扬哥

中国科学院大学

2009 – 2018 年真题汇总

扬哥寄语: 中国科学院大学的高等代数真题相对较难, 但每年都有所起伏. 从历年真题情况来看, 高代难度整体呈下降趋势(2016 年真题偏难), 且偏向于常用知识、重要理论的考察. 另外, 难题可能出现, 但基本上没有很偏的题目, 都是"主流"内容, 所以备考阶段一定要注意对重点内容学习的深度. 而数学分析真题, 可以说是非常"仁慈"的了: 相对于其他各数学强校, 中科院每年考察的知识点比较固定, 历年真题的参考价值还是非常高的, 题型很少出现较大波动, 且都是一些基础的理论技巧, 不会涉及很深的理论甚至到实复变的内容. 但在数分试卷的评阅方面一向比较严格, 所以同学们在平时训练时一定要多动笔, 过程格式尽量严谨. 正是由于中科院的真题难度整体不高, 每年初试分数线都很高, 因此想要考中科院的同学政治英语的分数也不能落下(虽然中科院的政治英语分数线就是国家线 39 分左右), 否则想要过初试线专业课的压力太大. 总之, 建议报考中科院的同学复习阶段高代要注重深度、数分要注重基础和严谨性、英语政治不要太轻视.

现在缺 2009 年中国科学院大学数学分析和高等代数(部分)真题, 欢迎读者提供, 真题提供可发邮箱: 731534141@qq.com, 扬哥不胜感激.

本次修正: 2014年高代第一题(已用蓝色标出)

汇总: 李扬

本期汇总: 小伙儿

审核: 小伙儿

真题汇总在扬哥微信公众号首发:

亲爱的读者, 如果你喜欢这样的真题汇总, 那就把你有的真题发送给扬哥邮箱 731534141@qq.com, 我会通过 LaTeX 汇总编译出来, 免费分享给考研党, 同时扬哥也对你的奉献深表感激! 另外由于水平有限, 真题汇总编译难免有错, 恳请读者批评指正.

正确对待真题:

1. 真题, 并不那么重要, 做到全面复习才是制胜之本. 早早开始"研究"真题往往使得复习片面化! 所谓全面复习, 指的是要选择一本适合自己的参考书, 看三四遍! 切勿三天打鱼, 两天晒网.
2. 真题看近十年的就足够, 另外真题少也不一定是坏事, 因为这可以迫使我们更全面地复习!
3. 没有答案的真题是激励我们不断学习的动力! 考研路上, 没有什么比通过自己努力而思考出来一个难题更让人开心的事儿了! 但要强调的是: 复习要以书为主, 而真题为辅. 不能本末倒置!
4. 买真题答案是非常不明智的选择! 因为把真题都搞懂了就没有复习的动力了, 所以早早买真题答案的人往往只会做那么几个题. 如果非要买真题答案, 扬哥建议要在十一以后.
5. 不要只看一个学校的真题, 别的学校也看看. 因为多见题肯定没坏处!

扬哥寄语:

与其临渊羡鱼, 不如退而结网. 决定了考研, 就要竭尽全力, **有计划踏实地坚持到底**. 花几个月去专心做一件事儿, 它必然会给你回报, 甚至是你意想不到的惊喜!

1. 有计划是学习动力的源泉, 要制定一个适合自己的计划(不能多也不能少), 无论刮风下雨, 必须要完成当天的计划. 想玩? 那就先完成明天的计划, 明天去玩儿!
2. 踏实, 就是说要从基础的课本开始学, 即使简单, 也要认认真真手写一遍! 切勿眼高手低.
3. 坚持到底就是持之以恒, 记住: 行百里者半九十!

2018 年 7 月 17 日

目录

1. 中国科学院大学 2009 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 设 A 是 n 阶可逆矩阵, α, β 是 n 维列向量, 且 $1+\beta' A^{-1}\alpha \neq 0$. 证明: $A+\alpha\beta'$ 可逆, 并求其逆.

二、 证明：如果两个实矩阵 A, B 在复数域上相似, 则它们在实数域上也相似.

2. 中国科学院大学 2010 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (20 分) 设 A, B 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, I_k 是 k 阶单位矩阵.

(1) 求证: $|I_n - AB| = |I_m - BA|$.

(2) 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \cdots & a_2+x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \cdots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

二、 (20 分) 已知 3 阶正交阵 A 的行列式为1, 求证: A 的特征多项式一定为

$$f(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 + a\lambda - 1,$$

其中, $a \in \mathbb{R}$ 且 $-1 \leq a \leq 3$. (可与实数比较大小的数只有实数, 故条件 $a \in \mathbb{R}$ 可略去)

三、 (20 分) 设 A, B 是 n 阶方阵, A 可逆, B 幂零, $AB = BA$.

(1) 求证: $A + B$ 可逆.

(2) 试举例说明要使(1) 结论成立, 条件 $AB = BA$ 是不可缺少的.

四、 (20 分) 求证:任意 n 阶实方阵 A 的特征向量, 也是其伴随矩阵 A^*的特征向量.

五、 (30 分) (1) n 阶方阵能表示成 $A = H + K$, 其中 $H = \overline{H}^T, K = -\overline{K}^T$, 矩阵 $\overline{B}^T$ 表示矩阵 B 的共轭转置. 设 a, h, k 分别是 A, H, K 中元素最大模, 若 $z = x + iy(x, y \in \mathbb{R})$ 是 A 的任意特征值, 求证: $|z| \leq na, |x| \leq nh, |y| \leq nk$.

(2) 求证: $Hermite$ 矩阵的特征值都是实数.

(3) 求证:反对称矩阵的非零特征值都是纯虚数.

六、 (15 分) 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维实线性空间 V 的线性变换, $n \geq 1$. 求证: $\mathcal{A}$ 至少存在一个一维或者二维的不变子空间.

七、 (20 分) 设循环矩阵 C 为

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

(1) 求 C 的全部特征值以及相应的特征向量.

(2) 求 $|C|$.

八、 (15 分) 设 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域上所有 n 阶方阵组成的线性空间, $T : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 是线性映射, 满足 $T(AB) = T(BA)$, 求证: $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, 总存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $T(A) = \lambda \text{tr}(A)$.

3. 中国科学院大学 2011 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (20 分) 设 $\dfrac{p}{q}$ 是既约分数, $f(x) = a_n x_n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式, 而且 $f(\dfrac{p}{q}) = 0$. 证明

(1) $p|a_0$, 而 $q|a_n$.

(2) 对任意正整数 m, 有 $(p - mq)|f(m)$.

二、 (20 分) 设 n 阶方阵 $A_n = (|i - j|)_{1\le i,j\le n}$, 其行列式记为 D_n. 试证明

$$D_n + 4D_{n-1} + 4D_{n-2} = 0,$$

并由此求出行列式 D_n.

三、 (16 分) 已知二阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的特征多项式为 $(\lambda - 1)^2$, 试求 $A^{2011} - 2011A$.

四、 (20 分) 设 α, β, γ 是 3 维线性空间 V 的一组基, 线性变换 $\mathcal{A}$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\alpha + 2\beta + \gamma) = \alpha, \\ \mathcal{A}(3\beta + 4\gamma) = \beta, \\ \mathcal{A}(4\beta + 5\gamma) = \gamma. \end{cases}$$

试求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha, 2\beta + \gamma, \gamma$ 下的矩阵.

五、 (24 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征多项式, 并确定其是否有重根.

(2) 求一个正交矩阵 P 使得 PAP^{-1} 为对角阵.

(3) 令 V 是所有与 A 可交换的实矩阵全体, 证明 V 是一个实数域上的线性空间, 并确定 V 的维数.

六、 (20 分) 设 A, B 是两个 n 阶复方阵, $n > 1$.

(1) 如果 $AB = BA$, 证明 A, B 有公共的特征向量.

(2) 如果 $AB - BA = \mu B$, 其中 μ 是一个非零复数, 那么 A, B 是否会有公共的特征向量? 回答“是”请给出证明; 回答“否”请给出反例.

七、 (15 分) 设 A 是 n 阶实方阵, 其特征多项式有如下分解

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

其中 E 为 n 阶单位方阵, 诸 λ_i 两两不相等. 试证明 A 的 $Jordan$ 标准形中以 λ_i 为特征值的 $Jordan$ 块的个数等于特征子空间 V_{λ_i} 的维数.

八、 (15 分) 设 A 是 n 阶实方阵, 证明 A 为实对称阵当且仅当 $AA^T = A^2$, 其中 A^T 表示矩阵 A 的转置.

4. 中国科学院大学 2012 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (15 分) 证明：多项式 $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 没有重根.

二、 (20 分) 设多项式 $g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$, 多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素. 证明：对任意的多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k x}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}g_1(x)},$$

其中 $r(x),f_1(x)$ 都是多项式, $r(x)=0$ 或 $deg(r(x))<deg(p(x))$.

三、 (20 分) 已知 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n.$

(1) 求 A 的全部特征值.

(2) 求 A 的行列式 $det(A)$ 和迹 $\mathrm{tr}(A)$.

四、 (15 分) 设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 而 V_1,V_2 分别是齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $(A-I_n)x=0$ 在 $\mathbb{K}^n$ 中的解空间, 证明： $\mathbb{K}^n=V_1\oplus V_2$, 其中 I_n 代表 n 阶单位矩阵, $\oplus$ 表示直和.

五、 (20 分) 设 n 阶矩阵 A 可逆, α,β 均为 n 维列向量, 且 $1+\beta^TA^{-1}\alpha\neq 0$, 其中 β^T 表示 β 的转置.

(1) 证明矩阵 $P=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$可逆, 并求其逆矩阵.

(2) 证明矩阵 $Q=A+\alpha\beta^T$ 可逆, 并求其逆矩阵.

六、 (20 分) 证明：任何复数方阵 A 都与它的转置矩阵 A^T 相似.

七、 (22 分) 在二阶实数矩阵构成的线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中定义：

$$(A,B)=\mathrm{tr}(A^TB),\forall A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2},$$

其中, A^T 表示矩阵 A 的转置, $tr(X)$ 表示矩阵 X 的迹.

(1) 证明 (A,B) 是线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的内积.

(2) 设 W 是由 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 生成的子空间. 求 $W^\perp$ 的一组标准正交基.

八、 (18 分) 设 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的非零线性变换, 试证明存在向量 $\alpha\in V$, 使得 $T_i(\alpha)\neq 0,i=1,2,\cdots,n$.

5. 中国科学院大学 2013 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (15 分) 求下面 $n+1$ 阶行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

其中, $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$.

二、 (15 分) 假设矩阵 A 与 B 没有公共的特征根, $f(x)$ 是矩阵 A 的特征多项式, 证明以下结论：

(1) 矩阵 $f(B)$ 可逆.

(2) 矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

三、 (15 分) 设 $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ 是斜对称方阵, 即 $a_{i,j}=a_{n-j+1,n-i+1}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 证明：若 A 可逆, 则其逆矩阵也是斜对称方阵.

四、 (20 分) 设二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经由正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化成椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$, 试求 a,b 和正交矩阵 P.

五、 (15 分) 假设 3 阶实方阵 A 满足： $A^2=E, A\neq\pm E$, 其中 E 为单位方阵. 证明 $(\mathrm{tr}(A))^2=1$, 其中 $\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹.

六、 (15 分) 设 A 为 n 阶半正定实矩阵. 证明： $|A+2013E|\ge 2013^n$, 等号成立当且仅当 $A=0$, 其中 E 是单位矩阵.

七、 (15 分) 证明：任何一个实方阵均可表示成两个对称矩阵的乘积, 其中至少有一个矩阵可逆.

八、 (15 分) 设 A 是一个 3×3 正交矩阵, 证明： A 可以写成 CR, 其中 C 对应于 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转变换, R 对应于 $\mathbb{R}^3$ 中的恒等变换或对应于 $\mathbb{R}^3$ 中的镜面反射变换, 其中 $\mathbb{R}$ 表示实数域.

九、 (10 分) 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间, ϕ 是 V 上的线性变换. 证明： V 能够分解成两个子空间的直和 $V=U\oplus W$. 其中 U,W 满足：对任意的 $u\in U$, 存在正整数 k 使得 $\phi^k(u)=0$; 对任意的 $w\in W$, 存在 $v_m\in V$, 使得 $w=\phi^m(v_m)$ 对所有的正整数 m.

十、 (15 分) 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$上的 n 维线性空间, ϕ 是 V 上的线性变换, 满足 $\phi^2=-\varepsilon($ ε 是 V 上的恒等变换).

(1) 证明 n 是偶数.

(2) 若 ψ 是 V 上的线性变换, 满足 $\psi\phi=\phi\psi$, 证明 $\det(\psi)\ge 0$.

6. 中国科学院大学 2014 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 多项式 $f(x)=f_0(x^n)+xf_1(x^n)+\cdots+x^{n-1}f_{n-1}(x^n)$, 且 $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ 整除 $f(x)$, 求证: $f_i(1)=0$.

二、 设 $f(x),g(x)$ 分别是 m,n 次多项式(原题中 $m=2,n=3$), 证明:

(1) 存在次数低于 n 的多项式 $u(x)$ 与次数低于 m 的多项式 $v(x)$, 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=res(f(x),g(x))$.

(2) $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $res(f(x),g(x))\neq 0$.

注: 对任意的多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$, 我们定义 $f(x),g(x)$ 的结式 $res(f(x),g(x))$ 为由两个多项式系数形成的 $Sylvester$ 矩阵的行列式:

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \end{pmatrix}.$$

三、 已知 $c^2-4ab\neq 0$, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} c & a & & & \\ b & c & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & c & a \\ & & & b & c \end{vmatrix}.$$

四、 A 为 $m\times n$ 矩阵, $Rank(A)=k$, 证明:

(1) 若 $A=A_1+A_2+\cdots+A_l$, 且 $Rank(A_i)=1, i=1,2,\cdots,l$, 则 $l\geq k$.

(2) 存在秩为 1 的矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 使得 $A=A_1+A_2+\cdots+A_k$.

五、 证明: 任何一个复矩阵可以表示为两个对称矩阵的乘积, 且其中一个为可逆矩阵.

六、 $x\neq 0$, 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$, 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}(A^n-E)$.

七、 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$, 定义 $C=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$. 证明: 若 A,B 半正定, 则 C 半正定.

八、 设 u 是 $Euclid$ 空间 $\mathbb{R}^5$ 中的单位向量, 定义 $T_u(x)=x-2(x,u)x$. 现设 α,β 是 $\mathbb{R}^5$ 中线性无关的两个单位向量, 问当 α,β 满足什么条件时, 存在正整数 k 使得 $(T_\alpha T_\beta)^k$ 为单位映射.

7. 中国科学院大学 2015 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互异, $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, 证明

(1) $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ 无实根.

(2) $x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + \cdots + s_{k-1}x + s_k)f(x) + g(x), g(x)$ 的次数小于 n.

二、 $A_n = (a^{|i-j|})_{n\times n}$, 求 $|A_n|$ 和 $|A_n^*|$.

三、 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & b & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$,

(1) a, b, c 为何值时, $AB = BA$.

(2) $AB = BA$ 时, 求 A, B 公共的单位特征向量.

四、 若 $A^2 = -E$, 则 $r(A+iE)$ 与 $r(A-iE)$ 满足什么关系, 并证明.

五、 已知 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 A^{2015}.

六、 若 A, B 无公共特征根, $f(\lambda)$ 为 A 的特征多项式. 证明:

(1) $f(B)$ 可逆.

(2) $AX = XB$ 只有零解.

七、 线性空间 V 上的两个线性变换 f, g 满足 $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{Ker}g$, 证明

(1) 存在线性变换 h, 使得 $g = hf$.

(2) 若 $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$, 则存在线性变换 h, 使得 $g = hf$.

八、 V 是 n 维复向量空间, $(-,-): V\times V \to \mathbb{C}$ 是反对称的非退化双线性型, $\varphi: V \to V$ 是一个线性变换, 满足 $(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v), \forall u, v \in V$. 证明

(1) V 的维数是偶数.

(2) φ 是可逆的线性变换.

(3) 若 λ 是 φ 的特征值, 则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 φ 的特征值.

8.　中国科学院大学 2016 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (20 分) 设 $a_i+b_j\neq 0$, 求以下矩阵的行列式值：

$$A=\begin{pmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1}\\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1}\end{pmatrix}.$$

二、 (20 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+\beta x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为2.

(1) 求 β 的值.

(2) 求一实正交变换, 将上述二次型化为标准形, 并求出标准形.

三、 (16 分) 矩阵 A 的 $n-1$ 阶子式不全为零, 给出齐次方程组 $Ax=0$ 的一组解, 并求出方程的所有解, 其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{(n-1),1} & a_{(n-1),2} & \cdots & a_{(n-1),n}\end{pmatrix}.$$

四、 (18 分) 设 V 是 n 维线性空间, V_1,V_2 是 V 的子空间, 且

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1.$$

求证： $V_1+V_2=V_1, V_1\cap V_2=V_2$ 或者 $V_1+V_2=V_2, V_1\cap V_2=V_1$.

五、 (16 分) 证明与 n 阶若儿当块 $J=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵必为 J 的多项式.

六、 (15 分) 若 n 阶方阵 A 的每行每列恰有一个元素为 1 或 -1, 其余元素均为零. 证明：存在正整数 m 使得 $A^m=E$, 其中 E 为单位矩阵.

七、 (15 分) 设 A 是一个 n 阶复矩阵, 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $\mathcal{T}(X):=AX-XA$. 若 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(不考虑重根). 证明： $\mathcal{T}$ 的特征值必可写成 $\lambda_i-\lambda_j(1\leq i,j\leq n)$ 的形式.

八、 (15 分) 设 A,B 是两个 n 阶复矩阵, 如果 $AB-BA=2B$, 证明

(1) 存在 n 维列向量 u 和常数 μ, 使得 $Au=\mu u, Bu=0$.

(2) 矩阵 A,B 可同时上三角化.

九、 (15 分) 设多项式 $g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$, 多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素. 证明：对于任意多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}g_1(x)},$$

其中 $r(x),f_1(x)$ 都是多项式, $r(x)=0$ 或 $r(x)$ 的次数小于 $p(x)$.

9. 中国科学院大学 2017 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (15 分) 证明：若实系数多项式 $f(x)$ 对所有的实数 x 均有 $f(x)\geq 0$, 则 $f(x)$ 可以写成两个实系数多项式的平方和 $[g(x)]^2+[h(x)]^2$.

二、 (15 分) 设 $f_i, i=1,2,\cdots,m(m<n)$ 是 n 维线性空间 V 上的 m 个线性函数, 即 $f_i(a\alpha+b\beta)=af_i(\alpha)+bf_i(\beta)$. 证明：存在一个非零向量 $\alpha\in V$, 使得 $f_i(\alpha)=0$.

三、 (20 分) 求

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & & & \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_n \\ & & & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

四、 (20 分) 设 $f(x)=x'Ax$ 是实二次型, 若存在 n 维实向量 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)+f(x_2)=0$, 证明：存在 n 维实向量 $x_0\neq 0$ 使得 $f(x_0)=0$.

五、 (15 分) 已知 A 为 n 阶幂等矩阵, 即 $A^2=A$.

(1) 证明 A 的 $Jordan$ 标准形是 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $r=r(A)$.

(2) $\mathcal{R}(E_n-A)=\mathcal{N}(A)$, 其中 $\mathcal{R}(B)$ 是 B 的列向量张成的线性空间, $\mathcal{N}(B)$ 为 B 的解空间, 即 $\mathcal{N}(B)=\{x|Bx=0\}$.

六、 (15 分) 已知 A 为 n 阶可逆的反对称矩阵, $B=\begin{pmatrix} A & v \\ v' & 0 \end{pmatrix}$, 其中 v 为 n 维列向量, 求 $r(B)$.

七、 (15 分) 设

$$\begin{pmatrix} x_{3n} \\ x_{3n+1} \\ x_{3n+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{3n-3} \\ x_{3n-2} \\ x_{3n-1} \end{pmatrix}.$$

给定初值 $a_0=5, a_1=7, a_2=8$, 求 x_n 的通项.

八、 (18 分) 若 n 维线性空间 V 有两个子空间 U_1 和 U_2, 维数 $\dim U_1\leq m, \dim U_2\leq m, m<n$. 证明：$V$中存在子空间 W, 且 $\dim W=n-m$, 满足 $W\cap U_1=W\cap U_2=\{0\}$.

九、 (17 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, b_j\neq 0.$$

(1) 证明 $r(A)\geq n-1$.

(2) 证明 A 的特征值各不相同.

10. 中国科学院大学 2018 年研究生入学考试试题高等代数

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (20 分) 设 $p(x), q(x), r(x)$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的正次数多项式, 而且 $p(x)$ 与 $q(x)$ 互素, $deg(r(x)) < deg(p(x)) + deg(q(x))$. 证明：存在数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $u(x), v(x)$ 满足 $deg(u(x)) < deg(p(x))$, $deg(v(x)) < deg(q(x))$, 使得 $\dfrac{r(x)}{p(x)q(x)} = \dfrac{u(x)}{p(x)} + \dfrac{v(x)}{q(x)}$.

二、 (20 分) 设 n 阶方阵 $M_n = (|i-j|)_{1\le i,j\le n}$, 令 $D_n = det(M_n)$ (M_n 的行列式)

(1) 计算 D_4.

(2) 证明 D_n 满足递推关系 $D_n = -4D_{n-1} - 4D_{n-2}$.

(3) 求 n 阶方阵 $A_n = \left(\left|\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{j}\right|\right)_{1\le i,j\le n}$ 的行列式 $det(A_n)$.

三、 (20 分) 设 A, B 均是 n 阶方阵, 满足 $AB = 0$, 证明

(1) $rank(A) + rank(B) \le n$;

(2) 对于方阵 A 和正整数 $k\,(rank(A) \le k \le n)$, 必存在方阵 B, 使得 $rank(A) + rank(B) = k$.

四、 (20 分) 通过正交变换将下面的实二次型化成标准形：

$$q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

五、 (20 分) 设 A, B 是两个 n 阶实矩阵, 并且 A 是对称正定矩阵, B 是反对称矩阵, 证明： $A + B$ 是可逆矩阵.

六、 (20 分) 设 A 是 n 阶复矩阵, 且 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, 令 $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n | A_1 x = 0\}, V_2 = \{x \in \mathbb{C}^n | A_2 x = 0\}$, 证明：矩阵 A 可逆的充分必要条件是向量空间 $\mathbb{C}^n$ 能够表示成子空间 V_1 与 V_2 的直和, 即 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$.

七、 (15 分) 证明： 8 个满足 $A^3 = 0$ 的 5 阶复数矩阵中必有两个相似.

八、 (15 分) $\mathbb{R}$ 上所有 $n(n \ge 2)$ 阶方阵构成的线性空间 $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ 上的线性变换 $f : V \to V$ 定义为

$$f(A) = A + A', \forall A \in V,$$

其中 A' 为 A 的转置. 求 f 的特征值, 特征子空间, 最小多项式.

11. 中国科学院大学 2010 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 计算：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

(2) $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\le 1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

二、 (1) 令

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求 $f'(0)$, 并证明 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(2) 若 $\lambda=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 证明 $e^{\lambda}>n+1$.

三、 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上二次可微, 并且

$$f(0)=f(\frac{1}{4})=0,\ \int_{\frac{1}{4}}^{1}f(y)\mathrm{d}y=\frac{3}{4}f(1).$$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

四、 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

五、 证明：

$$\frac{2n}{3}\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}.$$

六、 计算：

$$\iiint_V(x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 表示曲面 $x^2+y^2+z^2-2a(x+y+z)+2a^2=0(a>0)$ 所围成的区域.

七、 应用 $Green$ 公式计算积分

$$\mathrm{I}=\oint_L\frac{e^x(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+e^x(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线, 逆时针方向.

八、 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上, 且在 $x=0$ 连续, 并且对所有的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

证明： $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且 $f(x)=f(1)x$.

九、 证明

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

十、 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)>0$, 讨论函数 $g(y)=\displaystyle\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

12.　中国科学院大学 2011 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (30 分)

(1) 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$.

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$.

(3) 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)$ 存在, 并求其值.

二、 (20 分) 求数列 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n}$ 中最大的一项.

三、 (15 分) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)<0\,($当 $x>0)$, $f(0)=0$. 证明对于所有 $x_1>0,x_2>0$ 有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

四、 (20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内有界可微, 试问下列命题中哪个必定成立(要说明理由), 哪个不成立(可由反例说明):

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 蕴含 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$ 存在蕴含 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

五、 (20 分) 过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 (a,a^2) 作切线, 确定 a 使得该切线与另一抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的图形面积最小, 并求出最小面积值.

六、 (15 分) 计算曲线积分

$$\oint_C((x+1)^2+(y-2)^2)\mathrm{d}s,$$

其中 C 表示曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=1$ 的交线.

七、 (15 分) 设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ 在区间 I 上一致收敛, 而且对每个 $n\geq 0$, $f_n(x)$ 在 I 上有界. 证明函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ 在区间 I 上一致有界, 即存在常数 $M>0$, 使得对所有的 $n\geq 0$ 及 $x\in \mathrm{I}$ 有 $|f_n(x)|\leq M$.

八、 (15 分) 设 $\{a_k\}_{k\geq 0},\{b_k\}_{k\geq 0},\{\xi_k\}_{k\geq 0}$ 为非负数列, 而且对任意的 $k\geq 0$, 有 $a_{k+1}^2\leq (a_k+b_k)^2-\xi_k^2$.

(1) 证明 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2\leq\left(a_1+\sum_{i=0}^{k}b_i\right)^2$.

(2) 若数列 $\{b_k\}$还满足 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}b_k^2<+\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2=0$.

13. 中国科学院大学 2012 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (30 分) 计算极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(2\sin\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{2}{n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\cos\dfrac{1}{x^2}}\right)^{x^4}$.

二、 (30 分) 计算积分：

(1) $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^3 x}$.

(2) $\mathrm{J}=\displaystyle\iint_S x(1+yf(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为由曲线 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围成的区域, $f(x)$ 为实值连续函数.

三、 (15 分) 求下列幂级数的收敛域：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}.$$

四、 (15 分) 证明：函数列 $s_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ $(n\geq 1)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛；函数列 $t_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $(n\geq 1)$ 在区间 $(0,1)$ 上不一致收敛.

五、 (15 分) 设在区间 $[a,b]$ 上, $f(x)$ 连续, $g(x)$ 可积, 并且 $f(x)>0, g(x)>0$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{a\leq x\leq b}f(x).$$

六、 (15 分) 设在区间 $[0,a]$ 上, $f(x)$ 二次可导, 并且 $|f(x)|\leq 1, |f''(x)|\leq 1$, 证明：当 $x\in[0,a]$ 时, 有 $|f'(x)|\leq\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}$.

七、 (15 分) 设 n 是一个正整数. 证明：方程 $x^n+nx-1=0$ 有唯一的正实根 x_n, 并且当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

八、 (15 分) 设 $\rho(x,y,z)$ 是原点 O 到椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分 (即满足 $z\geq 0$ 的部分) Σ 的任一点 (x,y,z) 处的切面的距离, 求积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S.$$

14. 中国科学院大学 2013 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (25 分) 计算：

(1)(15 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

(2)(10 分) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, 其中设 $a_1=1, a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}, (n\geq 1)$.

二、 (15 分) 设 $f(x)$ 连续, $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(x-t)\sin t\mathrm{d}t$, 试证

$$g''(x)+g(x)=f(x), g(0)=g'(0)=0.$$

三、 (15 分) 求曲线 $y=e^x$ 曲率的最大值.

四、 (30 分) 计算积分

(1) $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x.$

(2) $\mathrm{J}=\displaystyle\iint_{\Omega}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Omega=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$.

五、 (15 分) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(x+\frac{1}{n})^n}$ 的收敛性和一致收敛性(包括内闭一致收敛性).

六、 (20 分)

(1) 证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二次可微, 且 $f''(x)<0$, 则

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

七、 (15 分) 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{3}{2}x+1$ 在集合 $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|4x^2+y^2-1=0\}$ 上的最值.

八、 (15 分) 设无穷实数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

$$a_{n+1}=b_n-\frac{na_n}{2n+1}, (n=1,2,\cdots).$$

试证：

(1) 若 $\{b_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 也有界.

(2) 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 也收敛.

15. 中国科学院大学 2014 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$. (不知道原题是不是这样的, 这里给出第一项和最后一项)

二、 已知函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 计算 $f^{(i)}(0), i=1,2,3$.

三、 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $\varphi(y)$, 写出用 f', f'', f''' 表示 $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ 的表达式.

四、 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 上可导, $f(0)=0, f(1)=1/2$, 证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

五、 已知 $a_0>0, a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

六、 证明：

$$1\leq\iint_D(\sin x^2+\cos y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\sqrt{2},$$

其中 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq1, 0\leq y\leq1\}$.

七、 求由 $z=x+y$ 和 $z=x^2+y^2$ 围成的几何体的体积.

八、 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛性与一致收敛性.

九、 (1) 函数 $u(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $u(x)$ 绝对可积, 求证：

$$\sup_{x\in[0,1]}|u(x)|\leq\int_0^1|u(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1|u'(x)|\mathrm{d}x.$$

(2) 二元函数 $u(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq1, 0\leq y\leq1\}$ 上连续, 且偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 绝对可积, 求证：

$$\sup_{(x,y)\in D}|u|\leq\iint_D|u|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

16. 中国科学院大学 2015 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (10 分) 已知数列 x_n 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

二、 (10 分) 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2+y^2)$.

三、 (10 分) 已知

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x<0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数连续, 求 a, b 的值.

四、 (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$.

五、 (15 分) 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots$ 连续, 且有连续的导函数.

六、 (15 分) 已知一个半径为 r 的球, 求与之相切的正圆锥的最小体积.

七、 (15 分) 设 $p(x)$ 是不超过三次的多项式, 证明: 对任意的 a, b 有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \cdots$.

八、 (15 分) 求 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $y=x^2, y=\frac{1}{2}x$ 围成 $x>0$ 的部分.

九、 (15 分) 已知空间中两个点 $A(1,0,-1), B(0,1,1)$, 求线段 AB 旋转一周与 $z=1, z=-1$ 所围体积.

十、 (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 证明: $\forall\lambda\in(0,1)$, 有 $\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x \geq \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

十一、 (15 分) 证明: $\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e}) < \left(\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 < \frac{16}{25}$

17. 中国科学院大学 2016 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (20 分) 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

二、 (20 分) 求定积分

$$\mathrm{I}=\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x.$$

三、 (15 分) 求二重极限

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

四、 (12 分) $f(x)$ 是$[a,b]$ 上的连续正函数, 求证存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

五、 (15 分) 求以下曲面所围立体的体积

$$\mathrm{S}_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\mathrm{S}_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}(z\geq 0).$$

六、 (12 分) $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x)$ 单调递增, 求证:

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

七、 (12 分) 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足以下条件:

(a) $a_1\geq a_2\geq\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(b) 存在正数 M, 对任意的正整数 n, 均有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|\leq M$.

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

八、 (15 分) 设 $0\leq a<b/2$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 可导且 $f(a)=a,f(b)=b$.

(a) 求证存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=b-\xi$.

(b) 若 $a=0$, 求证存在 $\alpha,\beta\in(a,b),\alpha\neq\beta$, 使得 $f'(\alpha)f'(\beta)=1$.

九、 (15 分) 求椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上到直线 $2x+3y=6$ 距离最短的点, 并求其最短距离.

十、 (15 分) 半径为 R 的球面 S 的球心在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上, 求球面 S 在单位球内面积的最大值, 并求出此时的 R.

18. 中国科学院大学 2017 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (10 分) 计算极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{2+x}-2\sqrt{1+x}+\sqrt{x}).$$

二、 (10 分) 已知 $a_{n+1}(a_n+1)=1, a_0=0$, 证明数列的极限存在, 并求出极限值.

三、 (15 分) $f(x)$ 三次连续可微, 令 $u(x,y,z)=f(xyz)$, 求 $\phi(t)=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ 的具体表达式, 其中 $t=xyz$.

四、 (15 分) 求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

五、 (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 并且 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$, 证明 $f'(x)\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

六、 (15 分) 已知 $f(x)$ 有界且可微, 假设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 存在, 求证 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

七、 (15 分) 求二重积分 $\displaystyle\iint_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

八、 (15 分) 已知 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)$, 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散.

九、 (15 分) 已知 n 为整数, a 为常数, $\mathrm{I}_n(a)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^a}$.

(1) 试讨论 a 对敛散性的影响.

(2) 当 a 在使积分收敛的情况下, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{I}_n(a)$.

十、 (15 分) 在 $[a,b]$ 上 $(0<a<b)$, 证明下面的不等式成立

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\mathrm{d}x \ge e^{-a^2}-e^{-b^2}.$$

十一、 (10 分) 求 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.

19. 中国科学院大学 2018 年研究生入学考试试题数学分析

李扬

微信公众号: sxkyliyang

一、 (15 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

二、 (15 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

三、 (15 分) 判断(并证明) 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

四、 (15 分) 求三个实常数 a,b,c, 使得下式成立

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x-ax}\int_b^x\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s=c.$$

五、 (15 分) 计算不定积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x}.$$

六、 (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二次连续可微, $f(0)=0$, 证明:

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{3},$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[-1,1]}|f''(x)|$.

七、 (15 分) 求曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$上的点, 使得曲线在该点处的法线被曲线所截得的线段长度最短.

八、 (15 分) 设 $x>0$, 证明

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta}},$$

其中 $\theta=\theta(x)>0$, 并且 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}$.

九、 (15 分) 设

$$u_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n^2-n+1)^x}\ \ (n\ge 0),$$

求函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 的绝对收敛、条件收敛以及发散的区域.

十、 (15 分) 证明

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\mathrm{d}x<\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{33}}.$$