№6,7. Уравнения и значения выражений. Теория

Степени

Определение степени

Выражение a^n называется степенью, число a — основанием степени, n — показателем степени. На самом деле запись a^n означает, что мы умножаем число a само на себя n раз, то есть

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Таблица наиболее часто встречающихся степеней

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$			
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$			
$2^7 = 128$				
$2^8 = 256$				
$2^9 = 512$				
$2^{10} = 1024$				

Свойства степеней

- При перемножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются, то есть

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Например,

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Так происходит потому, что $2^2 = 2 \cdot 2$, а $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Таким образом,

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 32.$$

- При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются, то есть

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Например,

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9.$$

Опять же, так происходит потому, что

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 9.$$

А что будет, если мы будем делить 3^4 на 3^6? По свойству мы получим

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2}.$$

Но мы пока не знаем что делать, если показатель степени отрицателен. Распишем по определению:

$$\frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{3\cdot 3\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = \frac{1}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, мы получили следующее свойство.

• $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$. Например,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Значит,

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

• При возведении степени в степень показатели перемножаются, то есть

$$(a^x)^y = a^{x\cdot y}.$$

Например,

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64;$$

$$\left(2^3\right)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15}.$$

• $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Об этом свойстве просто договорились, чтобы не было противоречий в предыдущих свойствах. Например,

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a\cdot a}{a\cdot a} = 1, \quad \text{но и} \quad 1 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0.$$

• Степень произведения равна произведению степеней, то есть

$$(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x.$$

Например,

$$6^3 = (2\cdot 3)^3 = 2^3\cdot 3^3 = 8\cdot 27 = 216.$$

• Степень частного равна частному степеней, то есть

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Логарифмы

Понятие логарифма тесно связано с понятием степени, поэтому всюду ниже мы будем активно пользоваться следующими базовыми свойствами степеней:

- $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$;
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Определение логарифма

Логарифм по основанию a от b — это число t, которое показывает, в какую степень нужно возвести a, чтобы получить b. Таким образом, для $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется основное логарифмическое тождество:

$$a^t = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = t.$$

Здесь a называется основанием логарифма, b — аргументом логарифма.

Таким образом, значение логарифма — это просто соответствующий показатель степени. Рассмотрим уравнение

$$2^x = 8.$$

Очевидно, что его решением является число 3. Но что делать, если мы столкнулись например с уравнением

$$2^x = 5?$$

Как записать его решение? Мы знаем только то, что x — это некоторое число, большее чем 2, но меньшее чем 3. Именно в таком случае помогает понятие логарифма, ведь x — это *такое число, в степень которого нужно возвести 2, чтобы получить 5*, а это и есть определение для логарифма $\log_2 5$.

Свойства логарифмов

0. $a^{\log_a b} = b$
1. $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$
2. $\log_b a - \log_b c = \log_b \dfrac{a}{c}$
3. $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$
4. $\log_{b^r} a = \frac{1}{r} \cdot \log_b a$
5. $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$
6. $\log_b a \cdot \log_a b = 1$
7. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $a \neq 1$
8. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$
9. $\dfrac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

Уравнения с логарифмами

Рассмотрим уравнение вида

$$\log_b a = \log_b c$$

Его ОДЗ

$$\begin{cases} b > 0 \\ b \neq 1 \\ a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

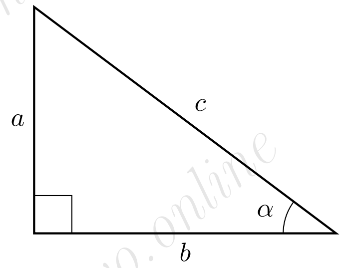
На ОДЗ данное уравнение равносильно равенству аргументов логарифмов, то есть $a = c$. Чисто алгебраически можно записать в следующем виде

$$\log_b a = \log_b c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = c \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Базовые тригонометрические факты

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

Пусть есть прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Пусть острый угол между сторонами b и c равен α. Тогда



$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Даже из таких соотношений можно вывести несколько формул:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1.$$

Наш треугольник — прямоугольный, значит, в нем верна теорема Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Тогда можем вывести основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Данное тождество очень полезно, так как фактически это «бесплатное» уравнение. С помощью него мы по синусу можем найти косинус и наоборот.

Табличные значения тригонометрических функций

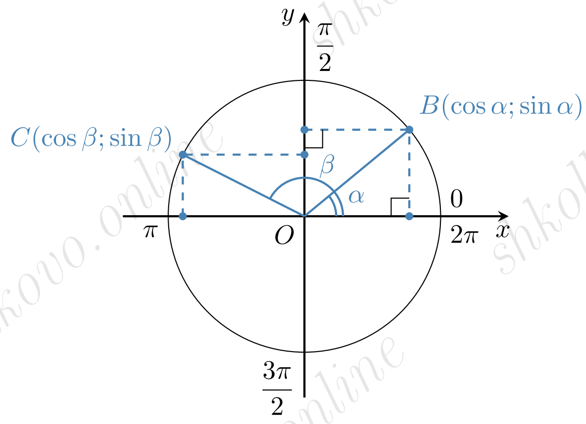
Таблица синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов из первой четверти:

	$0\ (0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}\ (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}\ (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}\ (60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}\ (90^\circ)$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Тригонометрическая окружность

Возьмем окружность в центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R=1$. Тогда длина этой окружности будет равна $L = 2\pi R = 2\pi$. Таким образом, мы получили связь угла 360° с длиной окружности 2π.

Выберем произвольную точку B на окружности. Пусть угол между OB и положительным направлением оси абсцисс равен α. Тогда точка B имеет координаты $(\cos\alpha;\sin\alpha)$.



Такое определение тригонометрических функций работает для всех углов. Например, отложим угол $\beta > 90°$. На окружности получим точку $C(\cos\beta; \sin\beta)$.

Так как синус и косинус — координаты точек на единичной окружности, то получаем ограничения:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

Знаки тригонометрических функций

Оси делят нашу окружность на четыре четверти:

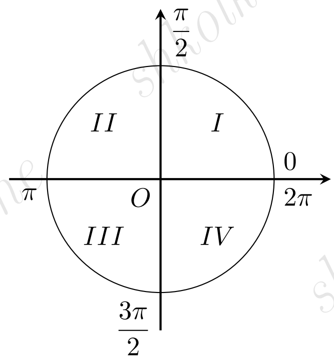
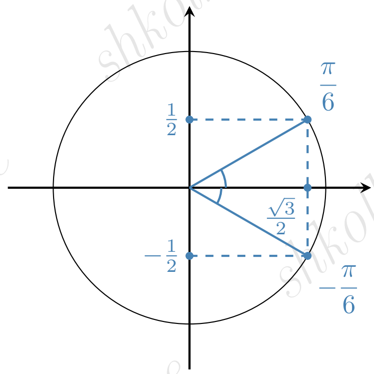


Таблица знаков тригонометрических функций в соответствующих четвертях:

	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

Четность/нечетность тригонометрических функций

Откладывать углы от оси абсцисс мы можем как в положительном направлении (против часовой стрелки), так и в отрицательном (по часовой стрелке). Давайте отложим угол $\frac{\pi}{6}$ в обоих направлениях.



Тогда получим равнобедренный треугольник, в котором биссектриса является медианой, следовательно,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Таким образом, синус — нечетная функция, а косинус — четная, то есть

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Формулы приведения

Пользуясь периодичностью функций $\sin$ и $\cos$, мы можем упрощать их аргументы по следующим формулам:

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$

Наиболее распространенные тригонометрические формулы

Основные тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ $(\sin\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0)$
$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0)$	$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$

Формулы сложения углов

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\beta\cdot\cos\alpha$	$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, $\cos\alpha\cos\beta\neq 0,\ \cos(\alpha\pm\beta)\neq 0$	$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha\mp 1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}$, $\sin\alpha\sin\beta\neq 0,\ \sin(\alpha\pm\beta)\neq 0$

Формулы двойного и тройного углов

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0,\ \cos 2\alpha\neq 0$	$\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0,\ \sin 2\alpha\neq 0$
$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$