值可以不计。由计算结果可以看出, 以极低转速工作的陀螺漂移测试台, 粘滞力矩是很小的。

2) 涡流力矩 M_2 涡流力矩是由于气流在轴承间隙中流动不均匀而引起的。产生涡流力矩的因素主要有下列的工艺及结构因素:

a) 零件的几何误差;

- b) 结构不对称, 特别是进气孔位置不对称会引起严重的涡流力矩;
- c) 进气量不均匀, 气流过速, 流量过大;
- d) 毛刺, 划伤等。

由此可以知道, 涡流力矩的大小主要取决于工艺水平和结构设计得是否合理。一般数值是不大的。但当结构严重不对称时, 将会产生较大的涡流力矩。以上三项在 $M_{\text{干扰}}$ 中所占比例是极小的。

3) 滑环轴与转台轴不同步引起的干扰力矩 $M_{\text{干扰}}$ 伺服滑环轴与气浮转台轴之间的电气联接是通过许多根导线馈送的。在滑环轴与转台轴之间存在失调角时, 这些导线将会产生扭力矩作用在气浮转台轴上。根据分析和实测, 这些扭力矩具有弹性扭力矩的性质 (图 5-25)。图 5-25 是在滑环轴相对气浮转台轴在不同的失调角的情况下测得的。当气浮主轴随动于陀螺仪, 伺服滑环轴随动于气浮转台轴时, $M_{\text{干扰}}$ 具有如下的形式

$$M_{\text{干扰}} = M_{D,C} + N_e \quad (5-35)$$

式中 $M_{D,C}$ ——为一固定力矩, 对应于常值失调角;

N_e ——力矩噪声。

4) 质量不平衡力矩 M_W 当气浮转台轴的重量不与其轴线重合时, 将会产生偏心力矩, 其值即为 M_W

$$M_W = Gm \cos \varphi \sin \theta \quad (5-36)$$

式中 G ——气浮转台轴的重量;

m ——重心偏离轴线的距离;

φ ——气浮转台轴与地平面的夹角;

θ ——气浮转台轴的转角。

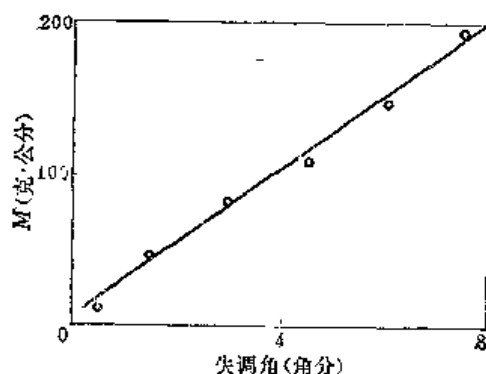


图 5-25 滑环轴对气浮转台轴的干扰力矩

M_W 与转台的转角有确定的正弦函数的关系。而且 M_W 只是在转台轴不与地面垂直时才存在, 其数值亦是不小的。例如: $G = 20$ 公斤, $m = 0.05$ 公分, $\varphi = 15^\circ$, 则 $M_{W\text{最大}} \approx 700$ 克·公分。

综上所述, 作用在气浮转台轴上的干扰力矩应有如下的数学模型

$$M_{\text{干扰}} = M_{D,C} + M_W + N_e \quad (5-37)$$

$M_{D,C}$ 及 M_W 为干扰力矩中的规律部分, 将导致伺服跟踪误差中确定的部分; N_e 为干扰力矩的随机部分, 将导致伺服跟踪误差的随机部分。

3. 转台的精密测角系统

转台转角的测量误差会引起伺服法测试误差。转台转角的测量是以光栅或感应同步器作为精密测角元件, 用电子线路作为变换和显示。下面分析旋转式感应同步器测角系统的工作及引起的测角误差。

(一) 感应同步器 旋转式感应同步器具有精度高, 结构简单、可靠, 对使用环境要求不高, 电子线路完善, 易于调整等优点。它的绕组和结构示意图如图 5-26 所示。它由转子和定子组成。定子和转子都用金属或玻璃做成基板, 在其上压粘铜箔, 厚度约为 0.05 毫米, 将铜箔刻制单匝多极绕组。一般在转子上刻制连续绕组, 总导体数即感应同步器的极数为 n 。在定子上刻制分段绕组, 由若干扇形分段组成, 将相邻扇形错开, 分别联接成两相绕组。在定子或转子上还敷有与绕组绝缘的屏蔽膜。

感应同步器又称平面变压器。其工作原理是这样的：如果在连续绕组中通以交流激磁电流（使用中也有以两相绕组为激磁端的），当转动转子时，则二相绕组输出电势幅值将是正弦函数和余弦函数规律变化的电压。其周期，即一相相邻零位点之间的间隔为 $\frac{180^\circ}{n}$ （机械角）或 π （电弧度）。

（二）测角系统工作原理 为要了解测角系统工作原理，需先了解感应同步器的工作状态。

1) 感应同步器工作状态 按测角原理分有幅值工作状态和相位工作状态。

a) 幅值工作状态（图 5-27） 利用感应同步器输出电势的大小随定、转子相对转角

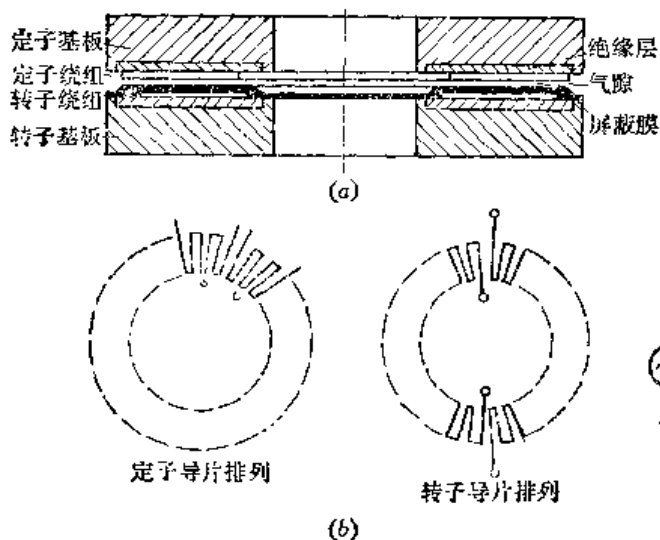


图 5-26 感应同步器
a—结构示意图；b—绕组示意图。

变化而呈正、余弦规律变化的原理进行测量。定子两相绕组 A 和 B 以相同相位 α_i 、幅值之比为 $(\sin \alpha_i)/(\cos \alpha_i)$ 的电压激磁。当定子与转子绕组轴线夹角为 α 时，转子输出电压 U_2 为

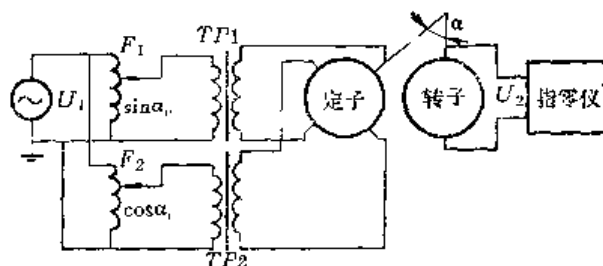


图 5-27 感应同步器的幅值工作状态

$$U_2 = KU_1 (\sin \alpha_i \cos p\alpha - \cos \alpha_i \sin p\alpha) = KU_1 \sin(\alpha_i - p\alpha) \quad (5-38)$$

式中 U_1 ——激磁电压；

p ——感应同步器极对数， $p = \frac{n}{2}$ ；

K ——变压比。

改变 α_i ，使输出电压 $U_2 = 0$ （由指零仪读出）。此时 $\alpha_i = p\alpha$ ，测得 α_i ，即可知

$$\alpha = \frac{\alpha_i}{p} \quad (5-39)$$

b) 相位工作状态 利用感应同步器输出电压的相位随定、转子相对转角的变化而变化的原理进行测量。下面介绍的单相激磁，粗精双通道测角系统感应同步器工作原理就是一例。

按感应同步器的激磁，工作状态可分为：

- a) 转子单相激磁，定子双相输出工作状态；
- b) 定子双相激磁，转子单相输出工作状态。

2) 感应同步器测角系统

a) 感应同步器单相激磁, 粗精双通道测角系统 (图 5-28)。感应同步器是多极测量元件, 每隔一个周期 (等于 $360^\circ/p$) 测量结果将重复一次。超过一个周期的大范围角度测量, 将采用粗, 精双通道系统。精测元件为感应同步器, 粗测元件为二极正余弦旋转变压器。感应同步器转子为激磁端, 设激磁电流为 i :

$$i = I_m \cos \omega t \quad (5-40)$$

式中 I_m —— 激磁电流幅值;

$\omega = 2\pi f_0$ f_0 为激磁电流的频率。

它产生变化的磁通, 与定子绕组耦合感应产生感应电势 e_A 及 e_B , 当仅考虑基波成份时有

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \cos p\alpha \sin \omega t \\ e_B &= E_m \sin p\alpha \sin \omega t \end{aligned} \quad (5-41)$$

式中 E_m —— 感应电势幅值。

两相输出电压经移相求和, 得

$$\begin{aligned} U_1 &= U_m \cos(\omega t + p\alpha) \\ U_2 &= U_m \cos(\omega t - p\alpha) \end{aligned} \quad (5-42)$$

式中 U_1 及 U_2 为两通道检零器前的电压。

经过检零器检测出其零点, 两个检零器间的相位差为 $2p\alpha$ (见图 5-29), 送入相位测量电路, 并用填充脉冲, 例如 10^{MC} , 对相位差进行量化和数字编码。有关系式

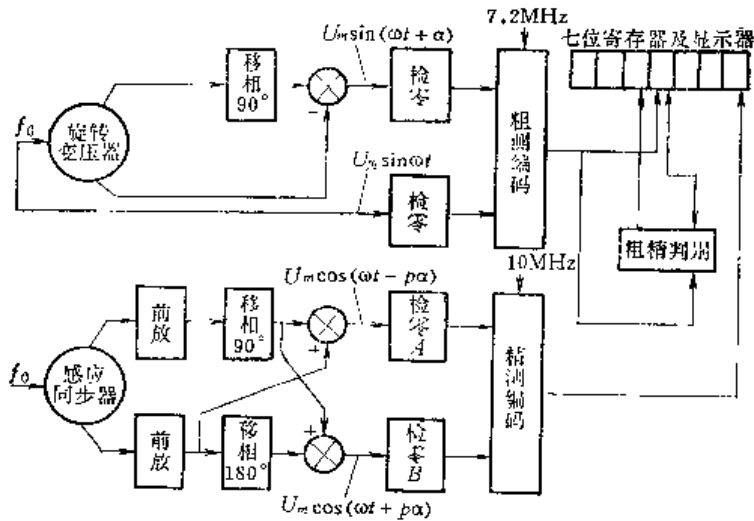


图5-28 单相激磁粗精双通道测角系统

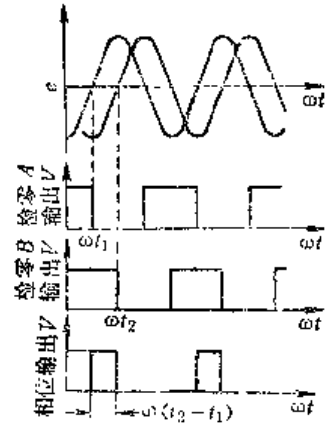


图5-29 精测通道相位关系

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2p\alpha}{\omega} \quad (5-43)$$

当极对数 $p = 360$ 时, 有

$$\Delta t = \frac{2\alpha}{f_0} \quad (5-44)$$

在精测编码器中以频率为 f_T 的填充脉冲进行量化。 Δt 对应填充脉冲数为 m , 故每次采样的脉冲数 m

$$m = (\Delta t) f_T = \frac{2\alpha f_T}{f_0} \quad (5-45)$$

由此得到转角 α

$$\alpha = \frac{f_0}{2f_T} \quad (5-46)$$

例如

$$f_0 = 2^{k \cdot 6}, f_T = 10^{M \cdot 6}, \text{ 则}$$

$$\alpha = m \times 10^{-4} \text{ 度}$$

当 $m = 1$, $\alpha_1 = 10^{-4}$ 度, 即该测角系统的分辨率为 0.0001° (0.36 角秒) 机械转角。转角的测量转化为脉冲数的累加。最大测量范围取决于在整个测量周期 $T_0 = 1/f_0$ 的时间间隔内的脉冲数。当 $\Delta t = 1/T_0 = 0.5 \times 10^{-8}$ 秒, 则 $m_{\max} = T_0 f_T = 5000$, 对应 $\alpha_{\max} = 0.5$ 度。因此精测通道以 0.5 度为一测量周期。

粗测通道采用二极正、余弦旋转变压器, 其一相输出经移相、求和、检零, 与作为基准信号的激磁电压比相, 对应时间差值为

$$\Delta t' = \frac{\alpha'}{\omega} \quad (5-47)$$

相应的脉冲数 $m' = \Delta t' f_T' = (f_T'/360f_0)'$, 由此得

$$\alpha' = (360f_0/f_T')m' \quad (5-48)$$

当 $f_T' = 7.2^{M \cdot 6}$, $f_0 = 2^{k \cdot 6}$ 时, 有

$$\alpha' = 0.1m' \text{ 度}$$

当 $m' = 1$, 有

$$\alpha'_1 = 0.1 \text{ 度}$$

粗测通道每个脉冲的分辨率为 0.1 度。最大测量范围对应于 $m'_{\max} = T_0 f_T' = 3600$, 故 $\alpha'_{\max} = 360$ 度。

这样, 将粗, 精测数据, 经粗精判别逻辑组合在一起就可测量 $0.0001^\circ \sim 360^\circ$ 。粗精判别逻辑的作用可参见 § 4。

感应同步器检零器后的时间间隔 Δt 与 2α 成比例, 故这种系统又称倍角系统。

b) 感应同步器双相激磁测角系统 (图 5-30) 粗, 精通道测角原理是相同的, 以精测

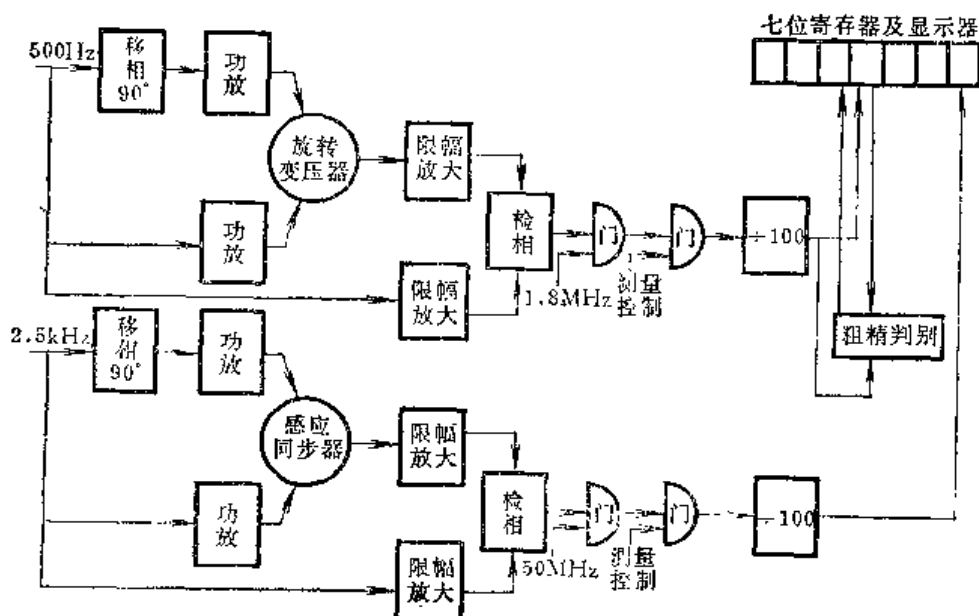


图 5-30 感应同步器双相激磁测角系统

为例说明。感应同步器定子两相激磁，激磁电流分别为

$$i_A = I_m \sin \omega t$$

(5-49)

$$i_B = I_m \cos \omega t$$

式中 I_m ——激磁电流幅值。

激磁后产生交变磁场，并在转子绕组中感应产生输出电压。基波成分为 U ，

$$U = U_m \cos(\omega t + p\alpha) \quad (5-50)$$

经鉴相器检出 $p\alpha$ ，并经逻辑门以 f_r 填充脉冲进行量化和编码，即得到所测转角读数。

c) 单通道累计测角系统 § 4 介绍计算机控制双轴陀螺漂移测试转台测角系统的正常工作状态即是采用累计方式的测角系统。

d) 脉冲调宽测角系统 (图 5-31) 这是累计方式的测角系统。 7.2^{M° 标准脉冲加至 A 、 B 二计数器。计数器最大容量为 3600，即输入 3600 个 7.2^{M° 频率的脉冲时，计数器即输出一个脉冲至矩形脉冲发生器，使其脉宽分别为 $2\alpha_0$ 及 $2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right)$ 。应用方波激磁，矩形脉冲的基波 ($f_0 = 2^{M^\circ}$) 幅值将正比于 $\sin \alpha_0$ 及 $\cos \alpha_0$ 。此时转子相对定子转过 α 角，转子输出便正比于 A 、 B 计数器上的预调值 α_0 与定转子相对位置 $p\alpha$ 之间的偏差 $\sin(\alpha_0 - p\alpha)$ 。放大器将偏差讯号放大。如偏差超过 1 角秒，则修正脉冲发生器产生修正脉冲，以修正矩形脉冲宽度直至平衡。这时计数器所示为以预调零点为起点的转子转角。继续转动转子，每转过 1 角秒发生一个修正脉冲，一方面修正矩形脉冲宽度，另一方面在可逆计数器上进行累计。

3) 感应同步器测角系统的误差分析^[23] 感应同步器的误差是测角系统的基本误差源，测角线路亦会导致测量误差。

a) 感应同步器误差

i) 零位误差 $\Delta\alpha_0$ 指实际零位偏离理论零位的角度 (图 5-32)。零位误差以某一选定的零位为起始点，用累计误差来表示。零位误差由以下几部分组成：

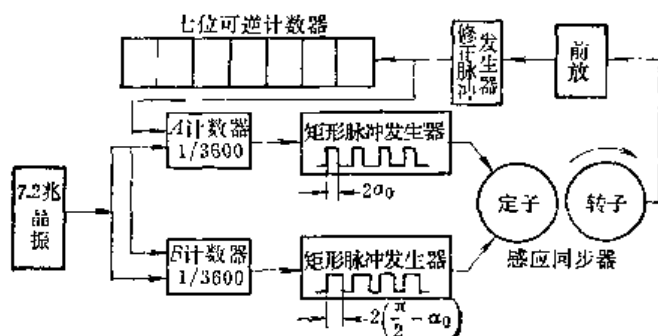


图5-31 脉冲调宽测角系统

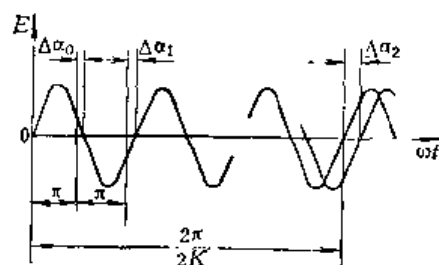


图5-32 感应同步器的零位误差

零位误差的高次随机成份 $\Delta\alpha_{01}$ 主要来自连续绕组导片的分度误差，具有随机的特点，以 K （定子每一相绕组的扇形分段数目）为谐波次数。其特点是两相误差曲线相似。

零位误差的低次系统成分 $\Delta\alpha_{02}$ 由于安装误差（偏心和倾斜），工艺不善，材料变形，使绕组导体产生偏差和电势幅值产生偏差，在它们共同作用下，产生零位误差的低次系统

成分。最常见的是零位误差曲线呈一次（以感应同步器转一圈为一次）或二次谐波。

正交误差 $\Delta\alpha_2$ 两相之间的零位（相差 $\frac{2\pi}{2K}$ ）误差又称正交误差。主要因分段绕组（分段数为 K ）两相之间导体分度偏差所引起的。基本上是一常量。

非有效电势产生的零位误差 在感应同步器输出绕组中，除有效部分（沿径向的导体）产生的有效电势外，其它部分产生的电势统称为非有效电势，它会导致零位误差。产生非有效电势的原因有二：一是端面导片产生的端面感应电势。由端面感应电势产生的零位误差，其特点为以一定的周期变化，产生奇偶数零位点周期变化；二是分布电容性电流流过导体产生的压降，其特点是稳定的奇偶数零位点跳跃。

可根据上述分析及误差的特点，在使用中调整各因素，尽量降低零位误差。总的零位误差 $\Delta\alpha_0$ 对于双相激磁的测角系统会直接产生测试误差。

ii) 电气误差 $\Delta\alpha_D$ 电气误差是两相邻零位点之间任一位置上的误差。从分析知

$$\Delta\alpha_D = \frac{1}{2} \Delta\alpha_0 (1 - \cos 2p\alpha) + \frac{1}{2} \Delta e \sin 2p\alpha + (\Delta e_3 + \Delta e_5) \sin 4p\alpha \quad (5-51)$$

式中 Δe ——电势幅值误差；

$\Delta\alpha_0$ ——相邻零位误差；

$\Delta e_3, \Delta e_5$ ——三次，五次谐波电势幅值。

上式表明，电气误差 $\Delta\alpha_D$ 由三部分组成（图5-33）：与相邻零位误差有关的电气误差；由电势幅值误差产生的电气误差；与函数误差（主要是三次谐波成分，其次是五次谐波成分）有关的电气误差。

感应同步器的精度的确定，目前尚无统一的规定，有些作者认为，最大零位误差 $\Delta\alpha_{0M}$ 为

$$\Delta\alpha_{0M} = \Delta\alpha_{01} + \Delta\alpha_{02} + \Delta\alpha_2 \quad (5-52)$$

$\Delta\alpha_{0M}$ 不一定发生在最大电气误差处，因而感应同步器的精度以下式来确定较为合理：

$$\Delta\alpha = \sqrt{\Delta\alpha_{0M}^2 + \Delta\alpha_{DM}^2} \quad (5-53)$$

b) 测角系统电子线路误差 包括两相电源不对称，移相器的移相误差，前置放大器的噪声、功放级的附加相移，一般会导致角秒量级的误差。

c) 感应同步器的动态误差 前述仅考虑感应同步器的定子、转子相对静止时的情况，所述误差为静态误差。当定子、转子以相对速度 $\dot{\alpha}$ 运动时，则会产生动态误差。

如定子双相激磁，输入相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 的两相激磁电流，在转子输出端产生的感应电势如式（5-50）所示。当定子、转子以相对速度 $\dot{\alpha}$ 运动时，转子中感应电势 e' 为

$$\begin{aligned} e' &= -\frac{d\phi}{dt} - \frac{d\phi}{d\alpha_f} \frac{d\alpha_f}{dt} \\ &= -\frac{d\phi}{dt} - p\dot{\alpha} \frac{d\phi}{d\alpha_f} \end{aligned} \quad (5-54)$$

式中 $\alpha_f = p\alpha$ 为电相位角

因此，输出电压为 U'

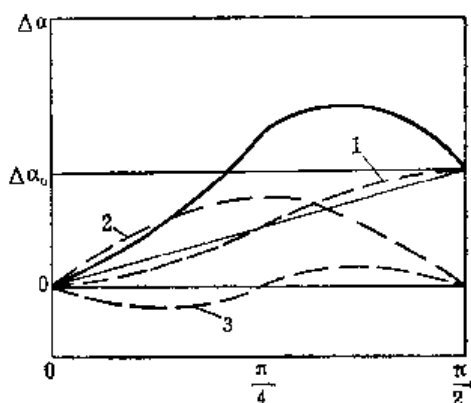


图5-33 感应同步器电气误差

$$U' = U_m \left(1 - \frac{p\dot{\alpha}}{\omega} \right) \cos(\omega t + p\alpha) \quad (5-55)$$

由上式可知：转速 $\dot{\alpha}$ 仅使输出电压幅值略有变化而不产生相位变化。当 $\dot{\alpha}$ 为一常值时，运用于相位工作状态的测角系统将不产生动态误差。

对于转子单相激磁的情况，经移相求和后得到的两路输出电压为

$$\begin{aligned} U'_1 &= U_m \left[\cos \left(\omega t + p\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{p\dot{\alpha}}{2\omega} \sin(\omega t - p\alpha) \right] \\ U'_2 &= U_m \left[\cos \left(\omega t - p\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{p\dot{\alpha}}{2\omega} \sin(\omega t + p\alpha) \right] \end{aligned} \quad (5-56)$$

式中 ε —— 移相误差。

根据上式，动态误差可用近似方法进行估计

$$\Delta\alpha \approx -\frac{\dot{\alpha}}{2\omega} (1 - \cos 2p\alpha) \quad (5-57)$$

测量误差 $\Delta\alpha$ 随转角 α 的变化而变化，其最大值为

$$\Delta\alpha_{\max} \approx \frac{\dot{\alpha}}{2\omega} \quad (5-58)$$

例如 $\omega = 2\pi f_0 = 4\pi \times 10^3 \text{ 1/秒}$ $\dot{\alpha} = 1 \text{ 弧度/秒}$ $\Delta\alpha_{\max} \approx 8 \text{ 角秒}$

综上所述可知：

1) 陀螺漂移测试转台的测角元件，既有应用光栅、也有应用感应同步器的。由于感应同步器具有一系列的优点，因此得到了广泛的应用；

2) 陀螺漂移测试转台用感应同步器多运用于双相或单相激磁的相位工作状态。当转台工作中速度变化较大的场合，如用于测试捷联式陀螺仪的输出梯度时，采用双相激磁相位状态的测角系统可以减少动态误差。单相激磁相位工作状态的测角系统可以提高分辨率，对激磁电源要求不苛刻，在高精度测角系统中得到了广泛的应用；

3) 测角系统的误差包括感应同步器的零位误差和电气误差，电子线路误差，以及动态误差等。感应同步器的零位误差具有一定的规律性，可以根据误差的特点在使用中调整各因素，尽量降低零位误差。

据报导，感应同步器测角系统可达如下指标：

感应同步器精度：在 360° 内任一点误差峰峰值为 ± 0.5 角秒， 1° 间隔上误差峰峰值为 ± 0.2 角秒，在 2.5 赫内噪声为 0.005 角秒；

电子设备静态误差： ± 0.3 角秒；

总误差： ± 0.8 角秒 + 分辨率 0.36 角秒；

动态误差：1 角秒/(弧度/秒)。

二、速率控制系统、力矩反馈回路及其误差分析

以力矩反馈工作状态进行的最常见的试验是翻滚试验。翻滚试验时，通常使转台轴平行于地轴 EA ，陀螺仪刚性地安装在转台上，并使它的输入轴位于与地轴和转台轴垂直的平面内，陀螺仪输出轴或转子轴平行于转台轴。在这些方位上，陀螺输入轴垂直于地轴和转台轴，使陀螺仪对这两种速率都不敏感。转台轴由转台的速率系统控制，以地速的 n 倍

速率转动。绕陀螺仪输出轴的力矩使浮子转动, 信号发生器输出信号电压, 经力矩反馈回路, 以电流或脉冲的形式反馈给陀螺仪力矩器, 产生力矩, 与使浮子转动的干扰力矩平衡。记录力矩电流或脉冲数, 经数据处理, 可得到陀螺仪的漂移率及漂移系数。为实现上述的测试, 测试设备需具备如下两部分:

- 1) 转台应能按测试大纲要求, 提供平稳而精确的转动;
- 2) 具备符合试验要求的力矩反馈回路及读数装置。

下列因素会引起测试误差:

1) 陀螺仪相对空间的取向误差 它取决于: 测试台相对地球坐标的对准; 陀螺仪测试夹具的安装基准面的误差; 测试台基准面的加工精度; 台轴的垂直度; 台轴的摆动; 绕转台轴及倾斜轴的角位置读数精度等。

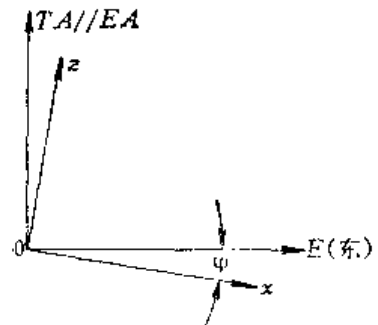


图5-34 测试取向误差

例如, 测试初始方位为转台轴 TA 平行地轴 EA 和转子轴, 输入轴东-西取向。若无取向误差, 则陀螺仪不敏感地速分量。若由于上述的某些原因, 造成取向误差, 以 φ 表之 (见图 5-34)。此 φ 角将产生地速及转台速率分量为陀螺仪所敏感, 产生测试误差 $\Delta\omega$

$$\Delta\omega = (n \pm 1)\omega_e \sin \varphi \quad (5-59)$$

式中 ω_e ——地球自转速率;

n ——转台速率与地速的比率。

若被测陀螺仪精度为 $0.01^\circ/\text{小时}$ 量级的, 则应使

$$\Delta\omega < 0.001^\circ/\text{小时} \quad (5-60)$$

上式作为限制条件, 可得当 $n = 10$ 时, $\varphi < 1.5$ 角秒。当转台转速愈高, 对 φ 的要求亦愈高。

2) 测试台转速的不平稳性 测试台转速有波动, 转速不平稳, 此即速率的不平稳性。由式 (5-4) 及式 (5-6) 知, 相对转速不平稳性 η

$$\eta = \frac{\delta\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \approx \frac{\delta\theta}{\theta} \quad (5-61)$$

转速不平稳性一般要求是由连续翻滚试验和测试捷联式陀螺仪灵敏域和输出线性度的要求提出的。一般在连续翻滚时, 若采取“定时测电流值”采样方法, 转速的波动, 会使陀螺仪在采样时刻相对重力矢量和地速矢量的理论位置与实际位置不一致, 从而引起测试误差。有些作者曾分析了翻滚试验时对转台速率平稳性要求。分析表明, 当陀螺仪精度为 $0.01^\circ/\text{小时}$ 量级, 转台转速为 $10\omega_e$, 双轴滚转试验要求 η 在 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 之间, 单轴滚转试验要求 η 在 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 之间。实际检验转台速率的方法是在一固定的角度间隔内测量其所历经时间的方法, 得到平均速率。若认为测量时间无误差, 根据式 (5-61) 可计算得到该角度间隔的转台位置误差。例如角度间隔为 1° , 则位置误差为 $\delta\theta \approx \eta \cdot \theta = 0.036$ 角秒和 0.36 角秒。转台的速率控制系统难于达到这么高的精度! 为解决此矛盾, 往往可从测试方法上考虑, 如采用间歇翻滚, 可使对转速不平稳性的要求转换成对采样点角位置误差的限制。此时转速不平稳性要求降低, 而位置精度又在可能实现的范围内。如上例, 对双轴台位置误差允许为 16 角秒!

转台测试捷联式陀螺仪灵敏域和输出线性度时, 转台速率作为陀螺仪的输入信号, 以

检验陀螺仪输出信号对于输入角速度的最小感量和线性范围, 此时对速率平稳性的要求, 应根据灵敏域测试时对输出线性度的要求确定。

3) 力矩反馈回路及数据读出的精度和分辨率直接影响测试数据的精度, 而产生测试误差。

1. 转台速率控制系统及误差分析

从图 5-1 可知, 转台速率控制系统的原理是, 根据陀螺测试要求的转速确定速率指令, 系统据此驱动力矩电机使转台转动, 产生速率反馈与输入指令比较, 得误差信号, 继续驱动转台, 形成闭环系统。

1) 速率和位置反馈元件的选择 一种可能的方案是应用测速发电机作为速率反馈元件, 产生一个与转台转速成正比的反馈电压讯号, 此信号与输入的精密指令电压比较, 控制转台转动。这种方案的固有缺点如下: 测速机低速率有死区, 不能满足低速转动的要求; 测速机输出电压波动较大, 使速率平稳性降低; 测速机工作时电刷有较大的摩擦力矩, 对主伺服回路工作有影响。根据分析^[22], 对具有 0.1% 精度的测速机, 电刷产生的摩擦力矩约为 6000 克·公分, 转动部分转动惯量 $J = 2.61 \times 10^4$ 克·公分², 系统频带为 50 赫, 瞬时速率误差 $\Delta\omega = 31.6^\circ/\text{小时}$, 对于转台速率 $\omega = 10\omega_s$, $\eta = 21.6\%$ 。由此可见, 由测速发电机作为速率反馈元件组成的速率系统是不能满足转台对平稳性的要求。为满足转台速率系统高转速平稳性的要求, 可采用由感应同步器组成的数字转速计, 或角增量编码器作为反馈元件。

2) 速率指令的产生 一种方式是应用同步电机的同步转速作为速率指令。同步电机的同步转速经变速装置产生要求的转速, 作为指令速率, 此速率可直接驱动转台, 也可作为参考速率输入系统中。变速装置有电气或机械传动两种。机械传动方案, 由于齿轮或蜗轮传动固有的缺点和误差, 将导致指令速率有 1~5% 的误差。而电气传动方案的精度取决于感应同步器的误差, 亦会有 0.1%~0.3% 的输入误差。

另一种速率指令是数字速率指令, 由高稳定的石英晶体振荡器, 产生高频信号, 经分频后作为速率指令, 振荡器的稳定性可以很高。

3) 数字—模拟速率控制系统 (图 5-35) 这是一种常用的方案。数字—模拟控制系统兼有模拟和数字式系统的优点。数字系统的优点是可以获得比一般模拟技术更高的测量精度和分辨率。但是, 模拟装置能够控制的功率比直接从数字装置得到的功率更高。

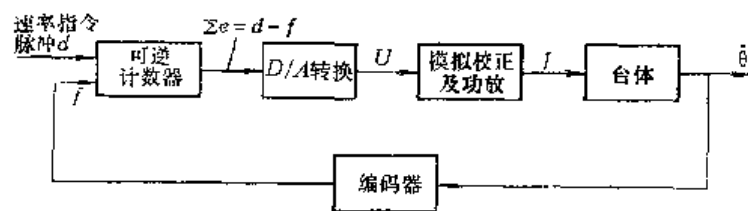


图 5-35 速率控制系统

当精确地以脉冲形式作为速率给定时, 速率系统可视为一位置伺服系统。每给定一个输入脉冲, 经数-模转换, 模拟校正及功率放大, 驱动转台转动相应于分辨率的角度。应用感应同步器作为测角元件, 经角度增量编码器产生位置反馈脉冲。图 5-36 为角速率控制系统应用的一种角增量编码器的方案。感应同步器处于双相激励相位工作状态, 转子产生的感应电势如式 (5-50) 所示。经锁相倍频器将对应机械转角 α 的感应同步器输出的电相移角 $p\alpha$ 无时间滞后地放大, 倍频系数为 10^4 , 经升降分离网络, 从表征不同转动方向的

正负通道输出增量脉冲 f_+ 或 f_- 。上述的系统若能正确地选择参数,可以得到高精度稳定工作的伺服系统。如某一实际系统,应用 360 对极感应同步器,激励频率为 2.5^{kHz} ,用 25^{M} 锁相倍频器组成的速率控制系统,它的分辨率达到 0.36 角秒,精度为感应同步器精度再加上 ± 0.36 角秒。

为保证高精度伺服系统的动静态特性,根据前述,一方面固然需要精确地给定速率和将角位置反馈进行数字编码和数字量化。另一方面应保证这个编码过程不会引入时间滞后,因此系统中的核心部件是分辨率为万分之一的锁相倍频器。锁相回路为一相位随动系统,由于系统固有的特性,有一固定的积分环节,因此回路锁定后,其输入与输出之间不存在频差,仅有很小的相位差,故它能保证输入与输出量化中无时间滞后,其组成如图 5-37。

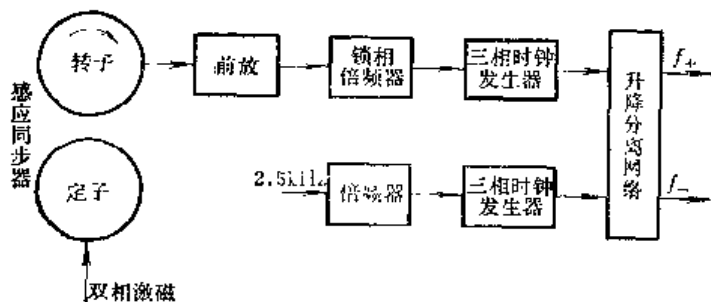


图 5-36 产生角位置反馈的一种方案

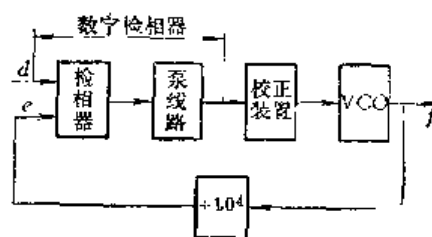


图 5-37 锁相倍频器原理图

根据速率系统的要求,锁相倍频器应将感应同步器输出的相位信息无时间滞后地放大 10^4 倍,因此锁相倍频器应具有很高的分辨率和精度。感应同步器激励频率为 2.5^{kHz} , 360 对极,则回路分辨率应为 $(360^\circ/10^4) = 0.036^\circ$ 电相位角,相当于 $(0.036^\circ/360) = 0.0001^\circ$ 机械转角。此时在压控振荡器 VCO 中心频率上迭加一个增量脉冲。此频率经升降分离网络,可从压控振荡器中分离出一个增量脉冲。此锁相回路的核心部件是由双稳检相器和作为纹-模转换器的泵线路组成的数字检相器,要求它能检测 2.5^{kHz} 频率方波的 0.036° 相移角,在时域上应能分辨 40 毫微秒的时间变化。

一般讲,检相器是一个非线性部件,锁相回路投入工作时,输入与输出之间有较大的频率差,回路首先处于频率跟踪,即捕获过程,如输入输出的频率差在捕获范围内,回路即能被捕获,进入相位跟踪,随着回路的牵引作用,使相位差 θ_s 愈来愈小,最终 θ_s 趋向一个稳定的残余相差,回路进入锁定状态。由此可以看出锁相回路的捕获范围限制了速率控制系统的最大转速。

应用感应同步器组成的角增量编码器作为反馈元件,这种速率控制系统的速率误差主要由下述数项组合而成:

- | | |
|---------------|----------------|
| a) 感应同步器的零位误差 | ± 0.5 角秒; |
| b) 感应同步器的电气误差 | ± 0.5 角秒; |
| c) 系统的跟踪误差 | ± 1 角秒; |
| d) 电子线路误差 | ± 0.72 角秒; |
| e) 数字转换误差 | ± 0.36 角秒。 |

应用下面公式综合,得到

$$\delta\theta_z = \sqrt{\sum_i (\delta\theta_i)^2}$$

$$= 1.27 \text{ 角秒}$$

粗略地得 $\eta = \pm 0.04\%$ (1° 间隔平均)。

2. 力矩反馈回路及其误差分析

进行力矩反馈试验, 陀螺仪安装在转台上, 转台由速率控制系统控制作恒速转动, 而陀螺仪经力矩反馈回路形成闭环回路。浮子处于干扰力矩和控制力矩的平衡状态。力矩反馈回路有模拟加矩和数字脉冲加矩两种。

(一) 模拟力矩反馈回路 有直流和交流两种, 现以直流力矩反馈回路为例, 原理如图 5-38 所示, 方块图如图 5-39 所示。

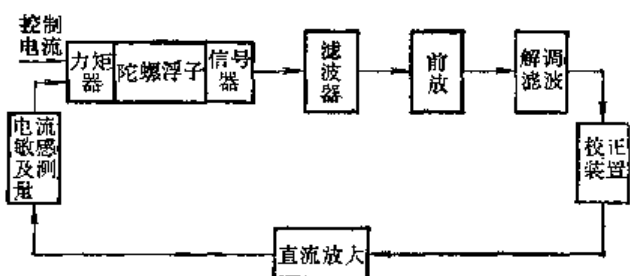


图5-38 力矩反馈回路原理图

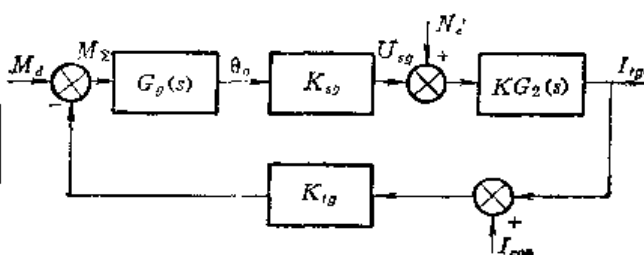


图5-39 力矩反馈回路方块图

图中 $G_g(s)$ ——被测陀螺仪传递函数, 对液浮陀螺 $G_g(s) = \frac{1/c}{s(\tau s + 1)}$;

c ——阻尼系数;

τ ——时间常数;

θ_g ——陀螺仪输出角;

K_{sg} ——信号器的灵敏度;

N_e ——电噪声;

K ——力矩反馈回路的增益;

$G_2(s)$ ——校正环节传递函数;

K_{tg} ——力矩器的标度因数;

I_{tg} ——力矩器电流;

I_{con} ——力矩器控制电流。

若不计噪声及控制电流, 在漂移力矩 M_d 作用下, 系统的传递函数为

$$\frac{I_{tg}(s)}{M_d(s)} = \frac{K_{tg} \cdot K/c}{(K_{tg} K_{sg} K/c) + s(\tau s + 1)} \quad (5-62)$$

稳态时的幅频特性为:

$$\left| \frac{I_{tg}(\omega)}{M_d(\omega)} \right| = \frac{K_{tg} K/c}{\sqrt{\omega^2 + [(K_{tg} K_{sg} K/c) - \tau \omega^2]}} \quad (5-63)$$

当 $\omega = 0$ 时,

$$I_{tg}(0) = \frac{M_d(0)}{K_{tg}} \quad (5-64)$$

且当 $0 \leq \omega < \sqrt{K_{tg} K_{sg} K}/c$, $\tau < 1$ 时,

$$|I_{tg}(\omega)| \propto \frac{|M_d(\omega)|}{K_{tg}} \quad (5-65)$$

上式表明, 在 $0 \leq \omega < \sqrt{K_{tg} K_{sg} K}/c$ 范围内, 力矩器电流 I_{tg} 正比于陀螺漂移力矩 M_d , 与力矩反馈回路的增益 K 无关。然而增益 K 却影响着陀螺仪输出转角 θ_g 的大小, 即影响力矩锁定的精度。陀螺仪输出转角 θ_g 与漂移力矩 M_d 的关系为

$$\frac{\theta_g(s)}{M_d(s)} = \frac{\frac{1}{c}}{(K_{tg} K_{sg} K/c) + s(\tau s + 1)} \quad (5-66)$$

当 $0 \leq \omega < \sqrt{K_{tg} K_{sg} K}/c$, $\tau < 1$ 时,

$$|\theta_g(s)| \approx \frac{|M_d(\omega)|}{K_{tg} K_{sg} K} \quad (5-67)$$

由式 (5-67) 可知, 陀螺仪输出转角 θ_g 与增益 K 成反比关系。一般确定增益 K 时应满足: 当输入速率为 ω_e (地速) 时, 最大的失调角为 1 角秒。失调角将导致陀螺仪的交叉耦合。特别是对于像挠性陀螺仪和动压支承陀螺仪, 存在着较大的位置灵敏度误差, 过大的失调角将产生不能容许的附加漂移。对于挠性陀螺仪, 其位置灵敏度误差 $\dot{\alpha}$ 为:

$$\dot{\alpha} = K_q \beta - K_\varphi \alpha \quad (5-68)$$

式中 K_q ——正交刚度系数;

K_φ ——同相刚度系数;

α, β ——分别对应陀螺仪外环轴和内环轴的失调角。

因此, 确定增益 K 时, 应使由失调角产生的附加漂移远小于被测陀螺仪的精度。动压支承陀螺仪亦可类似处理。

模拟力矩反馈回路有零偏稳定性差, 记录线路增益不稳定, 线性度差, 分辨率较低等缺点。

(二) 脉冲力矩反馈回路 脉冲力矩反馈回路的电流电平图有二位及三位两种。二位制的可能电平为正或负, 三位制的可能电平为正, 零或负。而从加矩方法看, 有断续脉冲加矩和脉冲调宽加矩两种。现以二位调宽脉冲力矩反馈回路说明之。图 5-40 为原理图。

陀螺仪当敏感输入的角速率及干扰时, 绕输出轴即产生转角 θ_g , 陀螺信号发生器就产生交流信号电压 $U_{tg} = K_{tg} \theta_g$ 。此电压经前放、解调、校正, 产生控制电压 U_1 , 此电压与频率为 f_s 的参考锯齿波电压在脉宽调制器内合成。合成后的锯齿波电压围绕零电平正负部分面积不相等, 此电压馈送至脉宽调制器进行电压比较、放大、检测合成电压的零交点, 输出调宽方波 (图 5-41)。调宽方波与频率为 f_q 的数据脉冲一起至量化器。数据脉冲 f_q 既为调宽方波的同步脉冲, 即调宽方波的后沿与数据脉冲的后沿同步, 同时又

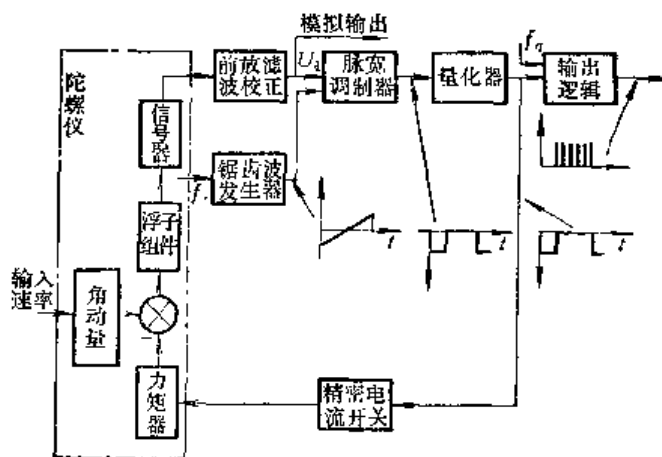


图 5-40 脉冲力矩反馈回路原理图

是量化调宽方波的填充脉冲, 输出至记录装置, 可作为力矩器电流的衡量。由上可见, 量化调宽方波脉冲, 它的脉宽变化为数据脉冲宽度的整数倍。量化调宽方波脉宽的变化反映了误差电压的大小和极性, 并且将此电压进行量化。量化调宽方波送至精密电流开关, 其作用是按量化调宽方波精确地控制电流开关, 以决定通入力矩器的电流方向, 并为精密恒流源向力矩器通入恒值电流 I 提供通道。通向力矩器电流幅值不变, 而持续时间和极性由量化方波控制。通入力矩器的平均电流极性使陀螺仪转子趋向零位。

当陀螺漂移力矩为零时, 锯齿波围绕零电平对称, 陀螺仍受到正、负极性的电流脉冲的作用, 但是在调宽脉冲周期内 $\left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$ 输入的平均电流为零。

当陀螺漂移力矩不为零, 浮子位于零位某一侧时, 电流脉冲所产生的恢复力矩加到浮子上直到其返回零位, 并到另一侧为止。浮子越过零位后, 并不马上受到极性相反的恢复力矩的作用, 而是在力矩脉冲极性改变后的下一个数据脉冲到来时才受到作用。极性相反的力矩脉冲出现以后, 浮子受新极性脉冲的作用重复上述过程。这样浮子围绕零位振荡 (图 5-42)。正、负力矩脉冲不相等, 其差值比例于漂移力矩。当陀螺漂移力矩达到回路最大值时, 量化调宽方波几乎全为正或全为负电平。

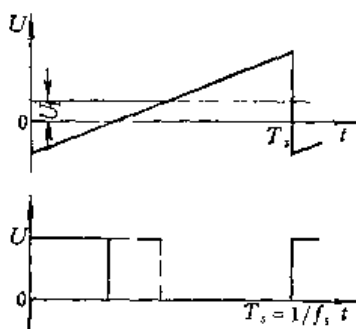


图 5-41 脉宽调制器输出

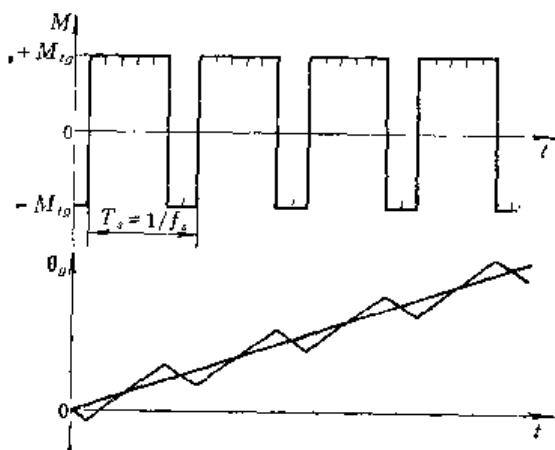


图 5-42 调宽方波波形和浮子的运动

由上述分析可知, 对于模拟力矩反馈回路, 测量出的是力矩 (或电流) 的瞬时值。而对于脉冲加矩回路, 测量出的是对应某一段时间的平均力矩或平均电流。

调宽型力矩反馈回路是采样型的模拟-数字混合系统, 它的采样频率为锯齿波的频率 f_s 。众所周知, 为减少采样带来的相移, 一般应满足 $f_s \geq 10f_o$ 。 f_o 为系统的频带。在迄今已知的系统中, f_s 在几百周至几千周范围内。

数据脉冲频率 f_q 的选择取决于所需工作范围和分辨率。最低的数据脉冲频率 $f_{q \min}$ 为

$$f_{q \min} = \frac{\text{最大输入速率}}{\text{所需姿态量化值 (输入转角/每一脉冲)}} \quad (5-69)$$

一般 $f_{q \min}$ 为 100 千周至几兆周。

1) 数据的获取 为采集数据, 将量化调宽方波与数据脉冲一起送至输出逻辑线路。它按正、负通道输出一串频率为 f_q 的脉冲, 进行可逆计数, 即得到在一定累计时间间隔内的输出脉冲数, 它比例于漂移力矩。

脉冲当量 N 定义为: 每一个数据脉冲 (频率为 f_q) 代表的输入角增量。它等于脉冲高

度乘以对应 $T_q = 1/f_q$ 的脉冲宽度。根据推导, 脉冲当量还等于

$$N = \frac{IK_{\text{力}}}{Hf_q} \quad (5-70)$$

式中 H ——陀螺角动量矩;

$K_{\text{力}}$ ——力矩器的标度因数;

I ——电流脉冲的高度。

2) 数据的测量 在数据输出逻辑线路处, 测量正、负数据脉冲的累计数。具体方法是: 在预先确定的时间间隔内 (一般为整数个锯齿波周期), 在输出逻辑线路的输出端测量正、负脉冲累计数的差值, 并用下式计算对应的失衡力矩 M 值

$$\begin{aligned} M &= \frac{n_+ - n_-}{T} \cdot \frac{IK_{\text{力}}}{f_q} \\ &= \frac{n_+ - n_-}{T} N H \end{aligned} \quad (5-71)$$

式中 M ——失衡力矩;

n_+, n_- ——分别为正、负数据脉冲在 T 时间间隔内的累计数;

N ——脉冲当量;

T ——预先确定的累计时间。

当 $n_+ = n_-$ 时, 失衡力矩为零。当 $n_+ - n_- = 1$ 时, 得到力矩分辨率 m_1

$$m_1 = \frac{NH}{T} \quad (5-72)$$

由上式看出, 力矩分辨率 m_1 与累计时间 T 成反比关系。将上式进一步写成漂移率分辨率 ω_{d1}

$$\omega_{d1} = \frac{N}{T} \quad (5-73)$$

图5-43示出了漂移率分辨率与累计时间 T 的关系。

例如, 被测陀螺仪的随机漂移率在 0.0001 度/小时的量级, 应用脉冲当量 $N = 10^{-6}$ 度/每一个脉冲的脉冲力矩反馈回路, 此时累计时间 T 应大于 0.01 秒。由此可以看出, 在

脉冲力矩反馈回路参数一定的情况下, 增大积分时间, 即是增大累计时间, 可以提高测试的分辨率。这一点在测试数据处理时应加以考虑。

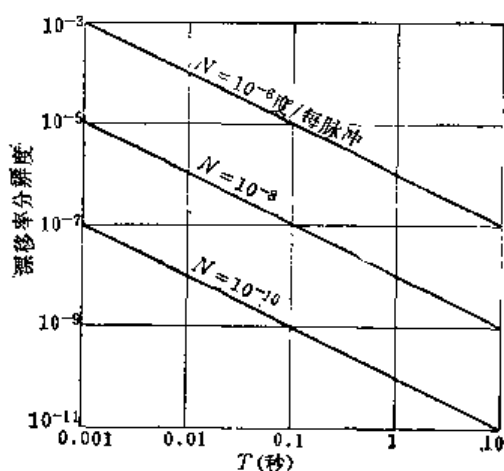


图5-43 漂移率分辨率与累计时间的关系

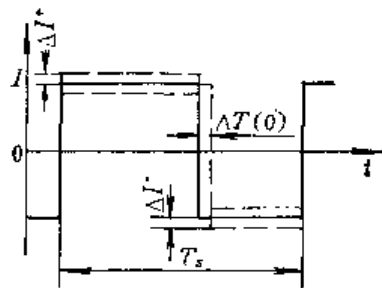


图5-44 电流脉冲的电流误差和定时误差

(三) 脉冲力矩反馈回路的误差分析 主要有以下几项

1) 零偏电流 $I_{\text{零偏}}$ 定义为 当回路输入为零时, 回路输出的平均电流。 $I_{\text{零偏}}$ 会引起测试误差。零偏电流 $I_{\text{零偏}}$ 由下式确定 (图 5-44):

$$I_{\text{零偏}} = -\frac{\Delta I^+ - \Delta I^-}{2} + \frac{2I\Delta T(0)}{T_s} \quad (5-74)$$

式中 ΔI^+ 、 ΔI^- ——分别为正、负极性电流脉冲偏差；

I ——无偏差时电流脉冲幅值；

$\Delta T(0)$ ——零输入时的时间偏差，称定时误差。

由上式可以看出， $I_{\text{零偏}}$ 取决于力矩脉冲的定时误差和电流误差。

二位调宽脉冲力矩反馈回路具有较好的零偏电流稳定性，与系统的噪声，环境振动或固有的系统极限环等引起的随机状态无关。例如某一回路零偏电流对应1度/小时，稳定性为1%，则对二位调宽回路，具有0.01度/小时的零偏稳定性。

2) 回路刻度因数误差 对于应用于捷联式陀螺仪测试用的脉冲力矩反馈回路，由于输入速率变化范围较大，在不同速率下，其电流脉冲的幅值是不同的。将速率分档，在不同的速率档，取不同的电流幅值。回路刻度因数 K 定义为

$$K = \frac{I(\beta) - I_{\text{零偏}}}{\beta} \quad (5-75)$$

式中 β ——输入速率与回路全刻度输入速率之比；

$I(\beta)$ ——对应 β 值时之输出电流。

对于二位调宽脉冲加矩回路，刻度因数误差 ΔK 为

$$\Delta K = \left(\frac{\Delta I^+ + \Delta I^-}{2} \right) + \frac{I}{\beta T_s} [\Delta T(\beta) - \Delta T(0)] \quad (5-76)$$

式中 $\Delta T(\beta)$ ——对应于 β 值之定时误差；

$\Delta T(0)$ ——对应于零输入速率之定时误差。

ΔK 由下列数项组成：

- a) 刻度因数漂移 取决于电流误差 ΔI^+ 、 ΔI^- ；
- b) 刻度因数非线性误差 取决于与速率 β 有关的定时误差 $\Delta T(\beta)$ ；
- c) 量化误差 与回路中的多次模-数转换及量化过程有关；
- d) 温度漂移 特别是恒流源的温漂将导致较大的误差。

实际上，由电流误差 ΔI^+ 及 ΔI^- 引起的零偏电流的大小很容易保持在 10^{-6} 量级，而定时误差引起的零偏电流在细心设计开关线路时才可保持在 10^{-8} 量级。根据现有水平，由定时误差引起的零偏电流至少比电流幅值误差引起的零偏电流大10倍以上。

综合前述内容可知，在陀螺测试中采用数字脉冲力矩反馈回路具有如下的优点：

- a) 测试分辨率高，回路灵敏；
- b) 零偏误差及非线性误差小；
- c) 提高读数累计时间，可降低测试误差，提高分辨率。

当然，脉冲力矩反馈回路缺点在于线路复杂，对元件，器件要求高。

§ 6 实验环境

随着陀螺仪精度的提高，过去为人们所忽略的大量环境因素在测试过程中造成了不可忽略的测试误差。因此，需对环境因素进行仔细分析，妥善地加以抑制和隔离，以便提高测试的精度。这里讲的“环境因素”这个词是指陀螺仪壳体外部的所有物理的，电气的和

其它各种参量，它们对陀螺的输出会产生直接或间接的影响。下面主要从环境条件及基座运动两方面来叙述环境因素造成的影响，对它们的要求以及克服的措施。

一、产生测试误差的环境条件及地基运动

环境条件对测试精度的影响大多是以间接方式起作用的，即通过改变其它的参量而引起。与环境条件有关的参量包括室温、温度梯度、压力、湿度、磁场、尘埃、音响、重力、射频干扰以及人员活动。实验室外的次级因素亦会引起测试误差，这些因素如风速、风向、太阳辐射、降雨雪、大气压力、室外温度、湿度、地下水位以及交通车辆情况等等。

室温的变化会引起一系列的参量的变化，诸如：

- 1) 陀螺仪结构变形和浮液内温度场分布的变化；
- 2) 陀螺仪夹具和转台结构变形；
- 3) 电子线路的温度漂移，如激磁电源、电子组件的温漂等。

室温是一个较难补偿，影响十分复杂的参量。若能对室温进行严格控制，将会大大提高测试精度。

其它的一些环境因素对测试精度的影响是各不相同的，如测试转台支持在无源气动隔振系统上时，室内压力对基座运动就有十分明显的作用；湿度的大小会影响信号线路与静电电荷之间的互电导；大电流导体或电磁器件引起的时变磁场会影响低电平的信号线路的正常工作；装有电子线路的陀螺仪和转台会受到静态地磁的影响等。

噪声是另一种形式的振动干扰，会产生测试误差，会使人疲劳。声震是现代出现的一种音响噪声。例如以 1.2 倍音速在 3000 米高空水平飞行的飞机，将产生一种对地面的冲击波，其压力跃变为 4×10^{-3} 大气压。

室内人员的走动会使转台基础倾斜、振动，并能扰乱室内气流的流型，改变室内温度场的分布。

室外环境经常会引起室内的环境变化。如太阳辐射不均匀会导致建筑物的倾斜。北半球的建筑物因南、北面受日照不同而发生温度变形，使建筑物向北倾斜。建筑物东西方向也会发生倾斜但倾角要小得多。又如，建筑物侧壁受风力负荷也会明显地增加实验室地基的振动，且它的方向因风向不同而异。

建筑物地基的土壤类型最不希望为松软粘土层，当设计不合理时，压在粘土层上的地基会逐渐下沉。

大地干扰和工业干扰会导致地基的有害运动。主要有以下几种：

地震波 远方的地震可通过地震波进行传播。一种是地内波，振幅大于 0.001 厘米，周期约 5 秒，加速度为 $1.6 \times 10^{-6} g$ 的振动。另一种是表面波，振幅为 1 厘米，周期约 20 秒，加速度接近 $100 \times 10^{-6} g$ 的振动。在靠近振源的地方会出现更大的振幅。还有一种自由振动或甚低频地震波。它的周期为 40~50 分钟，加速度接近 $10^{-9} g$ ，在距震中 8000 公里处，大地自由振荡的初始幅值可达 1 毫米。

微地震波 这是一些在整个地球表面上不断移动的微小波动，它与大地震、气象风暴和海洋的波浪有关。最主要的微地震波的周期约 4~7 秒，加速度 $0.8 \times 10^{-6} \sim 6 \times 10^{-6} g$ ，振幅约 0.001~0.03 厘米。还有一些周期更小的微地震波。

地球潮汐 它由月球引力产生的, 具有 12 小时 25 分钟的周期, 它的影响主要是重力加速度 g 的暂时性变化, 量级大约为 $10^{-7}g$ 。不同地理位置其量值是不同的。

地面颤动和当地扰动 主要包括公路交通、铁路运输、机械的运转、风力、建筑物附近的土堆、地下水平面的变化、以及人员在试验场地内的活动等。通常这些扰动具有相当高的频率, 周期小于 0.5 秒, 持续时间亦短, 加速度范围为 $10^{-2} \sim 10^{-5}g$ 。

其它尚有地球极点的漂移, 地球极轴的进动, 地球自转速率的变化等等。地球的极点在小于 9 平方米范围内作无规则的漂移, 地轴进动速度为 $10^{-7}ERU$ 。地磁亦会发生变化, 使重力加速度发生 $10^{-7}g$ 量级的变化。

二、对实验环境的要求²⁷⁾

实验环境的要求取决于被测陀螺仪的精度。欲对新建实验室的环境提出切实的要求, 应预计在未来一段时间内陀螺仪测试的类型及性能; 通过实验和理论分析, 得到陀螺仪在各种环境条件下的响应, 即它的误差灵敏度; 结合陀螺仪的性能提出对实验环境的要求。

限于现有资料, 现在以美国德雷珀 (C. S. Draper) 实验室对超精密陀螺仪进行实验所提出的实验环境要求为例, 说明如何根据被测陀螺仪的精度, 确定对实验室环境的要求。这一段着重于叙述解决问题的思路及方法, 而不拘泥于具体的数值。

1. 预计陀螺仪性能

随机漂移率可达 1.5×10^{-7} 度/小时, 测量频带为 $10^{-7} \sim 10^2$ 赫。

2. 误差灵敏度

环境因素归纳为三方面: 试验台运动、热环境、磁场环境。下面分述误差灵敏度。

1) 试验台运动

a) 角运动 台轴的角运动可分解为绕南-北水平轴、绕东-西水平轴以及绕垂直轴的角运动。它们的误差灵敏度如表 5-4。

表5-4 角运动误差灵敏度

台 轴	主要仪表轴倾斜	基准影响	误差灵敏度	单 位
绕南-北水平轴	东-西水平轴	重力	4.8×10^{-6}	$g/\text{角秒}$
		力速	3.3×10^{-6}	$ERU/\text{角秒}$
绕东-西水平轴	南-北水平轴	重力	4.8×10^{-6}	$g/\text{角秒}$
		力速	3.3×10^{-6}	$ERU/\text{角秒}$
	垂 直 轴	地 速	3.6×10^{-6}	$ERU/\text{角秒}$
绕 垂 直 轴	东-西水平轴	地 速	3.6×10^{-6}	$ERU/\text{角秒}$

b) 角速度 一般认为角速度是由角振动造成的结果。试验台轴绕陀螺仪输入轴的角速度误差灵敏度为 $67 \times 10^{-8}ERU/(\text{角秒}/\text{秒})$ 。

c) 角加速度 试验台轴绕陀螺仪输出轴角加速度的误差灵敏度为 $20 \times 10^{-6}ERU/(\text{角秒}/\text{秒}^2)$ 。

d) 线加速度 试验台线加速度的误差灵敏度见表 5-5。

表5-5 线加速度的误差灵敏度

轴	误差灵敏度	单 位
输 入 轴	0.1×10^{-6} 50×10^{-6}	$ERU/\mu g$ $ERU/g^2 r.m.s$
与输入轴正交	0.1×10^{-6} 50×10^{-6}	$ERU/\mu g$ $ERU/g^2 r.m.s$
输入轴-旋转轴二等分	1×10^{-3}	$ERU/g^2 r.m.s$

测试条件为：陀螺仪 $D_I = 0.1 ERU/g$

$$D_S = 0.1 ERU/g, D_{IS} = 10^{-3} ERU/g^2, D_{II} = 5 \times 10^{-3} ERU/g^2$$

$$D_{SS} = 5 \times 10^{-5} ERU/g^2, 1 \mu g = 10^{-6} g, g^{rams} \text{ 为均方值}$$

表中脚标为：I ——对应陀螺仪输入轴 x ；

O ——对应陀螺仪输出轴 y ；

S ——对应陀螺仪转子轴 z 。

2) 热环境 热环境有两方面的变化：

a) 交界面上的平均温度变化 陀螺仪与热环境之间有机械交界面，空间与陀螺仪绝热材料间的非机械交界面。误差灵敏度为 $0.4 \times 10^{-3} ERU/^{\circ}F$ 。（ $^{\circ}F$ ——华氏温标）；

b) 交界面上横向环境温度梯度的变化，误差灵敏度为 $1 \times 10^{-3} ERU/^{\circ}F$ 。

3) 磁场环境 陀螺仪使用磁性材料，而浮子内又通过电流，因此由陀螺仪磁屏蔽不完善，外界干扰磁场会与浮子内的磁场相互作用而影响浮子的力矩平衡。磁场环境误差灵敏度见表 5-6。

表5-6 磁场环境误差灵敏度

磁 场 环 境	误 差 灵 敏 度 ($ERU/\text{高斯}$)
平均标称磁场	40×10^{-6}
陀螺仪横向额定磁场梯度	400×10^{-6}
平均磁场量的变化	40×10^{-6}
陀螺仪横向磁场梯度变化	400×10^{-6}

3. 对试验环境的要求

由于许多因素均会引起测试误差，因此用误差估计的方法，即用误差灵敏度来确定对每一种环境因素的要求，这是一种近似的方法。假如每一种环境因素所造成的误差相当于陀螺仪性能的 $1/10$ ，最后各项误差按均方根进行合成，由此得到对环境的要求，见表 5-7。

表5-7 环境要求

项 目	环境要求	单 位	项 目	环境要求	单 位
试验台角位移	3×10^{-4}	角 秒	陀螺仪横向温度梯度变化	1×10^{-6}	$^{\circ}F$
试验台角速度	1×10^{-8}	角秒/秒	平均标称磁场	3×10^{-5}	高斯
试验台角加速度	5×10^{-5}	角秒/秒 ²	陀螺仪横向额定磁场梯度	3×10^{-6}	高斯
试验台线加速度	1×10^{-2}	μg	平均磁场量变化	3×10^{-5}	高斯
	1×10^{-3}	g^2rams			
平均环境温度变化	3×10^{-6}	$^{\circ}F$	仪表横向磁场梯度的变化	3×10^{-6}	高斯

由上述内容可以看出，为测试鉴定超精密的陀螺仪，对环境的要求是十分苛刻的，它是妨碍进一步提高测试精度的主要限制之一。试验台的运动和热环境的变化，特别是试验台的角速度是造成测试误差的主要根源。

上述的环境要求应作为改进环境条件，实行监控和补偿的根据。

上述的结论是适合于超精密陀螺仪的，对于精度较低的陀螺仪，亦可根据上述的思路

和处理方法提出实验环境要求。

三、降低环境因素影响的措施

一般地讲,降低环境影响的措施有三类:降低环境干扰因素;陀螺仪相对干扰源进行屏蔽和隔离;对环境干扰因素进行监测和补偿。这三种方案可以单独运用,亦可同时采用。

1. 正确选择实验室地址

一般地讲,选址应考虑:

1) 选择地质稳定的地区,不要选在地质断层和断层线附近;

2) 土质特性要好,对振动有较强的衰减特性。土质特性如弹性、水份含量和均匀性决定了当地振动的主周期。岩基有高弹性值,低阻尼值和小的振幅。干燥密集均匀的冲积层和洪积层泥土的弹性较小,阻尼值较大,潮湿泥土的弹性小,阻尼好。应在所选位置钻探,确定地层结构和地下水位。如果地下水位高于测试台地基的最低平面,则要有排水措施。同时水位的变化,亦会引起地基的倾斜。地基中的水有传振和降低隔振的效果;

3) 远离公路线和铁路线;

4) 远离人类活动区,指有低频重复外部扰动的地区,如落锤、往复式压缩机、重型机床以及停车场、公园等公共场所。大型的公共场所人满人空时可能引起地基发生较大的倾斜变化;

5) 选址应考虑温度、湿度、压力、风力、阳光辐射变化易于控制的地方,这主要依靠正确选址来实现。例如有将实验室设置在一个正开采着的盐矿中不使用部分,距地面约330米处的方案。地基用天然岩盐凿成。优点是:提供抗震的岩层地基;外界温度易于控制,减少空调费用,避免了风力及阳光辐射造成的影响;避免外界射频干扰。主要缺点是子午线引进困难。

2. 屏蔽与隔离

室内温度、湿度、音响、灰尘的控制可采用超净技术。良好的空调系统可保持温度变化范围在 $\pm 1^{\circ}\text{C}$ 以内,湿度控制在30%~50%之内。墙壁类似广播电台播音室的隔音墙壁;人员及器材进出口采用气密技术进行特殊处理。为降低人员活动对转台地基的影响,可采用浮动地板,此地板支承在实验室承力墙上,人员走动对转台地基影响大为降低。

射频及磁屏蔽应在房间建筑上采取措施。

对地基运动的隔离有三种措施:

1) 岩基联结法 把测试转台地基直接与地下的岩基固联在一起,这对地震微弱的地区是防止转台倾斜和振动的好办法。它的主要优点是有效地把测试转台和地基振动分离开。例如某工厂实验转台地基为170吨混凝土块,坐落在地下岩石上,使测试转台像一石墩,具有极大的质量。典型结果表明,倾斜由几角秒减少至0.6角秒以下。这种方法适用于岩基结构坚实的地区。

2) 被动式隔离 应用一些减振元件来吸收地基运动和震动,从而减少地基运动对转台的影响。大体上有两类:机械弹簧式和气墩结构式。这种方法可以衰减较高频率的干扰,如5赫芝以上。

3) 主动式隔离 主动式隔振系统用来消除低频振动,响应约在0.03~0.05赫芝。某

一测试室典型断面图见图 5-45。该主动隔振系统由三个加速度敏感元件, 反应物质与地震物质间的力发生器和三个伺服控制回路组成。敏感元件测量反应物质的加速度, 经伺服控制回路及力发生器, 使基座产生一相反运动, 迫使基座处于微小加速度状态。一共有三套系统, 故可控制基座沿三根轴方向的运动。

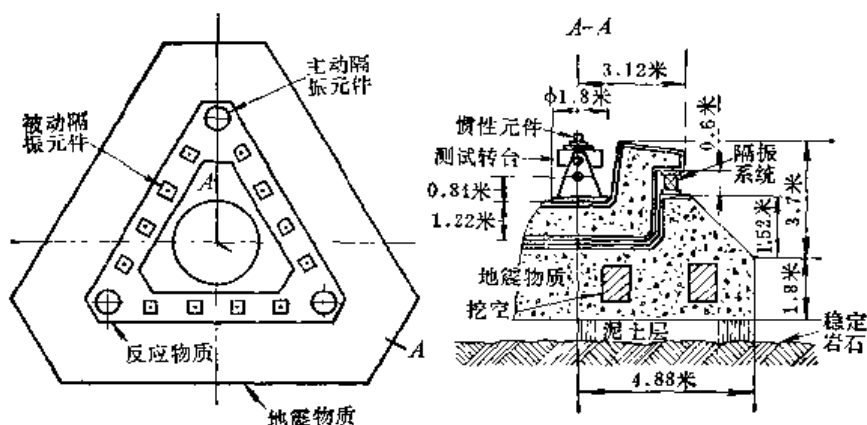


图5-45 某测试室的防震措施

3. 监控与补偿

经采用适当措施将有害因素抑制或隔离后, 可以进一步在监控的基础上进行补偿。陀螺仪的输出量, 除对重力加速度敏感外, 对其它变量, 如浮子运动、温度、电源等亦是敏感的, 可以建立这些变量对输出量的函数关系, 并通过实验方法建立各个灵敏度, 即输出量对某一输入干扰量的变化率。也可在测试过程中监测这些参量的变化, 即可求出输出量的相应变化, 从而进行补偿, 提高测试精度。详见第六章。

§ 7 转台的初始对准

地球的自转速率矢量是陀螺仪测试中的主要基准之一。测试中要求陀螺仪取不同的初始方位, 因此转台亦要求有初始对准。对准精度如何要求呢? 与前相似, 如转台速率为10倍地速, 被测陀螺仪精度为0.01度/小时, 则要求不对准误差不应大于0.001度/小时, 初始对准误差不大于1.4角秒。可见, 初始对准精度要求是很高的。

转台初始对准由下列两步组成:

1) 调整方位轴, 使转台的倾斜轴处于与当地子午面相垂直, 或在与子午面相平行的位置;

2) 调整倾斜轴, 使转台台面倾斜当地纬度角 φ 。以上调整在进行水平调整后进行。

上述第二步可由转台本身的倾斜轴倾斜, 锁定, 读出装置和微调装置保证其精度。第一步需以北极星为基准, 建立方位基准, 然后以此为准调整转台方位轴。

方位基准建立的方法有:

1) 天体方位法 用经纬仪直接瞄准北极星, 旋转经纬仪的光轴, 即可获得方位基准。这种方法要求实验场地能够直接对北极星进行观察;

2) 陀螺罗经法 当实验室直接观测北极星有困难时, 可应用此法。但此法精度稍低。详情可参阅有关资料。

应用上述方法所得方位基准, 除一般建筑物允许, 可以经常观测北极星, 检查方位基

准外, 常将应用上述方法所得之基准贮存在实验室内。方位基准的贮存方法有:

1) 方位基准线 对北用的自准直经纬仪按方位基准线进行定位。方位基准线可以是固定基础上的刻线, 或是经纬仪光轴本身。若方位基准线准确地代表北向方位, 则陀螺漂移测试台的对准, 可以通过经纬仪光轴对准与转台轴垂直的平面反射镜, 并与其法线平行, 然后通过转台方位轴的调整, 实现方位对准。

2) 光学平面镜 将应用天体方位法测得的方位基准, 转移到固定的而又可精确调整的平面反射镜上, 此平面镜的法线, 代表了方位基准。应用自准直经纬仪, 可将方位基准复现。

对准精度取决于经纬仪光学系统的分辨率及精度。这种方法的局限性是经纬仪正常工作的高度范围受平面镜大小的限制。

3) 波罗棱镜。

§ 8 陀螺测试误差源●

一、测试误差的分类

陀螺仪漂移误差模型为:

$$\begin{aligned}\omega_d = & D_0 + D_x g_x + D_y g_y + D_z g_z + D_{xx} g_x^2 + D_{yy} g_y^2 + D_{zz} g_z^2 \\ & + D_{xy} g_x g_y + D_{xz} g_x g_z + D_{yz} g_y g_z + \delta\omega\end{aligned}\quad (5-77)$$

式中符号同前。 $\delta\omega$ 为误差剩余项, 它包含陀螺仪自身漂移的不定性误差, 误差模型的不完整性; 还包括测试设备, 环境变化等因素引起的测试误差。

1. 若按产生误差的来源, 测试误差则可分为

- 1) 理论误差 如模型的不完整性, 数据处理方法在理论上的缺陷;
- 2) 主要基准误差 见 § 5 及 § 6;
- 3) 测试设备产生的规律性误差及不定性误差;
- 4) 环境条件变化产生的规律性误差及不定性误差。

2. 按误差产生的途径可分为

1) 性能误差 由于各种激励不对应于额定条件, 可导致陀螺仪性能的变化, 产生性能误差;

2) 不对准误差 包括初始对准位置误差及瞬时有对准位置误差;

3) 数据测量误差 测试数据产生过程中所产生的误差。

3. 按误差对不同频率的响应可分为

1) 静态误差 如转台的制造误差;

2) 动态误差;

3) 长期缓变误差 随着时间的推移和环境的变化, 导致台体的倾斜, 以及电子设备工作点的漂移, 元器件的老化等所产生的测试误差。

● 陀螺测试误差源是多种多样的, 具体情况不同时会产生新的测试误差。本节仅考虑测试过程中所产生的一些主要误差, 在实际工作中应视具体情况不同而有增减。

二、测试误差源

下面分析测试过程中所产生的不对准误差,性能数据误差,测量数据误差,以便在进行测试误差分析时加以考虑。环境因素变化造成的误差在§6中分析,不再赘述。

1. 不对准误差

包括初始方位对准及瞬时对准的误差。对于对准的要求,与试验形式有很大关系。为估计不对准所造成的误差,假设以力矩反馈试验,并以影响最大的初始对准方位——陀螺仪输入轴垂直转台轴,转台轴平行地轴的方位,且转台以 $10\omega_0$ 旋转,进行粗略地估计。

1) 方位基准误差;

2) 当地纬度基准误差;

以上二项为子午线引进和方位基准建立所产生的误差。

3) 转台按方位角及纬度角对准误差,包括转台方位角及倾斜角读数误差,及锁定后“暗爬”所造成的误差。此误差一般在5角秒左右,将引起0.004度/小时的速率输入误差;

4) 陀螺仪安装基准面误差,一般在2角秒左右,将引起0.0012度/小时的速率输入误差;

5) 陀螺仪测试夹具上,陀螺安装面与基面的不垂直或不平行度误差。此误差一般为角秒级,将引起0.001度/小时~0.003度/小时的速率输入误差;

6) 陀螺测试夹具在转台工作台上按装对准误差,一般最大不超过5角秒,将引起0.004度/小时的速率输入误差;

7) 转台台面与旋转轴线不垂直度误差,一般不超过1角秒,将引起0.0007度/小时的速率输入误差;

8) 转台主轴回转精度引起的误差角,一般为1角秒,将引起0.0007度/小时的速率输入误差;

9) 转台主轴与倾斜轴之间的不垂直度误差,一般为1.5角秒,将引起0.0012度/小时的速率输入误差;

10) 转台速率不平稳性误差引起陀螺仪相对理论位置的误差;

11) 转台位置给定状态时,位置误差一般为几角秒。

例如某陀螺仪经计算,位置误差灵敏度为 $\left(\frac{\partial \omega_d}{\partial \theta}\right)_{\max} = -0.37$ 度/(小时·度),则位置给定状态的位置误差将产生0.001度/小时的漂移误差。

上述1)~9)项误差合成后形成总的不对准误差,采用下式粗略地估计合成误差

$$\delta_z = \sqrt{\sum_i \delta_i^2} \quad (5-78)$$

但有时可通过适当改变测试程序,如使转台轴一次向上,一次向下,所得数据处理后就可部分地消除不对准误差,但这样势必会引起新的误差,且使测试时间延长。

2. 性能数据误差

主要误差源有:

1) 50赫芝交流电源电压的波动;

- 2) 电子设备应用的交直流稳压电源的电压波动;
- 3) 陀螺转子马达三相交流电源的频率不稳定性及电压不稳定性, 以及相位不稳定性;
- 4) 信号发生器激励电源的频率不稳定性及电压不稳定性;
- 5) 陀螺温控线路的温控精度;
- 6) 上述各种电子线路输出(频率、电压、电流等)随环境温度的变化;
- 7) 力矩器刻度因数的非线性误差。

3. 测量数据误差

由于测量元件, 电子线路以及数据处理方法的误差均会产生测量数据误差。主要有以下几种:

- 1) 测量元件的误差 如感应同步器或光栅的误差, 以及力矩反馈回路的标准电阻误差等;
- 2) 测量电子线路的误差 如测角电子线路误差, 力矩反馈回路误差等;
- 3) 数据的转换误差;
- 4) 计时误差;
- 5) 随环境条件变化, 测量元件及电子线路的输出变化, 主要是指对温度的灵敏度。

应再一次强调, 上面仅考虑了主要的测试误差源, 误差项和误差源会随测试条件、测试方法以及一些其它的原因的变化而有所增加, 因此应根据具体条件进行具体分析。

第六章 计算机在陀螺仪测试中的应用

计算机已广泛地应用于各技术领域。在陀螺仪测试中应用计算机来控制测试台可提高陀螺仪测试的精度；应用计算机进行数据处理，从而分析陀螺仪漂移的起因，研究陀螺仪漂移的补偿，可提高陀螺仪的使用精度；由于计算机的参与，可使整个陀螺仪测试过程实现自动化。

§1 测试台的计算机控制

测试台计算机控制的主要目的是提高陀螺仪的测试精度，以及提高陀螺仪的测试自动化程度。

计算机对测试台的控制主要是同步速率状态的控制、数字定位状态控制和程序控制，同时对整个测试装置进行巡回检测，故障诊断和监控。其系统原理图见图6-1。现分析如下：

1) 巡回检测、报警系统是用来对整个测试系统的主要参数、波形进行测量的，如电压、电流、频率、时间间隔、功率、温度、压力及信息波形。由计算机进行分析，判断各部分运行是否正常。判断程序需预先设计并存入计算机内。参量分析只需检验其数值是否在预定的范围内，从而判断有无故障以及故障出现在那里。而波形分析就需要波形识别程序。为此需测量波形的时间采样 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，可把它看成 n 维向量 \bar{x} 。从 \bar{x} 中选择提取重要的特征 \bar{y} ，依据特征 \bar{y} 判断是否在正常区域内。区域边界由 \bar{y} 的某函数 $g(\bar{y})=0$ 给出，在区域内为正常，在区域外为故障。因此判断是否在区域内可归结为判断 $g(\bar{y})=0$ ，

而在区域外时 $g(\bar{y})>0$ 。这样波形识别归结为正常与故障的分类器，见图6-2。例如当信号波形为一定重复频率 f ，一定占空比 δ 和一定幅度的脉冲序列，其采样序列为 \bar{x} 。 f ， δ ， A 三个特征即为 \bar{y} ，该三个特征的允许范围即为 $g(\bar{y})$ ，首先由计算机分析这三个特

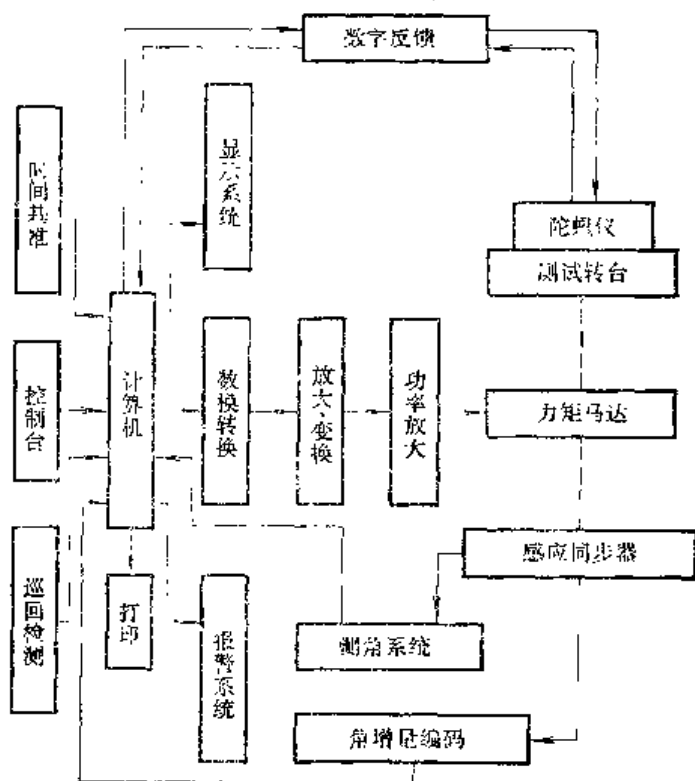


图6-1 计算机控制原理图

征, 特征在范围内为 1, 在范围外为 0, 然后都给与门。即只要一个特征不符, 或幅度过高过低, 或占空比过大过小, 或重复频率过大过小, 都判断为故障, 只有三个特征全符合则判断为正常。见图 6-3。

故障检测分析应从大局入手, 若大局正常, 则局部就不需检测。若大局不正常再分别检测各个局部, 逐步找出故障发生的地方。在整个陀螺仪测试过程中, 需对一些重要参量进行监控, 出现故障及时发警报。

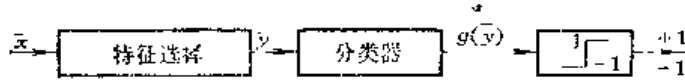


图 6-2 波形识别原理图

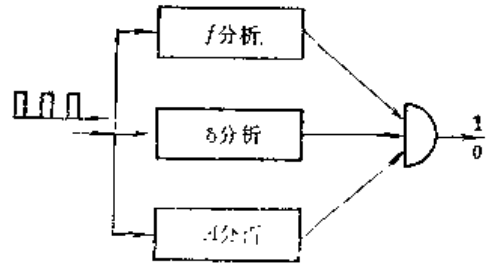


图 6-3 故障分析判断原理图

2) 同步速率状态是计算机控制的工作状态的基础。同步速率是以地球转速 ω_e (15.041 度/时) 为单位。根据需要可控制产生 ± 0.01 至 1999.9 倍地球转速, 以及其他特殊要求的转速, 如 $\omega_e \sin \varphi$ 及 $\omega_e \cos \varphi$ 。 φ 为当地纬度角。

同步速率控制系统是用增量控制实现的。转台转角 θ 用感应同步器测量, 它把 θ 首先转变为交流相位信号 ψ , 经锁相环路倍频, 再经升降分离, 使每增加 (或减少) 一个 $\Delta\psi$ (对应一个 $\Delta\theta$) 即输出一个脉冲。 $\Delta\theta$ 为角增量亦即脉冲角当量或角分辨率, 它可以是 0.0001 度, 也可以是 0.00001 度。

同步速率状态控制系统计算结构图如图 6-4。

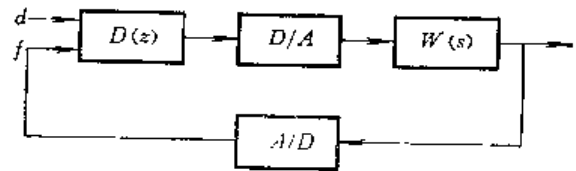


图 6-4 同步速率控制系统计算结构图

图中 $D(z)$ 为计算机运算数学模型的 z 变换式。 $W(s)$ 为连续部份的拉氏变换式, 即传递函数。 D/A 为数-模转换。 A/D 为模-数转换, 即角增量编码。 d 是给定脉冲, 在同步速率状态, d 是等间隔脉冲, 每秒有多少个脉冲, 就要求转台每秒转过多少个 $\Delta\theta$, 如果 d 脉冲是等间隔的, 那么转台就以等速运行。 f 是 A/D 的输出, 转台每转过 $\Delta\theta$ 角, 即输出一个脉冲。在 $D(z)$ 中, d 和 f 进行减法, 得误差信号 x_k , 经数字校正后得数字控制信号 e_k , 再经 D/A 转换成连续控制信号 u , u 经过变换、功放至马达而成台面转角 θ , 从而构成闭环系统。在采样周期 T 内, 计算机应完成全部数学运算。

3) 数字定位状态和同步速率状态基本相同, 只是给定脉冲总数 N 达到要求的对应转角时, 即停止 d 脉冲输入, 于是转台以给定速率转到给定位置时, 即停下来。只需把程序存在计算机内即可实现要求的速率和定位。

4) 程序控制状态是根据不同的实验要求, 编好整个试验程序, 存在计算机中。在伺服试验时, 程序应包括计算机自检, 陀螺仪启动, 陀螺仪运行参数检测和分析; 启动转台控制电路, 控制电路的检测和分析, 系统闭路, 大偏差归零, 伺服跟踪陀螺仪, 数据处理, 打印, 试验结束时系统停机程序等。在翻滚和间歇翻滚试验时还应包括数字反馈系统即力矩反馈系统的启动、检测和分析, 转台自动转位, 停留等程序。

程序控制使整个试验过程自动化, 由于试验过程中已不需要人的操作和走动, 从而减少了测试系统的随机干扰, 使陀螺仪测试的精度提高, 自动化程度和可靠性也提高了, 减

轻了人的劳动。

5) 对计算机控制系统的分析设计可在时域进行。在时域分析的实质是：在采样周期 T 内求开环系统响应，在各采样点 kT 上改变采样值，考虑初始条件的衔接，在采样点和采样点间交替逐点逐段的分析系统的响应过程。在各采样点上是做闭环分析，而在采样点之间是做开环分析。这一分析需自启动开始，在时域分析可考虑量化误差的影响，所以计算精度高，但计算量大。一般在分析设计工作中就需计算机辅助设计。

在量化误差影响不大时，作为工程近似，可用 z 变换法在 z 平面分析综合。若只关心各采样点的转角值 θ_k ，用 z 变换计算尤为简便。例如在图 6-4 中，设与 $N(s)$ 对应的微分方程式 (6-1)：

$$a_n \frac{d^n \theta}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \theta}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \theta = U_K \quad (6-1)$$

首先讨论在时域分析方法。

设初始条件为

$$\left(\frac{d^i \theta}{dt^i} \right)_{t=0} = \theta_0^i \quad (6-2)$$

作拉氏变换得

$$\int_0^\infty e^{-st} \theta(t) dt = \theta(s) \quad (6-3)$$

各阶导数拉氏变换可用部分积分法求得

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{d\theta}{dt} dt = -\theta_0 + s \int_0^\infty e^{-st} \theta(t) dt = -\theta_0 + s\theta(s) \quad (6-4)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{d^i \theta}{dt^i} dt = -\theta_0^{(i-1)} - s\theta_0^{(i-2)} - \dots - s^{i-1} \theta_0 + s^i \theta(s) \quad (6-5)$$

若令

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (6-6)$$

$$N_0(s) = a_n \theta_0 s^{n-1} + (a_n \theta_0^{(1)} + a_{n-1} \theta_0) s^{n-2} + \dots + (a_n \theta_0^{(n-1)} + a_{n-1} \theta_0^{(n-2)} + \dots + a_0 \theta_0) \quad (6-7)$$

于是式 (6-1) 改写为

$$\theta(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)} + \frac{U_K(s)}{D(s)} \quad (6-8)$$

式中 $\frac{N_0(s)}{D(s)}$ —— 初始条件响应，

$\frac{U_K(s)}{D(s)}$ —— 对输入信号的响应。

这样即可求得开环响应

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} e^{st} \theta(s) ds \quad (6-9)$$

式 (6-8)，式 (6-9) 即为采样点间的响应。 $k \in [kT, (k+1)T]$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ 。它实质上是考虑初始条件下开环分析。式中之 U_K 是在采样点上的采样值，下边逐步求取 U_K 。首先把计算机运算关系的 z 变换式 $D(z)$ 展开，它的运算关系为：

$$x_K = d_K - f_K \quad (6-10)$$

$$\sum_{i=0}^n b_i e_i = \sum_{i=0}^m c_i x_i \quad (6-11)$$

式 (6-10) 表示: x_k 为 d_k 脉冲数与 f_k 脉冲数之差。 f_k 为转台转角 θ 增量脉冲数, 即为 $\left(\frac{\theta}{\Delta\theta}\right)$ 的整数部分, 记为

$$f_k = E\left[\frac{\theta}{\Delta\theta}\right] \quad (6-12)$$

式 (6-11) 为 $D(z)$ 的展开式, 有如数字滤波器, 它起数字校正的作用。

$$D(z) = \frac{\sum_{i=0}^m c_i z^i}{\sum_{i=0}^n b_i z^i} \quad (6-13)$$

U_k 即是 e_k 的保持, 如为零阶保持, U_k 在 $[kT, (k+1)T]$ 内保持 $t = kT$ 时之 e_k 值, 并在该区间内保持常值, 于是有

$$\frac{U_k}{e_k} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (6-14)$$

在分析了各环节的数学关系式后, 即可进行系统的闭环分析, 分析步骤为:

首先令 $k = 0$, 即分析 $t \in [0, 1]$ 区间。 $t = 0$ 时转台静止不动, 无角增量, 由式 (6-12) 知 $f = 0$, 取初始值 x_0, e_0, u_0 。由式 (6-8), 式 (6-9) 得 $\theta(t)$, 从而可计算各阶导数在 T 时之值 $\theta^{(i)}(T)$, 它们作为下一周的初始条件。下一步取 $k = 1$, 即分析 $[T, 2T]$ 区间的响应。此时 T 作为 t 起点, 用式 (6-12), 式中 θ 代以 $\theta(T)$ 值, 取整数增量得 f_1 。由式 (6-10) 得 x_1 , 由式 (6-11) 得 e_1 , 由式 (6-14) 得 u_1 , u_1 在 $[T, 2T]$ 区间保持 e_1 之常值。由式 (6-8), 式 (6-9) 及 $\theta^{(i)}(T)$ 得在 $[T, 2T]$ 间之过程 $\theta(t)$ 。此 $\theta(t)$ 再代 $t = T$ 即为 $\theta(2T)$ 作为下一周的初始条件, 如此迭代下去即得整个过程, 若将上述过程排成程序, 即可在计算机上分析。若在数字模拟混合机上分析设计这类系统尤其方便。

下面以零阶保持为例说明 Z -变换法分析步骤。开环 Z -变换有

$$W(Z) = \frac{\theta}{e}(Z) = (1 - Z)Z \left[\frac{W(s)}{s} \right] \quad (6-15)$$

式中 $Z(\quad)$ 表示对括号内进行 Z 变换。

闭环系统的 Z 变换式为

$$\Phi(Z) = \frac{\theta}{d}(Z) = \frac{D(Z)W(Z)}{1 + D(Z)W(Z)} \quad (6-16)$$

若系统稳定, 要求特征方程

$$1 + D(Z)W(Z) = 0 \quad (6-17)$$

之根在单位圆内。当 Z 之根全等于零, 即在零点有 n 阶重根时, 得有限记忆系统, 即

$$1 + D(Z)W(Z) = Z^n = 0 \quad (6-18)$$

此时由式 (6-16) 式 $\Phi(Z)$ 将为 n 项有限式

$$\Phi(Z) = \sum_{i=1}^n g_i Z^{-i}$$

式中 g_i —— 由系统参数决定的常数。

此时系统响应仍由 (6-16) 式得

$$\theta(kT) = \sum_{i=1}^n g_i d[(k-i)T] \quad (6-19)$$

系统只记忆有限的 n 步, 用式 (6-19) 分析 θ_k 过程极为方便。当系统为无限记忆时, 由于距离 k 越远衰减越甚, 故在系统稳定的条件下亦可取前有限项来近似计算 θ_k 过程。要求计算精度高时可多取些项。仍可按式 (6-19) 式计算整个暂态过程。

6) 在进行伺服测试中, 启动陀螺仪和转台时, 可能出现大偏差, 这将导致控制系统饱和, 而不能投入正常工作。在计算机控制时, 可把偏差信号输入至计算机, 计算机按预编程序切换系统参数, 使大偏差下归零平稳。或按最优控制方法归零, 归零后再切换成小偏差高精度伺服状态, 从而保证了大偏差下的归零及小偏差下的伺服精度。

§ 2 用计算机进行数据处理, 研究测试误差 及陀螺仪漂移的补偿

数据处理的任务及方法已在第四章中介绍过, 各种方法的计算常需在计算机上完成。

1) 首先研究测试台误差的计算机补偿, 陀螺漂移测试台及测角系统, 尽管精度很高, 但仍存在误差。设有

$$y_k = \theta_k + \Delta_k + e_k \quad (6-20)$$

式中 y_k ——测角系统在 k 时刻的读数;

Δ_k ——测角系统的有规律误差;

e_k ——测角系统的随机误差;

θ_k ——转台转角的真实值。

Δ_k 中包括感应同步器的零位误差和函数误差。在转台的检测中, 用精密光学仪器检测可以得到误差曲线 $\Delta(\theta)$, 把它存入计算机, 在转台运行过程中由计算机将 Δ_k 扣除, 从而有规律的误差即得补偿。

e_k 即为随机误差, 它没有确定规律只有统计规律。 e_k 的补偿只能用滤波的方法。由于 e_k 是由随机干扰造成的, 当 T 足够大时, 可认为 e_k 间是不相关的, 即把 e_k 看成是白噪声, 而 θ_k 在陀螺测试中变化是缓慢的, 在 T 内可看作是常数。故有

$$\left. \begin{aligned} \theta_k &= \theta_{k-1} \\ Z_k &= \theta_k + e_k \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

式中 Z_k ——补偿 Δ_k 后之测角读数, 即

$$Z_k = y_k - \Delta_k$$

现在即可补偿随机误差 e_k , 式 (6-21) 上式可看成是状态方程, 下式看成是测量方程, e_k 为零均值白噪声序列。用卡尔曼滤波 (见本章附录) 得 θ_k 的估计 $\hat{\theta}_k$ 为

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k (Z_k - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (6-22)$$

式中 $K_k = \frac{p_k}{p_k + R}$,

$$p_k = \frac{p_{k-1} R}{p_{k-1} + R}$$

$p_0 = \bar{\theta}_0^2$ 为对初始角的均方估计。

可以预先计算出 K_k 值, 后由计算机按 (6-22) 式递推估计 $\hat{\theta}_k$, 进一步分析式 (6-22), 可看出它就是以 Z_k 的平均值作为 $\hat{\theta}_k$, 因为

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{p_0 R}{p_0 + R} \\ p_2 &= \frac{p_1 R}{p_1 + R} = \frac{p_0 R}{2p_0 + R} \\ p_k &= \frac{p_0 R}{k p_0 + R} \end{aligned}$$

由此可得

$$K_k = \frac{p_0}{(k+1)p_0 + R}$$

当 $p_0 \gg R$ 时,

$$K_k = \frac{1}{(k+1)}$$

由式 (6-22)

$$\hat{\theta}_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k Z_i \quad (6-23)$$

由式(6-23)可看出 $\hat{\theta}_k$ 是 Z_k 的算术平均值。再考虑到 θ_k 是缓变的, 可取有限次读数之平均值作为 $\hat{\theta}_k$, 再给到显示器显示或打印。随机误差方差经十次平均即可下降约一个量级。如均方值为 10 sec^2 , 经十次平均即可降到 1 sec^2 。十次平均应取前五次测量值和后五次测量值之平均作为现时之估计 $\hat{\theta}_k$ 。此时即使 θ_k 是等速变化亦不影响估计精度。

考虑到角度是以 360° 循环, 在 360° 附近取十次平均, 时常有 360° 和 0° 附近两类读数, 而 0° 和 360° 之平均为 180° , 这时十次平均出现大角度误差, 但只要在计算机中加一程序如图 (6-5), 即可解决。该程序是把 $>300^\circ$ 和 $<10^\circ$ 的两类角分别平均, 后判断最终平均值是大角还是小角。由于转台速度小不会同时出现 10° 以上 300° 以下的二角。

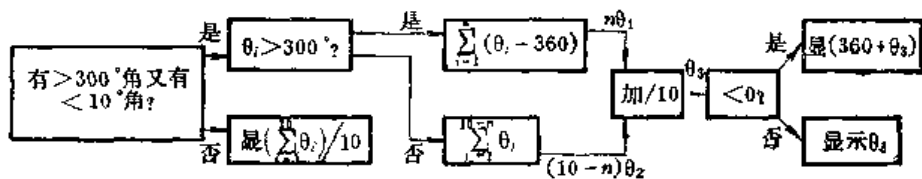


图6-5 360° 时平均计算程序

2) 对陀螺漂移数据处理任务是把陀螺有规律的漂移和随机漂移分离开, 分离出各项漂移系数和随机漂移分量, 并可求得随机漂移的协方差函数及分布密度。

由于计算机的计算速度很高, 在试验过程中可实时进行数据处理, 事先编好数据处理的子程序存入计算机, 即将计算结果打印成表, 并可直接画成曲线。

在陀螺仪测试和数据处理中分离出各漂移分量, 从而即可找到漂移的起因。一方面可对陀螺仪进行修理, 针对漂移起因采取措施后再进行测试, 反复测修使陀螺仪完善。

3) 在测试台上可进行陀螺仪漂移补偿试验。对有规律的漂移可给陀螺仪力矩器施加相反的电 流, 再在转台上伺服测漂。若有规律的漂移被施加的反向电流完全补偿, 就只

余下随机漂移了。若仍有明显的有规律的漂移,说明补偿效果不良,原因可能是估计的漂移系数重复性较差,或数据处理不准,或施加电流不准。在实时的陀螺仪漂移补偿中亦常用计算机协助。

陀螺仪随机漂移的补偿问题可用转台测角经卡尔曼滤波,再反馈至陀螺仪力矩器的闭环回路作补偿试验。以单轴伺服为例,设已得随机漂移序列,有规律的漂移设已补偿。随机漂移起因于随机干扰力矩 M_T ,用计算机求取它的协方差阵,即可列写为白噪声所驱动的力矩状态方程。设

$$\dot{M}_T = B M_T + W \quad (6-24)$$

式中 M_T ——陀螺仪随机干扰力矩;

B ——状态方程矩阵;

W ——白噪声向量。

陀螺仪受此干扰力矩作用将产生漂移 α ,依据陀螺仪运动方程可得 α 的状态方程为

$$\dot{\alpha} = C\alpha + D M_T \quad (6-25)$$

式中 C, D 为状态矩阵。

转台转角 θ 跟踪此漂移,运动方程为

$$\dot{\theta} = E\theta + F\alpha \quad (6-26)$$

式中 E, F 为转台闭环回路决定的矩阵。此式已假设表观运动 (ω , 分量) 和有规律的漂移已补偿掉。

测角系统测转台转角 θ 时有随机测量误差 v , 设它是白噪声

$$Z = G\theta + v \quad (6-27)$$

式中 Z ——测角系统读数;

G ——测量矩阵。

现在的任务是依据式 (6-24) 至式 (6-27) 求 \hat{M}_T 的估计 \hat{M}_T , 以便依据 \hat{M}_T 产生给力矩器的电流, 构成对随机干扰力矩的补偿闭环回路。

取新的状态变量向量 x 为

$$x = [M_T, \alpha, \theta]^T \quad (6-28)$$

式中, $[]^T$ 表示转置。

以上方程经离散化有状态方程及测量方程为

$$x_{K+1} = \Phi_K x_K + \Gamma_K W_K \quad (6-29)$$

$$Z_K = H_K x_K + v_K \quad (6-30)$$

式中, Φ_K, Γ_K, H_K 是由 B, C, D, E, F 及 G 决定的矩阵, 若式 (6-24), 式 (6-25), 式 (6-26) 皆为一维, 则 Φ_K 为三维的。

应用式 (6-29), 式 (6-30), 即可应用卡尔曼滤波公式估计 \hat{x} , 递推公式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_K &= \bar{x}_K + K_K (Z_K - H_K \bar{x}_K) \\ \bar{x}_{K+1} &= \Phi_K \hat{x}_K + \Gamma_K \bar{W}_K \\ M_{K+1} &= \Phi_K p_K \phi_K + \Gamma_K Q_K \Gamma_K^T \\ K_K &= p_K H_K^T R_K^{-1} \\ p_K^{-1} &= M_K^{-1} + H_K^T R_K^{-1} H_K \end{aligned} \right\} \quad (6-31)$$

式中 $Q_k = \text{var} W_k$

$R_k = \text{var} v_k$

$p_0 = \text{var} x_0$

将所得的 \hat{M}_T 反馈至陀螺仪力矩器, 可研究随机漂移用卡尔曼滤波器补偿的效果, 见图 6-6。

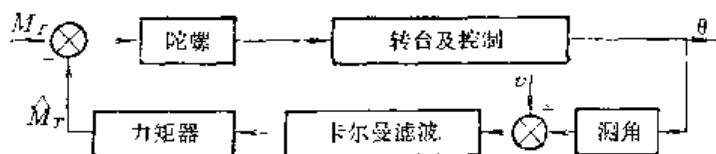


图 6-6 陀螺仪随机漂移的补偿

若 θ 读数已小到允许范围, 说明随机漂移已被补偿, 记录施加到力矩器的电流, 即可知 \hat{M}_T , 从而亦知 M_T 。

若 v_k 是有色噪声, 可用有色噪声之卡尔曼滤波公式 (见附录)。

在一般数据处理中可用卡尔曼平滑公式, 它可以比滤波进一步提高精度 (见附录)。

附录 卡尔曼滤波与平滑公式的证明

1. 参量估计

当 x 是常值 n 维向量, 验前知数学期望 $E(x) = \bar{x}$ 和方差阵 $E(xx^T) = M$, 经测量

$$Z = Hx + v \quad (6-32)$$

式中 H — $m \times n$ 矩阵;

v — m 维随机向量。

并有

$$E(v) = 0;$$

$$E(vv^T) = R。$$

现在的任务是测量后, 即称验后来估计 x 值为 \hat{x} , 用线性方差加权最小指标。

$$J = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T M^{-1} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (Z - Hx)^T R^{-1} (Z - Hx) \quad (6-33)$$

J 对 x 取最小值, 必要条件为 $\frac{\partial J}{\partial x} = 0$, 所得 x 即为 \hat{x} 。

$$M^{-1}(\hat{x} - \bar{x}) = H^T R^{-1} (Z - H\hat{x}) \quad (6-34)$$

展开式 (6-34) 得

$$\begin{aligned} (M^{-1} + H^T R^{-1} H) \hat{x} &= M^{-1} \bar{x} + H^T R^{-1} Z \\ &= (M^{-1} + H^T R^{-1} H) \bar{x} + H^T R^{-1} (Z - H\bar{x}) \end{aligned} \quad (6-35)$$

令

$$p^{-1} = M^{-1} + H^T R^{-1} H \quad (6-36)$$

由此得

$$\hat{x} = \bar{x} + p H^T R^{-1} (Z - H\bar{x}) \quad (6-37)$$

式 (6-37) 即为卡尔曼估计式。式中 $(Z - H\bar{x})$ 称新息, $K = p H^T R^{-1}$ 称卡尔曼增益。

式 (6-37) 说明在验前 \bar{x} 上加上 K 乘上新息即为估计值。在 \hat{x} 下将使加权线性方差指标式 (6-33) 最小。

依据矩阵反演公式及式 (6-36) 得

$$p = M - M H^T (H M H^T + R)^{-1} H M \quad (6-38)$$

令估计误差 $e = \hat{x} - x$, 展开后得

$$\begin{aligned}
e &= \bar{x} - x + \hat{x} - \bar{x} \\
&= (x - \bar{x}) + K(Z - H\bar{x}) \\
&= (\bar{x} - x) + K(Z - Hx + Hx - H\bar{x}) \\
&= (I - KH)(\bar{x} - x) + Kv
\end{aligned} \tag{6-39}$$

分析 e 均方差阵得

$$\begin{aligned}
E(ee^T) &= (I - KH)M(I - KH)^T + K RK^T \\
&= p - pH^T K^T + K RK^T = p
\end{aligned} \tag{6-40}$$

因为式 (6-36) 有 $(I - KH)M = p$, 再考虑 $K = pH^T R^{-1}$ 即得式 (6-40), 它说明 p 即为 e 之均方差阵。同法得到

$$E(e\hat{x}^T) = -(I - KH)M H^T K^T + K RK^T = 0 \tag{6-41}$$

由式 (6-41) 知估计 \hat{x} 和估计误差 e 正交。

2. 一步卡尔曼滤波

为了说明问题的实质, 先分析只有一步递推的卡尔曼滤波公式, 即

$$x_1 = \Phi_0 x_0 + \Gamma_0 W_0 \tag{6-42}$$

式中 x_0 —— 初始状态;

W_0 —— 动态噪声;

Γ_0, Φ_0 —— 常参数阵。在初始状态决定的 $\Phi_0 x_0$ 上加一动态噪声 $\Gamma_0 W_0$ 而发展到 x_1 。

x_0, W_0 皆随机变量。该式称为状态方程。

$$E(W_0) = \bar{W}_0$$

$$E(W_0 W_0^T) = Q_0$$

$$E(x_0) = \hat{x}_0$$

$$E(x_0 x_0^T) = p_0$$

经对 x_1 的测量, Z_1 为

$$Z_1 = H_1 x_1 + v_1 \tag{6-43}$$

式中 v_1 —— 测量噪声, 且 $E(v_1) = 0$, $E(v_1 v_1^T) = R_1$ 。由式 (6-42) 求均值和协方差得

$$\bar{x}_1 = \Phi_0 \hat{x}_0 + \Gamma_0 \bar{W}_0 \tag{6-44}$$

$$M_1 = \Phi_0 p_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T \tag{6-45}$$

于是按状态方程得到 x_1 的均值 \bar{x}_1 和方差阵 M_1 。经过测量 Z_1 又得到新的信息, 把 Z_1 看成测量信息, 把 \bar{x}_1, M_1 看成是验前信息, 按式 (6-37) 可得 x_1 的估计 \hat{x}_1

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1 + p_1 H_1^T R^{-1} (Z_1 - H_1 \bar{x}_1) \tag{6-46}$$

$$p_1 = M_1 - M_1 H_1^T (H_1 M_1 H_1^T + R_1)^{-1} H_1 M_1 \tag{6-47}$$

即得从 \hat{x}_0, p_0 传递到 \bar{x}_1, M_1 如式 (6-44), 式 (6-45)。经测量后得新信息, 作修正得 \hat{x}_1, p_1 如式 (6-46) 式 (6-47)。这样就从前面的静态估计转到动态估计。这一节只从 x_0 转到 x_1 , 这个过程的示意图及概率分布的发展变化示于图 6-7。

图中 $p(x_0), p(x_1)$ —— x_0, x_1 的概率密度;

$p(x_1/Z)$ —— 测量 Z_1 条件下的 x_1 的条件概率密度。

由式 (6-46) 知 \hat{x}_1 与 \bar{x}_1 不同。由式 (6-47) 知 $p_1 < M_1$ 。说明 \hat{x}_1 与 x_1 误差均方值变小了。

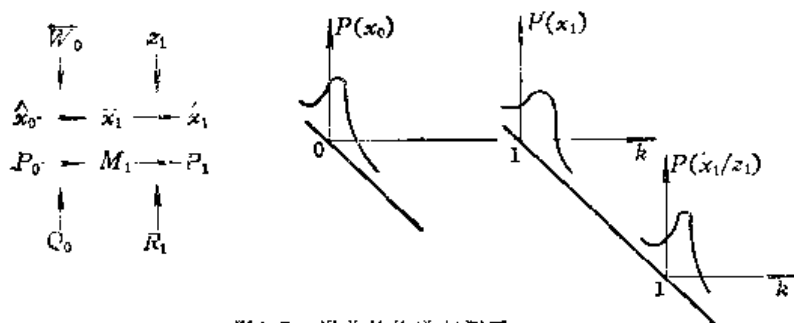


图6-7 误差的传递与测正

3. 多步卡尔曼滤波

有了一步滤波公式很容易推广到 N 步滤波。设状态方程为

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + \Gamma_i W_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (6-48)$$

式中 W_i ——动态噪声，统计特性为

$$E(W_i) = \bar{W}_i$$

$$E(W_i W_j^T) = Q_i \delta_{ij}$$

于是得传递方程

$$x_{i+1} = \Phi_i \hat{x}_i + \Gamma_i \bar{W}_i \quad (6-49)$$

$$M_{i+1} = \Phi_i p_i \Phi_i^T + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T \quad (6-50)$$

对 x_i 进行测量，有测量方程 Z_i

$$Z_i = H_i x_i + v_i \quad (6-51)$$

式中 v_i ——测量噪声，有

$$E(v_i) = 0, \quad E(v_i v_j^T) = R_i \delta_{ij} \quad (6-52)$$

用前节结果，把 \bar{x}_i, M_i 看成验前信息， \hat{x}_i, p_i 看成验后信息有

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + K_i (Z_i - H_i \bar{x}_i) \quad (6-53)$$

式中

$$K_i = p_i H_i^T R_i^{-1} \quad (6-54)$$

称为卡尔曼增益。

$$p_i = M_i - M_i H_i^T (H_i H_i^T + R_i)^{-1} H_i M_i \quad (6-55)$$

这样即得多步滤波公式。

误差传递一步，

$$\hat{x}_i \rightarrow x_{i+1}$$

$$p_i \rightarrow M_{i+1}$$

经测量调整一步，

$$x_{i+1} \rightarrow \hat{x}_{i+1}$$

$$M_{i+1} \rightarrow p_{i+1}$$

这一过程可一直进行到 N 步，每步估计误差为

$$e_i = x_i - \hat{x}_i$$

且

$$E(e_i e_i^T) = p_i \quad (6-56)$$

$$E(e_i \hat{x}_i^T) = 0 \quad (6-57)$$

设在第 i 步测量没有了，自 $(i+1)$ 步就只有传递。称为卡尔曼预报，此时

$$\hat{x}_{i+1} = \bar{x}_{i+1} = \Phi_i \hat{x}_i + \Gamma_i W_i \quad (6-58)$$

$$p_{i+1} = M_{i+1} = \Phi_i p_i \Phi_i^T + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T \quad (6-59)$$

当然预报误差比滤波误差要大，而且预报步距越长误差越大。

4. 一步卡尔曼平滑

一个随机序列, 用后边的测量信息回头估计前边的状态称平滑。在这一节中, 为了说明问题的实质, 只分析一步平滑, 即由 Z_1 估计 x_0 , 记为 $\hat{x}_{0/1}$ 。

状态方程仍如式 (6-42), 测量方程仍如式 (6-43)。在平滑中指标函数 J 取成

$$J = \frac{1}{2} [(x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + (W_0 - \bar{W}_0)^T Q_0^{-1} (W_0 - \bar{W}_0) + (Z_1 - H_1 x_1)^T R_1^{-1} (Z_1 - H_1 x_1)] \quad (6-60)$$

J 最小的必要条件为 $dJ = 0$ 得

$$dJ = (x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} dx_0 + (W_0 - \bar{W}_0)^T Q_0^{-1} dW_0 - (Z_1 - H_1 x_1)^T R_1^{-1} H_1 dx_1 \quad (6-61)$$

由式 (6-42) 得

$$dx_1 = \Phi_0 dx_0 + \Gamma_0 dW_0 \quad (6-62)$$

由式 (6-62), 式 (6-61) 可得 x_0 , W_0 , 即为 $\hat{x}_{0/1}$, $\hat{W}_{0/1}$ 。而 $\hat{x}_{1/1}$ 即为 \hat{x}_1 , 即为滤波估计值。

$$\hat{x}_{0/1} = \hat{x}_0 + P_0 \Phi_0^T H_1^T R_1^{-1} (Z_1 - H_1 \hat{x}_1) \quad (6-63)$$

$$\hat{W}_{0/1} = \bar{W}_0 + \Phi_0^T H_1^T R_1^{-1} (Z_1 - H_1 \hat{x}_1) \quad (6-64)$$

经平滑方差比估计时变小

$$P_{0/1} = E[(\hat{x}_{0/1} - x_0)(\hat{x}_{0/1} - x_0)^T] = P_0 - C_0(M_1 - P_1)C_0^T \quad (6-65)$$

$$\begin{aligned} Q_{0/1} &= E[(\hat{W}_{0/1} - W_0)(\hat{W}_{0/1} - W_0)^T] \\ &= Q_0 - B_0(M_1 - P_1)B_0^T \end{aligned} \quad (6-66)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= P_0 \Phi_0^T M_1^{-1} \\ B_0 &= Q_0 \Gamma_0^T M_1^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6-67)$$

式 (6-63), 式 (6-64) 可改写为

$$\hat{x}_{0/1} = \hat{x}_0 - C_0(\bar{x}_1 - \hat{x}_1) \quad (6-68)$$

$$\hat{W}_{0/1} = \bar{W}_0 - B_0(\bar{x}_1 - \hat{x}_1) \quad (6-69)$$

若设 $M_1^{-1}(\bar{x}_1 - \hat{x}_1) = \lambda_0$, 式 (6-68), 式 (6-69) 又可改写为

$$\hat{x}_{0/1} = \hat{x}_0 - P_0 \Phi_0^T \lambda_0 \quad (6-70)$$

$$\hat{W}_{0/1} = \bar{W}_0 - Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0 \quad (6-71)$$

式 (6-65), 式 (6-66) 可改写为

$$M_1^{-1}(M_1 - P_1)M_1^{-1} = \Lambda_0 \quad (6-72)$$

$$P_{0/1} = P_0 - P_0 \Phi_0^T \Lambda_0 \Phi_0 P_0 \quad (6-73)$$

$$Q_{0/1} = Q_0 - Q_0 \Gamma_0^T \Lambda_0 \Gamma_0 Q_0 \quad (6-74)$$

应用这些公式更便于计算。

5. 多步卡尔曼平滑

状态方程仍如式 (6-48), 测量方程仍如式 (6-51)。用测量序列 Z_1, Z_2, \dots, Z_N 估计 $\hat{x}_i, i < N$ 即为卡尔曼平滑。在实时控制时只能用卡尔曼滤波, 因需要知道实时估计。在数据处理中允许在测试完后, 依据全部测量数据估计各时刻的取值, 故可用卡尔曼平滑。此时, 指标取成

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} (x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (W_i - \bar{W}_i)^T Q_i^{-1} (W_i - \bar{W}_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (Z_i - H_i x_i)^T R_i^{-1} (Z_i - H_i x_i) \end{aligned} \quad (6-75)$$

平滑的证明用另一种方法, 即拉格朗日乘子法。取一新的指标

$$\bar{J} = J + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^T (\Phi_i x_i - [I_i W_i - x_{i+1}]) \quad (6-76)$$

式(6-76)等于在 J 上加了一项零, 故指标未变。加这一项的目的是要求取在状态方程约束下指标达最小问题。

$$\begin{aligned} dJ = & (x_0 - \hat{x}_0)^T p_0^{-1} dx_0 + \sum_{i=0}^{N-1} (W_i - \bar{W}_i)^T Q_i^{-1} dW_i + \sum_{i=1}^N (Z_i - H_i x_i)^T R_i^{-1} H_i dx_i \\ & + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^T \Phi_i dx_i + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^T \Gamma_i dW_i - \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^T dx_{i+1} \end{aligned} \quad (6-77)$$

对 $\min J$ 需 $dJ = 0$, 整理 dx_i , dW_i 系数项, 并令等于零可得。由第一项和第五项 $i = 0$ 得

$$\hat{x}_{0,N} = \hat{x}_0 - p_0 \Phi_0^T \Lambda_0 \quad (6-78)$$

由第二项和第四项得

$$\bar{W}_{i,N} = \bar{W}_i - Q_i^{-1} \lambda_i^T \Gamma_i \quad (6-79)$$

由第三、五、六项得

$$(Z_i - H_i \hat{x}_{i,N})^T R_i^{-1} H_i = \Lambda_0^T \Phi_i - \lambda_{i-1}^T \quad (6-80)$$

令

$$\hat{x}_{i,N} = \hat{x}_i - p_i \Phi_i^T \Lambda_i \quad (6-81)$$

式(6-81), 式(6-80)得

$$\Lambda_{i-1} = (I - p_i H_i^T R_i^{-1} H_i)^T (\Phi_i^T \Lambda_i - H_i^T R_i^{-1} (Z_i - H_i \bar{x}_i)) \quad (6-82)$$

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + p_i H_i^T R_i^{-1} (Z_i - H_i \bar{x}_i) \quad (6-83)$$

式(6-78), (6-79), (6-81), (6-82)即为平滑递推式。计算步骤是首先计算滤波 \hat{x}_i , 后计算平滑 $\hat{x}_{i,N}$ 。

6. 有相关测量噪声时的最优滤波

以上都设测量噪声 v_i 是白噪声, 当 v_i 为有色噪声时, 上述公式已不可直接应用。设 v_i 为白噪声所驱动的成型滤波器的输出。有

$$v_{i+1} = \psi v_i + v_i \quad (6-84)$$

$$E(v_i v_i) = Q^* \delta_{ij}$$

状态方程为

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + \Gamma W_i \quad (6-85)$$

测量方程为

$$Z_i = H x_i + v_i \quad (6-86)$$

设新变量为

$$\zeta_i = Z_{i+1} - \psi Z_i \quad (6-87)$$

式(6-84), (6-85), (6-86)代入(6-87)式得

$$\zeta_i = H^* x_i + \epsilon_i \quad (6-88)$$

式中

$$H^* = H\Phi - \psi H$$

$$\epsilon_i = H\Gamma W_i + v_i$$

由上式知

$$E(W_i \epsilon_i^T) = s \delta_{ij}, \quad s = Q\Gamma^T H^T \quad (6-89)$$

$$E(\epsilon_i \epsilon_i^T) = R \delta_{ij}, \quad R = H\Gamma Q \Gamma^T H^T + Q^* \quad (6-90)$$

设一待定矩阵 D ,

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma W_i + D(\zeta_i - H^* x_i - \epsilon_i) \quad (6-91)$$

等于在状态方程上加了一恒等于零的项。展开式 (6-91) 得

$$x_{i+1} = (\Phi - D H^*) x_i + D \zeta_i + \Gamma W_i - D \epsilon_i \quad (6-92)$$

在式 (6-92) 中令 $(\Gamma W_i - D \epsilon_i)$ 与 ϵ_i 不相关, 从而确定 D

$$E[(\Gamma W_i - D \epsilon_i) \epsilon_i^T] = (TS - DR) \delta_{ij} = 0$$

$$D = TS R^{-1} \quad (6-93)$$

这样新的动态噪声式 (6-92) 中的 $(\Gamma W_i - D \epsilon_i)$ 与新的测量噪声式 (6-88) 中的 ϵ_i 不相关。且二者都是白噪声, 故可用卡尔曼滤波方程。得

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + K_i(\zeta_i - H^* \bar{x}_i) \quad (6-94)$$

$$\bar{x}_{i+1} = \Phi \hat{x}_i + D(\zeta_i - H^* \bar{x}_i) \quad (6-95)$$

$$K_i = p_i H^* R^{-1} \quad (6-96)$$

$$p_i = M_i - M_i H^* (H^* M_i H^* + R)^{-1} H^* M_i \quad (6-97)$$

$$M_{i+1} = (\Phi - D H^*) p_i (\Phi - D H^*)^T + \Gamma Q \Gamma^T - D R D^T \quad (6-98)$$

式 (6-94) 至 (6-98) 即为有色测量噪声下的卡尔曼滤波。由于式 (6-87) 中 ζ_i 中含有 Z_{i+1} , 故 \bar{x}_i 应理解为一步平滑 $\hat{x}_{i,i+1}$ 。对 v_i 的估计为

$$v_i = Z_i - H \hat{x}_i \quad (6-99)$$

$$E(v_i - \hat{v}_i)(v_i - \hat{v}_i)^T = H p_i H^T \quad (6-100)$$

参 考 文 献

- [1] 惯性元件试验 [英] W. G. 登哈德 等编《惯性元件试验》翻译组译 国防工业出版社 1978年。
- [2] 陀螺及惯性导航原理 (上册) 陆元九 编著 科学出版社 1964年。
- [3] 陀螺仪理论和设计 P. H. 萨维特 编 吴哲、文立 译 科学出版社 1977年。
- [4] 陀螺仪理论、设计及试验技术 [美] 瓦尔特、里格利 等著 余德兴 等译 国防工业出版社 1978年。
- [5] G. R. Pitman, Inertial Guidance, 1962.
- [6] Gyro Laboratory Manual AD-466, 889.
- [7] Analysis and design of the gyroscope for inertial guidance, Ira Cochran, John Wiley & Sons, Inc. 1963.
- [8] 确定值计算基础 张启人 编著 科学出版社 1959年。
- [9] 现代控制工程 绪方胜彦 著 卢伯英 等译 科学出版社 1976年。
- [10] 冯康 谐波分析 计算机应用与应用数学1977年11期。
- [11] 王振华、葛公毅 快速Fourier算法 计算机应用与应用数学1974. 2。
- [12] 测量实践的数据处理 张世英、刘智敏 编著 科学出版社1977年。
- [13] 回归分析及其试验设计 上海师大概率统计教研组 编 上海教育出版社 1977年。
- [14] 逼近论讲义 [苏] H. H. 阿林叶基尔 著 程德民 等译 科学出版社 1957年。
- [15] 数值逼近方法 南京大学计算数学专业编 科学出版社 1978年。
- [16] 程积泰 时间序列分析方法 计算机应用与应用数学1977. 11。
- [17] 离散时间系统滤波的数学方法 中国科学院数学所概率组 编著 国防工业出版社 1975年。
- [18] 卡尔曼滤波器及其应用基础 敬启 编科学出版社 1973年。
- [19] 概率统计计算 中国科学院计算中心概率统计组 编著 科学出版社 1979年。
- [20] 王广雄 高精度转台的伺服回路的设计问题 哈尔滨工业大学学报1977. 4。
- [21] 王广雄 高精度伺服系统的大范围稳定性 自动化学报 第五卷第三期1979。
- [22] Servo Considerations for low Rate Gyro Test tables TS-981D July 11, 1963.
- [23] 哈工大微电机专业 感应同步器的零位误差 哈尔滨工业大学学报 1977年1~2期。
- [24] A. W. 劳伦斯著 捷联式陀螺仪设计 国防工业出版社 1973年。
- [25] Applied Optimal control, Bryson, A. E, HO, Y. C, Blaisdell 1975.
- [26] Elements of system theory P. Faurre, M. Depeyrot North-Holland pub. com. 1976.
- [27] Proceeding AIAA Guidance and Control Conference 1977.