点积与向量归一化，本质是"观察者眼中的向量分解/向量投影" 二维空间，两个相互垂直的向量作基准，就能观察/分解完成

对一个基准向量，求投影也可以看作求"相似度"

$P\,Q$ 二维点积 $P(p_1, p_2) \cdot Q(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2$

（有了用每维度基准组成的 x 维坐标，点积就可以直接用相应维基观察到的"量"相乘，再把所有 x 维结果相加就行！！！

不用再用模 + cos 角的形式啦！

观察者让计算更方便，完成几何→代数的转换，

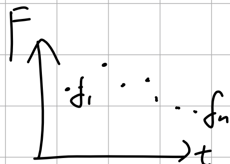
$P\,Q$ 三维点积，$P(p_1\ p_2\ p_3)$ $Q(q_1\ q_2\ q_3)$

$P\,Q$ n 维点积，$P(p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_n)$ $Q(q_1 \cdots q_n)$

点积 ⇒ 函数

对于一个 n 维向量 $F(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)$

每一维都有一个值 f_x

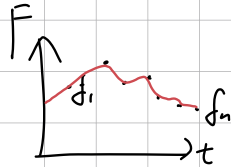


如果我们把它描在时间轴上

就得到了一个分布图（见右）

其实也就是把每一维 看作 每一时刻.

每一维的值的变化，可看作随时间的变化
若维数无穷多，描的点密集且无突变，
值的分布就由离散转为连续
其实就变为了函数 $F(t)$
⇒ 函数可看作无穷维的向量

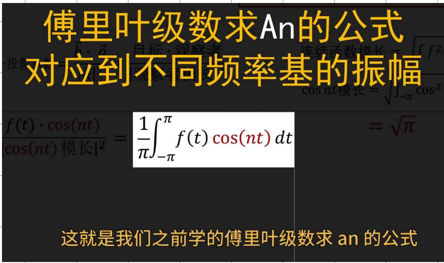


同样，函数（无穷维向量）也可用基维向量去观察
并判断相似度
我们用 $\cos\omega t$ 作观察者，点积由"x维各自相乘再相加"变为了先相乘 针对范围求积分

$f(t)\cdot\cos\omega t$ $\qquad$ $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\omega t$

我们的基维都要归一化，以保证观察者结果。
对 $\vec{a}$ 来说，观察结果就是 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$ (归一)
归一化就是求模，也就是自己点积，自己再开根
因为自己与自己夹角0，$\cos 0=1$（自己最像自己）
对 $\cos\omega t$ 归一即 $\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\cos\omega t\cdot\cos\omega t} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\omega t} = \sqrt{\pi}$
二范数
则观察结果为 $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\omega t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\omega t$
(先归一再除模长)
傅里叶级数中 a_n

它本质上反应 $f(t)$ 与 $\cos\omega t$ 的点积 ⇒ 相似度.



↓若 $w_{(n)}$ 表示一系列频率

则 a_n 表示与对应与每个对应频率的相似度

本质上是将 $f(t)$ 在频谱上进行了分解！

(看看与每个 w 谁更像

若第 n 个对应的频谱分量最多

则 a_n 的幅值就最大)

观察者从 $\cos nt$ (离散) → e^{iwt} (连续)

同理结果为 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)e^{iwt}}{\text{模}^2}$

$e^{iwt} = \cos wt + i\sin wt$ 模 $=\sqrt{\cos^2+\sin^2} = 1$ 完美基准，不用归一！

对复数来说 模 $=\sqrt{a^2+b^2}$

$a+bi$

其实 $=\sqrt{(a+bi)(a-bi)}$

不一般！ 正常模是 $\sqrt{\text{自己点积自己}}$

但复数模是 $\sqrt{\text{自己积自己共轭}}$

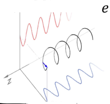
多个负号，我们把观察者也取共轭好了.

观察者换成 e^{-iwt} $= \cos wt - i\sin wt$

变成 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt$ 傅里叶变换.

e^{iwt} 是旋转螺旋的

能充分反应各频率分量

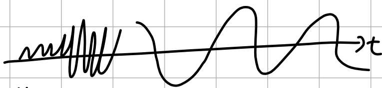


w 是旋转的频率. 以半径为1来旋转

$e^{-i\omega t}$ 观察结果 $X(\omega)$就包含了不同频率分量幅值$|X(\omega)|$
还包含幅角信息(相角信息)

但！ $e^{-i\omega t}$ 这个观察者 以无限范围旋转

面对

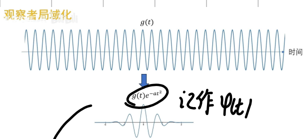


你问：像不像？

不同时间相似度其实不同！
但$e^{-i\omega t}$的观察结果$X(\omega)$
却并不能体现/分辨

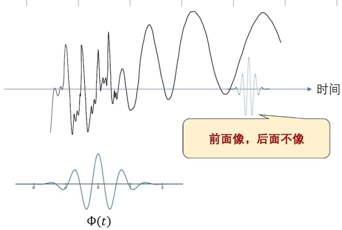
只能加衰减函数，让函数只存在在一个范围，再观察就好了。

观察者改造计划。



记作 $\psi(t)$

这样时间轴上就不是无穷无尽的了。



$\psi(t)$只有一小段

平移它

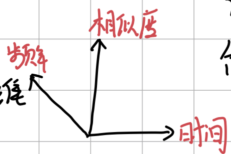
$\psi(\frac{t-b}{a})$ 变b，ψ就跑起来
平移因子

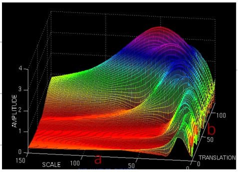
变a，ψ就伸缩改变频率 尺度因子
a越小，频率越高

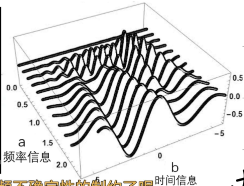
让它顺着时间轴巡逻跑，
告诉我每一小段的结果

$\psi(\frac{t-b}{a})$

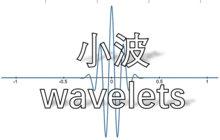
得到结果三维





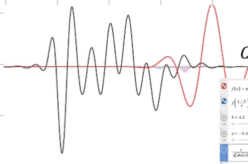


是不是说就解决了时频不确定性的制约了呢 —— 其实数学本质上不能

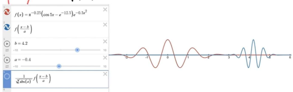


我们的宗旨：

在时间轴上作局域化的观察者！



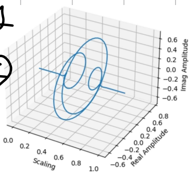
$$C_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\Phi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$



观察者变瘦的同时呢就会变高了啊

归一化让不同小波的能量一致

但其实小波函数也是复函数 $\Longrightarrow$



$$C_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\boxed{\Phi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt$$

小波变换

因此类比 $e^{i\omega t}$ 情况

给观察者加共轭，

得到真正的小波变换

这里乘以的是小波函数的共轭函数