中国科学院大学

2019 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

Xionger

微信公众号：Xionger 的数学小屋

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (18 分) 已知 $(x-1)^2(x+1) \mid \left(ax^4+bx^2+cx+1\right)$, 求 a, b, c.

2. (18 分) 已知实数矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, 其中 $a_{ij} \le 0, i \ne j, i, j = 1,2,3$. 请说明

   (1) 若 $a_{ii} > 0, i = 1,2,3$, A 是否为可逆矩阵?

   (2) 若 $a_{1j}+a_{2j}+a_{3j} > 0, j = 1,2,3$, A 是否为可逆矩阵?

3. (18 分) 设 3 维复向量空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}.$$

   求 V 的另一组基 η_1, η_2, η_3, 使得 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵就是 A 的若当标准形.

4. (20 分) 设有 $n+1$ 个列向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ 为实数域), A 是一个 n 阶实对称正定矩阵, α_i^T 为 α_i 的转置, 如果下列条件满足:

   (1) $\alpha_j \ne 0, j = 1,2,\ldots,n$. (2) $\alpha_i^T A \alpha_j = 0, i \ne j; i, j = 1,2,\ldots,n$.

   (3) β 与每个 α_j 都正交.

   证明 $\beta = 0$.

5. (20 分) 设 A, B 是两个 $n(\ge 2)$ 阶对称正定矩阵, $\det(A)$ 表示 A 的行列式, 证明

$$\det(A+B) > \det(A) + \det(B).$$

6. (18 分)

   (1) 设 $\mathbb{R}_n[x]$ 是次数 $< n$ 的多项式空间, 证明 $(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ 为 $\mathbb{R}_n[x]$ 上的内积, 因而 $\mathbb{R}_n[x]$ 是欧氏空间.

   (2) 证明下述 n 阶实对称矩阵为正定矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

7. (18 分) 设实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}.$$

   已知 -5 是 A 的一个重数为 2 的特征值.

(1) 计算 a 的值.
(2) 求一个正交矩件 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

8. (20 分) 设 V 是由次数不超过 n 的一元实系数多项式构成的实线性空间, 对于每个自然数 $k \geq 0$, 定义
$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}, \quad \binom{x}{0}=1.$$
(1) 证 $\binom{x}{0},\binom{x}{1},\ldots,\binom{x}{n}$ 构成 V 的一组基.
(2) 任给一个多项式 $f(x)\in V$, 写出 $f(x)$ 相对这组基的线性组合.
(3) 证明: 若 $f(i)\in\mathbb{Z}$, 对于 $0\leq i\leq n$, 则 $f(k)\in\mathbb{Z}$ 对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 均成立, 其中 $\mathbb{Z}$ 是数整数集.

特别鸣谢免费软件 Mathpix Snipping Tool 提供的数学公式识别功能, 腾讯 TIM 提供的汉字识别功能, 以及**中科院数学系统院考研** QQ 群 (287892650, 139903797) 数位群友提供的热心帮助.