

№17. Планиметрия

Для успешного решения задачи №17 нужно знать следующие темы:

- Счетная планиметрия: теоремы Менелая, косинусов, синусов, подобие, теорема о пропорциональных отрезках и др.
- Высоты в треугольнике. Прямоугольные треугольники
- Трапеция, параллелограмм, ромб
- Комбинации двух окружностей
- Вписанные и описанные окружности
- Вписанные углы и четырехугольники
- Отношение площадей

№17. Планиметрия. Задачи

№17.1 #829

Диагональ AC разбивает трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC , из которых AD большее, на два подобных треугольника.

- Докажите, что $\angle ABC = \angle ACD$.
- Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что $BC = 18$, $AD = 50$, $\cos \angle CAD = \frac{3}{5}$.

№17.2 #16716

В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC , а вершина E — на отрезке AB .

- Докажите, что $FH = 2DH$.
- Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

№17.3 #2120

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- Найдите BC , если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

№17.4 #828

К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B . Через точку C , лежащую на отрезке AB , проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E , причем отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

- Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.
- Найдите DE , если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

№17.5 #1291

На медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая второй раз пересекает основание BC в точке P .

- Докажите, что $PB = 3CP$.
- Пусть данная окружность пересекает сторону AB в точке L . Найдите AB , если $BP = 18$, $BL = 17$.

№17.6 #11628

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

- Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $AP : PD = \sin D$.
- Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

№17.7 #11100

Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$ и $BC = 6\sqrt{2}$.

№17.8 #1328

Дан остроугольный треугольник ABC . Около него описана окружность с центром в точке O и в него вписана окружность с центром в точке Q . Пусть H — точка пересечения высот треугольника, $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите угол OHQ , если $\angle ABC = 40^\circ$.

№17.9 #20444

Дана трапеция $ABCD$. Ее основание BC в четыре раза меньше основания AD . Точка M — середина AD . На боковой стороне AB взята такая точка E , что $AE : EB = 2 : 1$. Диагональ AC пересекается с BM в точке A_1 и с EM в точке P .

а) Докажите, что прямая BP содержит медиану треугольника ABM .

б) Площадь трапеции $ABCD$ равна 20. Найдите площадь треугольника A_1CM .

№17.10 #11101

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 30^\circ$.

№17.11 #818

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AN . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение $BH : ED$, если $\angle BCD = 150^\circ$.

№17.12 #11449

В треугольник ABC , в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC , вписана окружность с центром O . Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CO .

а) Докажите, что точки A , B , O и B_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

№17.13 #1105

В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром в O .

а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания трапеции равны 5 и 7.

№17.14 #16718

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается её боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

№17.15 #1112

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от точки A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{1}{4}\sqrt{15}$, прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите $QK : KA$.

№17.16 #2605

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

- Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.
- Найдите диагональ BD .

№17.17 #1309

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$. Эта окружность пересекает BC в точке E , а CD в точке K .

- Докажите, что отрезки AE и AK равны.
- Найдите AD , если известно, что $EC = 48$, $DK = 20$, а косинус угла BAD равен $0,4$.

№17.18 #24570

На сторонах AB , BC , AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 , B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

- Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.
- Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны и $AC = 28$, $BC = 18$.

№17.19 #30810

Дан треугольник ABC , в котором проведены три высоты: AA_1 , BB_1 и CC_1 . Через точку C_1 проведена прямая, параллельная BB_1 , которая пересекает AA_1 в точке K . Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC .

- Докажите, что $AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$.
- Найдите отношение площадей треугольников C_1HK и ABC , если $AB = 4$, $BC = 5$ и $AC = \sqrt{17}$.

№17.20 #30812

В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса AL угла BAC . На прямой CD за точкой D отметили точку E такую, что $AE = EC$. Кроме того, $\angle BAC = 2\angle CAD$.

- Докажите, что треугольники BAC и BAL подобны.
- Найдите EL , если $\operatorname{tg} \angle BCA = 0,25$ и $AC = 12$.

№17.21 #63299

Прямая, перпендикулярная стороне AD ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M , а диагональ BD в точке N , причём $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.

- Докажите, что $\cos \angle BAD = \frac{1}{5}$.
- Найдите площадь ромба, если $MN = 5$.

№17. Планиметрия. Ответы

17.1. б) $8\sqrt{13}$

17.2. б) $24 - 12\sqrt{3}$

17.3. б) $7\sqrt{3}$

17.4. б) 12,375

17.5. б) 18

17.6. б) $30 + 16\sqrt{3}$

17.7. б) $18\sqrt{3}$

17.8. б) 10°

17.9. б) $\frac{8}{3}$

17.10. б) $3 : 4$

17.11. б) $1 : 4$

17.12. б) 18

17.13. б) 35

17.14. б) 18

17.15. б) $1 : 4$

17.16. б) $\frac{55}{7}$

17.17. б) 50

17.18. б) 17

17.19. б) $\frac{9}{256}$

17.20. б) 4,7

17.21. б) $60\sqrt{6}$