

№14. Стереометрия

Для успешного решения задачи №14 нужно знать следующие темы:

- Призмы и пирамиды с трапецией, ромбом, параллелограммом в основании
- Цилиндр, конус
- Метод объемов
- Нахождение углов и площади сечения

№14. Стереометрия. Задачи

№14.1 #27472

Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3.

- Докажите, что угол $\angle APB$ меньше 60° .
- Найдите площадь сечения конуса плоскостью (ABP) .

№14.2 #16747

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, а высота призмы равна $\sqrt{17}$. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причем $BE = 1$.

- Постройте сечение призмы плоскостью $(A_1 C_1 E)$.
- Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости (ABC) .

№14.3 #1718

На ребрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, $B_1 Q = 3$. Плоскость (APQ) пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M делит ребро CC_1 пополам.
- Найдите расстояние от точки C до плоскости (APQ) .

№14.4 #2426

Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P — середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 9$.

№14.5 #2425

Дана четырехугольная пирамида $PABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и CDA равна 90° . Грани PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания. K — точка пересечения прямых AB и CD .

- Докажите, что грани PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объем пирамиды $PBCK$, если известно, что $AB = BC = CD = 2$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 12.

№14.6 #2619

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

- Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к ее основанию равен 60° .
- Найдите площадь сечения пирамиды.

№14.7 #2642

В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B . На окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей цилиндра, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что прямые AB и $B_1 C_1$ перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BB_1 , если $AB = 12$, $B_1 C_1 = 9$, $BB_1 = 8$.

№14.8 #18356

В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B — концы образующих, M — середина SA , N — точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB .

- Докажите что $\angle ANO$ — прямой угол.
- Найдите угол между MB и плоскостью основания, если $AB = 10$.

№14.9 #47216

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 7$, $BC = 5$, $SO = 4$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

№14.10 #30846

Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$. Известны ее основания $AD = 9$, $BC = 4$. На ребре BC отмечена точка N такая, что $BN : NC = 1 : 3$, на ребре SD отмечена точка M такая, что $SM : MD = 2 : 3$, плоскость (AMN) пересекает ребро SC в точке K .

- Докажите, что $SK : KC = 2 : 1$.
- Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость (AMN) делит пирамиду.

№14.11 #63808

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC взяты точки M , K и N соответственно. Причем $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

- Докажите, что N — середина BC .
- Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объем призмы равен 12, а ее высота равна 2.

№14.12 #63806

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$, а точка K — середина ребра DD_1 .

- Докажите, что плоскость (MKC) параллельна прямой BD .
- Найдите тангенс угла между плоскостью (MKC) и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

№14. Стереометрия. Ответы

14.1. б) $9\sqrt{14}$

14.2. б) $\operatorname{arctg}(0,3\sqrt{34})$

14.3. б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

14.4. б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{34}}{68}\right)$

14.5. б) 4

14.6. б) $12\sqrt{3}$

14.7. б) 7,2

14.8. б) 45°

14.9. б) 12

14.10. б) $27 : 38$

14.11. б) $\frac{5\sqrt{37}}{6}$

14.12. б) $\frac{\sqrt{14}}{2}$