№11. Графики. Теория

График прямой

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — постоянные действительные коэффициенты. Графиком линейной функции является прямая.

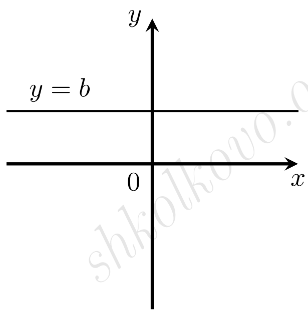
Коэффициент k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Число b называется **свободным членом** и равно ординате точки пересечения графика прямой с осью Oy.

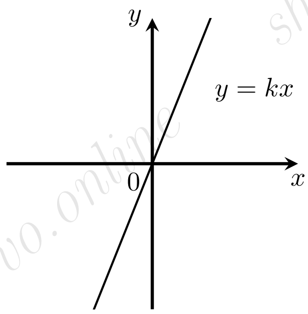
Рассмотрим точки пересечения графика функции с осями в зависимости от значений коэффициентов k и b.

1. При $k = 0$ имеем функцию $y = b$. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси абсцисс, но не совпадающая с ней.

   Таким образом, множество значений функции состоит из единственного элемента b. Заметим, что при $b = 0$ график функции $y = b$ совпадает с осью Ox.

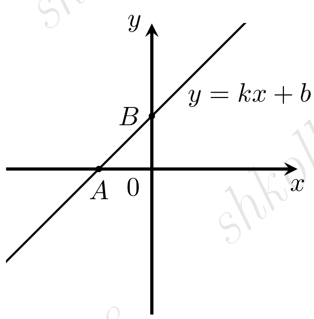


2. При $k \neq 0$, $b = 0$ имеем функцию $y = kx$. В этом случае график функции — прямая, проходящая через точку начала координат $(0;0)$. Действительно, $y = k \cdot 0 = 0$.

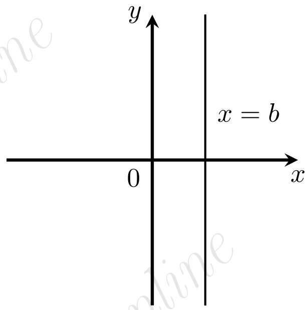


3. При $k \neq 0$, $b \neq 0$ имеем функцию $y = kx + b$. В таком случае график линейной функции — прямая, пересекающая ось Ox в точке $A\left(-\frac{b}{k};0\right)$, а ось Oy — в точке $B\,(0;b)$:

$$0 = k \cdot x + b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{k}$$
$$y = k \cdot 0 + b \quad \Rightarrow \quad y = b$$



4. В предыдущих пунктах мы описали все прямые, кроме вертикальных. Они задаются уравнением $x = b$. При $b = 0$ график функции $x = b$ совпадает с осью Oy.



Взаимное расположение прямых

Графики прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ **параллельны**, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. При $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ графики функций совпадают.

Графики прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ **перпендикулярны**, если $k_1k_2 = -1$.

Как задать прямую по двум точкам

Пусть прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A\,(2;2)$ и $B\,(10;4)$. Подставим значения абсцисс и ординат в уравнение прямой и получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2 = 2\cdot k + b, \\ 4 = 10\cdot k + b. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$4 - 2 = 10\cdot k - 2\cdot k + b - b = 8\cdot k$$

$$2 = 8\cdot k$$

$$k = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Подставим найденное значение коэффициента k в одно из уравнений:

$$2 = 2\cdot 0{,}25 + b$$

$$2 = 0{,}5 + b$$

$$b = 1{,}5.$$

Таким образом, уравнение прямой имеет вид $y = 0{,}25x + 1{,}5$.

Можно определить коэффициент k другим способом. Коэффициент k отвечает за угол наклона прямой. Он равен тангенсу угла наклона прямой. По условию прямая проходит через точки $(2;2)$ и $(10;4)$. Если прямая проходит через точки $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$, то тангенс угла ее наклона равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{4-2}{10-2} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

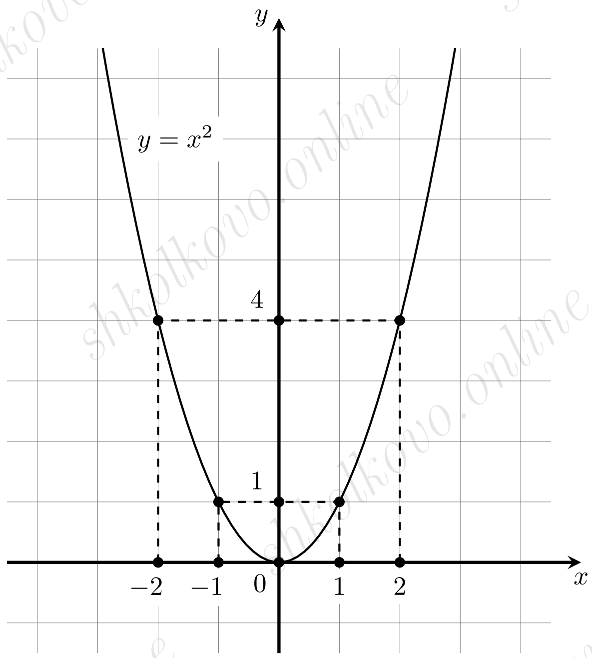
Остальные части решения будут совпадать.

График квадратичной функции (парабола)

Рассмотрим самый простой график параболы $y = x^2$. Его можно построить по точкам:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4

Тогда мы получим такую симметричную картинку:



У графика параболы есть несколько важных понятий:

- Вершина
- Ветки
- Растяжение

В общем виде уравнение параболы выглядит так:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Но в таком виде неудобно работать с параболой, поэтому в задачах мы будем использовать следующий вид:

$$y = a(x - k)^2 + n.$$

Рассмотрим коэффициент a. Он отвечает за направление веток и растяжение параболы. Если $a > 0$, то ее ветки направлены вверх, если же $a < 0$, то ветки направлены вниз. Далее мы поймем, как коэффициент a отвечает за растяжение, но для начала узнаем как можно определить координаты вершины параболы.

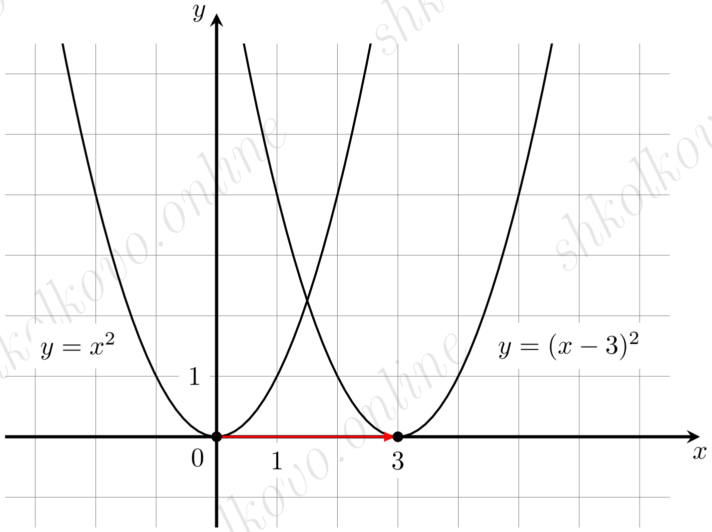
Вершина параболы, заданной уравнением $y = a(x - k)^2 + n$, имеет координаты $(k; n)$. Далее мы докажем этот факт, но сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1
Пусть парабола задана уравнением

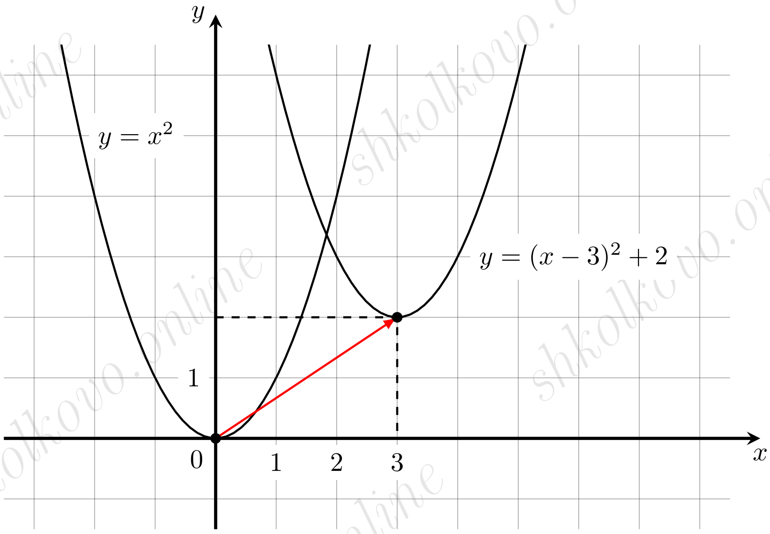
$$y = (x - 3)^2;$$

$$y = (x - 3)^2 + 0.$$

В этом уравнении число «-3» отвечает за сдвиг графика по оси Ox на 3 вправо, а число «0» — за сдвиг по оси Oy, то есть по этой оси график никуда не сдвинут. Значит, вершина параболы находится в точке $(3; 0)$.



Если бы парабола была задана уравнением $y = (x-3)^2 + 2$, то вершина бы сдвинулась еще на 2 вверх по оси Oy, а ее координаты бы были равны $(3; 2)$.



Теперь поймем почему же вершина параболы действительно сдвинулась в точку $(3; 2)$. Вершина параболы находится в точке ее минимума, если ветки параболы направлены вверх. Если же ветки параболы направлены вниз, то вершина параболы находится в точке ее максимума. Тогда рассмотрим уравнение нашей параболы

$$y = (x-3)^2 + 2.$$

Ветки такой параболы направлены вверх, так как $1 > 0$. Значит, вершина параболы находится в ее точке минимума.

Заметим, что выражение $(x-3)^2 \geqslant 0$, так как это квадрат. Значит,

$$(x-3)^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad y = (x-3)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Следовательно, вершина параболы находится в той точке, в которой

$$(x-3)^2 + 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Тогда точка $(3; 2)$ действительно является вершиной параболы $y = (x-3)^2 + 2$, так как $x = 3$ — точка минимума $y = (x-3)^2 + 2$, а $y = 2$ — минимальное значение параболы.

Значит, чтобы понять в какой точке находится вершина параболы $y = (x-k)^2 + n$ нужно понять когда $(x-k)^2 = 0$. Тогда вершиной параболы $y = (x+3)^2 + 2$ является точка $(-3; 2)$.

Мы научились определять координаты вершины параболы и направление веток параболы. Теперь поймем как коэффициент a влияет на растяжение параболы.

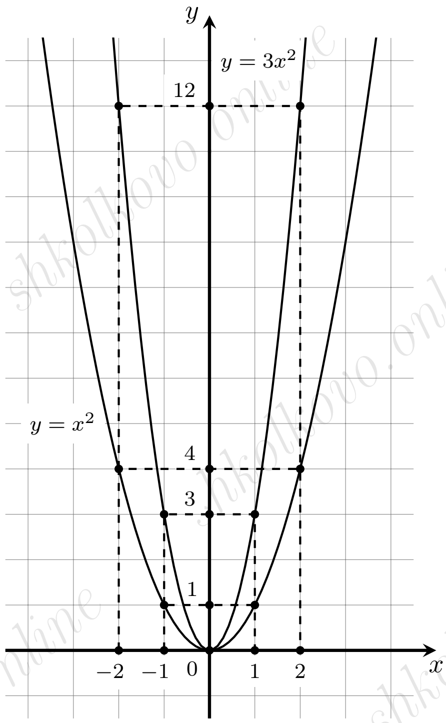
Пример 2

Пусть парабола задана уравнением $y = 3x^2$.

Тогда заметим, что мы можем легко получить график этой параболы из графика $y = x^2$:

x	0	1	-1	2	-2
$y = x^2$	0	1	1	4	4
$y = 3x^2$	0	3	3	12	12

Тогда график параболы $y = 3x^2$ будет выглядеть так:



Пример 3

Пусть парабола задана уравнением $y = 2(x-1)^2 + 2$.

Сначала найдем вершину этой параболы. Для этого нам нужно определить когда $2(x-1)^2 = 0$.

$$2(x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0 + 2 = 2.$$

Тогда вершина параболы $y = 2(x-1)^2 + 2$ находится в точке $(1;2)$. Так как $2 > 0$, ветки параболы будут направленны вверх. Теперь, когда мы нашли вершину параболы, мы можем «создать» для себя новые оси. Новой осью абсцисс будет прямая $y = 2$, а осью ординат — прямая $x = 1$. Тогда в полученной системе координат нам нужно просто построить график параболы $y = 2x^2$. Итак, построим этот график:

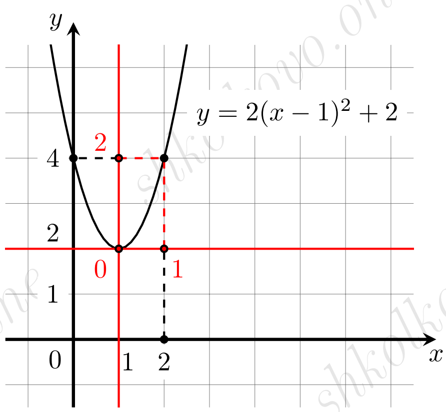
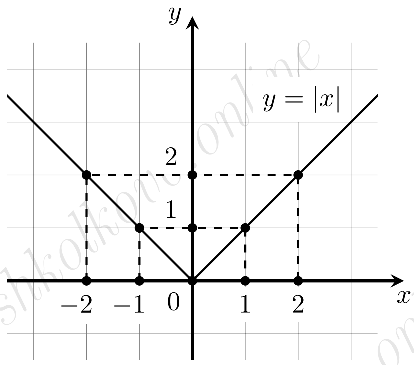


График модуля

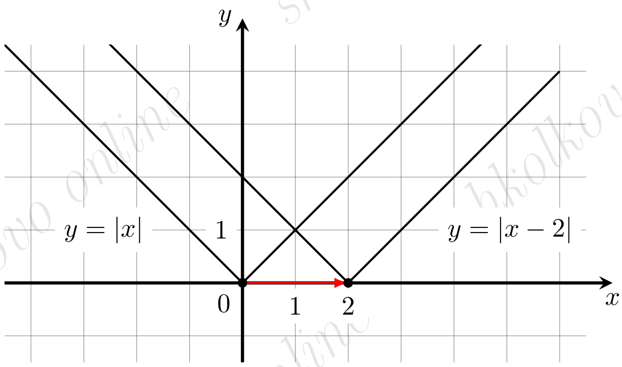
Сейчас рассмотрим график модуля $y = a|x-b|+c$. Сначала построим график $y = |x|$. Его также, как и график параболы $y = x^2$, можно строить по точкам:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	2	2

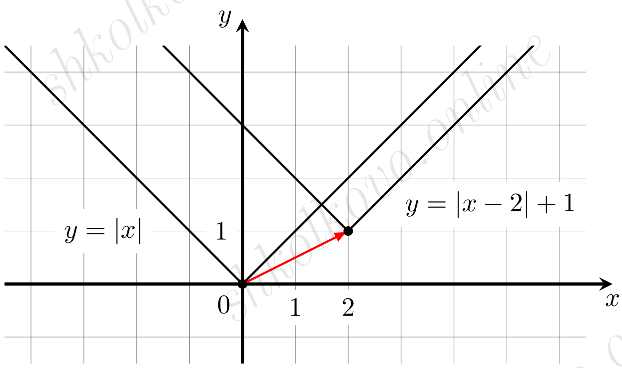
Тогда мы получим такую «галочку» модуля:



Аналогично построению графика параболы, график модуля $y = |x-2|$ получается с помощью сдвига вершины графика $y = |x|$ на 2 вправо, так как при $x = 2$ выражение $|x-2|$ принимает свое минимальное значение, которое равно 0.



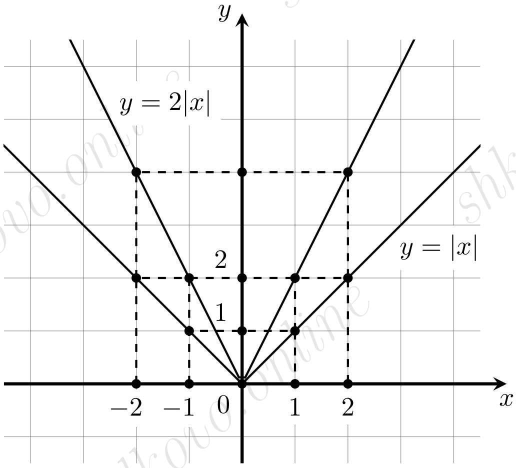
Тогда график модуля $y = |x-2|+1$ получается с помощью сдвига вершины графика $y = |x|$ на 2 вправо и на 1 вверх.



Посмотрим как влияет на растяжение коэффициент a. Для этого рассмотрим график модуля $y = 2|x|$:

x	0	1	-1	2	-2
$y = \|x\|$	0	1	1	2	2
$y = 2\|x\|$	0	2	2	4	4

Тогда легко построить график этого модуля:



Аналогично графикам параболы, знак коэффициента a отвечает за направление веток. Значит, по тем же рассуждениям, что и для графика параболы, можно переходить в координаты вершины «уголка» модуля $y = a|x-b|+c$ и строить в них график $y = a|x|$.

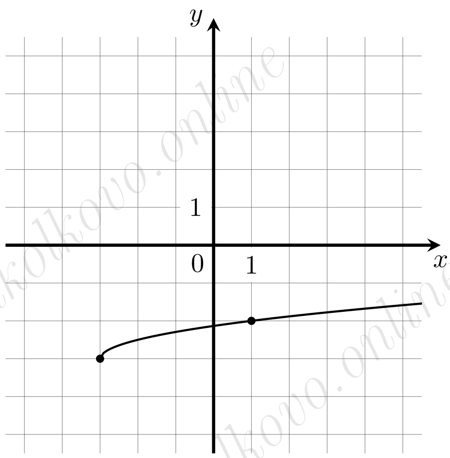
График квадратного корня

Рассмотрим функцию $y = a\sqrt{x-b}+c$. Аналогично графикам параболы и модуля коэффициент a отвечает за растяжение и направление ветки графика квадратного корня, а коэффициенты b и c — за расположение его вершины. Значит, построив график квадратного корня $y = \sqrt{x}$ и сдвинув и растянув его, мы можем получить любой график вида $y = a\sqrt{x-b}+c$.

Важно заметить, что функция существует, только если выражение под корнем неотрицательно, то есть

$$x - b \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant b.$$

Пример графика функции $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x+3}-3$:



Подытожим все, что мы узнали. Уравнения всех трех типов функций, которые были рассмотрены, могут быть восстановлены по одному алгоритму:

1) Нахождение коэффициентов b и c по координатам вершины графика. Определение знака коэффициента a по направлению веток.

2) Переход в систему координат, связанную с найденной вершиной.

3) Сравние графика нашей функции с графиком «эталонной» и нахождение коэффициента a.

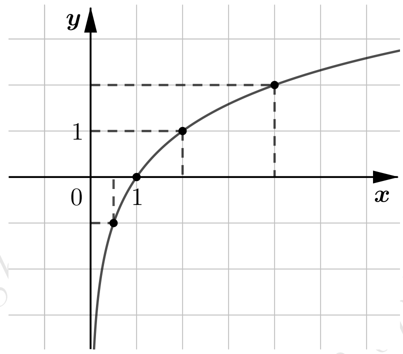
Наша функция	Эталонная функция
$y = a(x-b)^2+c$	$y = x^2$
$y = a\|x-b\|+c$	$y = \|x\|$
$y = a\sqrt{x-b}+c$	$y = \sqrt{x}$

График логарифма

Рассмотрим график логарифма $y = \log_2 x$. Составим таблицу значений:

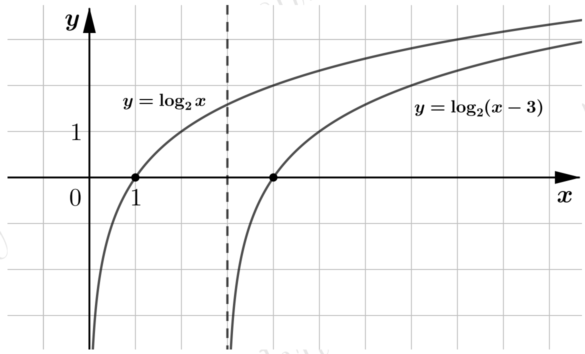
x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	1	2	-1	-2

1) У функции логарифма есть ОДЗ — ее аргумент должен быть строго положителен, то есть в нашем случае $x > 0$. Заметим, что при приближении аргумента к 0, значение самой функции будет стремиться к $-\infty$. Значит, у графика функции $y = \log_2 x$ есть вертикальная асимптота $x = 0$, то есть ось Oy. Теперь построим график $y = \log_2 x$:



Теперь рассмотрим функцию $y = \log_2(x-3)$. По ОДЗ: $x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3$.

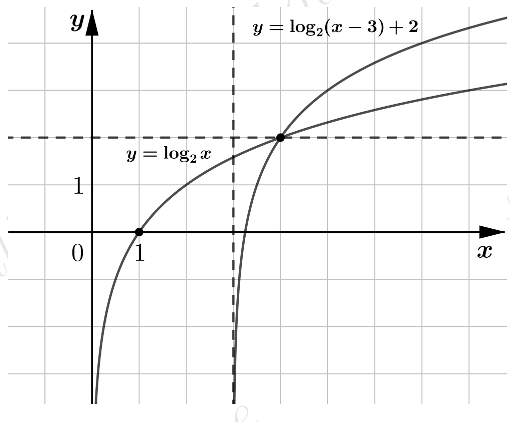
Это значит, что аналогично графику параболы, график логарифма $y = \log_2(x-3)$ получается сдвигом графика $y = \log_2 x$ на 3 вправо, так как асимптотой теперь является прямая $x = 3$.



2) Если у нас есть функция $y = \log_a x$, то она возрастает при $a > 1$ и убывает при $a < 1$.

3) Любой график логарифма пересекается с осью Ox. Рассмотрим это пересечение. Она примечательна тем, что в ней значение функции равно 0.

Мы уже поняли как график, а следовательно и его точка пересечения с осью Ox, сдвигается по вертикали. Теперь рассмотрим фунцию $y = \log_2(x-3) + 2$. В точке $x = 4$, где предыдущая функция принимала значение 0, рассматриваемая функция принимает значение 2. Значит, график функции $y = \log_2(x-3) + 2$ в стандартных координатах будет выглядеть так же, как и график функции $y = \log_2 x$ в координатах, образованных прямыми $x = 3$ и $y = 2$. Теперь можем построить график логарифма $y = \log_2(x-3) + 2$:

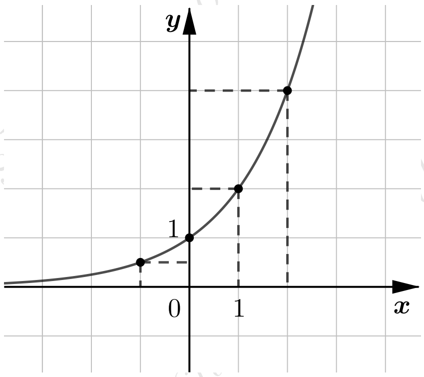


Если перед самим логарифмом будет стоять какой-то коэффициент, то алгоритм нахождения асимптоты не изменится, так как домножение функции на число никак не повлияет на ОДЗ. Такой коэффициент может повлиять только на растяжение графика и его направление.

График показательной функции

Рассмотрим функцию $y = a^x$, где $a > 0$. При $a > 1$ эта функция возрастает, при $a < 0$ — убывает. Составим табличку значения для функции $y = 2^x$ и построим по ней график:

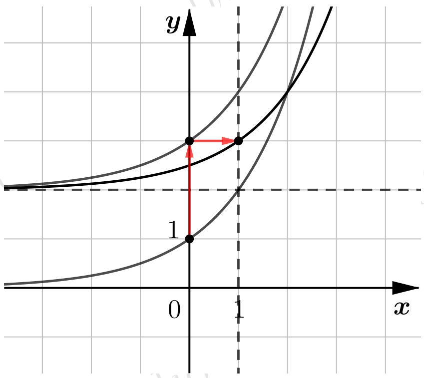
x	1	2	-1	-2	0
y	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



Заметим, что при любом положительном значении a, график функции $y = a^x$ будет проходить через точку $(0;1)$. Также заметим, что $2^x > 0$. Тогда больших по модулю отрицательных значениях x, значение функции будет стремиться к 0, а график — «прижиматься» к прямой $y = 0$.

Если мы рассмотрим функцию $y = 2^x + 2$, то при больших по модулю отрицательных значениях x, график будет «прижиматься» к прямой $y = 2$, так как $2^x + 2 > 2$. Значит, свободный член отвечает за сдвиг по оси Oy.

Теперь рассмотрим функцию $y = 2^{(x-1)} + 2$. График такой функции в стандартных координатах будет соответствовать графику функции $y = 2^x$ в координатах, где осями являются прямые $y = 2$ и $x = 1$. Поймем почему так происходит. Будем следить за точкой $(0;1)$.



После смещения на 2 вверх, она перешла в точку $(0;3)$. Теперь найдем такой x, при котором функция $y = 2^{(x-1)} + 2$ принимает значение 3:

$$2^{(x-1)} + 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{(x-1)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

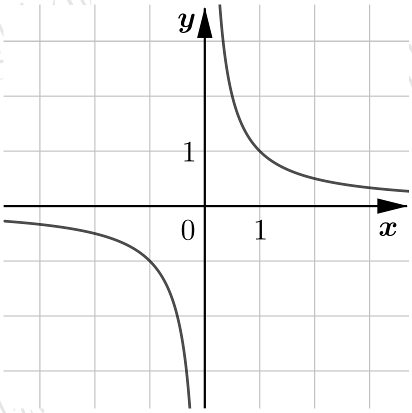
Значит, график действительно сдвинулся еще и на 1 вправо.

График гиперболы

Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. У такой функции есть ОДЗ $x \neq 0$. Также заметим, что

- Если x положителен и стремится к 0, то значение функции стремится к ∞, а график прижимается к оси Oy справа.
- Если x отрицателен и стремится к 0, то значение функции стремится к $-\infty$, а график прижимается к оси Oy слева.
- Если x положителен и стремится к ∞, то значение функции стремится к 0, а график прижимается к оси Ox сверху.
- Если x отрицателен и стремиться к $-\infty$, то значение функции стремиться к 0, а график прижимается к оси Ox справа.

Значит, прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются асимптотами. Тогда график функции $y = \frac{1}{x}$ выглядит так:

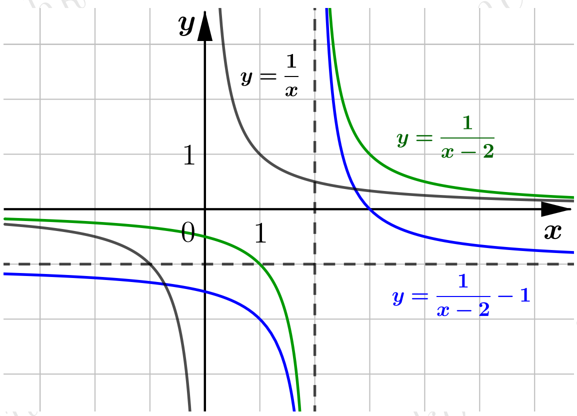


Теперь поймем как можно двигать график гиперболы. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x-2}$. Достаточно понять, что по ОДЗ

$$x - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$$

Тогда если асимптотой функции $y = \frac{1}{x}$ являлась прямая $x = 0$, асимптотой функции $y = \frac{1}{x-2}$ является прямая $x = 2$. Значит, весь график сдвинулся на 2 вправо.

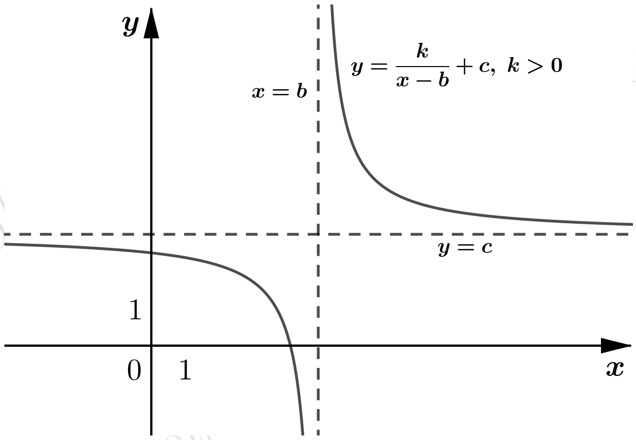
Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x-2} - 1$. Заметим, что дробная часть функции никогда не станет равна 0, тогда функция никогда не примет значения -1. Значит, $y = -1$ — горизонтальная асимптота, следовательно, весь график сдвинется на 1 вниз. Тогда график функции $y = \frac{1}{x-2} - 1$ получается с помощью сдвига графика функции $y = \frac{1}{x}$ на 2 вправо и 1 вниз.



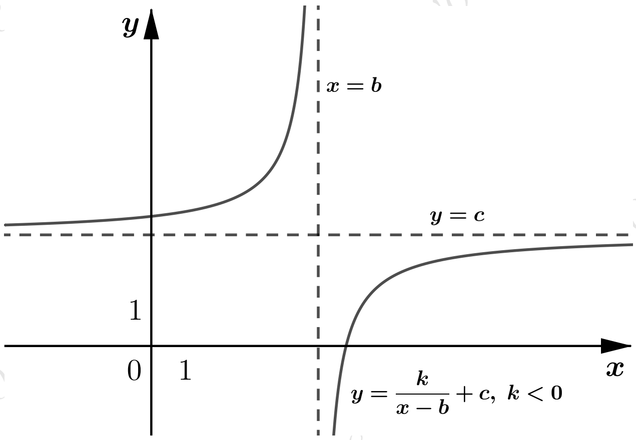
Иногда в задачах появляется такая функция:

$$y = \frac{k}{x-b} + c$$

Если $k > 0$, то график этой гиперболы лежит в I и III четвертях плоскости с системой координат, образованной асимптотами $x = b$ и $y = c$.



Если $k < 0$, то график этой гиперболы лежит в II и IV четвертях плоскости с системой координат, образованной асимптотами $x = b$ и $y = c$.

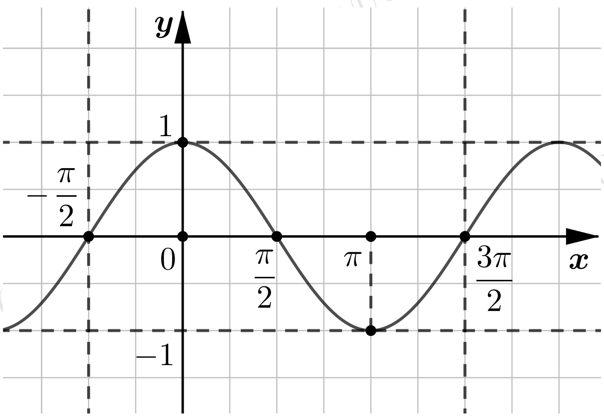


Графики синуса и косинуса

Построим график функции $y = \cos x$. Мы знаем табличные значения косинуса:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0	0

Тогда график $y = \cos x$ будет выглядеть так:



Обратим внимание на то, что косинус, как и синус, периодичен с периодом 2π.

Важно заметить, что функции косинуса и синуса ограничены, то есть

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

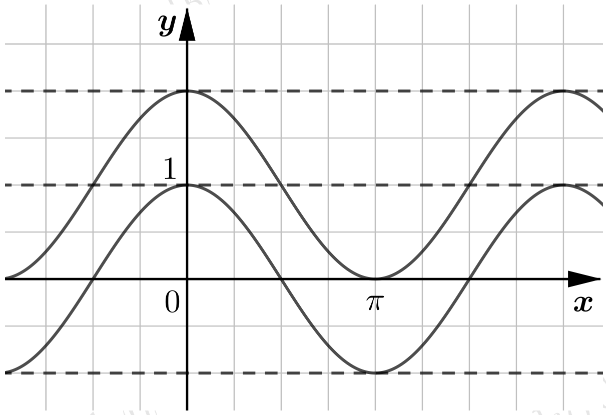
Тогда все точки графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ лежат в «коридоре» между прямыми $y = 1$ и $y = -1$. Тогда величина (или амплитуда) этого коридора равна $1 - (-1) = 2$. При этом ось Ox проходит ровно по середине между этими прямыми.

Начнем двигать график, для этого рассмотрим функцию $y = \cos x + 1$.

Теперь наша ось Ox сдвинулась на 1 вверх, и весь коридор тоже сдвинулся за ней на 1 вверх, так как

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \cos x + 1 \leqslant 2$$

Тогда величина коридора не изменилась, так как $2 - 0 = 2$, весь график сдвинулся на 1 вверх,

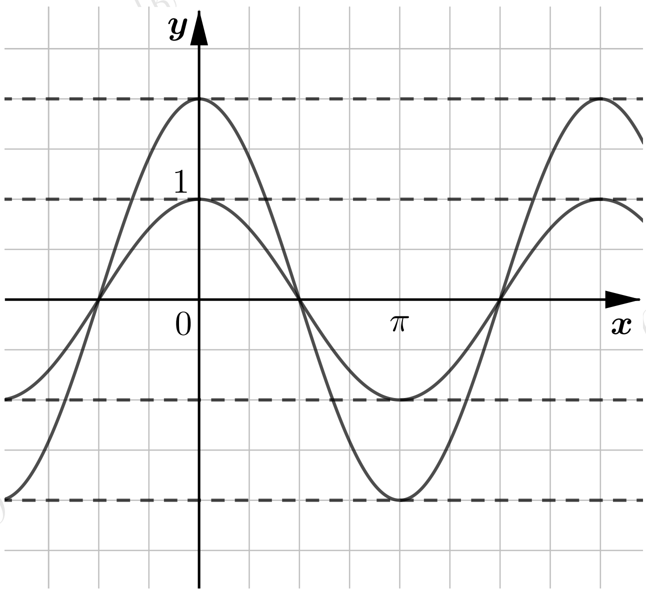


Рассмотрим функцию $y = 2\cos x$. Поймем в каком коридоре лежит график этой функции.

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2$$

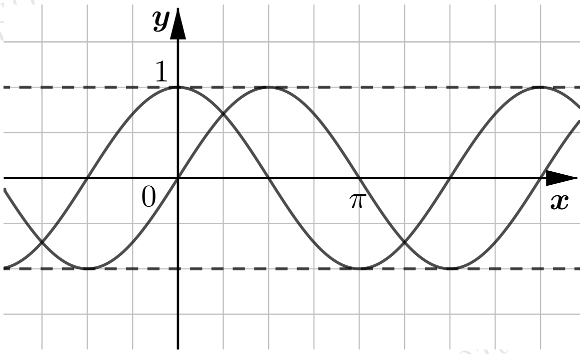
Это значит, что величина коридора изменилась в 2 раза, так как изачально она равнялась 2, а сейчас $2 - (-2) = 4$.

Заметим, что в точках, в которых $\cos x = 0$, функция $y = 2\cos x$ также равна 0. А в точках, где значение $y = \cos x$ было равно ± 1, функция $y = 2\cos x$ будет принимать значения ± 2 соответственно. Тогда график функции $y = 2\cos x$ будет выглядеть так:



Важно понять что происходит, когда у функции $y = a\cos x$ коэффициент a меньше 0. На самом деле график просто «перевернется», если график функции $y = \cos x$ в близи точки 0 выглядел как «бугорок»: $\frown$, и в точке 0 функция принимала наибольшее значение — верхнюю границу коридора, то у функции $y = -\cos x$ в близи точки 0 график будет выглядеть как «ямка»: $\smile$, и в точке 0 функция будет принимать наименьшее значение — нижнюю границу коридора.

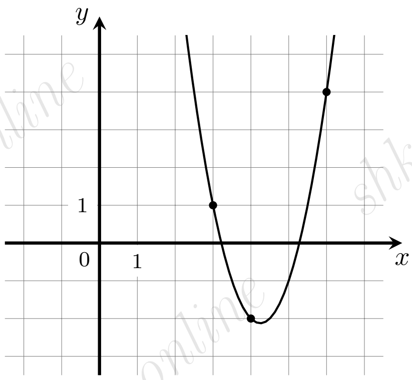
Возможно такое, что попадется функция вида $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Но тогда график функции просто сдвинется на $\frac{\pi}{2}$ вправо, аналогично графикам параболы, логарифма и пр.



№11. Графики. Задачи

№11.1 #83441

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(10)$.



№11.2 #32009

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором выполнено $f(x) = -13{,}5$.