Optimisation des Réservoirs Sous Incertitude : SAA vs Optimisation Robuste

Ferry Alice

1 Introduction

La prise de décision en situation d'incertitude constitue un enjeu central de la gestion des ressources, en particulier pour les systèmes multiréservoirs. Dans ces systèmes, les opérateurs doivent trouver l'équilibre entre l'approvisionnement en eau de la population et l'incertitude liée aux apports futurs provenant d'événements naturels. Des décisions peu informées peuvent entraîner des pertes économiques importantes ou des dommages sévères.

Deux grands cadres méthodologiques sont couramment utilisés dans la littérature pour modéliser l'incertitude dans les problèmes d'hydraulique : la Méthode d'Approximation par Moyenne d'Échantillons (SAA) et l'Optimisation Robuste (RO). L'objectif de ce projet est de proposer une comparaison conceptuelle et quantitative entre la SAA et l'optimisation robuste dans un contexte de contrôle des crues pour un système de réservoirs.

2 Cadre théorique

Lorsque l'on est confronté à des problèmes de décision sous incertitude, deux grandes approches méthodologiques peuvent être envisagées : l'approche déterministe et l'approche stochastique. Il devient alors important de se questionner sur la pertinence de recourir à la programmation stochastique, dont la complexité computationnelle est plus élevée, par rapport à une approche déterministe (plus simple).

Généralement, une approche « naïve » consiste à remplacer les variables aléatoires par leurs valeurs espérées (Expected Value Problem, EV), puis à résoudre le nouveau problème déterministe obtenu. Toutefois, cette méthode néglige entièrement la variabilité des phénomènes aléatoires ainsi que la possibilité d'événements extrêmes. Cette simplification peut conduire à des décisions sous-optimales lorsque le système est confronté à des réalisations défavorables de l'incertitude.

Afin d'évaluer l'intérêt d'une modélisation stochastique, il est possible d'introduire l'indicateur appelé Valeur de la Solution Stochastique (Value of the Stochastic Solution, VSS).

Soit $\bar{x}$ la décision optimale obtenue en résolvant le problème déterministe fondé sur la moyenne des scénarios, c'est-à-dire le problème EV. La performance de cette décision « moyenne », lorsqu'elle est appliquée dans un environnement réellement stochastique, est mesurée par l'espérance du coût associé, appelée Espérance du Résultat de la Valeur Espérée (Expected Result of the Expected Value Solution, EEV) :

$$EEV = \mathbb{E}[f(\bar{x}, \xi)].$$

La VSS est alors définie comme la différence entre cette quantité et la valeur optimale du problème stochastique, notée (z^*), obtenue par la méthode SAA :

$$VSS = EEV - z^*.$$

Une valeur élevée de la VSS indique que l'incertitude joue un rôle significatif dans le processus décisionnel. Dans notre contexte, cela signifie que la planification fondée uniquement sur les valeurs moyennes échoue à anticiper correctement les coûts de recours. L'approche stochastique permet ainsi de passer d'une gestion réactive à une gestion proactive. La description des méthodes stochastiques (SAA et RO) utilisées dans les problèmes de gestion de réservoirs est présentée dans la section suivante.

2.1 Approximation par moyenne d'échantillons (SAA)

Le problème stochastique de base consiste à choisir un vecteur de décision $x \in X$ afin de minimiser la valeur espérée d'une fonction de coût $f(x, \xi)$ où ξ représente un vecteur aléatoire d'incertitudes. Sa formulation générale est :

$$\min_{x \in X} F(x) = \mathbb{E}[f(x, \xi)]. \tag{1}$$

La solution optimale est :

$$x^* \in \arg\min_{x \in X} F(x). \tag{2}$$

La méthode SAA consiste à modifier la fonction objective, car l'espérance est difficile à calculer. Elle est remplacée par une moyenne empirique sur un échantillon i.i.d. $\{\xi^1, \dots, \xi^N\}$:

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x, \xi^i), \quad x_N^* \in \arg\min_{x \in X} F_N(x). \quad (3)$$

2.1.1 Convergence des solutions

La loi uniforme des grands nombres garantit la convergence entre la solution optimale stochastique x^* et la solution SAA x_N^* :

$$\sup_{x \in D} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x, \xi_i) - \mathbb{E}[f(x, \xi)] \right| \to 0 \quad (n \to \infty \text{ p.s.}) \quad (4)$$

Pour assurer la loi uniforme des grands nombres (ULLN) et, par conséquent, la convergence de l'ensemble des solutions SAA vers la solution véritable x^*, il est nécessaire que :

Le domaine des décisions D soit compact, c'est-à-dire fermé et borné.

Additionnellement, la fonction de coût $f(x, \xi)$ doit satisfaire des conditions de régularité, par exemple :

- $f(x, \xi)$ doit être continue en x presque sûrement ou uniformément continue sur l'ensemble des décisions.
- On doit vérifier des conditions de moments (comme l'existence d'un majorant intégrable ou une condition de Lipschitz).

La compacité de l'ensemble de décisions et la continuité de $f(x, \xi)$ garantissent l'existence d'une solution aux problèmes. Si $f(x, \xi)$ est convexe en x, alors les solutions de SAA convergeront vers les solutions du problème stochastique.

2.1.2 Efficacité asymptotique (Taux canonique)

Si la fonction objectif du problème stochastique est deux fois différentiable, que la solution optimale x^* est unique et que la fonction $F(x)$ satisfait une condition de croissance quadratique dans un voisinage de x^*, alors la solution optimale SAA converge très rapidement vers la solution réelle.

Plus précisément, le taux de convergence est :

$$\|x_N^* - x^*\| = \mathcal{O}_p(N^{-1/2})$$

appelé taux canonique. Le taux canonique est un taux d'estimation, provenant de l'approximation statistique de $F(x)$.

2.1.3 Coût computationnel

Le principal défi de la méthode SAA réside dans le fait que, pour obtenir une précision élevée, il faut résoudre un problème déterministe de grande taille. Lorsque le modèle inclut de nombreuses contraintes ou une structure complexe, la résolution devient coûteuse en temps de calcul et en mémoire.

2.2 Optimisation Robuste (RO)

Pour l'optimisation robuste, nous utilisons une autre formulation. En effet, l'incertitude appartient à un ensemble déterministe $\mathcal{U}$. On suppose que la distribution de $\mathcal{U}$ est inconnue :

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x, \xi) \le 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (5)$$

Exemple de reformulation pour contraintes linéaires incertaines :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b, \quad \forall a_i \in \mathcal{U}_\rangle \\ & \Leftrightarrow \max_{a_i \in \mathcal{U}_i} a_i x \le b_i, \quad \forall i. \end{aligned} \quad (6)$$

Ici, A est une matrice d'incertitude.

2.2.1 Tractabilité et structure de l'ensemble d'incertitude

L'un des objectifs majeurs de l'optimisation robuste est de préserver la tractabilité computationnelle du problème sans incertitude. La forme choisie pour l'ensemble d'incertitude $\mathcal{U}$ joue un rôle crucial dans la complexité de la reformulation déterministe du problème.

Les deux structures d'incertitude les plus couramment utilisées sont l'incertitude polyhédrale et l'incertitude ellipsoïdale.

Incertitude polyhédrale : Lorsque $\mathcal{U}$ est un polyèdre, les contraintes robustes se transforment en contraintes linéaires. La reformulation robuste devient alors un programme linéaire, facilement tractable.

Incertitude ellipsoïdale : Lorsque $\mathcal{U}$ est un ellipsoïde, les contraintes robustes se reformulent en contraintes quadratiques. La reformulation robuste correspond alors à un programme à cônes de second ordre (SOCP), ce qui permet de conserver la convexité et la résolution en temps polynomial pour les problèmes linéaires.

2.2.2 Prix de RO et limites de l'approche statique

Le caractère plus ou moins conservateur de la solution dépend directement de la taille et de la structure de l'ensemble d'incertitude $\mathcal{U}$ choisie. Une incertitude plus grande entraîne généralement une solution plus robuste, mais aussi plus conservatrice. Dans la formulation robuste statique (RO), toutes les variables de décision sont fixées à $t = 0$, avant que l'incertitude ne soit réalisée. Bien que robuste, elle est particulièrement conservatrice pour les problèmes séquentiels ou multi-stades, car cette formulation ignore l'adaptation possible des décisions après que l'information soit révélée.

2.2.3 L'Approche ajustable (ARO) et règles de décision affines

Pour pallier cette difficulté, l'Optimisation Robuste Ajustable introduit des variables de recours. Ces variables de recours sont des fonctions des paramètres incertains. Cependant, nous optimisons sur un espace de fonctions sujettes aux changements, cela résulte en un problème NP-difficile.

Pour rendre ce problème tractable numériquement, Ben-Tal et al. propose l'approche *Affinely Adjustable Robust Counterpart* (AARC). Cette méthode force les variables ajustables à devenir des fonctions affines des incertitudes passées et présentes. Si u est le vecteur d'incertitude et $x_2(u)$ la décision de second stade, on impose la structure :

$$x_2(u) = Qu + q \tag{7}$$

Le problème d'optimisation ne porte plus sur la fonction $x_2(\cdot)$, mais sur les coefficients Q et q, qui sont décidés au premier stade. Cette approximation permet souvent de reformuler le problème robuste complexe en un programme linéaire (LP) ou conique (SOCP) tractable, plus facilement solvable.

2.3 Comparaison entre SAA et RO

Les différences entre la SAA et l'Optimisation Robuste ne se limitent pas à leur manière de modéliser l'incertitude. Elles concernent aussi l'efficacité computationnelle du modèle et la manière dont chaque approche gère l'incertitude liée à la distribution.

2.3.1 Efficacité computationnelle et statistique

Efficacité statistique de la SAA.

La SAA est statistiquement très efficace : sous des conditions régulières, elle atteint le taux de convergence canonique $\mathcal{O}_p(N^{-1/2})$. Cependant, cette performance se paie par un coût computationnel potentiellement important, car il faut résoudre un problème déterministe conséquent qui regroupe tous les scénarios. Plus N est grand, plus la résolution devient coûteuse.

Tractabilité de RO.

L'Optimisation Robuste est conçue pour rester tractable, même pour des modèles de grande taille, tant que l'ensemble d'incertitude $\mathcal{U}$ possède une structure simple (ex : polyhédrale ou ellipsoïdale). En contrepartie, la RO n'atteint généralement pas le taux statistique optimal $\mathcal{O}_p(N^{-1/2})$. Son atout majeur réside dans sa stabilité.

2.3.2 Robustesse du modèle et incertitude distributionnelle

Le choix entre SAA et RO dépend aussi du niveau de confiance accordé à la distribution de probabilité utilisée dans le modèle :

Gestion de l'incertitude du modèle par la RO.
La RO est particulièrement adaptée lorsque la distribution réelle $\mathbb{P}$ est mal connue ou potentiellement mal spécifiée. En travaillant sur le pire cas admissible dans $\mathcal{U}$, elle permet une protection contre les scénarios difficiles à anticiper.

Sensibilité de la SAA.
La SAA repose directement sur les échantillons. Si la distribution réelle s'écarte trop de celle observée dans les données, la solution SAA (même optimale pour les échantillons) peut devenir sous-optimale en pratique. La robustesse de la SAA dépend donc fortement de la qualité et de la représentativité de l'échantillonnage.

3 Formulation du Problème de Réservoirs

Ramenons la théorie vue précédemment à notre problème d'optimisation de réservoirs. On cherche à optimiser le coût d'opérations de notre réservoir avec comme source d'incertitude l'arrivée d'eau et la demande. On impose comme condition que la demande soit satisfaite en tout temps. Le problème de gestion des réservoirs est naturellement un problème multistade : les décisions prises au temps t doivent anticiper les incertitudes futures tout en permettant des ajustements ultérieurs.

3.1 Méthode 1 : SAA

La formulation SAA repose sur un ensemble de S scénarios équiprobables. Les décisions de premier stade (X_t) sont fixes, tandis que les décisions de second stade (u_t, v_t, d_t) s'adaptent à chaque scénario s.

Paramètres :

- S_0 : Stockage initial (connu).
- $S_{objectif}$: Stockage cible à T.
- $S_{\min}, S_{\max}$: Bornes du réservoir.
- $R_{\min}, R_{\max}$: Bornes du débit sortant.
- C^X : Coût unitaire du relâchement planifié.
- C^Y : Coût unitaire d'ajustement (pénalité de modification).
- M : Pénalité de déficit (très élevée).
- I_t^s, D_t^s : Apports et Demande au temps t pour le scénario s.

Variables :

- $X_t \geq 0$: Relâchement d'eau (décision au moment t).
- $u_t^s \geq 0$: Ajustement à la hausse (lâcher plus d'eau).
- $v_t^s \geq 0$: Ajustement à la baisse (garder plus d'eau).
- $d_t^s \geq 0$: Déficit de demande (Shortage).
- S_t^s : Niveau du réservoir à la fin de la période t.

Note : Le relâchement d'eau réel dans le scénario s est donné par $\text{Release}_t^s = \text{X}_t + u_t^s - v_t^s$.

Objectif :

$$\min \sum_{t=1}^{T} C^X X_t + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} \sum_{t=1}^{T} \left(C^Y (u_t^s + v_t^s) + M d_t^s \right) \tag{8}$$

Contraintes : Pour tout $t = 1...T$ et $s = 1...S$:

$$S_t^s = S_{t-1}^s + I_t^s - (X_t + u_t^s - v_t^s) \tag{9}$$

(Pour $t = 1$, $S_{t-1}^s = S_0$).

$$(X_t + u_t^s - v_t^s) + d_t^s \geq D_t^s \tag{10}$$

$$S_{\min} \leq S_t^s \leq S_{\max} \tag{11}$$

$$R_{\min} \leq X_t + u_t^s - v_t^s \leq R_{\max} \tag{12}$$

$$S_T^s \geq S_{objectif} \quad (13)$$

La contrainte de continuité (9) décrit l'évolution du niveau du réservoir en fonction du stockage précédent, des apports naturels et du relâchement d'eau. Les contraintes de bornes sur le stockage (11) assurent le respect des limites physiques et opérationnelles du réservoir. Les contraintes sur le relâchement (12) garantissent la faisabilité des décisions de sortie, elles peuvent être issues de contraintes environnementales. La contrainte de satisfaction de la demande (10), combinée à la variable de déficit, permet d'assurer la faisabilité du modèle dans tous les scénarios tout en pénalisant explicitement les situations de pénurie. Finalement, la contrainte (13) sert à préparer le réservoir pour la période suivante.

La variable X_t représente le relâchement d'eau planifié par l'opérateur avant la réalisation des incertitudes liées aux apports et à la demande. Pour chaque scénario s, les variables u_t^s et v_t^s permettent d'ajuster cette décision initiale afin de s'adapter aux conditions observées, respectivement en augmentant ou en réduisant le volume relâché. La variable d_t^s modélise un éventuel déficit de demande lorsque les ressources disponibles sont insuffisantes.

Dans une approche SAA, il est parfois impossible de satisfaire la contrainte de la demande en fonction de l'échantillon de scénarios choisi. Pour garantir l'existence d'une solution pour tous les scénarios, on reformule la contrainte de satisfaction de la demande sous forme de contrainte souple. On introduit ainsi une variable d'écart positive d_t^s (slack variable), représentant le déficit d'approvisionnement pour la période t et le scénario s :

$$X_t + u_t^s - v_t^s + d_t^s \geq D_t^s, \quad \forall t = 1, \ldots, T, \; s = 1, \ldots, S \quad (14)$$

Cette variable est associée à une pénalité M très élevée dans la fonction objective.Si la demande peut être satisfaite, le solveur fixera $d_t^s = 0$ afin d'éviter la lourde pénalité. Dans les cas où le système est physiquement incapable de satisfaire la demande, $d_t^s > 0$ et permet au problème de rester réalisable, offrant ainsi une solution. Cette formulation permet non seulement d'assurer l'existence d'une solution pour tous les scénarios, mais aussi de quantifier la fiabilité du système en mesurant l'ampleur et la fréquence des déficits dans les scénarios les plus contraignants.

3.2 Methode 2 : Optimisation Robuste Affine Ajustable (AARC)

Une approche robuste statique forcerait toutes les décisions (X_t et Y_t) à être non-ajustables, menant souvent à des solutions trop conservatrices ou infaisables si l'ensemble d'incertitude $\mathcal{U}$ est large. Pour notre problème de réservoir, nous appliquons donc l'approche AARC décrite précédemment. Nous distinguons les variables de décision en deux catégories :

- Variables avant recours (X_t) : Le relâchement planifié, décidé avant de connaitre la demande et l'arrivée d'eau.
- Variables après recours (Y_t) : L'ajustement du montant d'eau relâchée, qui dépend de l'arrivée d'eau et de la demande.

Dans le cadre robuste, nous ne minimisons pas une espérance, mais le coût dans le pire des cas sur un ensemble d'incertitude $\mathcal{U}$. Soit $\zeta_t = (I_t, D_t)$ le vecteur des paramètres incertains. L'ajustement net est $Y_t(\zeta)$ (qui remplace $u_t - v_t$ du modèle SAA) comme une fonction affine des incertitudes passées.

Règle de décision affine :

$$Y_t(\zeta) = y_{t,0} + \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{Q}_{t,k} \cdot \zeta_k \quad (15)$$

Les variables d'optimisation sont désormais les coefficients $y_{t,0}$ et les matrices $\boldsymbol{Q}_{t,k}$.

Objectif :

$$\min_{X,y,Q} \left[\sum_{t=1}^{T} C^X X_t + \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \sum_{t=1}^{T} C^Y |Y_t(\zeta)| \right] \quad (16)$$

Contraintes : Les contraintes suivantes doivent être respectées $\forall \zeta \in \mathcal{U}$.

$$S_t(\zeta) = S_{t-1}(\zeta) + I_t(\zeta) - (X_t + Y_t(\zeta)) \quad (17)$$

$$X_t + Y_t(\zeta) \geq D_t(\zeta) \quad (18)$$

$$S_{\min} \leq S_t(\zeta) \leq S_{\max} \quad (19)$$

$$R_{\min} \leq X_t + Y_t(\zeta) \leq R_{\max} \quad (20)$$

$$S_T(\zeta) \geq S_{objectif} \quad (21)$$

Pour résoudre ce problème numériquement, chaque contrainte indexée sur $\forall \zeta \in \mathcal{U}$ est reformulée en utilisant la dualité robuste pour transformer les contraintes semi-infinies en un nombre fini de contraintes linéaires (si $\mathcal{U}$ est polyédral). En pratique, la valeur absolue et le max sont linéarisés via la dualité robuste.

4 Implémentation Numérique

La section suivante s'appuie sur le notebook Julia joint à ce projet.

4.1 Justification de l'utilisation d'un modèle stochastique

Pour justifier l'utilisation de la méthode stochastique plutôt que de simplement utiliser une méthode déterministe, on calcule la VSS comme décrit précédemment.

Les résultats sont les suivants :

TABLE 1 – Résultats de la VSS

Métrique	Valeur
Coût de la solution stochastique	\$10 613.39
Coût de la solution moyenne (EEV)	\$10 748.09
VSS	\$134.70

Le modèle déterministe utilise la moyenne des arrivées d'eau et relâche l'eau de manière à satisfaire la demande, en supposant que les arrivées d'eau ne dévieront pas de leur valeur moyenne. Cependant, lorsque ces arrivées varient, ce modèle a plus de difficulté à répondre à la demande, ce qui le force à prendre des actions de recours et donc à encourir des coûts plus élevés.

Pour autant, la différence entre les deux modèles reste relativement faible. Cela s'explique par le fait que le réservoir dispose déjà de 50 L d'eau au début de la période. Ce stock initial agit comme un tampon, permettant d'absorber les variations des arrivées d'eau, même dans le cas du modèle déterministe.

4.2 Comparaison des Méthodes

Dans cette section, on présente une analyse quantitative entre la méthode SAA et la méthode AARC. La comparaison est basée sur 300 scénarios, pour lesquels la moyenne des arrivées d'eau est fixée à 18 unités, ce qui est inférieur à la moyenne historique observée de 22 unités. Ce choix permet d'évaluer la résilience des deux méthodes face à des conditions défavorables, telles que de grandes sécheresses.

TABLE 2 – Résultats finaux : comparaison entre SAA et RO

Métrique	**SAA**	**RO**
Coût total moyen	\$5 243.77	\$5 883.55
Coût pire cas	\$102 649.02	\$101 828.41
Volume de stock moyen	40.40	38.49

La première différence majeure entre les deux méthodes concerne la décision initiale. En effet, la méthode SAA adopte une stratégie de relâchement relativement uniforme de l'eau, avec environ 21,7 unités relâchées à chaque période. Cette méthode suppose que les arrivées d'eau augmenteront par la suite et se rééquilibreront autour de la valeur historique de 22. On observe très peu de variations dans les décisions de recours, ce qui permet de limiter les coûts associés.

À l'inverse, la méthode robuste conduit à un vecteur de décision très différent. Le modèle choisit de relâcher une grande quantité d'eau au début de l'horizon, puis réduit progressivement le relâchement au fil du temps.

En termes de coût moyen, le modèle robuste est environ 12 % plus cher que le modèle SAA. Cette différence s'explique par le caractère conservateur de l'approche robuste, qui n'est pas toujours économiquement optimale. Lorsque le modèle robuste planifie un relâchement faible alors que la demande est élevée, les coûts de recours deviennent alors très importants.

Enfin, lors d'un événement extrême tel qu'une sécheresse sévère, le modèle robuste se révèle plus efficace que le modèle SAA, avec un coût inférieur d'environ 820 \$. Néanmoins, les coûts restent très élevés dans les deux cas (au-delà de 100 000 \$), ce qui montre que la sécheresse extrême simulée constitue une difficulté majeure pour satisfaire la demande.

En bref, l'optimisation à l'aide de la méthode SAA semble adaptée à un contexte de distribution d'eau à une population. En effet, un système équilibré permet d'assurer un flux d'eau continu, dont l'intensité varie. En revanche, un système robuste serait préférable dans un contexte où les conditions climatiques tendent à être difficiles et où les pires scénarios sont fréquents.

5 Conclusion

À travers une analyse théorique et numérique, les avantages et les inconvénients de la méthode d'Approximation par Moyenne d'Échantillonnage (SAA) et de l'Optimisation Robuste ont été présentés. La méthode SAA se distingue par son efficacité statistique. Lorsque la distribution des incertitudes est bien estimée et que les scénarios utilisés sont représentatifs de la réalité, cette approche permet d'obtenir des solutions équilibrées. Les résultats numériques montrent ainsi que la SAA conduit à un coût moyen inférieur à celui du modèle robuste. De plus, la valeur positive de la VSS confirme l'intérêt d'une modélisation stochastique pour ce type de problème.

L'approche robuste, quant à elle, permet d'obtenir de meilleures performances dans des scénarios extrêmes. L'approche AARC permet de limiter le caractère conservateur de l'optimisation robuste standard en introduisant des mécanismes d'adaptabilité. Les résultats de l'implémentation numérique montrent que, bien que plus coûteuse en moyenne, la solution robuste est plus performante dans les pires cas. Elle constitue donc un outil pertinent dans des contextes marqués par de fortes variations climatiques.

Enfin, il serait intéressant d'envisager la formulation d'un modèle hybride combinant la méthode SAA et l'optimisation robuste, ou encore d'étendre le modèle à un système comprenant plusieurs réservoirs. Cela permettrait de mieux représenter la réalité et de modéliser des systèmes de gestion de réservoirs plus complexes, afin d'améliorer la prise de décision face aux défis climatiques futurs.

6 Utilisations des References

L'article de Kim, Pasupathy et Henderson (2011), intitulé A Guide to Sample-Average Approximation, a été la référence principale pour la mise en place de la méthode SAA. Il a surtout permis de comprendre le fonctionnement de la procédure d'échantillonnage, les propriétés de convergence des solutions, ainsi que les aspects liés au coût computationnel, comme le taux canonique.

L'article de Bertsimas, Brown et Caramanis (2011), Theory and Applications of Robust Optimization, a été utilisé pour introduire le cadre de l'optimisation robuste. Il a permis de justifier le besoin de décisions adaptatives, d'expliquer l'implémentation de la méthode AARC et de discuter des problèmes de tractabilité numérique.

Le travail de Karamouz (1983), Reservoir Operating Rules Generated by Deterministic and Stochastic Optimization, a servi de base pour la modélisation du problème de réservoir. Il a été utilisé pour formuler les contraintes physiques du réservoir ainsi que la fonction objective, et a également aidé à structurer la comparaison entre les approches déterministes et stochastiques.

L'ouvrage de Birge et Louveaux (2011), Introduction to Stochastic Programming, a été utile pour définir les indicateurs de performance en présence d'incertitude. Il a permis de décrire les notions de valeur espérée (EV), d'espérance du résultat de la valeur espérée (EEV) et de valeur de la solution stochastique (VSS).

L'article de Ben-Tal et Nemirovski (2000) ont été consultés pour les fondements théoriques des formulations robustes appliquées aux programmes linéaires incertains, en particulier pour les ensembles d'incertitude.

Enfin, l'article de Bertsimas et Sim (2004) a été utilisé pour introduire le concept de Price of Robustness, qui permet d'expliquer le compromis entre la protection contre les pires scénarios et la dégradation de la performance économique moyenne.

Utilisation de l'intelligence artificielle pour les corrections orthographiques, pour certaines parties du format LaTeX (notamment les tableaux), ainsi que pour le débogage de certains éléments en Julia et dans le code (écrit directement dans le notebook).

Références

[1] Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25(1), 1-13.

[2] Bertsimas, D., Brown, D. B., & Caramanis, C. (2011). Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53(3), 464-501.

[3] Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The Price of Robustness. *Operations Research*, 52(1), 35-53.

[4] Birge, J. R., & Louveaux, F. (2011). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Science & Business Media.

[5] Karamouz, M. (1983). *Reservoir operating rules generated by deterministic and stochastic optimization* (Doctoral dissertation). Purdue University.

[6] Kim, S., Pasupathy, R., & Henderson, S. G. (2011). *A guide to sample-average approximation*. Tech Report, Cornell University.