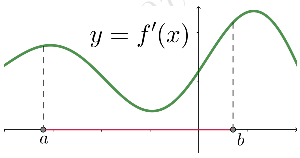
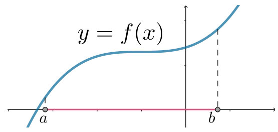
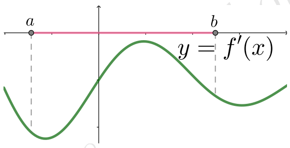
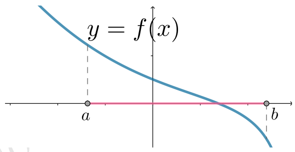
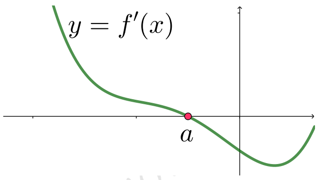
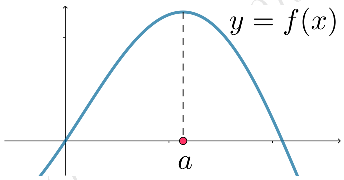
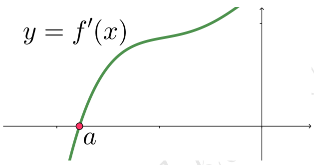
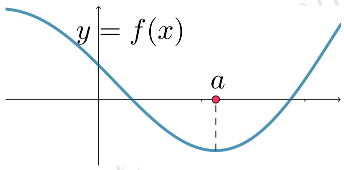
№8,12. Производная и исследование функции. Теория

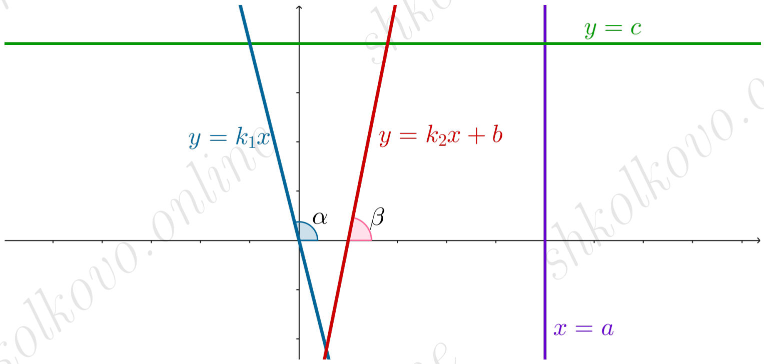
Связь функции и ее производной

Если производная положительна на промежутке $(a;b)$, 	то функция возрастает на промежутке $(a;b)$ 
Если производная отрицательна на промежутке $(a;b)$, 	то функция убывает на промежутке $(a;b)$ 
Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с «плюса» на «минус», если смотреть слева направо, 	то точка $x = a$ является точкой максимума функции 
Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с «минуса» на «плюс», если смотреть слева направо, 	то точка $x = a$ является точкой минимума функции 

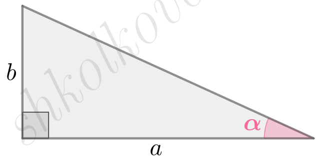
Линейная функция

Для начала вспомним некоторые факты о прямой, так как касательная — это прямая.

- Линейная функция — функция вида $f(x) = kx + b$, где k,b – некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат.
- Графиком $x = a$ является прямая, параллельная оси Oy.
- Графиком $y = c$ является прямая, параллельная оси Ox.
- Для $f(x) = kx + b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox (сокращенно будем говорить «угол наклона»): $k_1 = \mathrm{tg}\alpha$, $k_2 = \mathrm{tg}\beta$.



Напомним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к прилежащему:

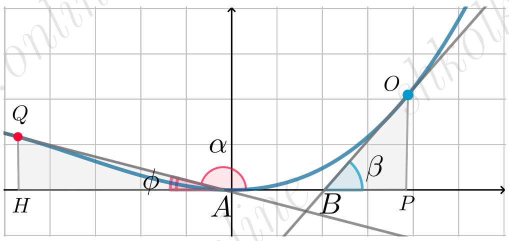


$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

- Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$: параллельны, то $k_1 = k_2$; взаимно перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Угол наклона касательной

На рисунке изображены две касательные к графику с углами наклона $\alpha > 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$ в точках Q и O соответственно. Заметим, что $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\beta > 0$.



$\operatorname{tg}\beta$ не составит труда найти из построенного пряомугольного треугольника $\triangle BOP$. А вот с $\operatorname{tg}\alpha$ возникают проблемы. Как их решить?

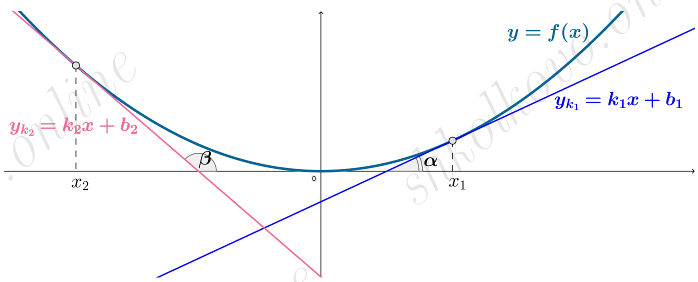
Так как тангенсы смежных углов противоположны, то искать $\operatorname{tg}\alpha$ мы будем через

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{tg}\alpha| > 0.$$

Найдем $\operatorname{tg}\varphi$ из прямоугольного $\triangle AQH$ и тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\varphi$.

Геометрический смысл производной

- Итак, каков геометрический смысл производной? Если функция в точке x_0 имеет производную, то это значит, что в этой точке можно провести касательную к графику данной функции. Касательная — это некоторая прямая, которая графически выглядит так:



- На чертеже изображены две различные касательные y_{k_1} и y_{k_2}, проведенные к графику функции $f(x)$. Угол наклона первой касательной равен α, угол наклона второй равен β.
- Если нам известно уравнение $y = f(x)$ функции, то, выбрав точку x_0, в которой мы хотим провести касательную к графику этой функции, можно записать уравнение этой касательной:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- Если переписать уравнение касательной так, чтобы первое слагаемое было kx, второе слагаемое было b, то есть записать в виде $y_k = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, то видно, что

$$\begin{cases} k = f'(x_0) \\ b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{cases}$$

- Таким образом, мы видим, что, с одной стороны, угловой коэффициент k касательной, как и любой прямой, равен тангенсу угла наклона α, а с другой стороны, если эта прямая касается графика функции $f(x)$ в точке x_0, то угловой коэффициент k также равен числу $f'(x_0)$:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Таблица производных

	Функция y	Производная y'
1	a	0
2	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
3	e^x	e^x
4	$a^x \ (a > 0)$	$a^x \cdot \ln a$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
6	$\log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Частные случаи функции (2):

15	x	1
16	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
17	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Правила поиска производной функции

a — константа.

Функция	Производная
$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

План решения №12

1. Взять производную функции, то есть найти $f'(x)$.
2. Найти все точки, в которых производная равна нулю либо не существует.
3. Найти знаки производной на промежутках между точками из предыдущего пункта с помощью метода интервалов.
4. Нарисовать эскиз графика исходной функции (изобразить, на каком промежутке функция возрастает, а на каком убывает) и с его помощью найти точку или значение, которые требуются в задаче.

Пример решения задачи в соответствии с планом

Найдите наибольшее значение функции $y = e^{x-2}\cdot\dfrac{x-4}{x}$ на отрезке $[1;4]$.

Решение

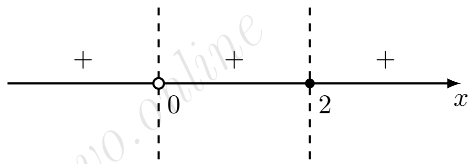
Обозначим $f(x) = e^{x-2}\cdot\dfrac{x-4}{x}$.

1. Найдем производную функции:

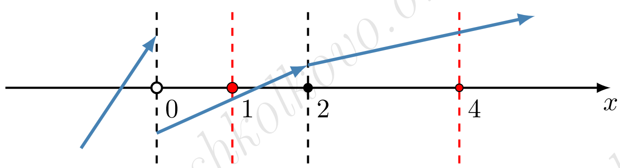
$$f'(x) = \left(e^{x-2}\right)'\cdot\frac{x-4}{x} + e^{x-2}\cdot\left(\frac{x-4}{x}\right)' = e^{x-2}\cdot\frac{x-4}{x} + e^{x-2}\cdot\frac{(x-4)'x-(x-4)x'}{x^2} = e^{x-2}\cdot\frac{(x-2)^2}{x^2}.$$

2. Легко видеть, что первый множитель определен и не равен нулю при любом $x\in\mathbb{R}$. Второй множитель зануляется при $x=2$ и не определен при $x=0$.

3. Применим метод интервалов для определения знаков производной. Обе критические точки встречаются в четном числе множителей, следовательно, знак в них меняться не будет.



4. Теперь можем нарисовать эскиз графика. На всех промежутках производная положительна, то есть исходная функция будет возрастать (не забываем, что в точке 0 будет разрыв, в ней функция не определена). Выделим на эскизе интересующий нас отрезок $[1;4]$.



На полученном эскизе отлично видно, что на всем отрезке $[1;4]$ исходная функция f определена и возрастает, следовательно, максимальное значение на отрезке достигается в самой правой его точке $x=4$. Чтобы решить задачу, осталось найти значение f в точке $x=4$:

$$f(4) = e^{4-2}\cdot\frac{4-4}{4} = 0.$$