Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт Информационных технологий, математики и механики

Отчёт по лабораторной работе

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка

Выполнил:
студент гр. 381806-01

Алибеков М.Р.

Проверил:
Доцент каф. ДУМЧА, ИИТММ

Эгамов А.И.

Нижний Новгород
2021 г.

Содержание

1. Введение

Лабораторная работа направлена на изучение вопроса нахождения приближенного решения задачи Коши для системы из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты четвёртого порядка и сравнения приближенного решения с точным, полученным аналитическим путём.

Основа большинства физических законов сформулирована в терминах дифференциальных уравнений, а потому они являются одним из важнейших инструментов математического моделирования. Законы Ньютона в механике и уравнения Максвелла в теории электромагнитного поля, законы Кирхгофа в теории электрических цепей и уравнение Шредингера в квантовой механике, а также многие другие дифференциальные уравнения или их системы составляют ядро математического аппарата физических исследований.

Аналитическое решение некоторых наиболее интересных дифференциальных уравнений, как правило, невозможно, и, в связи с этим, приходится прибегать к приближенным вычислениям и, как следствие, возникает задача численного определения интегральных кривых исследуемых уравнений.

В ходе данной лабораторной работы был изучен и применён на практике метод Рунге-Кутты четвёртого порядка. Хотя методы Рунге-Кутты и составляют важный класс численных методов решения ОДУ, он всё же не единственный, и существуют, и широко применяются и другие методы численного решения ДУ, такие как, многошаговые методы (методы Адамса, методы Хэмминга и др.), методы экстраполяции, и т.д.

2. Постановка задачи

В рамках лабораторной работы ставится задача реализации программного комплекса с графическим пользовательским интерфейсом (на одном из языков программирования высокого уровня), который позволит находить приближенное решение задачи Коши для системы из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

В рамках задачи позволено самому выбрать СОДУ (систему обыкновенных дифференциальных уравнений) для исследования. Из явных ограничений можно отметить лишь фиксированное число зависимых переменных ($n = 3$), т.е. в данной задаче: $t -$ независимая переменная, а $x, y, z -$ переменные, зависящие от t.

Программный комплекс должен обладать следующими возможностями:

- При заданной СОДУ возможность задать:
    - начальные условия (t_0, x_0, y_0, z_0).
    - интервал интегрирования (a, b)
    - число шагов интегрирования $(steps)$
- Нахождение приближенного решения в узлах с $t \in [a, b]$ методом Рунге-Кутты.
- Вычисление аналитического решения задачи Коши СОДУ при заданных начальных условиях.
- Построение фазовых портретов найденных точного и приближенного решений в соответствующих узлах.
  <u>Замечание:</u> учитывая тот факт, что у нас система с 3-мя переменными, чтобы построить правильный фазовый портрет, потребуется смоделировать 3D-изображение. К сожалению, данная задача выходит за рамки данного курса, в виду того, что реализация данной задачи без использования профессиональных средств разработок и специальных методов программирования слишком трудоёмка. А потому имеет смысл перейти к построению отдельных графиков приближенного и точного решений, т.е. построение графиков $x(t), y(t)$ и $z(t)$.

Для работы с методом Рунге-Кутты должен быть представлен отдельный класс. Также целесообразно иметь некий общий абстрактный класс для СОДУ, содержащий общие признаки.

Программное решение должно выглядеть приблизительно следующим образом:

1. Модуль MainForm – поддержка GUI (графического пользовательского интерфейса) для работы с программой.
2. Модуль System_3_ODE – общий абстрактный класс, предоставляющий возможность работы с СОДУ определённого вида.
3. Модуль RK4Method – комплексное осуществление работы с методом Рунге-Кутты.

3. Теоретическая основа

3.1 Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка

Методы Рунге-Кутты – большой класс численных методов решения задачи Коши для ОДУ и их систем. К данному классу относятся: явный и модифицированный методы Эйлера, представляющие собой методы 1-ого и 2-ого порядка точности соответственно, стандартные явные методы 3-его порядка точности, не получившие широкого распространения, наиболее распространённый и широко используемый *классический* метод Рунге-Кутты, имеющий 4-ый порядок точности и сопряженные большими вычислительными трудностями методы более высокого порядка точности.

Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка при вычислениях с постоянным шагом интегрирования столь широко распространён, что его часто называют просто методом Рунге-Кутты. Он в данной лабораторной работе и будет использован.

Системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

где x – независимый аргумент, y_i – зависимая функция, $i = \overline{1, n}$, $y_i|_{x=x_0} = y_{i0}$ – начальные условия.

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$k_{i1} = h * f_1(x_j, y_{1j}, \dots, y_{nj})$$

$$k_{i2} = h * f_1(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{k_{i1}}{2}, \dots, y_{nj} + \frac{k_{n1}}{2})$$

$$k_{i3} = h * f_1(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{k_{i2}}{2}, \dots, y_{nj} + \frac{k_{n2}}{2})$$

$$k_{i4} = h * f_1(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + k_{i3}, \dots, y_{nj} + k_{n3})$$

$$y_{ij+1} = y_{ij} + \frac{h}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4})$$

$$x_{j+1} = x_j + h$$

где h — величина шага сетки по x.

Этот метод имеет четвёртый порядок точности, т.е. ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

3.2 Аналитическое решение системы ОДУ и задачи Коши

В данной задаче позволено выбрать произвольную систему из 3-х ОДУ, а потому была выбрана следующая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

Шаги поиска решения можно пропустить по той простой причине, что данная система является ничем непримечательной СОДУ, подобные которым были многократно решены в курсе Дифференциальных уравнений. Поэтому сразу запишем ответ, без непосредственных математических выкладок:

$$\begin{cases} x(t) = e^t(-2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t) \\ y(t) = e^t(C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t) \\ z(t) = e^t(-C_1 + 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t) \end{cases}$$

Но не стоит забывать, что в нашу задачу также входит аналитическое решение задачи Коши согласно заданным начальным условиям, что эквивалентно поиску значений $\{C_1, C_2, C_3\}$, как некоторых функций от $\{t_0, x_0, y_0, z_0\}$, т.е. поиску

$$\begin{cases} C_1 = C_1(t_0, x_0, y_0, z_0) \\ C_2 = C_2(t_0, x_0, y_0, z_0) \\ C_3 = C_3(t_0, x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Путем несложных математических преобразований, можно получить следующие значения для искомых коэффициентов:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{e^{-t_0}}{4}(3y_0 - z_0) \\ C_2 = \dfrac{e^{-t_0}}{4}\big((x_0 + y_0)\cos 2t_0 - 2x_0 \sin 2t_0\big) \\ C_3 = \dfrac{e^{-t_0}}{4}\big((x_0 + y_0)\sin 2t_0 + 2x_0 \cos 2t_0\big) \end{cases}$$

Заметим, что $\{C_1, C_2, C_3\}$ зависят исключительно от начальных условий и ни от чего более, а, следовательно, при подстановке соответствующих значений $\{t_0, x_0, y_0, z_0\}$, $\{C_1, C_2, C_3\}$ превратятся в константы, и при их подстановке в решение системы ОДУ, получим точное решение задачи Коши для заданных начальных условий.

4. Руководство пользователя

При запуске программы перед пользователем появляется интерфейс управления (см. Рисунок 1):

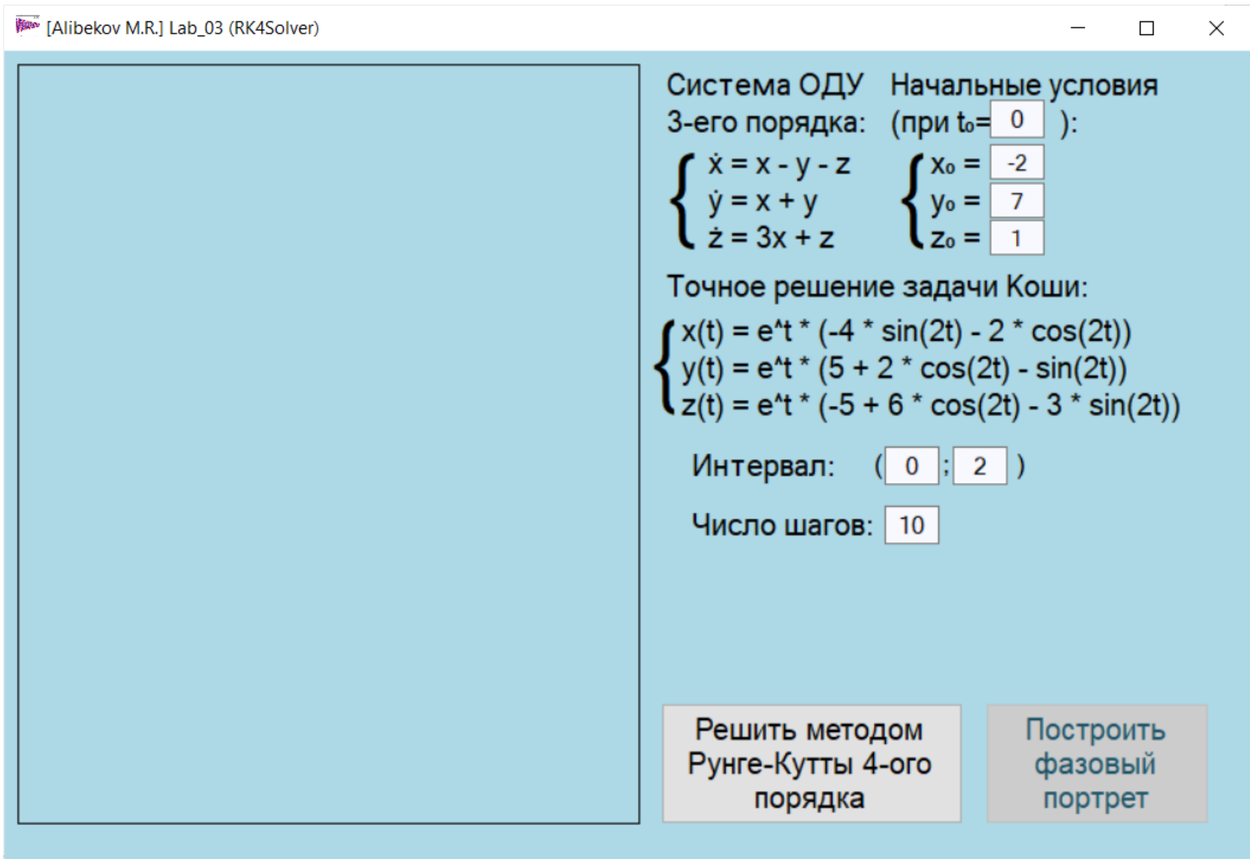

Рисунок 1. Окно приложения

После запуска можно заметить большое пустое поле в левой области приложения. Именно в этой области располагается таблица приближенных значений численного решения и там же будут вырисовываться графики $x(t), y(t), z(t)$. В правой области располагаются данные о самой системе ОДУ, включающие в себя саму систему, аналитическое решение системы при заданных начальных условиях и форматируемые поля для непосредственного задания параметров (начальных условий, интервала и числа шагов).

При заданных параметрах можно воспользоваться методом Рунге-Кутты, нажав кнопку “Решить методом Рунге-Кутты 4-ого порядка”. В результате появится таблица с соответствующими приближенными значениями. (см. Рисунок 2).

Помимо этого, появляется возможность построить “фазовый портрет” системы (точнее, графики функций $x(t), y(t), z(t)$). (см. Рисунок 3)

По умолчанию показывается график $x(t)$, но также, меняя “переключатели” (“График x(t)”, “График y(t)”, “График z(t)”), можно выбрать другие графики. (см. Рисунок 4 и Рисунок 5).

Вообще говоря, каждый раз строятся по 2 графика (приближенное решение (красной линией) и точное решение (зелёной линией)). Но красная линия полностью перекрывается зелёной, потому что приближенное решение в этих точках совпадает с точным решением.

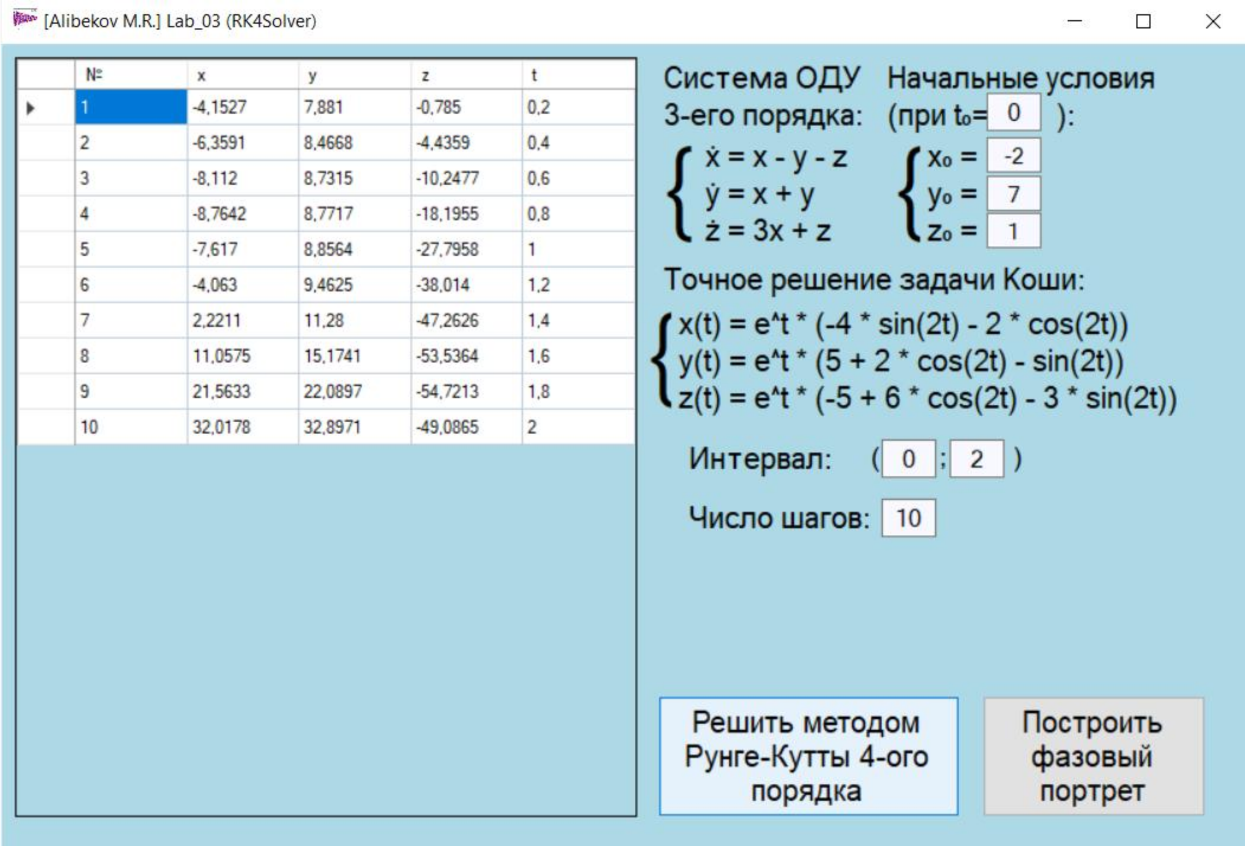

Рисунок 2. Приближенное решение методом Рунге-Кутты

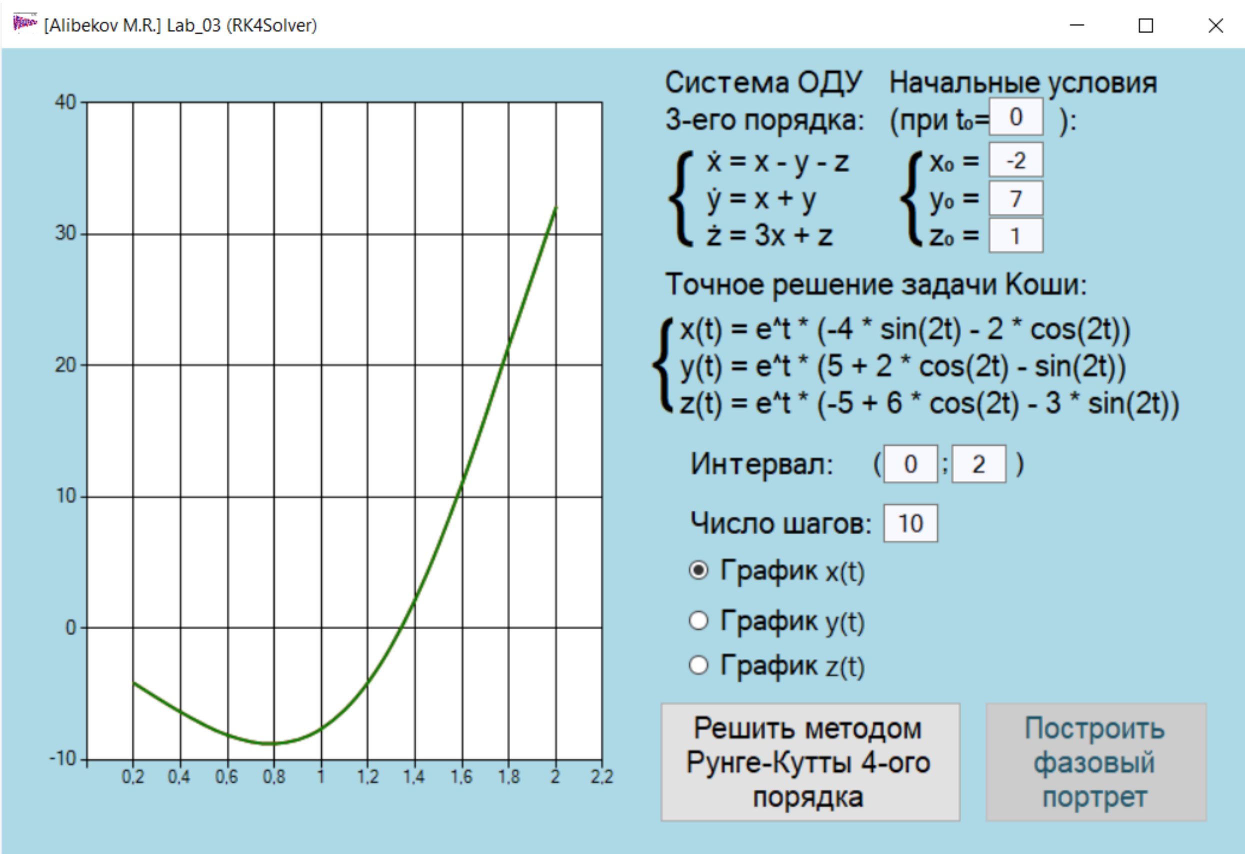

Рисунок 3. Построение графиков функций (график x(t))

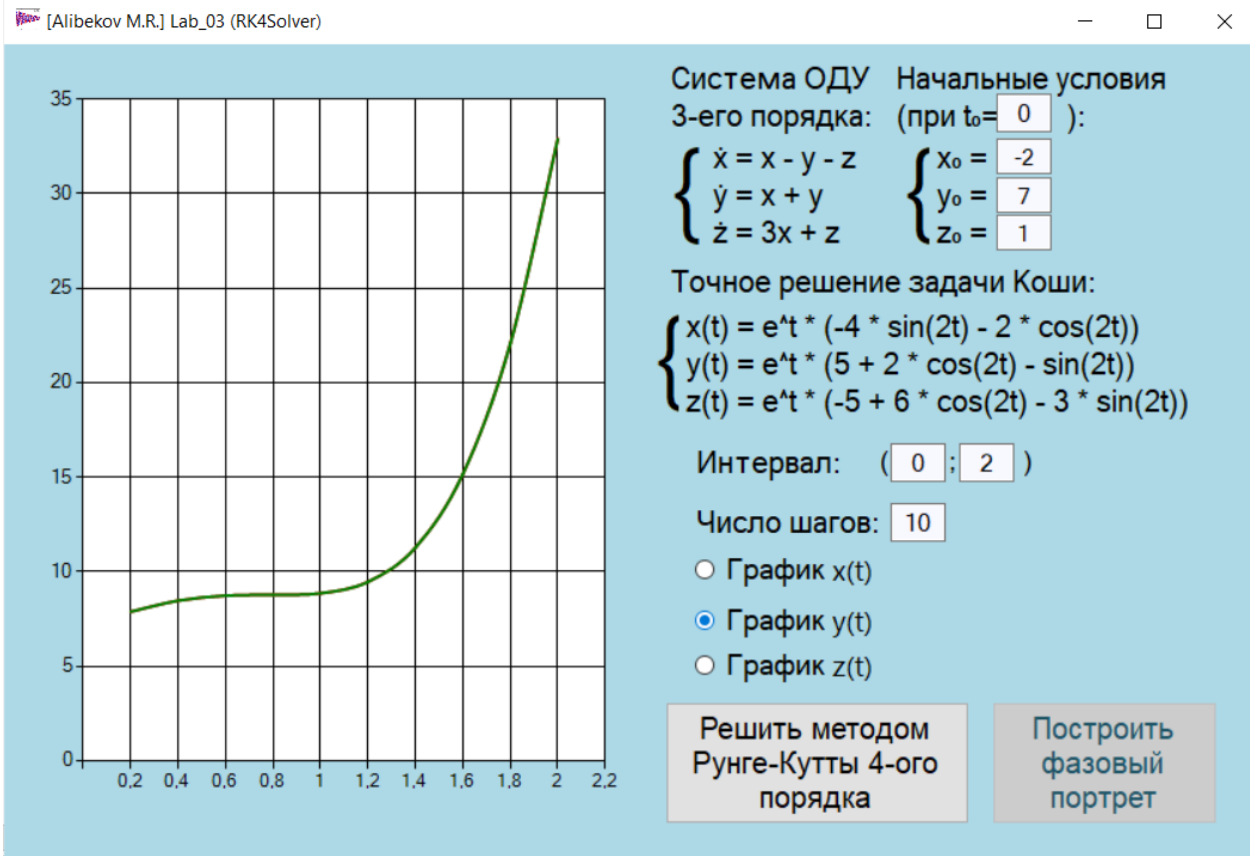

Рисунок 4. Построение графиков функций (график y(t))

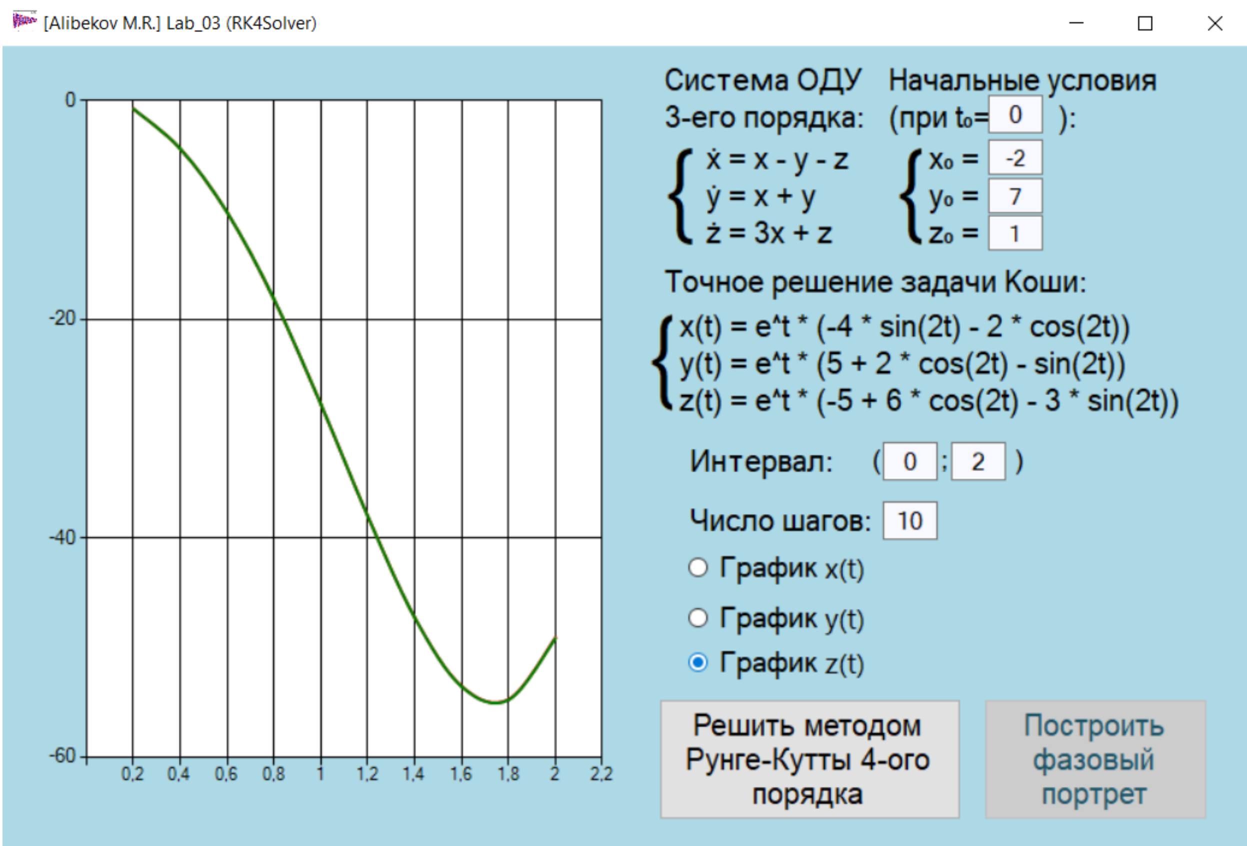

Рисунок 5. Построение графиков функций (график z(t))

5. Заключение

В результате лабораторной работы был разработан программный комплекс на языке C#, позволяющий численно решить задачу Коши для системы из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты четвёртого порядка и сравнить полученное приближение с точным решением, полученным аналитическим путём.

В результате работы программы на экране в виде таблицы отображаются приближенные значения решения в соответствующих им узлах. Помимо этого, также можно построить графики $x(t), y(t), z(t)$, как для приближенного решения (линия красного цвета), так и для точного решения (линия зелёного цвета).

В ходе экспериментов сравнили результирующие решения, полученные численным и аналитическим методами при разных начальных условиях, интервалах и числе шагов. И на основе данной лабораторной работы можно сделать вывод, что численное и точное решения оказываются достаточно близки при приближении малыми шагами, независимо от начальных условий.

В результате, цели, поставленные в данной лабораторной работе, были успешно достигнуты.

6. Литература

1. Д.П. Кострамов, А.П. Фаворский Вводные лекции по численным методам: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2004. – 184 с.: ил.
2. Герберт Шилдт. C# 4.0: Полное руководство: ООО “И.Д. Вильямс”, 2011 – 1056 с.
3. Курс лекций по Вычислительным Методам 6-ого семестра в 2020-2021 учебных годах направления ФИИТ в Институте информационных технологий, математики и механики в ННГУ им. Лобачевского.
4. Метод Рунге-Кутты. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты
5. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Учеб. пособие для вузов, — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 432 с. — ISBN 5-02-013996-3.