

# پی دی اف شماره ی یک

سری اول تمارین تکمیلی (بخش ترکیبیات ۱)

سؤال ۱ چند رشته‌ی ۸ حرفی ( با حروف انگلیسی ) داریم اگر:

الف بتوانیم حروف تکراری داشته باشیم؟

ب نتوانیم حروف تکراری داشته باشیم؟

ج با حرف  $X$  شروع شوند؟ (تکرار مجاز است)

د با حرف  $X$  شروع شوند؟ (تکرار مجاز نیست)

ه با حرف  $X$  شروع و تمام شوند؟ (تکرار مجاز است)

و با دو حرف  $BC$  شروع شوند؟ (تکرار مجاز است)

ز با دو حرف  $BC$  شروع و تمام شوند؟ (تکرار مجاز است)

ح با دو حرف  $BC$  شروع یا تمام شوند؟ (تکرار مجاز است)

سؤال ۲ چند تابع  $\{0, 1\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  داریم بطوریکه:

الف هیچ قیدی نداشته باشیم؟

ب  $f$  تابعی یک به یک باشد؟

ج  $f(1) = f(n) = 0$  ؟

د دقیقا یکی از اعداد کمتر از  $n$  وجود داشته باشد مانند  $x$  که  $f(x) = 1$  ؟

**سؤال ۳** فرض کنید یک عروسی در حال برگزاری است و جمعی شامل عروس، داماد و ۸ مهمان می‌خواهند عکس بگیرند. به دلیل محدودیت مکان، عکاس فقط می‌تواند ۶ نفر را در عکس جا دهد. عکاس به چند طریق می‌تواند ۶ نفر را در صف چیده و عکس بگیرد، اگر:

الف داماد حتماً در عکس باشد؟

ب عروس و داماد حتماً در عکس باشند؟

ج دقیقاً یکی از عروس و داماد در عکس باشند؟

حال فرض کنید ۴ نفر از مهمان‌ها رفتند. ۶ نفر باقی مانده به چند طریق می‌توانند عکس بنه‌اند اگر:

د عروس حتماً کنار داماد باشد؟

ه عروس کنار داماد نباشد؟

و عروس در جایی در سمت چپ داماد (نه لزوماً دقیقاً نفر سمت چپ) قرار داشته باشد؟

سؤال ۴ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ داریم که:

الف بر ۷ بخش پذیر باشند؟

ب بر ۷ بخش پذیر باشند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نباشند؟

ج هم بر ۷ و هم بر ۱۱ بخش پذیر باشند؟

د بر حداقل یکی از ۷ یا ۱۱ بخش پذیر باشند؟

ه دقیقاً بر یکی از ۷ یا ۱۱ بخش پذیر باشند؟

و بر هیچ کدام از ۷ و ۱۱ بخش پذیر نباشند؟

ز ارقامشان متمایز باشد؟

ح ارقامشان متمایز باشد و زوج باشند؟

**سؤال ۵** ۱۰۰ نفر در قرعه‌کشی «توران خودرو» شرکت کرده‌اند. این ۱۰۰ نفر از ۱ تا ۱۰۰ شماره‌گذاری شده‌اند. قرار است سه نفر جایزه ۵۰۰ میلیون ریالی و یک نفر جایزه یک دستگاه خودرو ۲۰۷ ببرد! به چند طریق می‌توان جایزه‌ها را تخصیص داد، اگر:

الف هیچ قیدی نداشته باشیم؟

ب نفر ۴۷ خودروی ۲۰۷ را ببرد؟

ج نفر ۴۷ یکی از جایزه‌ها را ببرد؟

د نفر ۴۷ هیچ جایزه‌ای نبرد؟

ه نفرات ۱۹ و ۴۷ هر دو جایزه‌ای ببرند؟

و نفرات ۱۹ و ۴۷ و ۷۳ همه جایزه ببرند؟

ز یکی از چهار نفر ۱۹ و ۴۷ و ۷۳ و ۹۷ خودروی ۲۰۷ را ببرد؟

ح هیچ‌کدام از ۴ نفر ۱۹ و ۴۷ و ۷۳ و ۹۷ خودروی ۲۰۷ را نبرد؟

ط نفر ۱۹ و ۴۷ و ۷۳ همه جایزه ببرند؟

ی نفرات ۱۹ و ۴۷ جایزه‌ای ببرند، اما نفرات ۷۳ و ۹۷ جایزه‌ای نبرند؟

سؤال ۶ چند رشته‌ی  $\{a, b\}$  حرفی از حروف انگلیسی داریم که:

الف شامل حرف  $a$  باشند؟

ب شامل حرف‌های  $a$  و  $b$  باشند؟

ج شامل  $a$  و  $b$  باشند بطوریکه  $a$  در جایی سمت راست  $b$  باشد، و همه‌ی حروف متمایز باشند؟

د شامل دقیقاً یک حرف مصوّت باشند؟

ه شامل دقیقاً دو حرف مصوّت باشند؟

و شامل حداقل یک حرف مصوّت باشند؟

ز شامل حداقل دو حرف مصوّت باشند؟

سؤال ۷ برای هر کدام از اتحادهای زیر یک اثبات ترکیبیاتی و یک اثبات با محاسبات جبری بیان کنید.

الف  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

ب  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

ج  $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$

د  $\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$

ه  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

و  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$  ←  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$  و  $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} = ?$   $3^n$  \*

ح\*  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$

دقت کنید، برای قسمت ز، برخلاف بقیه قسمت‌ها، می‌بایست ابتدا جواب را به دست آورده و سپس آن را اثبات کنید. در ضمن، قسمت ز و ح هر دو مسائل سخت‌تری هستند. به کسی که برای قسمت ح راحت‌ترین اثبات را پیشنهاد دهد یک عدد بستنی (به انتخاب خود شخص) تعلق می‌گیرد.