拉格朗日乘数法求条件极值

科研菜鸟

http://blog.sciencenet.cn/?200199

一、　等式约束条件下的拉格朗日乘数法

问题：已知二元函数 $f(x,y)$ 及约束条件 $\varphi(x,y)=0$，求 $f(x,y)$ 的极值。

解答：设函数的极值点所在的位置为 (x_0,y_0)，若 $f(x,y)$ 和 $\varphi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内均具有连续的一阶偏导，且 $\varphi_y(x_0,y_0)=($则根据隐函数存在定理，可从 $\varphi(x,y)=0$ 推知，在 (x_0,y_0) 邻域内存在唯一确定的函数关系：$y=g(x)$。将其代入二元函数，则二元函数带等式约束条件的极值问题，就变成一元函数不带等式约束的极值问题。因此，$f(x,y)$ 的极值所在位置满足以下方程：

$$\begin{aligned}&\left.\frac{df(x,g(x))}{dx}\right|_{x_0,y_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}+\left.\frac{\partial f}{\partial g}\frac{dg}{dx}\right|_{x_0,y_0}=0\\&y_0=g(x_0)\end{aligned}.$$

根据隐函数存在定理，

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0,y_0}=-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$$

因此：

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}+\left[-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\right]\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}=0\\&\varphi(x_0,y_0)=0\end{aligned}.$$

令：$\lambda=-\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$，则极值方程变为：

$$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0\\f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0\\\varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}.$$

上述推导过程中蕴含了另外一种带约束条件求极值的方法——拉格朗日乘子法，该方法可避免从 $\varphi(x,y)=0$ 中寻找 $y=g(x)$ 所带来的麻烦。

带等式约束条件的拉格朗日乘子法

构造函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中参量 λ 称为拉格朗日乘子，则极值所满足的方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0\end{cases}.$$

二、 等式约束条件下求极值的几何意义

错误观念：等式约束条件下求极值相当于在无约束条件下求得所有的极值，然后保留满足等式的极值即可。事实上，等式约束条件下求极值与无约束条件下求得的极值根本没有联系。下面利用形象的几何空间来讨论这个问题。

二元函数 $z=f(x,y)$ 可看做是空间的一个曲面。考虑无约束条件下的极值方程：

$$\begin{cases}f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{cases}$$

上式等价于：

$$\nabla f(x,y)=0$$

因此，无约束条件下的极值，相当于**在函数整个定义域范围内**寻找梯度等于 0 的点，是一种**全局意义下**的极值。

在有约束情况下，约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 相当于母线平行于 z 轴的柱面，而约束条件与二元函数的联合方程则决定了柱面与二元函数所对应曲面的交线。设该交线在 XOY 平面的投影为 C（也称作柱面的基线），则二元函数沿投影的方向导数为：

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial C}=f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta,$$

其中，α,β 分别是投影在 X 和 Y 方向的方向余弦。约束条件下的极值方程：

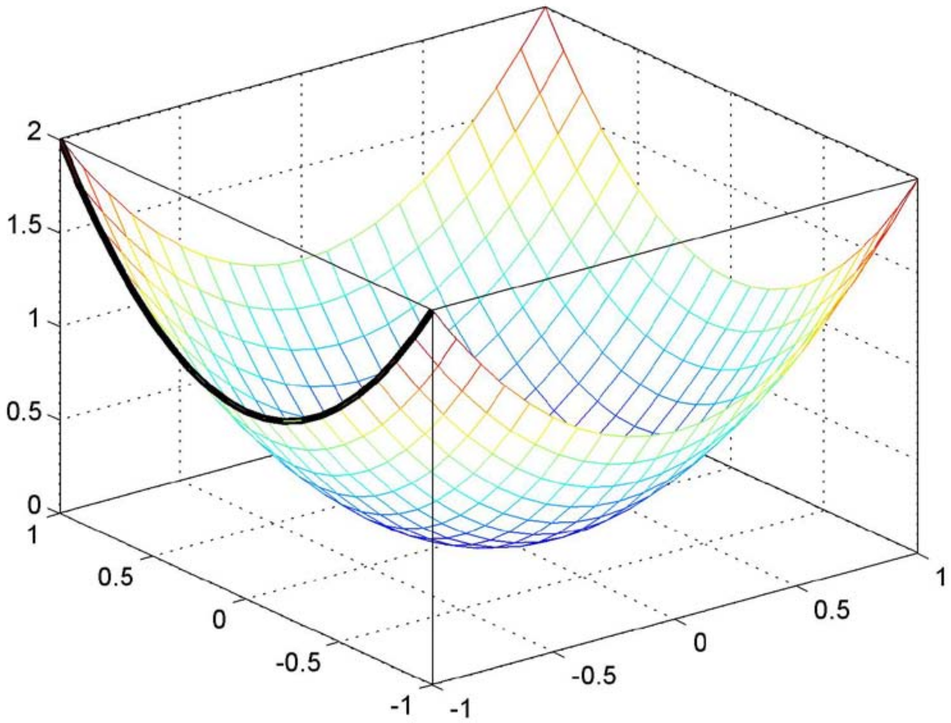
$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

其中，$\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$。带回上式，我们发现：

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial C}=0$$

这说明，**带等式约束条件下的极值是约束柱面与二元函数曲面所决定的交线，在沿柱面基线方向变化时的极值。**

举例：求 $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ 在约束 $x = -1$ 时的极值。约束是平行于 YOZ 的平面，与抛物面 $x^2 + y^2 - z = 0$ 的交线是抛物线：$z = 1 + y^2$，如下图黑粗线所示。



根据拉格朗日乘子法：

$$
\begin{aligned}
&2x + \lambda = 0 \\
&2y = 0 \\
&x = -1
\end{aligned}
$$

可求极值所在的位置为 $(-1,0)$，极值为 1，该极值明显是上图所示抛物线的极小值。

三、　不等式约束条件下的拉格朗日乘数法

问题：已知二元函数 $f(x,y)$ 及约束条件 $\varphi(x,y) \geq 0$，求 $f(x,y)$ 的极值。

解答：如果边界 $\varphi(x,y) = 0$ 上存在极值，则采用等式约束条件下的拉格朗日乘数法进行求解。如果 $\varphi(x,y) > 0$ 上存在极值，则采用无约束条件的二元函数求极值的办法求出所用极值，保留使得 $\varphi(x,y) > 0$ 的极值点。

此外，还有一种解法：设函数的极值点所在的位置为 (x_0, y_0)，定义 $u^2 = \varphi(x_0, y_0)$，

则可将不等式约束条件转换为等式约束条件：

$$\Phi(x,y,u)=\varphi(x,y)-u^2=0\,.$$

于是，极值点所满足的方程为：

$$\frac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)-u^2=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial u}=-2u\lambda=0$$

可见，如果极值点在边界上，$u=0$，则求极值的方法相当于等式约束条件下的拉格朗日法。极值点不在边界上，则$u\neq 0$，因此$\lambda=0$，相当于在无约束条件下求极值。