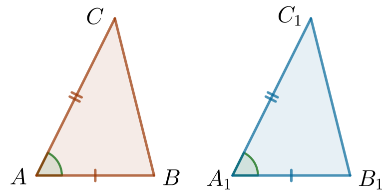
№1. Планиметрия. Теория

Признаки равенства треугольников

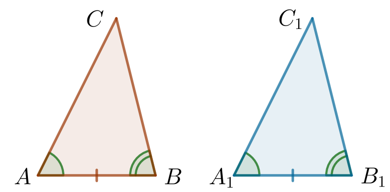
Первый признак (по двум сторонам и углу между ними)

Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



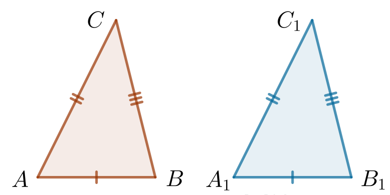
Второй признак (по стороне и двум прилежащим к ней углам)

Если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Третий признак (по трем сторонам)

Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



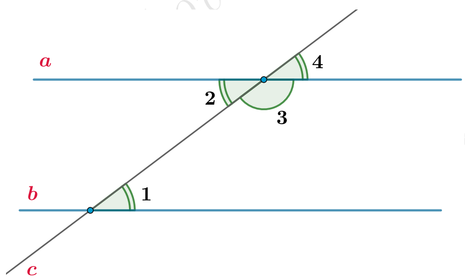
Свойства и признаки параллельных прямых

Если $a \parallel b$ и c — секущая, то

1. $\angle 1 = \angle 2$
2. $\angle 1 = \angle 4$
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180°$

$a \parallel b$ при секущей c, если:

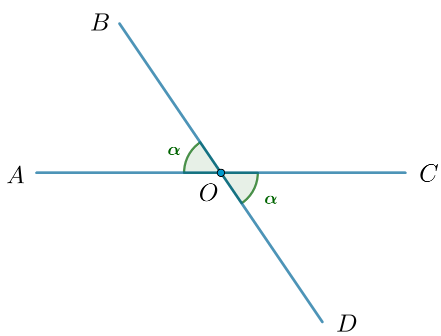
1. $\angle 1 = \angle 2$
2. $\angle 1 = \angle 4$
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180°$



Вертикальные углы

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

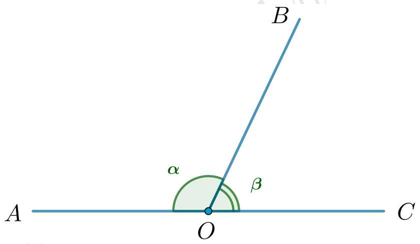
$$\angle AOB = \angle COD$$



Смежные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями друг друга, называются смежными. Сумма смежных углов равна 180°.

$$\angle AOB + \angle BOC = \alpha + \beta = 180^\circ$$

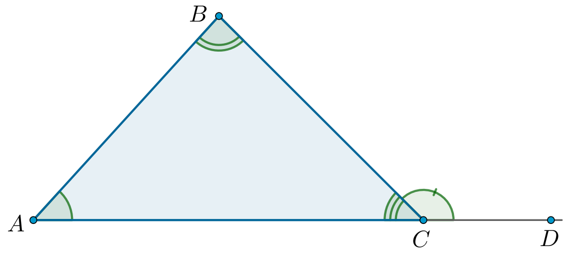


Сумма углов треугольника, внешний угол

Сумма углов треугольника равна 180°.
Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$$

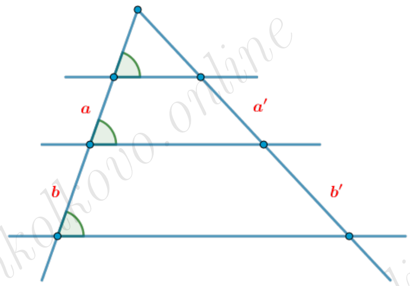


Обобщенная теорема Фалеса

Прямая теорема Фалеса
Параллельные прямые высекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$a : b = a' : b'$$

Обратная теорема Фалеса
Если прямые высекают пропорциональные отрезки на сторонах угла, то эти прямые параллельны.



Средняя линия треугольника

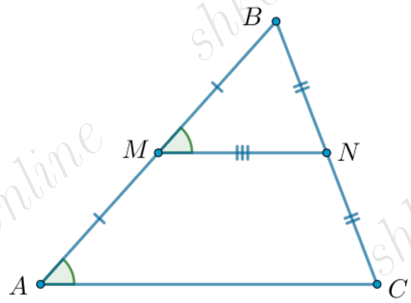
Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

1. Средняя линия треугольника равна половине третьей стороны и параллельна ей, то есть

$$MN = \frac{1}{2}AC \quad \text{и} \quad MN \parallel AC$$

2. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный ему треугольник:

$$\triangle MBN \sim \triangle ABC$$

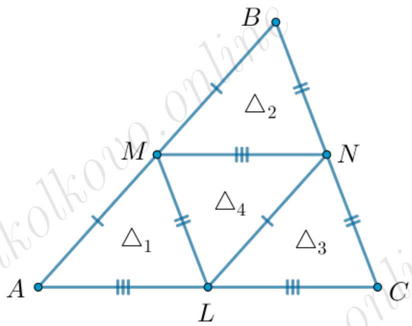


3. Средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника:

$$\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = \triangle_4$$

Следовательно, площади этих треугольников равны:

$$S_{\triangle_1} = S_{\triangle_2} = S_{\triangle_3} = S_{\triangle_4}$$

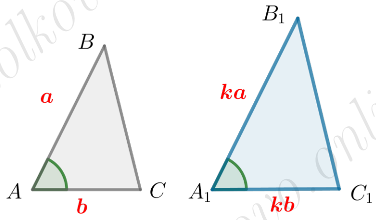


Признаки подобия треугольников

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны, лежащие напротив равных углов, относятся друг к другу с одним и тем же коэффициентом.

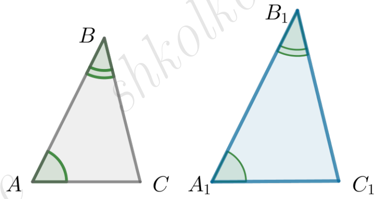
По отношению двух сторон и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны.



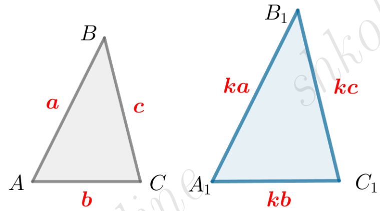
По двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



По отношению трех сторон

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Медиана, биссектриса и высота треугольника

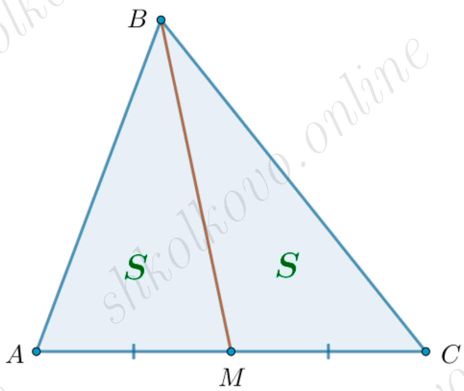
Медиана треугольника и площади

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника. Формула длины медианы треугольника:

$$BM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}$$

Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади (равновеликих):

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$$



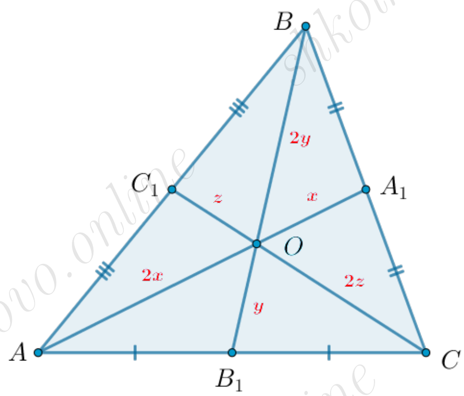
Точка пересечения медиан

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины:

$$AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$$

При этом площади шести образовавшихся треугольников равны:

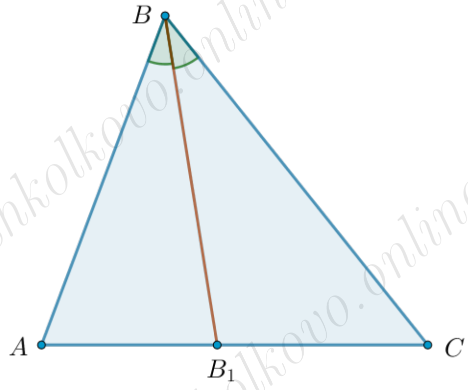
$$S_{AOB_1} = S_{COB_1} = S_{COA_1} = S_{BOA_1} = S_{BOC_1} = S_{AOC_1}$$



Биссектриса треугольника и ее главное свойство

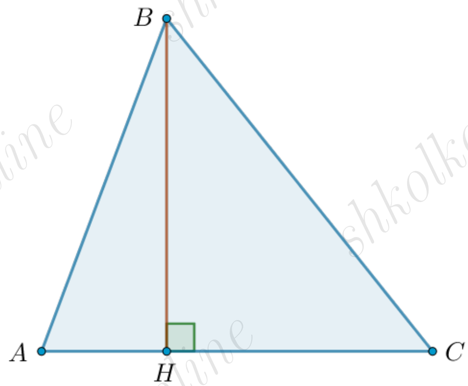
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника.
Напомним, что биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.
Пусть BB_1 — биссектриса в треугольнике ABC. Тогда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C}$$



Высота треугольника

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.



Прямоугольный треугольник и его свойства

Что такое прямоугольный треугольник?

Прямоугольный треугольник — это треугольник, в котором один угол прямой, то есть 90° : $\angle C = 90^\circ = \angle A + \angle B$.

Гипотенуза — это сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.

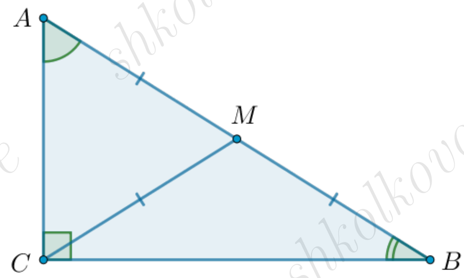
Катеты — это стороны прямого угла в прямоугольном треугольнике

Медиана прямоугольного треугольника

Медиана треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

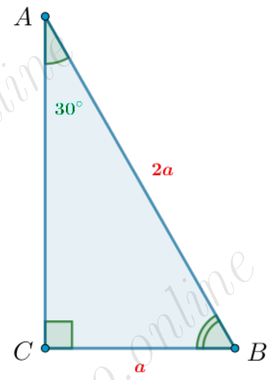
$$CM = \frac{1}{2}AB = AM = MB$$

Таким образом, получаются два равнобедренных треугольника: $\triangle AMC$ и $\triangle CMB$.



Прямоугольный треугольник с углом в 30 градусов

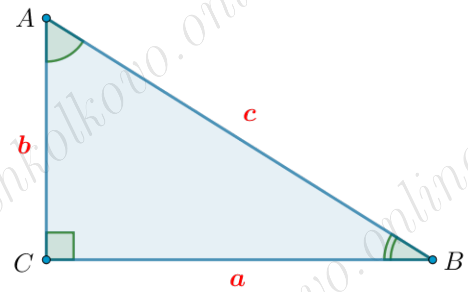
Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.
Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30°.



Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

1. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины прилежащего к этому углу катета к длине гипотенузы.

$$\cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

2. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего этому углу катета к длине гипотенузы.

$$\sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

3. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему.

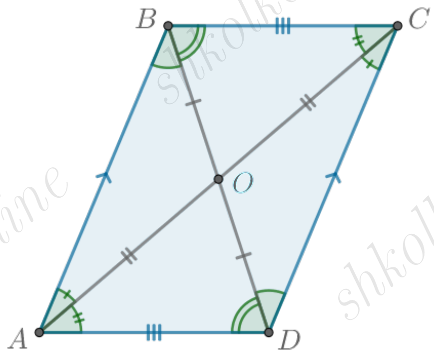
$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Признаки параллелограмма.
Четырехугольник является параллелограммом, если

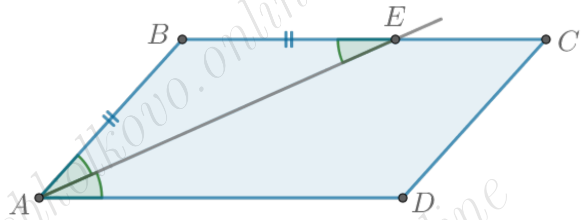
1. противоположные стороны попарно равны.
2. две стороны равны и параллельны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.



Свойства параллелограмма:

1. противоположные стороны попарно равны.
2. противоположные углы попарно равны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Биссектриса AE параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть $AB = BE$ и $\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA$.



Ромб

Ромб — четырехугольник, у которого все стороны равны. Таким образом, всякий ромб является параллелограммом. Соответственно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

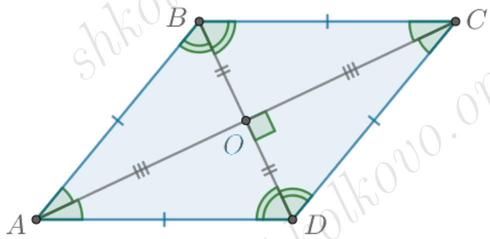
Признаки ромба.

Параллелограмм является ромбом, если

1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

Свойства ромба:

1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.



Трапеция

Трапеция — это выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

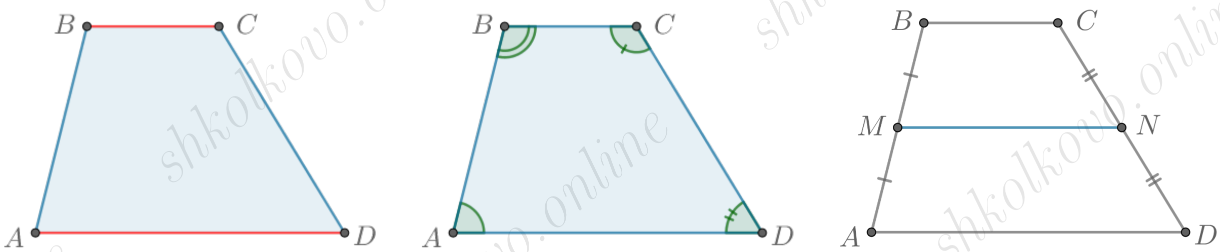
Параллельные стороны называются основаниями, а две другие — боковыми.

Сумма углов при боковой стороне равна 180° :

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ.$$

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Она параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме:

$$MN = \frac{1}{2}\,(AD + BC)\,.$$



Равнобедренная трапеция

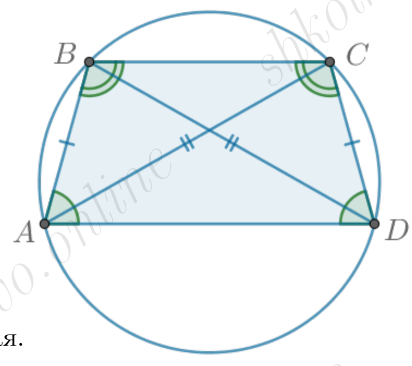
Если боковые стороны трапеции равны, то она равнобедренная.

Свойства равнобедренной трапеции:

1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.
2. В равнобедренной трапеции длины диагоналей равны.
3. Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

Признаки равнобедренной трапеции:

1. Если в трапеции равны углы при основании, то она равнобедренная.
2. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
3. Если трапецию можно вписать в окружность, то она равнобедренная.

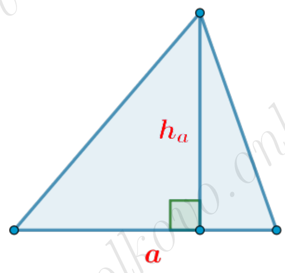


Площади

Площадь треугольника

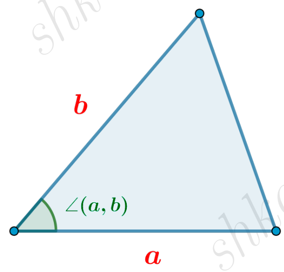
Площадь треугольника равна полупроизведению основания на высоту:

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$



Площадь треугольника равна полупроизведению сторон на синус угла между ними:

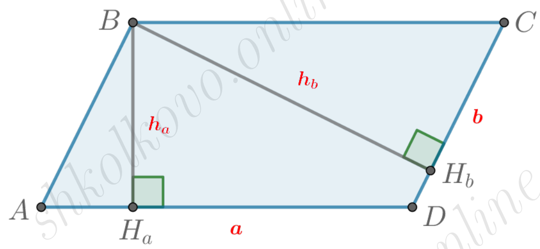
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin \angle(a,b)$$



Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению высоты и стороны, к которой она проведена:

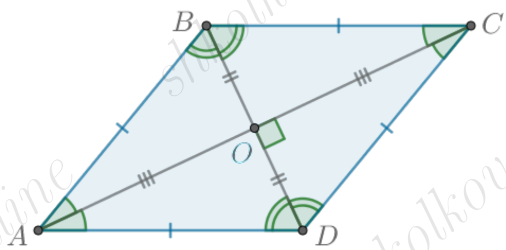
$$S = AD \cdot BH_a = a \cdot h_a = CD \cdot BH_b = b \cdot h_b$$



Площадь ромба

Так как ромб — это параллелограмм, то его площадь можно найти с помощью любой формулы, справедливой для параллелограмма. Следовательно, формула площади через диагонали примет следующий вид:

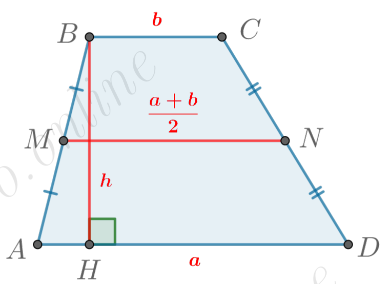
$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$



Площадь трапеции

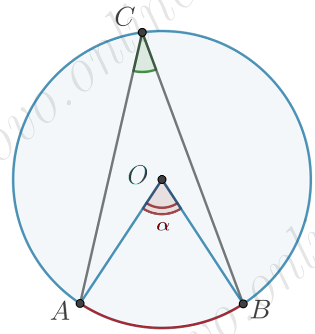
Площадь трапеции равна произведению высоты и средней линии (полусуммы оснований):

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Окружности и вписанные четырехугольники

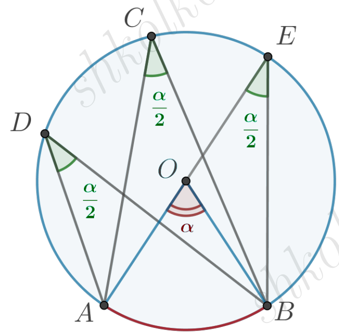
Центральные и вписанные углы



Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности. Пусть точки A и B лежат на окружности с центром в точке O. Тогда угол AOB — центральный.

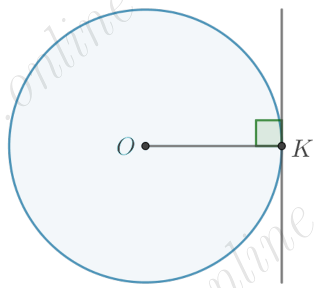
Градусная мера дуги
Пусть $\angle AOB = \alpha$. Градусной мерой дуги AB будем называть градусную меру центрального угла, который опирается на эту дугу. Тогда $\overset{\smile}{AB} = \alpha$.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают эту окружность. Угол ACB — вписанный.

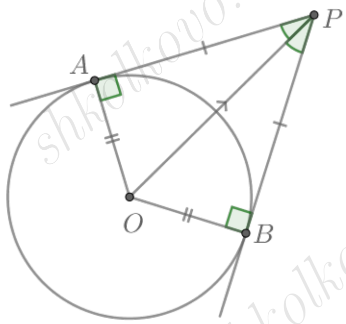


Все вписанные углы, опирающиеся на дугу AB, равны половине центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Окружность и касательные



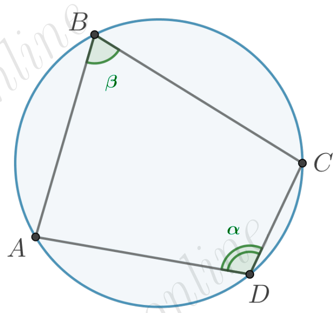
Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.



Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

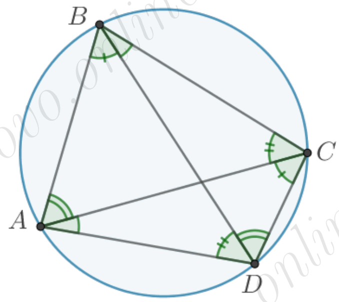
Вписанный четырехугольник

Вписанный четырехугольник — это четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности.



<u>**Свойство №1**</u>
Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна $180°$.
<u>**Признак №1**</u>
Если сумма противоположных углов четырехугольника равна $180°$, то вокруг него можно описать окружность.

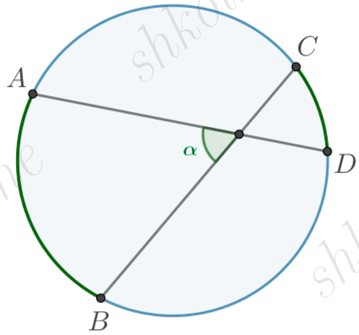
Свойство №2
Если четырехугольник вписанный, то углы, опирающиеся на одну сторону, равны.
Признак №2
Если в четырехугольнике углы, опирающиеся на одну сторону, равны, то он вписанный.



Теоремы о хордах, касательных и секущих

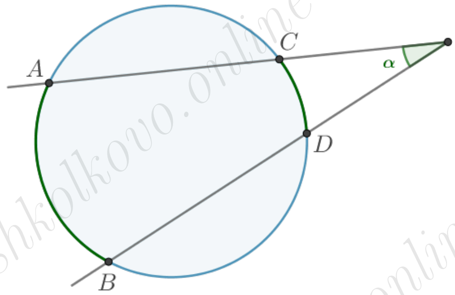
Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$$

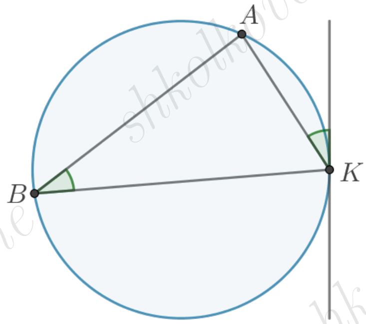


Угол между секущими, проведенными из одной точки к окружности, равен полуразности дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{CD}\right)$$



Угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, отсеченную хордой.



Описанный четырехугольник

Центр вписанной в четырехугольник (многоугольник) окружности лежит на пересечении биссектрис его углов.

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.
2. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

$$a + c = b + d$$