

Solution 7

2021211314-2021211353-Yongyan Li

2022 年 4 月 19 日

1.7

08. 假设 $n = i^2$, 那么比 n 大的完全平方数的最小值是 $(i+1)^2$. $(i+1)^2 = i^2 + 2i + 1 = n + 2i + 1$.
当 $n \geq 1$ 时, $i \geq 1$, $(i+1)^2 \geq n + 3 > n + 2$, 因此 $n + 2$ 不是完全平方数。
当 $n = 0$ 时, $n + 2 = 2$, 不是完全平方数。
因此, 题意得证。

20. a) 原命题等价于: 如果 n 是奇数, 那么 $3n + 2$ 也是奇数。
假定 n 是奇数, 那么 $n = 2k + 1$, k 为一些整数。
则 $3n + 2 = 6k + 5 = 2(3k + 2) + 1$, 所以 $3n + 2$ 是一个奇数。
因此, 题意得证。
- b) 假设 $3n + 2$ 是偶数, n 是奇数。那么 $3n$ 也是偶数。
因此 $3n - n = 2n$ 是一个偶数, 但是 n 是奇数, 产生矛盾。
因此, 假设不成立, 题意得证。

30. a) 证明: 如果 $m = n$ or $m = -n$, 那么 $m^2 = n^2$ 。
如果 $m = n$, 则 $m^2 = n^2$ 。
如果 $m = -n$, 则 $m^2 = (-n)^2 = n^2$
得证。
- b) 证明: 如果 $m^2 = n^2$, 则 $m = n$ or $m = -n$ 。
 $m^2 = n^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 0 \Rightarrow (m + n)(m - n) = 0 \Rightarrow m = n$ or $m = -n$
得证。

1.8

12. $n = 2 * 100^{500} + 15$ $m = 2 * 100^{500} + 16$, 则 $m = n + 1$ 。
假设 n 和 m 都是完全平方数, 不妨令 $n = x^2$ $m = y^2$ 。
由于 $m = n + 1$, 得到 $y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 1$ 。
由于 x 和 y 都是整数, $y - x$ 和 $y + x$ 也都是整数, 且要么都等于 1, 要么都等于 -1。
case1: $y - x = y + x = 1 \Rightarrow \{x = 0, y = 1\} \Rightarrow \{x^2 = 0, y^2 = 1\}$ 。
case2: $y - x = y + x = -1 \Rightarrow \{x = 0, y = -1\} \Rightarrow \{x^2 = 0, y^2 = 1\}$ 。
显然, n 和 m 不符合上述情形, 因此假设不成立, 所以其中至少有一个不是完全平方数。
得证。且证明是 *nonconstructive*, 因为没有说明哪个不是完全平方数。

14. 如果其中一个数是 0，那么此数与其他数乘积为 0，是非负积。

如果所有的数都不为 0，那么这每个数只有正负两种情况，则三个数字中至少有两个具有相同的符号。

两个整数乘积为正，两个负数乘积为正，都是非负数。然后可以证明两个数字乘积为非负数。

得证。且证明是 *nonconstructive*，因为没有说明哪两个数字具有非负积。

32. 如果 $|x| \geq 3$ ，那么 $2x^2 + 5y^2 \geq 18 + 5y^2 > 14$ ，不成立。

那么 $x \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$ ，依次得到 $\{5y^2 = 6, 5y^2 = 12, 5y^2 = 14\}$ 。

没有一个整数 y 可以符合上述式子，因此没有任何方案可以符合题意。

得证。

40. 依次 8, 5, 3 加仑的杯子，容量依次记为 a,b,c。

引理：记 $n = a/\gcd(b, c)$ ，若 n 为奇数，则不可能平分，否则最少次数为 $n - 1$

(8,0,0)

(3,5,0)

(3,2,3)

(6,2,0)

(6,0,2)

(1,5,2)

(1,4,3)

(0,4,4)