№4,5. Теория по вероятностям

Базовые понятия теории вероятностей

Во всех задачах на теорию вероятностей мы имеем дело с некоторым *случайным экспериментом.* Бросок кубика, вытаскивание шариков из коробки вслепую, вытягивание билета на экзамене, все это — случайные эксперименты.

Определение *Случайный эксперимент* — это любой эксперимент или событие из реальной жизни, результат которого невозможно точно предсказать.

Определение Реализация случайного эксперимента приводит к одному из *элементарных исходов.* Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента называют *пространством элементарных исходов.*

Например, при броске обычного шестигранного кубика возможны шесть элементарных исходов: выпало 1 очко, выпало 2 очка, ..., выпало 6 очков. Вероятностным пространством будет множество $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Пока мы будем рассматривать эксперименты с конечным числом элементарных исходов.

Определение Каждому элементарному исходу соответствует некоторое неотрицательное число — *вероятность* его возникновения. Сумма вероятностей всех элементарных исходов случайного эксперимента должна равняться 1.

Так, если в примере с кубиком все значения выпадают **равновероятно**, то вероятности всех шести элементарных исходов равны между собой и по определению вероятности в сумме дают 1, значит,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}.$$

Далеко не во всех случайных экспериментах элементарные исходы **равновероятны!**

Определение *Событием* называют любое подмножество пространства элементарных исходов.

При броске кубика событию (в житейском понимании этого слова) «выпало четное количество очков» соответствует подмножество $\{2; 4; 6\}$ вероятностного пространства $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Определение События называют *несовместными*, если у них нет ни одного общего элементарного исхода.

События «выпало четное число очков» и «выпало нечетное число очков» несовместны, ведь им соответствуют множества $\{2; 4; 6\}$ и $\{1; 3; 5\}$, пересечение которых пусто.

Напротив, события «выпало четное число очков» и «выпало число очков, кратное 3» **не являются** несовместными, так как соответствующие им множества $\{2; 4; 6\}$ и $\{3; 6\}$ имеют общий элементарный исход — выпадение шестерки.

Важно! Из определения очевидно следует, что любые два различных элементарных исхода несовместны.

Ключевой факт, которым мы пользуемся во всех задачах

Если события A и B **несовместны**, то вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них, равна сумме их вероятностей. Так как мы знаем, что A и B — это на самом деле множества, а формулировка «хотя бы одно» означает их объединение, можем записать этот факт следующим образом:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

В частности, получаем, что вероятность события равна сумме вероятностей всех элементарных исходов, из которых оно состоит, так как они все между собой несовместны.

Условная вероятность. Погружение в новое пространство

Игральную кость бросили два раза. Известно, что два очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 4».

Решение

Рассмотрим все возможные элементарные исходы в эксперименте с броском двух кубиков. Это всевозможные пары натуральных чисел, где первое число пары — число очков, выпавших на первом кубике, второе число пары — число очков, выпавших на втором кубике. Каждое число пары может принимать одно из шести значений $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Тогда общее количество элементарных исходов равно $6 \cdot 6 = 36$, причем все они **равновероятны**.

Нам известно, что два очка не выпало ни разу. Это условие погружает нас в новое пространство элементарных исходов, меньшее, чем изначальное, в котором больше нет исходов с двойкой — они нереализуемы. Элементарные исходы с двойкой:

$$\begin{array}{ll} (1;2) & (2;1) \\ (2;2) & \\ (3;2) & (2;3) \\ (4;2) & (2;4) \\ (5;2) & (2;5) \\ (6;2) & (2;6) \end{array}$$

Их всего 11, тогда в новом пространстве всего $36 - 11 = 25$ элементарных исходов. Найдем все элементарные исходы нового пространства, в которых сумма очков равна 4 — это только исходы $(1;3)$ и $(3;1)$, ведь исхода $(2;2)$ нет в нашем новом пространстве. Все исходы нового пространства также равновероятны, тогда вероятность события $\{(1;3);(3;1)\}$ «сумма выпавших очков окажется равна 4» равна отношению числа элементарных исходов в нем к общему количеству элементарных исходов, то есть

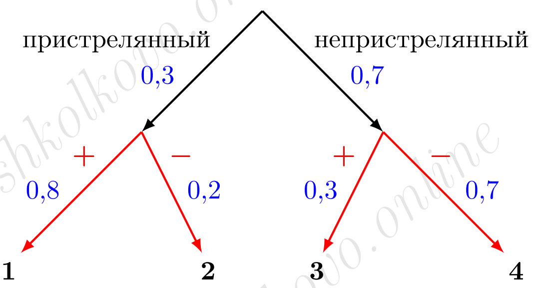
$$P = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Цепочки событий

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение

Изобразим все возможные последовательности событий с помощью дерева.



Всего возможны четыре элементарных исхода:

1. Джон схватил пристрелянный револьвер и попал;
2. Джон схватил пристрелянный револьвер и не попал;
3. Джон схватил непристрелянный револьвер и попал;
4. Джон схватил непристрелянный револьвер и не попал.

Нам нужно найти вероятность события, что Джон промахнется, оно содержит элементарные исходы 2 и 4. Из 10 револьверов 3 пристрелянные, значит, Джон схватит пристрелянный с вероятностью 0,3, а непристрелянный с вероятностью 0,7.

Найдем вероятность исхода 2. Она равна произведению вероятностей на всех стрелках на пути к исходу 2, то есть

$$P(2) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

По аналогичным соображениям вероятность исхода 4 равна

$$P(4) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49.$$

Тогда вероятность события, что Джон промахнется, равна сумме вероятностей элементарных исходов, составляющих это событие:

$$P(-) = P(2) + P(4) = 0{,}06 + 0{,}49 = 0{,}55.$$

Независимые события

События A и B называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от исхода другого, то есть обычная вероятность $P(A)$ события A равна условной вероятности $P(A|B)$ и аналогично $P(B) = P(B|A)$.

Фактически независимость в условии задачи позволяет нам напрямую перемножать вероятности событий, чтобы получить вероятность их пересечения, не находя условную вероятность. Классические примеры независимых событий, где независимость негласно подразумевается, это: последовательные броски кубика (вероятности выпадения чисел в каждом следующем броске не зависят от результатов предыдущих бросков), многократные подбрасывания монетки, да и многие другие одинаковые действия, повторенные несколько раз.

Пример задачи

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадет в нее. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три попытки.

Решение

Чтобы стрелок сделал ровно три попытки, он должен промахнуться первые два раза и попасть на третий. Вероятность промахнуться равна

$$P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Получаем, что вероятность попасть в мишень именно на третий раз равна

$$P(3) = P(-) \cdot P(-) \cdot P(+) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Мы можем перемножать веротности, потому что в условии сказано, что вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6, то есть не зависит от результатов других выстрелов.

Комбинаторика в теории вероятностей

Введение

Рассмотрим ситуацию, когда все элементарные исходы некоторого случайного эксперимента **равновероятны** и всего их n штук. Допустим, что в задаче нас просят найти вероятность некоторого события $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, состоящего из k элементарных исходов. Тогда

$$P(A) = \frac{\text{количество «благоприятных» исходов}}{\text{общее количество исходов}} = \frac{k}{n}.$$

Получается, что в этом случае от задачи по теории вероятностей мы переходим к задаче по комбинаторике: нам нужно лишь подсчитать количество благоприятных исходов, общее количество исходов и найти их отношение.

Перестановки

Представим следующую ситуацию: 5 школьников пришли в столовую за сосисками в тесте. Сколькими различными способами они могли выстроиться в очередь? Пронумеруем позиции в очереди от 1 до 5. Тогда количество вариантов выбрать школьника на первую позицию равно пяти, на вторую — четырем, так как один из школьников уже на первой позиции, на третью — трем, на четвертую — двум, на последнюю пятую позицию отправляется единственный оставшийся школьник. Каждому варианту для одной позиции могут соответствовать все возможные комбинации вариантов на остальных позициях, значит, чтобы получить общее количество комбинаций, нужно перемножить варианты на всех позициях:

$$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 5!$$

В общем случае количество различных **перестановок** из n элементов равно $n!$.

Сочетания

Теперь нам нужно из 7 человек выбрать двоих для дежурства на перемене. Будем выбирать их по очереди, сначала первого дежурного, потом второго. Первого можно выбрать семью способами, для каждого из способов выбрать первого есть шесть способов выбрать второго, получаем, что общее количество способов выбрать двоих дежурных равно 42. Что же не так в этом рассуждении? Среди этих 42 способов мы один раз посчитали способ, когда мы первым выбрали Петю, а вторым — Васю, а также способ, когда мы первым выбрали Васю, а Петю — вторым. В реальности же нет разницы между парами дежурных Петя-Вася и Вася-Петя. Значит, искомое количество способов вдвое меньше, чем мы получили, так как каждую пару мы посчитали дважды, и правильный ответ — 21.

Заметим, что если бы мы выбирали одного дежурного в столовую, а второго в коридор, то наш изначальный результат был бы верным. Ведь способы «Васю в коридор, Петю в столовую» и «Васю в столовую, Петю в коридор» действительно различны.

Рассмотрим более сложную ситуацию. Теперь из 7 человек нужно выбрать троих для дежурства. Мы уже понимаем, что если просто перемножить $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$, то некоторые варианты окажутся посчитаны больше одного раза. Попробуем разобраться, сколько раз будет посчитан каждый вариант.

Рассмотрим троих людей Васю, Петю и Колю. Тогда среди 210 вариантов мы посчитали варианты

$$\begin{gathered}(\text{В, П, К})\\(\text{П, К, В})\\(\text{К, В, П})\\(\text{В, К, П})\\(\text{П, В, К})\\(\text{К, П, В})\end{gathered}$$

В реальности все эти шесть вариантов не отличаются, ведь мы просто выбрали дежурными Васю, Петю и Колю, неважно в каком порядке. Теперь становится понятно, что каждый вариант мы вместо одного раза посчитали $6 = 3!$ раз, то есть делить нужно на количество различных перестановок, ведь именно столько раз мы посчитали каждый вариант. Таким образом, ответ

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$$

Посчитаем теперь количество способов выбрать четырех дежурных из тех же самых соображений:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35.$$

Получили, что количество способов выбрать четверых равно количеству способов выбрать троих. Действительно, *ведь выбрать четверых это то же самое, что выбрать троих, которые не будут выбраны.*

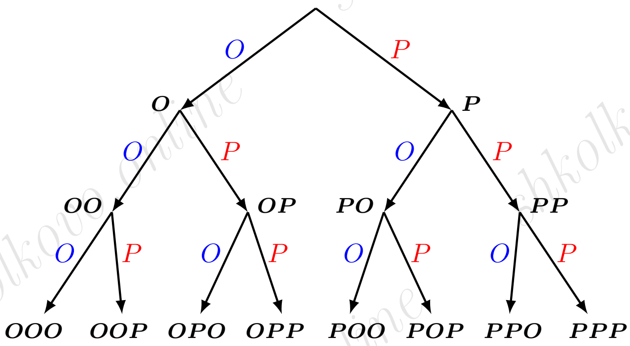
Посчитаем количество способов выбрать 9 человек из 11. Вместо того, чтобы выбирать 9 дежурных, выберем 2 *недежурных.* Проверим, что результаты при двух способах подсчета совпадут:

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{9!} = 55 = \frac{11 \cdot 10}{2}.$$

Подбрасывания монетки

Рассмотрим классическую ситуацию: симметричная монетка подбрасывается 3 раза, необходимо посчитать количество возможных комбинаций орлов и решек, которые могут выпасть. На каждом броске мы можем получить либо орла, либо решку.

Нарисуем ситуацию в виде дерева.



На первом уровне дерева находятся все комбинации для одного броска (всего $2^1 = 2$ варианта), на втором — для двух (всего $2^2 = 4$ варианта), на третьем — для трех (всего $2^3 = 8$ вариантов). Количество комбинаций на каждом следующем уровне дерева увеличивается двое. Действительно, ведь каждый следующий бросок «раздваивает» каждую из существующих комбинаций. Дерево можно продолжать дальше вниз и для произвольного количества n бросков количество возможных комбинаций будет равняться 2^n.

Броски кубика

Теперь вместо подбрасывания монетки совершается несколько бросков кубика. Сколько же комбинаций очков может выпасть если совершено два броска? три броска? Эту ситуацию можно снова смоделировать с помощью дерева, только теперь из каждой вершинки, соответствующей комбинации, будет вести уже шесть ребер. Таким образом, с каждым следующим броском количество комбинаций будет увеличиваться в 6 раз, и ответ для двух бросков 6^2, а для трех — 6^3.

Попробуем взглянуть на ситуацию немного иначе. Пусть каждому из трех бросков соответствует одна из трех позиций:

$$\_\ \_\ \_$$

Тогда на каждой из трех позиций может оказаться одно из чисел от 1 до 6 — результат соответствующего броска. Для каждой позиции напишем количество вариантов очков. Каждому варианту для одной позиции могут соответствовать все возможные комбинации вариантов на остальных позициях, значит, чтобы получить общее количество комбинаций, нужно перемножить варианты на всех позициях:

$$\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6} = 6^3.$$