№19. Олимпиадная задача

Для успешного решения задачи №19 нужно знать следующие темы:

- Последовательности
- Десятичная запись числа, работа с цифрами
- Остатки, признаки делимости
- ОТА и НОД
- Инвариант
- Среднее арифметическое
- Классические олимпиадные идеи

№19. Олимпиадная задача. Задачи

№19.1 #24200

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход из чисел a и b можно получить числа $a+b$ и $2a-1$ или числа $a+b$ и $2b-1$. Например, из чисел 2 и 3 можно получить числа 5 и 3 или числа 5 и 5.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел на доске окажется равным 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел на доске оказаться равным 200?

в) Сделали 1007 ходов, причем на доске не было равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из двух полученных чисел?

№19.2 #2060

На доске написаны числа 1, 2, 3,. . . , 30. За один ход разрешается стереть три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

№19.3 #56128

Дано натуральное число. Можно либо вычесть из него утроенную сумму его цифр, либо прибавить к нему утроенную сумму его цифр. При этом полученное число должно быть натуральным.

а) Можно ли с помощью таких операций из числа 128 получить число 29?

б) Можно ли с помощью таких операций из числа 128 получить число 31?

в) Какое наименьшее натуральное число можно получить из 128 с помощью таких операций?

№19.4 #24443

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 12?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?

в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

№19.5 #775

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры. Например, число 16 заменили на число 61.

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

№19.6 #26929

Даны четыре последовательных натуральных числа. Каждое из чисел поделили на его последнюю цифру, а затем четыре полученных результата сложили.

а) Может ли полученная сумма равняться 42,3?

б) Может ли полученная сумма равняться $227\frac{41}{72}$?

в) Какое наибольшее целое значение может принимать сумма, если изначально на доске могли быть записаны только числа от 800 до 999 включительно?

№19.7 #21796

а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

№19.8 #83776

Дан набор цифр: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9. Из них составляют одно трёх- и одно четырёхзначное число. Оба составленных числа кратны 45, цифры не повторяются.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 2205?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 3435?

в) Какова максимально возможная сумма этих чисел?

№19.9 #2457

Учитель задумал несколько необязательно различных натуральных чисел. Эти числа и результаты всех их возможных произведений по два числа, по три числа и так далее он выписал на доску. Если какое-то число, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют только одно такое число, а другие равные ему числа стирают.

Например, если задуманы числа 1, 5, 6, 5, то на доске будет набор 1, 5, 6, 30, 25, 150.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 105, 315, 945?

в) Приведите все примеры шести задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 82.

№19.10 #64209

Есть числа A и B. Из них можно сделать числа $A+2$ и $B-1$ или $A-1$ и $B+2$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A=5$, $B=7$.

а) Можно ли за 50 ходов создать пару, где одно из чисел равно 100?

б) За сколько ходов можно сделать пару, где сумма чисел будет равна 400?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы оба числа не превышали 100?

№19.11 #63294

Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a+b; a-b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(50; 9)$ пару, большее число в которой равно 200?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(50; 9)$ пару $(408; 370)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(408; 370)$?

№19.12 #30823

Есть три коробки: в первой коробке 64 камня, во второй — 77 камней, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Может ли в первой коробке оказаться 64 камня, во второй — 59 камней, а в третьей — 18 камней?

б) Может ли в третьей коробке оказаться 141 камень?

в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней может оказаться в третьей коробке?

№19.13 #13939

Трёхзначное натуральное число поделили на сумму его цифр. Известно, что полученное частное — целое число.

а) Могло ли получиться 13?

б) Могло ли получиться 6?

в) Какое наибольшее частное могло получиться, если число не делится на 100, а его первая цифра равна 6?

№19.14 #27764

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

№19.15 #11033

Дана геометрическая прогрессия длины 3 с натуральным первым членом и натуральным знаменателем, большим единицы.

а) Может ли произведение всех трех членов прогрессии быть равно 9261?

б) Может ли третий член прогрессии быть равен 210?

в) Какое наименьшее значение может принимать первый член, если сумма всех трех членов равна 189?

№19.16 #18500

В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?

б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?

в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

№19. Олимпиадная задача. Ответы

19.1. а) $(2;3) \xrightarrow{2} (5;5) \xrightarrow{2} (10;9) \xrightarrow{1} (19;19)$

б) Нет, не может

в) 2

19.2. а) $(1;3;30)$, $(2;4;27)$, $(5;7;20)$, $(6;8;17)$, $(9;10;11)$

б) Нет, нельзя

в) 6 ходов

19.3. а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 2

19.4. а) Да, может

б) Нет, не может

в) 11

19.5. а) 32 числа 92 + число 26

б) Нет

в) 693

19.6. а) Нет, не может

б) Нет, не может

в) 2004

19.7. а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 5

19.8. а) Да, может

б) Нет, не может

в) 10035

19.9. а) 2, 3, 3, 5

б) Нет, не существует

в) 82, 1, 1, 1, 1, 1 или 2, 41, 1, 1, 1, 1

19.10. а) Нет, нельзя

б) 388

в) 187

19.11. а) Да

б) Нет

в) 204

19.12. а) Да, может

б) Нет, не может

в) 138

19.13. а) Да

б) Нет

в) 70

19.14. а) Нет

б) Да

в) $\dfrac{6}{7}$

19.15. а) Да

б) Нет

в) 9

19.16. а) Да, может

б) Нет, не может

в) $\dfrac{31}{6}$