

物理学中的多尺度问题

肯尼斯·维尔森

翻译：周忆粟

版本：2021.11.18

[译者注]：本文节选自 K. G. Wilson (1979). “Problems in Physics With Many Scales of Length”. *Scientific American*, 241(2): 158–179. 图解请参考原文, <https://websites.pmc.ucsc.edu/~wrs/Project/2014-summer%20seminar/Renorm/Wilson-many%20scales-Sci%20Am-79.pdf>。此次翻译包括原文的前三分之二，最后讨论临界现象与平均场理论的部分没有收录。页边码对应原文页码。由于原文中有大量图例在翻译中被省略了，所以页边码不连续。

自然界显著的特征之一是世界的结构中「大和小」或「长度尺度」的巨大差异。例如，海洋中的洋流绵延数千公里，潮汐遍及全球；它也有大小不一的波浪，从一厘米到几米高；在更精细的分辨率下，海水必须被视为分子的集合体，其特征长度尺度约为 10^{-8} 厘米。从最小的结构到最大的结构，跨度约为 17 个数量级。 158

总的来说，规模悬殊的事件相互之间的影响很小；他们互不沟通，因此与每个尺度相关的现象可以独立处理。无论是在太平洋里还是在茶壶中，两个相邻水分子间的相互作用都相同。同样重要的是，海浪可以相当准确地被描述为连续流体的扰动（a disturbance of a continuous fluid），可以完全忽略液体的分子结构。物理学中几乎所有实用理论的成功都取决于分离出一些范围有限的长度尺度。如果有必要在流体动力学方程中设定每个水分子的运动方式，那么发展一种海浪的理论将远远超出二十世纪科学的手段。

然而，确实存在一类现象，其中[定义在]长度的多重尺度上的事件具有同等重要的作用。例如，将水在 217 个大气压下加热至沸腾时的行为。在这一压力下，直到温度达到 647 开尔文，水才会沸腾。压力和温度的组合定义了水的临界点，在这里液体和气体之间的区别消失了；在更高的压力下，只有单一、未分化的液相（a single, undifferentiated fluid phase），无论温度升高多少，水都无法沸腾。在临界点附近，水在所有可能的尺度上都会产生密度波动（fluctuation in density）。波动以液滴（drops）的形式出现，液滴中到处散布着气泡（bubbles of gas）。从单个分子到试样的体积，都有各种大小的液滴和气泡。正是在临界点上，最大波动的规模变得无限大，但较小的波动绝不会减少。任何描述临界点附近的水的理论都必须考虑长度尺度的整

个范围。

长度的多重尺度使理论物理和某些其他研究领域的突出问题复杂化了。对于这些问题中的一小部分，我们已经找到了精确解，而对于其他一些问题，即使是最著名的近似解也不能令人满意。在过去的十年中，一种称为重整化群（renormalization group）的新方法被引入来处理具有多重长度尺度的问题。它没有使问题变得容易，但一些抵制所有其他方法的人可能终于会接受这一方法。

重整化群不是描述自然的理论，而是建构理论的一般方法。它不仅适用于位于临界点的流体，也适用于自发磁化温度下的铁磁性材料（ferromagnetic material），或在液体完全混溶的温度下的液体混合物，或在两种金属原子呈有序分布的温度下的合金。其他具有合适形式的问题包括湍流（turbulent flow）、超导性和超流性的转变（onset of superconductivity and of superfluidity）、聚合物的构象（conformation of polymers）以及称为夸克的基本粒子的结合。重整化群的工作似乎证实了一项引人注目的假设，即这些现象中的一些在表面上看起来很不同，而在更深层次上，它们是相同的。例如，流体、铁磁体、液体混合物和合金的临界行为都可以用一种理论来描述。

讨论重整化群的操作最方便的情境是铁磁体或永磁体。铁磁材料有一个临界点，称为居里点（Curie point）或居里温度，这是皮埃尔·居里（Pierre Curie）在世纪之交研究铁磁体的热力学之后提出的。对于铁，居里温度为 1044 K 。在这温度以上，铁没有自发的磁化（spontaneous magnetization）。当铁冷却时，磁化强度保持为零，直到降到居里温度，材料突然磁化。如果温度进一步降低，磁化强度将平稳增加。

在居里点附近，除了磁化之外，铁磁体的一些性质表现得很奇怪。另一个令人感兴趣的性质是磁化率（magnetic susceptibility），或换种说法——小型外加磁场引起的磁化强度变化。温度远高于居里点时，磁化率很低，因为铁无法保持任何的磁化强度；温度远低于居里温度时，磁化率也很低，因为材料已经被磁化，弱的外加磁场不能剧烈改变系统的状态。然而，在接近 1044 K 的温度时，磁化率上升到一个尖峰；而在居里点本身，磁化率变得无限大。 160

铁磁性的最终来源是电子的量子机械自旋（quantum-mechanical spinning of electrons）。由于每个电子都旋转，所以它有一个小的磁偶极矩（magnetic dipole moment）；换句话说，它表现地就像一块磁铁，有一个北极和一个南极。我在这里并不关心电子的自旋如何产生磁矩。要注意的是，自旋和磁矩都可以用一个矢量或箭头来表示，它定义了电子的磁场方向。

真正的铁磁体具有复杂的原子结构，但自旋系统的所有基本性质都可以用一种相当简单的模型来说明。事实上，我将描述一个模型，它不包含原子或其他物质粒子，只包含排列在网格中的自旋矢量。为了简单起见，我将讨论一个二维网格（two-dimensional lattice）：平面中由均匀间隔的线组成的直线网格，网格线的每个纵横交点处都有一个自旋矢量。此外，我将假设每个自旋只能指向两个可能的方向，即「上或下」。当一半以上的自旋指向同一方向时，网格

模型被磁化。磁化强度可以被定义为指向「上」的自旋数量减去指向「下」的自旋数量。

每个电子都有相同的自旋和相同的磁偶极矩。铁磁体与其他材料的区别在于附近自旋之间的耦合 (coupling between nearby spins)，这种耦合使自旋倾向于朝同一方向排列 (line up in the same direction)。这一趋势可以更精确地说明：任何两个相邻的平行自旋的总能量都小于它们反平行 (antiparallel) 时的总能量。造成自旋耦合的相互 / 交互作用 (interaction) 具有较短的范围 (即，相互作用是短程的)，这一点可以反映在模型中：通过指定只有最近邻自旋 (nearest-neighbor) 才能相互耦合。在二维直线网格中，每个自旋受四个最近邻的影响；没有其他自旋对它产生任何直接影响。

根据铁磁体中自旋之间交互作用的性质，我们可以很好地预测：所有的自旋总是平行的，材料总是保持在其最大磁化强度。这是能量最低的状态，在没有任何扰动效应的情况下，它将是更有利的状态。然而，在真正的铁磁体中，有一项扰动无法忽略：原子和电子的热运动 (thermal motion)。在高于绝对零度的任何温度下，固体的热激 (thermal excitations of the solid) 会随机翻转一些自旋，从而使自旋矢量的方向反转，即使反转自旋会使磁体处于更高能量的状态。因此，随着温度的升高，磁化强度降低也就不足为奇了：这种关系仅仅反映了热破坏的增加 (increasing thermal disruption)。令人好奇的是，磁化不是温度的光滑函数，而会在某个有限温度 (居里点) 下突然消失。

「朝均匀自旋方向的趋势」和「由热引入的无序」之间的竞争可以很容易地纳入铁磁体模型。相邻自旋之间的耦合强度由一个数字 K 给出，该数字必须在模型设计中指定。通过使 K 与温度成反比，可以简单地引入热效应。使用适当的测量单位，耦合强度可以设置为对等温度的倒数，关系式为 $K = 1/T$ 。

耦合的强度决定了两个相邻自旋平行的概率。当温度为零时，没有热效应，相邻的自旋肯定是平行的；概率等于 1，且耦合强度为无穷大。在无限温度下，耦合强度降至零，因此自旋根本不相互作用。所以，每个自旋都可以自由地随机选择其方向，并且独立于与其相邻的自旋。两个自旋平行的概率是 $1/2$ ，它们反平行的概率也是 $1/2$ 。当然，我们感兴趣的区域位于温度的两个极端之间，其中相邻自旋 [同向] 排列的概率必须始终在 $1/2$ 和 1 之间。 161

假设有一个大的二维自旋网格，其中有一个自旋被人为地固定为「朝上」。这对其他旋转有什么影响？对四个相邻网格点的自旋的影响很容易想象：因为它们直接与固定自旋耦合，它们指向上的概率大于 0.5。概率偏差 (probability bias) 的程度取决于 K 的值，该值又由温度决定。

较远的自旋与固定自旋没有直接的相互作用，但固定自旋的影响并不只作用在近邻上。因为最近邻自旋往往指向「上」而不是「下」，所以它们在自己的最近邻中产生了类似的偏差。通过这种方式，扰动可以在网格的大面积上传播 (propagate)。单个固定自旋的影响范围可

以通过观察多个自旋的方向来测量，这些自旋与固定自旋的距离都相同。如果将固定自旋的方向从「上」转至「下」会增加远处群体中向下自旋的数量，那么这些自旋就被认为是相关的 (correlated)。可以检测到这种相关性的最大距离称为相关性长度 (correlation length)。距离大于相关长度的区域基本上是独立的。

在非常高温的网格中，相关性长度接近于零。自旋的分布几乎呈随机状，因此上下自旋的平均数量必定相等；换句话说，磁化强度为零 (the magnetization is zero)。随着温度下降 (以及耦合强度的增加)，开始出现较远距离的相关性。它们出现的形式是自旋波动 (spin fluctuation)，或换种说法，是由几个自旋组成的小块 (patches)，每块中的自旋大部分指向同一个方向。从大区域的角度观察，磁化强度仍然为零，但网格的结构与接近无限温度时大不相同。

当温度接近居里点时，相关性长度迅速增长。模型的基本交互作用没有改变；它们仍然只连接相邻的网格点，但长程的序列 / 秩序从短程的力量中涌现 (long-range order has emerged from the short-range forces)。在相关性长度的增长过程中最重要的是，随着自旋波动最大尺寸的增加，较小的波动不会被抑制；它们只是成为了在更大的结构上叠加的 (superimposed) 更精细的结构。最大的波动不是自旋排列得很均匀的区域；它们包括了许多较小的波动，只有当它们中某一朝向的自旋总数量比「另一方向上自旋的总数」多一个时才能被区分开。因此，一个大部分是向上的自旋海洋中可能有一座大部分是向下的自旋岛屿，而「下」自旋岛中央又坐落着一片「上」自旋湖泊，其中又有一处「下」自旋小岛礁。这个过程可以继续到最小的可能程度：一个自旋。

当温度精确等于居里温度时，相关性长度变为无穷大。任意两个自旋都相关，无论它们之间的距离为多大。然而，在所有较小的长度尺度上，波动仍会持续。该系统仍然未磁化，但对小扰动非常敏感。例如，固定一个自旋「向上」会产生一种扰动，这种扰动会在网格中传播，并使整个系统产生净磁化 (a net magnetization)。

在居里温度以下，即使没有外部扰动，系统也会被磁化，但网格的外观不会立即发生变化。小规模波动持续存在；它们是旋转方向相反的湖泊和岛礁的遗迹。仅仅通过观察网格，我们无法检测到磁化。只有当系统进一步冷却时，偏差才会变得明显，因为耦合强度的增加迫使更多的自旋转向大多数 [自旋的方向] (conformity with the majority)。在绝对零度下，完全的一致性得以实现。

在流体中，临界点附近的密度波动与在铁磁体中观察到的自旋方向波动非常相似。然而，在流体中，可以直接观察到在所有可能的长度尺度上存在的波动。当相关长度首次达到几千埃单位 (相当于光的波长) 时，波动开始强烈地散射光 (scatter light strongly)，流体变成乳白色，这一现象称为临界乳光 (critical opalescence)。值得注意的是，当温度更接近临界点，且波动的最大规模变得更大 (毫米或厘米) 时，临界乳光并未减少，表明较小的波动持续存在。同样的现象也发生在自旋系统中，但由于铁磁性材料对光不透明，因此无法轻易证明。然而，

在居里温度附近磁性材料的中子散射中，已检测到铁磁体的临界乳光。

我描述的模型不是我自己的发明。它是德国物理学家威廉·伦茨（Wilhelm Lenz）和欧内斯特·易辛（Ernest Ising）在 1920 年代提出的模型的一个版本，现在被称为易辛模型（Ising Model）。由于耶鲁大学的拉斯·昂萨格（Lars Onsager）在 1944 年精确求解了二维网格上易辛自旋系统的性质，因此我们对该系统的性质有了全面的了解。从那时起，研究者还为其其他几个二维模型找到了解（而三维模型尚未被精确求解）。然而，描述二维系统的问题远非微不足道。在下文中，我将把重整化群的方法应用于二维易辛模型，把它当成是一项仍然悬而未决的问题，昂萨格的求解方案将作为对我结果的检验。 164

解决或理解物理系统的模型意味着什么？在易辛系统的情况下，微观特性从一开始就完全已知，因为它们在建构模型时已被设定好了。我们需要的是从已知的微观性质预测系统宏观性质的方法。例如，给出模型的自发磁化强度、磁化率和相关性长度作为温度函数的公式将大大有助于理解。

在易辛模型中，计算任何给定自旋构型（configuration of the spins）的宏观性质并不特别困难。例如，磁化强度可以简单地通过计数上自旋数和下自旋的数量，然后将两者相减来确定。然而，自旋的任何构型都不能决定系统的宏观性质。相反，所有可能的构型都有助于 [解释] 观察到的特性，每个都与给定温度下的概率成比例。

原则上，宏观性质可以直接被计算为「所有单独贡献的总和」。首先，我们可以发现每个构型的磁化强度，然后是相应的概率。实际磁化强度将通过将每对（pairs）数字相乘并将所有结果相加得到。磁化率和相关性长度可以不用通过太详细的过程来发现。所有这些计算的共同点是需要确定所有可能的自旋构型的概率。一旦概率分布已知，宏观属性就直接能获得。

如上所述，任意两个相邻自旋平行的概率完全由耦合强度 K 决定，我将其定义为温度的倒数。如果孤立的两个相邻自旋平行的概率表示为 p ，那么它们的反平行概率必为 $1 - p$ 。仅从这两个值就可以计算网格中任何特定构型的相对概率。所需要的只是将每个最近邻自旋对（pairs）的独立概率相乘。在每种情况下，当自旋平行时，取概率 p ，当自旋反平行时取 $1 - p$ 。

考虑一个自旋系统，它由四个自旋排列在一个正方形的角上。这样的网格有四个最近邻耦合，对应于正方形的四边。依次考虑每个耦合，并根据自旋是平行还是反平行来分配概率 p 或 $1 - p$ ；然后将四个独立的概率相乘。在所有四个自旋都向上的构型中，所有的四对都平行，因此相对概率由乘积 $p \times p \times p \times p$ 给出。如果三个自旋向上，一个自旋向下，则相对概率为 $p \times p \times (1 - p) \times (1 - p)$ 。

必须对每个自旋构型进行计算；对于四-自旋的系统，共有 16 种构型。最后一步是通过调整每个值将相对概率转换为绝对概率，使所有 16 个值的总和正好等于 1。因为温度决定耦合强度，耦合强度反过来决定 p 和 $1 - p$ 的值，对于每个感兴趣的温度，也必须重复 16 次计算

的整个序列。

这项针对易辛模型的进攻计划雄心勃勃，但不切实际。如果可以计算每个自旋构型的概率，就可以在任何特定温度下评估磁化强度和其他宏观性质。问题在于自旋构型的数量。对于由 11 个自旋组成的系统，每个旋转可以取两个值，可能的构型数为 2^n 种。这个指数函数随着 n 的增加而迅速增长。正如我所提到的，四个自旋有 2^4 ，或 16 种构型。由九个自旋组成的三乘三的块有 512 种构型，四乘四的块有 65,536 种构型。计算的实际极限大约发生在 36 个自旋构成的六乘六的块，其中大约有 7×10^{10} 种构型。

为了确定二维易辛模型的临界性质，需要多大尺寸的网格？阵列必须至少与在相关温度下观察到的最大波动一样大。在相当接近居里点的温度下，以网格间距为单位的相关性长度可能约为 100，最大波动将覆盖约 100^2 ，或 10,000 个网格位。一个大的自旋块（block of spins）有 $2^{10,000}$ 种可能的构型，这个数字略大于 $10^{3,000}$ 。最快的计算机也无法进行这样的计算。即使计算机从宇宙诞生的大爆炸开始就一直在工作，它也不会在这项任务上取得什么重要的进展。 165

在网格的两种特殊情况下，几乎无休止地列举自旋构型的需要可以被绕过。当系统的温度为零时（此时耦合强度为无穷大），除了两种构型之外，其余所有构型都可以忽略。在零度下，一对自旋反平行的概率降为零。因此任何包含一对反平行自旋的构型的概率也降为零。唯一没有至少一个反平行对的构型是所有自旋都向上或向下的构型。网格肯定会表现为其中一种构型，而所有其他构型的概率为零。

在耦合强度为零的无限温度下，概率分布也大大简化。然后，每个自旋都独立于它的邻居，并且它在任何时刻的方向都可以随机选择。结果是网格的每种构型都具有相同的概率。

通过这两条确定概率分布的捷径，精确计算绝对零度和无限温度下易辛模型的性质是一项简单的工作。可接受的近似方法也适用于任何低到足以被视为接近零或高到足以被视为接近无穷大的温度。麻烦的地区介于这两个极端之间：它对应于临界点的区域。直到最近，还没有一种实用而直接的方法来计算任意接近临界点的系统的性质。重整化群提供了这样一种方法。

重整化群方法的本质是将一个大问题分解为一序列更小、更易于管理的阶段（a sequence of smaller and more manageable stages）。与跟踪相关性长度大小区域中的所有自旋不同，长程特性可以从几个包含了许多自旋效应的量（quantities）的行为中推导出来。有几种方法可以做到这一点。我将描述其中一种，块-自旋技术（the block-spin technique）。这种技术将重整化群方法的原理特别清晰地揭示出来。它由芝加哥大学的利奥·卡达诺夫（Leo P. Kadanoff）引入，并被荷兰的代尔夫特理工大学的尼米耶尔（Th. Niemeijer）和范莱文（J. M. J. van Leeuwen）制成了一个实用的计算工具。 167

该方法有三个基本步骤，每个步骤必须重复多次。首先，网格被分为几个自旋块（blocks）；我将使用每边上有三个自旋的方形块，这样每块包含九个自旋。接下来，以某种方式对块中的所有自旋进行平均，并使用通过「平均法」得到的单个新自旋替换整个块 [中的九个自旋]。这

里的求平均可以通过一道简单的程序来完成：遵循多数原则。如果五个或更多的原始自旋向上，则新自旋也向上；否则，它就向下。

这两个操作的结果是创建了一个新网格，其基本间距是旧网格的三倍。在第三步中，通过将所有尺寸缩小 $1/3$ 来恢复原始比例。

这三个步骤定义了重整化群变换。它的作用是从系统中消除所有自旋方向上的波动，这些波动的尺度小于块的大小。根据这里给出的模型中，在少于三个网格单元的范围内，自旋的任何波动都通过对块中的自旋的施以平均法被消去了。这就像一个人通过离焦镜头观察网格，因此较小的特征变得模糊，但较大的特征不受影响。

仅对原始网格的任何一种构型执行此程序是不够的；再一次，我们寻求的是一项概率分布。假设我们只考虑初始网格的一个小区域，它由 36 个自旋组成，这些自旋可以排列在四个块中。这个区域的自旋有 2^{36} ，或大约 700 亿种可能的构型。在应用块-自旋变换后，36 个原始自旋被总共 16 个构型的 4 个块自旋所取代。计算原始 36 次旋转的每个构型的概率恰好落在实用范围内。从这些数字可以很容易地确定 16 种块-自旋构型的概率。计算可以通过将原始网格的所有构型排序为 16 类来完成。在每一类中，块-自旋的构型都会根据「多数原则」进行分类。然后，将原始网格中属于该类别的所有构型的概率相加，便可以找到任何一种构型的块自旋的总概率。

这一过程似乎看起来毫无增益。如果可以计算 36 个自旋的系统的完全概率分布，那么通过将该系统压缩成一个由 4 个块-自旋组成的较小网格，不会让我们学到任何新的东西。然而在临界点附近，仍然需要考虑一个更大的网格，网格中可能有 10,000 个自旋而不是 36 个，并且由于这里的构型太多了，我们不能计算从这个网格产生的块-自旋的概率分布。然而事实证明，有一种方法可以从一小组块-自旋中提取有用信息。这是一种在大范围内观察系统行为的方法，并无需明确处理该区域内所有自旋的构型。

每个块-自旋表示原始网格中的九个自旋。然而，完整的块-自旋集合本身也可以被视为自旋系统，其性质可以通过应用对原始模型而言相同的方法，进行研究。我们可以假设块-自旋之间存在耦合——这取决于温度——进而决定每个可能自旋构型的概率。最初的猜测可能是，块自旋之间的耦合与原始易辛自旋网格中指定的耦合相同，即最近邻相互作用，其强度由参数 K 给出。 K 是温度的倒数。

这种猜测很容易被检验，因为至少一小部分块-自旋系统的构型的概率分布是已知的；它由定义块-自旋的过程中根据原始网格的构型计算得到。令人惊讶的是，上述假设通常是错误的：块-自旋与原始模型中的自旋的耦合强度不同。假设只有相邻的位置相互作用，并且假定它们的耦合强度等于 K ，则〔根据上述假设〕得到的块-自旋构型的概率集是错误的。

如果原始模型的规格不能描述块-自旋系统，那么我们必须发明一些新的耦合集。制定这些新相互作用的指导原则是尽可能准确地再现观测到的概率分布。一般而言，最近邻的耦合

强度必须改变，即 K 必须采用新值。更重要的是，必须引入易辛模型定义中排除的长程耦合。例如，可能需要在正方形的对角线上建立自旋之间的耦合。在三个或四个自旋之间也可能存在直接的相互作用。更大范围的耦合集是可能的。因此，块-自旋可以被看作一个网格系统（a lattice system），但它是一个与原始系统截然不同的系统。值得注意的是，由于基本的耦合具有不同的值，块-自旋网格的温度与初始易辛系统的温度不同。

一旦发现了一组能正确描述块-自旋概率分布的耦合，就可以用它们构造任意大小的网格。新网格的形成方式与原始网格相同，但现在每个位置的自旋概率由新导出的耦合强度决定，而不是由原始易辛模型的单一耦合决定。重整化群的计算现在重新开始，以新的块-自旋系统作为起始网格。再次形成包含九个自旋的块，并且在一些小区域（例如 36 个自旋的阵列）中，发现了每个可能构型的概率。然后，该计算用于定义第二代块-自旋的概率分布，这些块-自旋再次由多数规则形成。对第二代块-自旋的检验表明，耦合强度再次发生变化，因此必须为每个耦合强度第二次提供新值。一旦确定了新值，就可以构建下一代网格系统（第三代），并且可以再次重复整个过程。 168

这种重复操作的要点是，它提供了关于不同但相关的自旋系统行为的信息，在这些系统中，基本长度尺度随着每次迭代而变大。在第一次块-自旋变换之后，最小尺度上的波动涨落已经消除，但是那些稍大的波动——其尺度大约是原始网格间距的三倍——可以被更清楚地看到。在第二次变换后，每个块-自旋表示原始网格的九乘九块中的 81 个自旋，所有小于此大小范围的波动都被平均掉了，只剩下大于九个网格单元的波动。下一次迭代将删除所有刻度在 9 到 27 个网格单位之间的波动，然后下一次迭代将删除 27 到 81 个网格单位之间的波动。最终，在所有尺度上，相关性长度以下的波动都被平均掉了。由此产生的自旋系统只反映了原始易辛系统的长程特性，消除了所有更精细的尺度波动。 169

块-自旋技术的价值甚至可以通过对演化模型的简单目视检查来感知。仅仅观察一下居里温度以下易辛自旋的结构，很少会发现模型是否有轻微的磁化。在这个温度下，[能观察到的]只有一个自旋方向比另一个自旋方向的书目稍微多了一点，许多小尺度的波动掩盖了整体的偏差。然而，在多次应用块-自旋变换后，较小的波动消失了，长程磁化变得明显。

块-自旋变换的许多物理意义可以从自旋之间的耦合变化中找到。在每个阶段，从旧构型推导出新构型的规则往往很复杂，但变化的影响可以用一则非常简单的例子来说明。虽然这些假设不现实，但我将讨论一个模型，其中不引入范围（range）大于原始最近邻相互作用的耦合。构型的唯一变化是调整 K 的值。这相当于温度的变化。此外， K 中的调整将有一个简单的形式：在程序的每个阶段，新网格中的耦合强度将被设置为等于旧网格中耦合强度的平方。如果新耦合表示为 K' ，则由等式 $K' = K^2$ 给出。

假设在某些初始状态下 K 等于 $1/2$ （这意味着在此处使用的假定单位中，温度的初始值为 2）。在作为块-自旋变换产物形成的减薄网格（thinned-out lattice）中， K 将被替换为 K' ，值为 $(1/2)^2$ ，或 $1/4$ 。重复该转换会接下去产生 $1/16$ 、 $1/256$ 等等，这一数列迅速接近零。在

每次迭代中，自旋系统被转换成了一个新系统，该系统不仅具有较薄的网格，而且自旋之间的耦合也较弱。由于 K 就是 $1/T$ ，温度随着每次迭代而升高，网格接近无限温度和随机自旋的极限。

如果初始耦合强度设置为 2（那么温度值为 $1/2$ ），则耦合在计算的每个阶段都会增加。在第一次块-自旋变换后，耦合强度为 4，然后是 16 和 256；最终，耦合强度变得无限大。当然与此同时，温度下降，系统接近零温度状态，所有自旋都对齐。

应该强调的是，通过变换所观察到的并不是温度变化时任何单自旋系统的演化。没有任何东西被加热或冷却。相反，每个阶段都创造了一个新的自旋系统，这个系统以自旋之间不同的耦合为特征。新网格的大尺度或长程行为等同于在不同温度下在原始网格中观察到的行为。

有一个 K 的初始值既不发散到无穷大也不发散到零，即当 $K = 1$ 。由于 1^2 等于 1， K' 始终等于 K ，无论转换重复多少次。当 K 等于 1 时，系统被称为处于一个固定点（a fixed point），当在此点上继续应用重整化群变换，网格的所有基本性质保持不变。实际上，当 $K = 0$ 和 $K = \infty$ 时，也表示不动点，因为零的平方仍然是零，而无穷大的平方仍然是无穷大。然而，零和无穷大并不被认为很重要，而值 $K = 1$ 则对应于临界点。

在对块-自旋技术的讨论中，变换的所有效应都通过一个参数表示：最近邻耦合强度 K （nearest-neighbor coupling strength）。实际上，变换还引入了许多其他参数，每个参数对应于一个较长程的耦合范围。这些参数的所有可能组合都可以通过构造一个虚拟多维空间来用几何方式表示，在该空间中，沿每个维度测量的距离对应于其中一个参数的变化。这个系统的初始状态以及该空间的每个块-自旋的变换，都可以用该参数空间曲面上的一个点来表示。

在重整化群方法的几何描述中，不动点的重要性变得更明显。对于二维易辛系统，参数空间中的曲面具有两个尖峰（peaks）和两个深坑（sinkholes）的丘陵地貌形式。连接山峰的山脊线和连接深刻的沟壑线在马鞍点（saddle point）的中心相接 [见原文 171 页的插图]。一个深坑为 $K = 0$ 固定点；另一个是 $K = \infty$ 的不动点。临界不动点位于鞍座的不稳定平衡点。

系统从一种状态转化到下一种状态的过程可以用一颗弹珠在曲面上滚动的运动来表示。你可以想象一幅延时电影，它会以 1 秒的间隔记录弹珠的位置；然后，每一帧将显示块-自旋变换迭代一次所产生的效应。正是「变换」允许了弹珠的移动，但弹珠的速度和方向完全取决于它所穿过的每个点的曲面坡度。

假设大理石最初放置在山峰附近，仅位于山脊线的一侧。一开始它移动得很快，因为山峰附近很陡，并且沿着鞍座点的大致方向移动。当弹珠接近鞍座时，坡度变得更加平缓，弹珠的速度减慢，但它从未完全停止。此外，因为它始于山脊线的一侧，所以它不会完全到达鞍点；相反，它会 [在接近鞍点时] 转向一侧并开始再次加速，这次是朝着一个深坑滚去。

大理石的轨迹描述了代表易辛自旋系统的点所遵循的路径，因为它反复通过块-自旋方法被变换。刚离开山脊线的初始位置对应于各种耦合参数的初始值，相当于刚好高于或低于临界

温度的温度。根据上述简化示例，仅使用一个参数， K ，其值要么稍微大于 1 或小于 1。将耦合强度设置为 1 相当于将弹珠精确放置在山脊线上。然后它将直接滚向鞍点，即临界固定点。同样，运动起初很快，但随着接近鞍座会逐渐慢下来。然而，在这种情况下，弹珠在两个下降斜坡之间保持平衡。即使经过大量迭代，它仍保持在固定点。

通过将初始值 K 设置为足够接近临界值，可以使参数空间中鞍形曲线上的轨迹尽可能接近固定点。在这里考虑的示例中，当 K 的临界值为 1 时， K 的初始值可能为 .9999，在其发生明显变化之前，可以将其平方好几次。因此，在转向高温的深坑之前，弹珠的轨迹非常接近临界固定点。

通过检验许多这样的轨迹，曲面本身的地形可以在鞍点周围的小区域内被绘制出来。曲面的坡度斜率决定了系统如何接近固定点以及如何偏离固定点。知道了斜率，就可以计算出系统的性质如何随着初始耦合强度和初始温度的变化而变化。这正是为理解临界现象而寻求的信息。