Solution 7

1.7

08. 假设 $n = i^2$,那么比 n 大的完全平方数的最小值是 $(i+1)^2$。?$(i+1)^2 = i^2+2i+1 = n+2i+1$。
当 $n \geqslant 1$ 时，$i \geqslant 1$ ，$(i+1)^2 \geqslant n+3 > n+2$，因此 $n+2$ 不是完全平方数。
当 $n = 0$ 时，$n+2 = 2$，不是完全平方数。
因此，题意得证。

20. a) 原命题等价于：如果 n 是奇数，那么 $3n+2$ 也是奇数。
假定 n 是奇数，那么 $n = 2k+1$，k 为一些整数。
则 $3n+2 = 6k+5 = 2(3k+2)+1$，所以 $3n+2$ 是一个奇数。
因此，题意得证。

    b) 假设 $3n+2$ 是偶数，n 是奇数。那么 $3n$ 也是偶数。
因此 $3n-n = 2n$ 是一个偶数，但是 n 是奇数，产生矛盾。
因此，假设不成立，题意得证。

30. a) 证明：如果 $m = n\ or\ m = -n$，那么 $m^2 = n^2$。
如果 $m = n$，则 $m^2 = n^2$。
如果 $m = -n$，则 $m^2 = (-n)^2 = n^2$
得证。

    b) 证明：如果 $m^2 = n^2$，则 $m = n\ or\ m = -n$。
$m^2 = n^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 0 \Rightarrow (m+n)(m-n) = 0 \Rightarrow m = n\ or\ m = -n$
得证。

1.8

12. $n = 2 * 100^{500} + 15 \quad m = 2 * 100^{500} + 15$，则 $m = n+1$。
假设 n 和 m 都是完全平方数，不妨令 $n = x^2 \quad m = y^2$。
由于 $m = n+1$，得到 $y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 1$。
由于 x 和 y 都是整数，$y-x$?$y+x$ 也都是整数，且要么都等于 1，要么都等于 -1。
case1: $y-x = y+x = 1 \Rightarrow \{x = 0, y = 1\} \Rightarrow \{x^2 = 0, y^2 = 1\}$。
case2: $y-x = y+x = -1 \Rightarrow \{x = 0, y = -1\} \Rightarrow \{x^2 = 0, y^2 = 1\}$。
显然，n 和 m 不符合上述情形，因此假设不成立，所以其中至少有一个不是完全平方数。
得证。且证明是 *nonconstructive*，因为没有说明哪个不是完全平方数。

14. 如果其中一个数是 0，那么此数与其他数乘积为 0，是非负积。
 如果所有的数都不为 0，那么这每个数只有正负两种情况，则三个数字中至少有两个具有相同的符号。
 两个整数乘积为正，两个负数乘积为正，都是非负数。然后可以证明两个数字乘积为非负数。
 得证。且证明是 $nonconstructive$，因为没有说明哪两个数字具有非负积。

32. 如果 $|x| \geqslant 3$，那么 $2x^2 + 5y^2 \geqslant 18 + 5y^2 > 14$，不成立。
 那么 $x \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$，依次得到 $\{5y^2 = 6, 5y^2 = 12, 5y^2 = 14\}$。
 没有一个整数 y 可以符合上述式子，因此没有任何方案可以符合题意。
 得证。

40. 依次 8，5，3 加仑的杯子，容量依次记为 a,b,c。
 引理：记 $n = a/gcd(b,c)$，若 n 为奇数，则不可能平分，否则最少次数为 $n-1$
 (8,0,0)
 (3,5,0)
 (3,2,3)
 (6,2,0)
 (6,0,2)
 (1,5,2)
 (1,4,3)
 (0,4,4)