

№13. Уравнение

Для успешного решения задачи №13 нужно знать следующие темы:

- Смешанные уравнения
- Показательные/логарифмические уравнения с тригонометрией и ОДЗ
- Уравнения с корнями
- Формулы сокращенного умножения

№13. Уравнение. Задачи

№13.1 #2772

- а) Решите уравнение $\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x) = x$.
- б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№13.2 #1108

- а) Решите уравнение $27 \cdot 81^{\sin x} - 12 \cdot 9^{\sin x} + 1 = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№13.3 #20788

- а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(2 \sin^2 x - 3 \cos 2x + 6) = -2$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

№13.4 #78010

- а) Решите уравнение $(\cos 2x - 13\sqrt{2} \sin x + 13) \cdot \log_{13}(\sin^2 2x) = 0$.
- б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№13.5 #42310

- а) Решите уравнение $2^{5 \sin 5x} + 6^{1 + \sin 5x} = 24^{\sin 5x} + 3 \cdot 8^{\frac{1}{3} + \sin 5x}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№13.6 #16761

- а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin(x+\pi)} = 2^{2\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{2}-x)}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

№13.7 #1260

- а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№13.8 #1206

- а) Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}}(\sin x) \cdot \log_{\sqrt{2}}(-\cos x) + \log_{\sqrt{2}}(-\sin x \cos x) + 1 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№13.9 #76764

- а) Решите уравнение $\sqrt{4 \log_2 x + 8} - \sqrt{\log_2 x^3 - 2} = 2$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2024]$.

№13.10 #76762

- а) Решите уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№13.11 #987

- а) Решите уравнение $\cos x - \sin x + 1 + 2 \sin x \cos x = 0$.
б) Укажите все его корни, принадлежащие промежутку $(-7\pi; -3\pi)$.

№13.12 #413

- а) Решите уравнение $\sin^3 2x - \cos^3 2x = \sin 2x - \cos 2x$.
б) Найдите сумму его корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

№13. Уравнение. Ответы

13.1. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi m; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, m, k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$

13.2. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; k, n, m \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{7\pi}{2}; \frac{19\pi}{6}$

13.3. а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$

13.4. а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}; \frac{17\pi}{4}$

13.5. а) $\frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{13\pi}{5}; \frac{14\pi}{5}; 3\pi; \frac{16\pi}{5}; \frac{17\pi}{5}$

13.6. а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{3}$

13.7. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$

13.8. а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{4}$

13.9. а) $4; 2^{34}$

б) 4

13.10. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}$

13.11. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi m; n, m \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{2}; -5\pi; -\frac{7\pi}{2}$

13.12. а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}m, \frac{\pi}{4}n, n, m \in \mathbb{Z}$

б) 2π

№14. Стереометрия

Для успешного решения задачи №14 нужно знать следующие темы:

- Призмы и пирамиды с трапецией, ромбом, параллелограммом в основании
- Цилиндр, конус
- Метод объемов
- Нахождение углов и площади сечения

№14. Стереометрия. Задачи

№14.1 #27472

Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3.

- Докажите, что угол $\angle APB$ меньше 60° .
- Найдите площадь сечения конуса плоскостью (ABP) .

№14.2 #16747

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, а высота призмы равна $\sqrt{17}$. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причем $BE = 1$.

- Постройте сечение призмы плоскостью $(A_1 C_1 E)$.
- Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости (ABC) .

№14.3 #1718

На ребрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, $B_1 Q = 3$. Плоскость (APQ) пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M делит ребро CC_1 пополам.
- Найдите расстояние от точки C до плоскости (APQ) .

№14.4 #2426

Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P — середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 9$.

№14.5 #2425

Дана четырехугольная пирамида $PABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и CDA равна 90° . Грани PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания. K — точка пересечения прямых AB и CD .

- Докажите, что грани PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объем пирамиды $PBCK$, если известно, что $AB = BC = CD = 2$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 12.

№14.6 #2619

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

- Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к ее основанию равен 60° .
- Найдите площадь сечения пирамиды.

№14.7 #2642

В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B . На окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей цилиндра, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что прямые AB и $B_1 C_1$ перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BB_1 , если $AB = 12$, $B_1 C_1 = 9$, $BB_1 = 8$.

№14.8 #18356

В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B — концы образующих, M — середина SA , N — точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB .

- Докажите что $\angle ANO$ — прямой угол.
- Найдите угол между MB и плоскостью основания, если $AB = 10$.

№14.9 #47216

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 7$, $BC = 5$, $SO = 4$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

№14.10 #30846

Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$. Известны ее основания $AD = 9$, $BC = 4$. На ребре BC отмечена точка N такая, что $BN : NC = 1 : 3$, на ребре SD отмечена точка M такая, что $SM : MD = 2 : 3$, плоскость (AMN) пересекает ребро SC в точке K .

- Докажите, что $SK : KC = 2 : 1$.
- Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость (AMN) делит пирамиду.

№14.11 #63808

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC взяты точки M , K и N соответственно. Причем $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

- Докажите, что N — середина BC .
- Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объем призмы равен 12, а ее высота равна 2.

№14.12 #63806

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$, а точка K — середина ребра DD_1 .

- Докажите, что плоскость (MKC) параллельна прямой BD .
- Найдите тангенс угла между плоскостью (MKC) и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

№14. Стереометрия. Ответы

14.1. б) $9\sqrt{14}$

14.2. б) $\operatorname{arctg}(0,3\sqrt{34})$

14.3. б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

14.4. б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{34}}{68}\right)$

14.5. б) 4

14.6. б) $12\sqrt{3}$

14.7. б) 7,2

14.8. б) 45°

14.9. б) 12

14.10. б) $27 : 38$

14.11. б) $\frac{5\sqrt{37}}{6}$

14.12. б) $\frac{\sqrt{14}}{2}$