Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт Информационных технологий, математики и механики

Отчёт по лабораторной работе

Численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных

Выполнил:
студент гр. 381806-01

Алибеков М.Р.

Проверил:
Доцент каф. ДУМЧА, ИИТММ

Эгамов А.И.

Нижний Новгород
2021 г.

Содержание

1. Введение

Лабораторная работа направлена на изучение вопроса численного решения начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

Основа большинства физических законов сформулирована в терминах дифференциальных уравнений, а потому они являются одним из важнейших инструментов математического моделирования. Законы Ньютона в механике и уравнения Максвелла в теории электромагнитного поля, законы Кирхгофа в теории электрических цепей и уравнение Шредингера в квантовой механике, а также многие другие дифференциальные уравнения или их системы составляют ядро математического аппарата физических исследований.

Зачастую, аналитическое решение некоторых наиболее интересных дифференциальных уравнений, к сожалению, невозможно, и, в связи с этим, приходится прибегать к численным решениям ДУ, в том числе, и к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

Непосредственно в данной лабораторной работе рассматривается управляемый процесс нагревания стержня: дан тонкий однородный стержень с теплоизолированными концами длины L. На процесс изменения температуры стержня осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей, например, через стержень пропускается электрический ток. Математическая модель данного процесса будет рассмотрена в теоретической части данной работы.

В ходе данной лабораторной работы требуется: построить математическую модель процесса, вывести способ вычисления температуры стержня и реализовать данный метод в виде программного комплекса с «дружелюбным» графическим пользовательским интерфейсом.

2. Постановка задачи

В рамках лабораторной работы ставится задача реализации программного комплекса с графическим пользовательским интерфейсом (на одном из языков программирования высокого уровня), который позволит находить численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

Программный комплекс должен обладать следующими возможностями:

- Возможность задания и изменения:
  - длину стержня L
  - времени T
  - шага h в разностной схеме по координате x
  - шага τ в разностной схеме по координате t
  - констант $\varphi_1, \varphi_2, b_0, b_1, b_2$
- Возможность вывода на экран:
  - строки прогресса и времени выполнения данной работы
  - графика функции $\varphi(x)$ – синим цветом
  - графика найденной функции – красным цветом
  - графика решения части A – зелёным цветом
- Нахождение решения при других параметрах начальных функций без перезапуска программы.
- Вычисление решения начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных. При этом должно использоваться 2 варианта функций управления с обратной связью.
- Численное интегрирования различных функций методом Симпсона.
- Вычисление решения начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.
  Замечание: должно использоваться 2 варианта функций управления с обратной связью (часть A и часть B).

Очевидно, для работы с численным интегрированием методом Симпсона и методом прогонки с трехдиагональными матрицами должны быть представлены отдельные независимые модули. Также для удобства целесообразно иметь некий класс, содержащий в себе функции $\varphi(x)$ и $b(x)$.

Программное решение должно выглядеть приблизительно следующим образом:

1. Модуль MainForm – поддержка GUI (графического пользовательского интерфейса) для работы с программой.
2. Модуль HeatGrid – комплексное осуществление работы с математической моделью процесса и способа вычисления температуры стержня.
3. Модуль SimpsonMethod – статический класс, предоставляющий возможность численного интегрирования по формуле Симпсона.
4. Модуль TridiagonalMatrix – возможность работы с трехдиагональными матрицами и решением СЛАУ специального вида методом прогонки.
5. Модуль Functions – класс, содержащий в себе функции $\varphi(x)$ и $b(x)$.

3. Теоретическая основа

3.1 Описание управляемого процесса

В рамках данной задачи будет рассмотрена математическая модель процесса нагревания тонкого однородного стержня с теплоизолированными концами длины L.

На множестве $Q = [0, L] \times [0, T],\ L > 0, T > 0$; будем искать функцию $y(x,t)$ – температуру стержня – непрерывно дифференцируемую по t и дважды дифференцируемую по x – решение уравнения:

$$y'_t(x,t) = a^2 y''_{xx}(x,t) + u(x,t), \qquad (1)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям второго рода (т.к. у стержня теплоизолированные концы):

$$y'_x(0,t) = y'_x(L,t) = 0 \qquad (2)$$

и начальному условию:

$$y(x,0) = \varphi(x), \qquad (3)$$

где a – константа, функция $\varphi(x) > 0$ задает начальное распределение температуры, дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, L]$ и удовлетворяет условиям согласования (3) и условию:

$$\int_0^L \varphi(x)\, dx = 1. \qquad (4)$$

Непрерывная функция $u(x)$ – управление с обратной связью, которое представляется в одном из вариантов:

$$u(x,t) = b(x)y(x,t) \qquad (5)$$

$$u(x,t) = b(x)y(x,t) - y(x,t)\int_0^L b(x)y(x,t)\, dx \qquad (6)$$

где $b(x)$ – управляющая функция, непрерывная на отрезке $[0, L]$.

В данной лабораторной работе предлагается взять следующие функцию начального распределения температуры и управляющую функцию:

$$\varphi(x) = \frac{1}{L} + \varphi_1 \cos\frac{\pi x}{L} + \varphi_2 \cos\frac{2\pi x}{L}, \qquad (7)$$

$$b(x) = b_0 + b_1 \cos\frac{\pi x}{L} + b_2 \cos\frac{2\pi x}{L}, \qquad (8)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, b_0, b_1, b_2$ – некие константы.

В результате работы необходимо получить изменение начальной кривой с течением времени, которое описывается дифференциальным уравнением (1).

3.2 Решение задачи

Первым шагом решения будет составление неявной разностной схемы с погрешностью $O(\tau + h^2)$ для уравнений (1) и (6).

Для этого сначала построим в области $Q = [0, L] \times [0, T],\ L > 0, T > 0$ равномерную сетку:

$$\omega_{h\tau} = \left\{ \left(x_i, t_j\right) : x_i = ih, t_j = j\tau, \text{где } i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, h = \frac{L}{n}, \tau = \frac{T}{m}, n, m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (9)$$

Краевую задачу аппроксимируем при помощи замены дифференциальных операторов на следующие разностные операторы:

$$(y_t')_{i,j} = \frac{y_{i.j} - y_{i,j-1}}{\tau} \quad (10)$$

$$(y_{xx}'')_{i,j} = \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{h^2} \quad (11)$$

(10) и (11) подставим в (1):

$$\frac{y_{i.j} - y_{i,j-1}}{\tau} = a^2 \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{h^2} + u_{i,j}, \quad (12)$$

где $u_{i,j} = b_i y_{i,j} - y_{i,j} \int_0^L b(x) y(x,t)\, dx$, а интеграл для каждого слоя рассчитываем по формуле Симпсона:

$$I_j = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-4} + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad (13)$$

Сделаем следующую замену:

$$r = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \qquad a = 1 \quad (14)$$

Тогда:

$$\frac{y_{i.j} - y_{i,j-1}}{\tau} = \frac{r\left(y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}\right)}{\tau} + u_{i,j} \quad (15)$$

$$y_{i.j} - y_{i,j-1} = r\left(y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}\right) + \tau u_{i,j} \quad (16)$$

$$-y_{i,j-1} - \tau u_{i,j} = r y_{i-1,j} - (1 + 2r) y_{i,j} + r y_{i+1,j} \quad (17)$$

Получили неявную сеточную схему:

$$r y_{i-1,j} - (1 + 2r) y_{i,j} + r y_{i+1,j} = -y_{i,j-1} - \tau u_{i,j} \quad (18)$$

Можно заметить, что значения $y_{i,j}$ можно найти методом прогонки:

$$A = C = r, \qquad B = -(1 + 2r), \qquad F_i = -y_{i,j-1} - \tau u_{i,j} \quad (19)$$

Тогда неявная сеточная схема приобретает следующий вид:

$$A y_{i-1,j} + B y_{i,j} + C y_{i+1,j} = F_i \quad (20)$$

Но не стоит забывать о граничных условиях (2). Заменим эти дифференциальные операторы на центральные разностные производные с погрешностью второго порядка:

$$\frac{y_{0+1.j} - y_{0-1,j}}{2h} = 0 \quad => \quad y_{-1.j} = y_{1.j} \quad (21)$$

$$\frac{y_{n+1.j} - y_{n-1,j}}{2h} = 0 \quad => \quad y_{n+1.j} = y_{n-1.j} \quad (22)$$

Тогда для нулевого слоя получаем:

$$\mathrm{A}y_{-1.j} + By_{0.j} + Cy_{1.j} = F_0 \tag{23}$$

$$\mathrm{A}y_{1.j} + By_{0.j} + Cy_{1.j} = F_0 \tag{24}$$

$$By_{0.j} + (\mathrm{A} + \mathrm{C})y_{1.j} = F_0 \tag{25}$$

А для последнего слоя:

$$\mathrm{A}y_{n-1.j} + By_{n.j} + Cy_{n+1.j} = F_n \tag{26}$$

$$\mathrm{A}y_{n-1.j} + By_{n.j} + Cy_{n-1.j} = F_n \tag{27}$$

$$(\mathrm{A} + \mathrm{C})y_{n-1.j} + By_{n.j} = F_n \tag{28}$$

Собрав все уравнения воедино получим матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} B & A+C & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A+C & B \end{pmatrix} \tag{29}$$

Или, что тоже самое:

$$M = \begin{pmatrix} -(1+2r) & 2r & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r & -(1+2r) & r & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r & -(1+2r) & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & r & -(1+2r) & r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2r & -(1+2r) \end{pmatrix} \tag{30}$$

Получаем СЛАУ (систему линейных алгебраических уравнений) $My = F$.

Зная решение нулевого слоя (начальные условия), можно заполнить первый слой. Зная первый -второй. И так далее, итеративно будем рассчитывать слои. То есть, постоянно добавляя в правую часть системы решение предыдущего слоя, можно находить решение следующего слоя.

Решение этой задачи можно также получить, если взять в качестве функции управления с обратной связью функцию (5), а не (6).

В том случае, если возьмем в качестве функции управления с обратной связью функцию (5), а не (6), проведя аналогичные действия получим функцию $w(x,t)$ (аналог функции $y(x,t)$, получаемой при рассмотрении (6))

Методом Симпсона найдём значение следующего интеграла:

$$I(t) = \int_0^L w(x,t)\,dx \tag{31}$$

Поделив $w(x,t)$ на интеграл (31), вычисляемый для последнего слоя:

$$\frac{w(x,T)}{I(T)}, \tag{32}$$

мы сможем получить решение этой же задачи. Именно этот метод в данной лабораторной работе именуется “Частью А”, а выражение (32) – решением части А.

4. Руководство пользователя

При запуске программы перед пользователем появляется интерфейс управления (см. Рисунок 1):

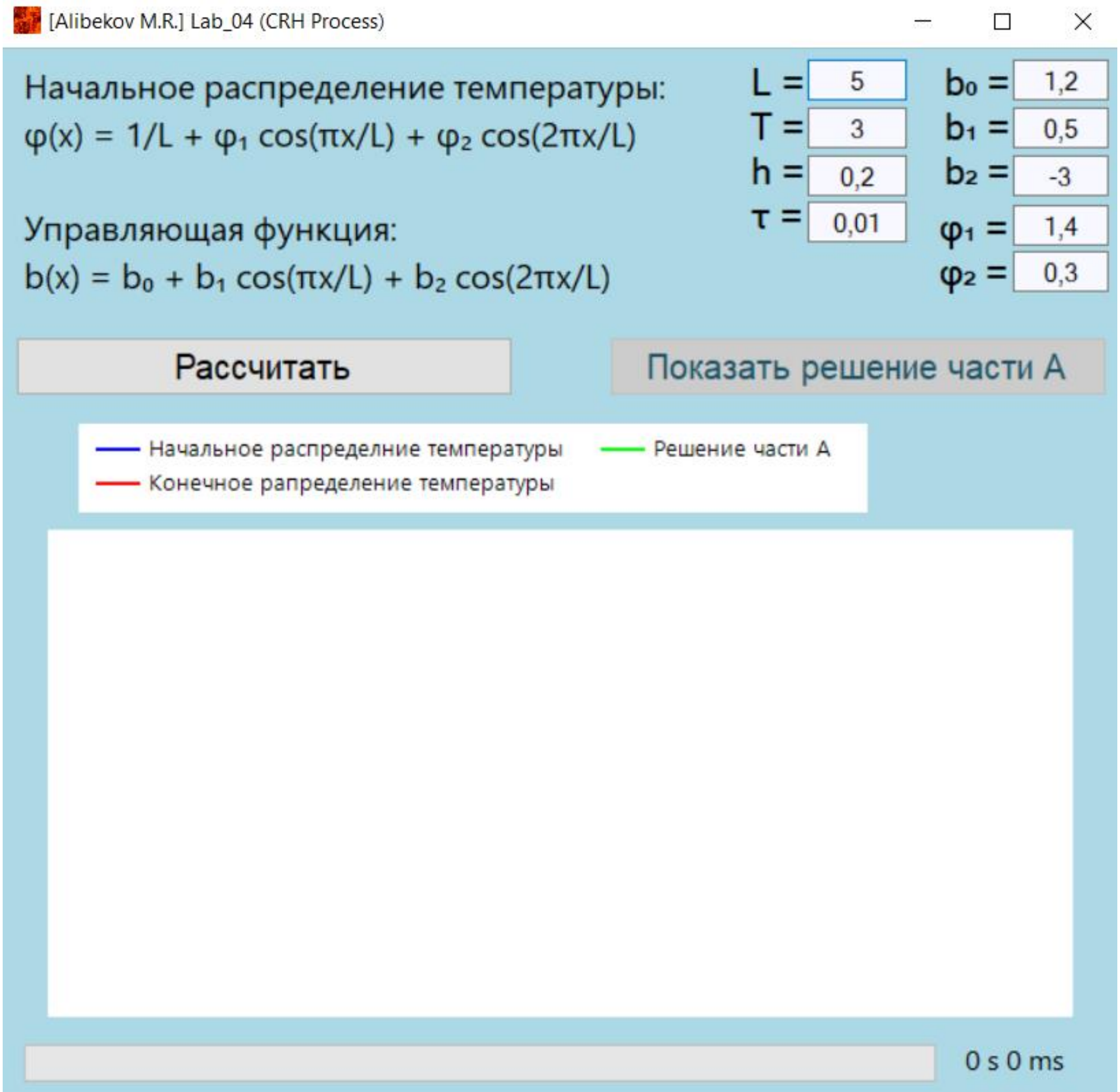

Рисунок 1. Окно приложения

После запуска можно заметить большое пустое поле в нижней области приложения. Именно в этой области будут вырисовываться графики начальной температуры, конечной температуры и график решения части А. В верхней области располагаются данные о начальных условиях, включающие в себя вид функций распределения начальных условий и форматируемые поля для непосредственного задания параметров (длины стержня L, времени T, шага h в разностной схеме по координате x, шага τ в разностной схеме по координате t, констант $\varphi_1, \varphi_2, b_0, b_1, b_2$). В самом внизу можно заметить строку прогресса и время выполнения расчетов (по умолчанию стоит 0 секунд и 0 миллисекунд).

При заданных параметрах можно рассчитать температуру, нажав кнопку “Рассчитать”. После нажатия на кнопку строка прогресса постепенно, по мере выполнения вычислений будет заполняться, а по результатам вычислений в белой области в нижней части приложения появятся графики начального (синяя линия) и конечного (красная линия) распределения температур стержня, «активируется» кнопка “Показать решение части А”, а рядом со строкой прогресса появится время выполнения вычислений (в секундах и миллисекундах). (см. Рисунок 2).

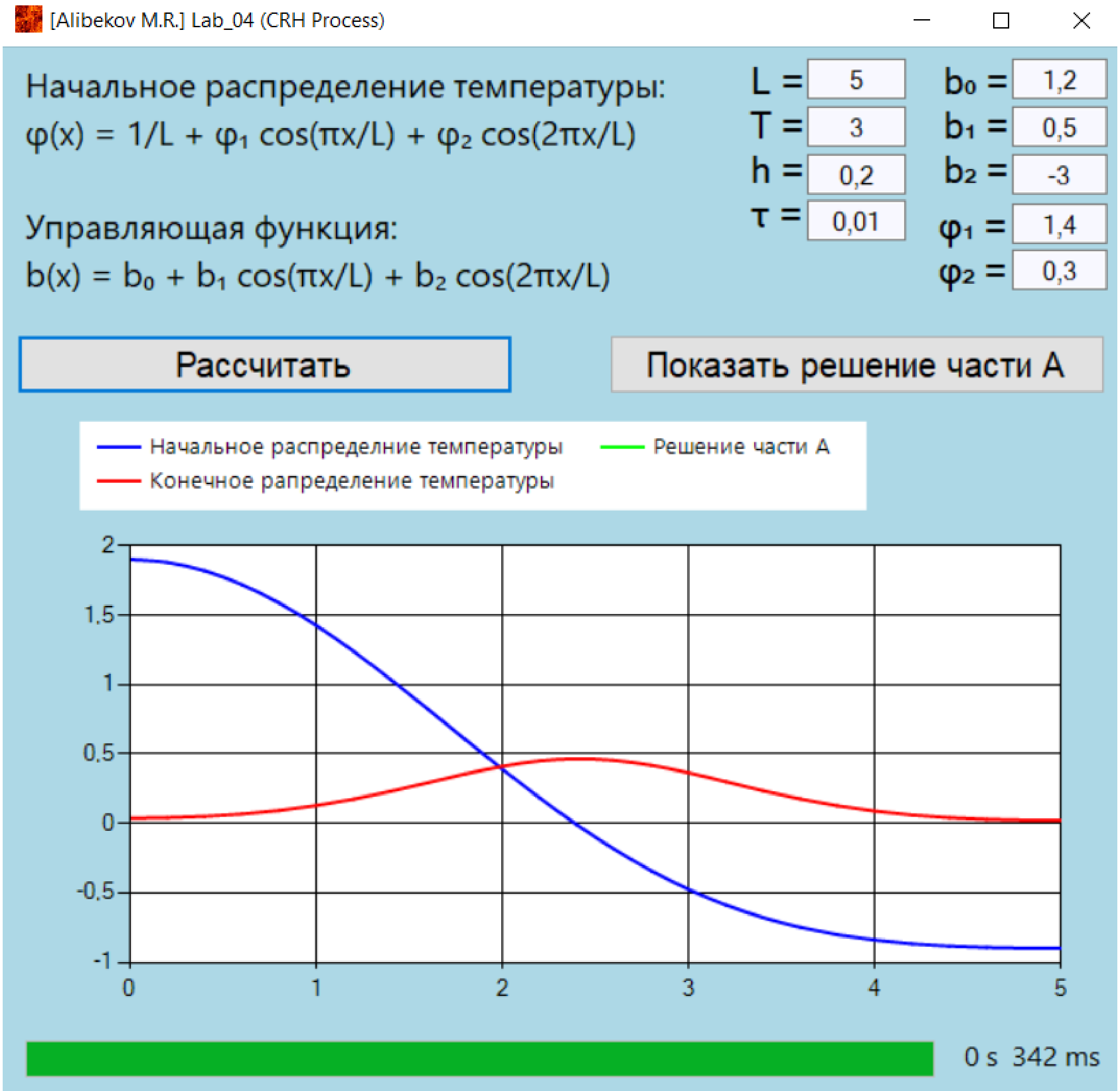

Рисунок 2. Расчёт и построение графиков распределения температур

При нажатии на кнопку “Показать решение части А” происходит перерасчет с учетом другой функции управления с обратной связью. При этом строка прогресса обнулится, а затем снова постепенно, по мере выполнения вычислений будет заполняться, а по результатам вычислений в белой области в нижней части приложения поверх уже прорисованных графиков появится новый график конечного распределения температуры в виде линии зеленого цвета, значение времени рядом со строкой прогресса обновится с учетом времени выполнения новых расчетов, а кнопка “Показать решение части А” поменяется на “Скрыть решение части А”. (см. Рисунок 3).

В виду того, что решения с разными функциями управления с обратной связью приблизительно схожи, зачастую красная линия будет затмеваться зеленой линией.

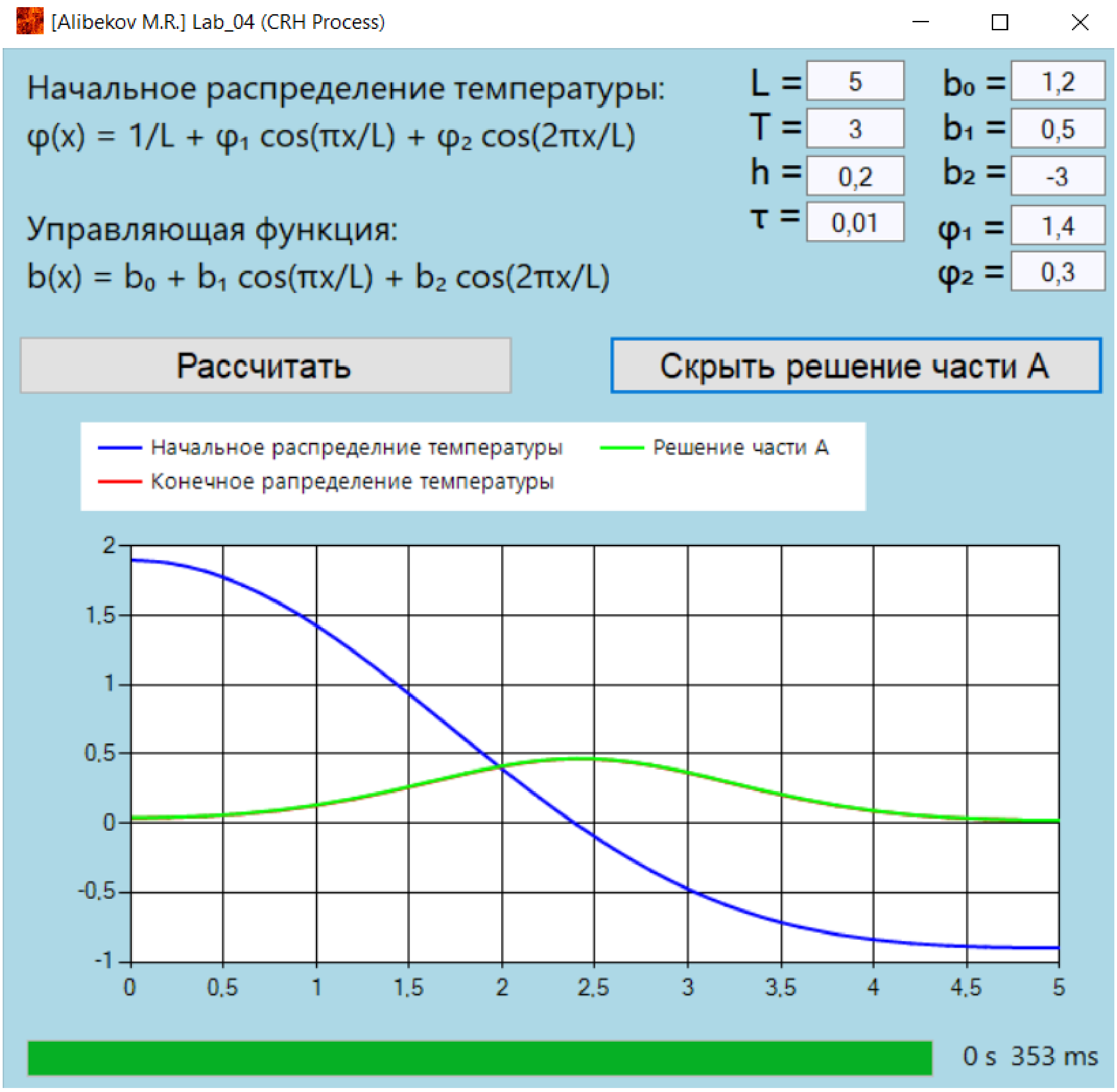

Рисунок 3. Построение графика решения части А

При нажатии на кнопку “Скрыть решение части А” все вернется в состояние до нажатия кнопки “Показать решение части А”, а в частности исчезнет график решения части А (линия зеленого цвета), и кнопка “Скрыть решение части А” поменяется на “Показать решение части А”. (см. Рисунок 4).

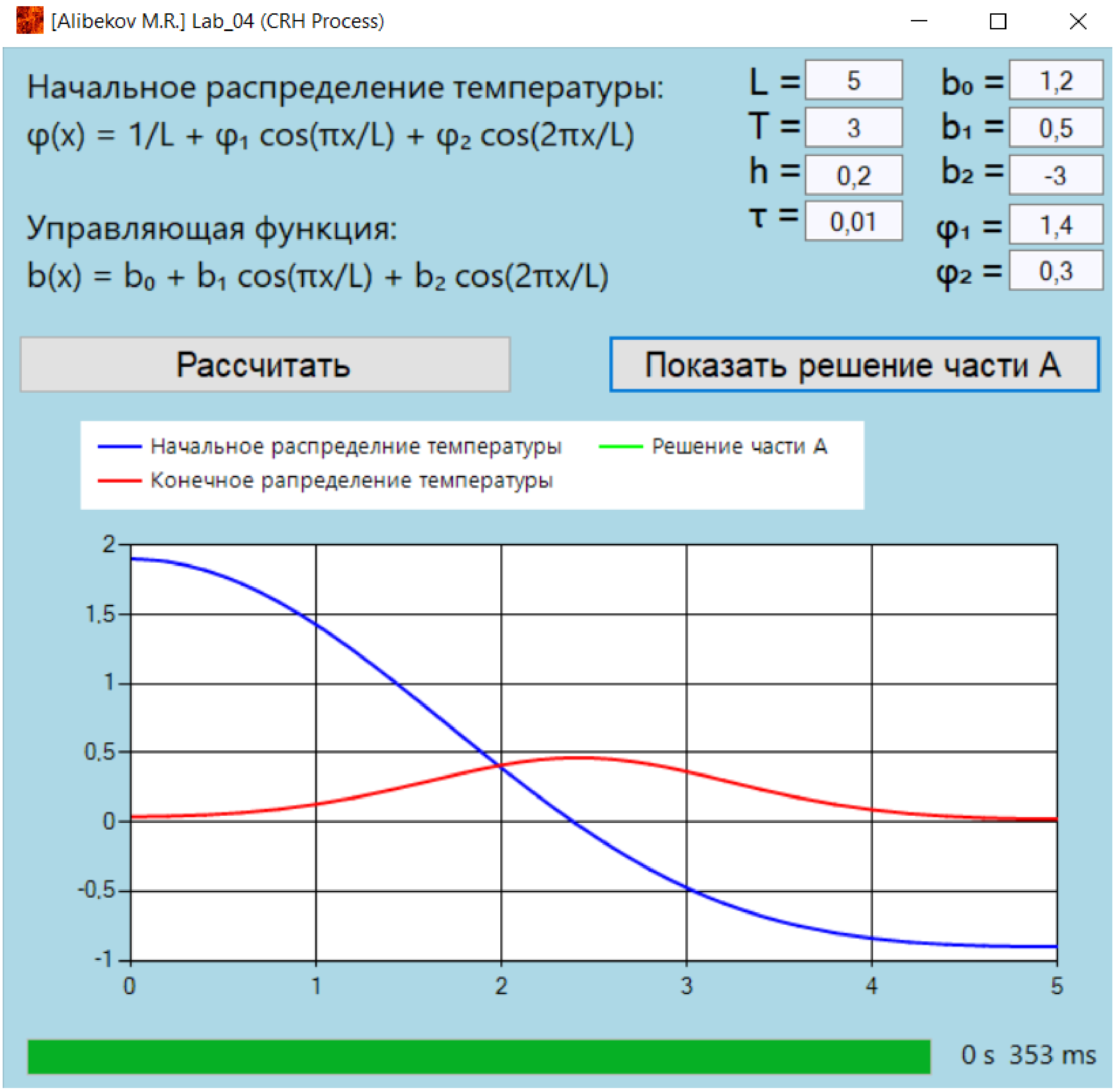

Рисунок 4. Сокрытие графика решения части А

5. Заключение

В результате лабораторной работы был разработан программный комплекс на языке C#, позволяющий позволяет найти численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных на примере задачи вычисления температуры тонкого однородного стержня с теплоизолированными концами при нагревании.

В результате работы программы выполняется поиск решения с учетом начальных данных (линия синего цвета), задаваемых пользователем вручную и последующее её отображение на экране в графическом виде (линией красного цвета). Также присутствует возможность использовать второй вариант функции управления с обратной связью (часть А (линия зеленого цвета)).

Также в ходе экспериментов сравнили результирующие решения, полученные использованием разных вариантов функций управления с обратной связью. И на основе данной лабораторной работы можно сделать некоторые выводы, касающихся решения части В:

- На концах отрезка в силу график функции численного решения имеет горизонтальные касательные.
- Площадь фигуры, где график функции $\varphi(x)$ выше, чем $y(x,T)$ равна площади фигуры, где функция $\varphi(x)$ ниже, чем $y(x,T)$.
- При замене функции $b(x)$ на $b(x) + C_0$, где C_0 – некоторая константа, функция $y(x,T)$ не изменяется.
- Зеленый график находится «близко» к красному.

В результате, цели, поставленные в данной лабораторной работе, были успешно достигнуты.

6. Литература

1. Герберт Шилдт. C# 4.0: Полное руководство: ООО “И.Д. Вильямс”, 2011 – 1056 с.
2. Эгамов А.И. Лабораторная работа «Численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных: учебно-метод. пособие / А.И. Эгамов. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2019. – 15 с
3. Э.Г. Позняк, В.А. Ильин. Основы Математического анализа. Часть 2. – Москва: Физматлит, 2002. 464с.
4. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. 799с.
5. А.А. Самарский. Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2005. 288с.
6. Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. – Томск : STT, 2016. – 92 с.
7. И.С. Березин, Жидков Н.П. Методы вычислений Т.2. – М.: ГИФМЛ, 1959. 620с.