Отчет по лабораторной работе №5: Модель ‘Хищник-жертва’

дисциплина: Математическое моделирование

Карташова Алиса Семеновна, НФИбд-03-18

Содержание

Список иллюстраций

1 Введение

1.1 Цель работы

Онсновная цель работы - изучить модель “хищник-жертва” и построить график зависимости численности популяций хищников и жертв

1.2 Задачи работы

Выделим основные задачи работы:

- Изучить жесткую модель хищник-жертва
- Изучит модель хищник-жертва с малым изменением
- Построить жесткую модель зависимости численности популяций хищников и жертв

2 Терминология. Условные обозначения

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - *модель Лотки-Вольтерры*. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника несущественны
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

2.1 Жесткая модель Лотки-Вольтеры

Математическа модель

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

- x - число жертв
- y - число хищников
- a - коэффициент, описывающий скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников

- c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Особенности модели:

- Вероятность взаимодействия жертвы и хищника пропорциональна как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy).
- Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников.

Математический анализ жесткой модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние(B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

2.2 Стационарное состояние

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке:

$$x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{d}$$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

При малом от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

2.3 Малое изменение модели

При малом изменении модели:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \frac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

Прибавленые к правым частям малые члены, учитывают конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв и т.п.

Вывод о периодичности, справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

В зависимости от вида малых поправок f и g возможны 3 варианта:

1. Равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.
2. Система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию.
3. В системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения)

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи:

Вариант 57

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.17x(t) + 0.09x(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = 0.69y(t) - 0.08x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 3, y_0 = 12$. Найдите стационарное состояние системы.

3.2 Решение

Коэффиценты:

Коэффициент естественной смертности хищников: a= 0.17 Коэффициент естественного прироста жертв b= 0.69 Коэффициент увеличения числа хищников c= 0.09 Коэффициент смертности жертв d= 0.08

Начальные значения:

- $x_0 = 3$
- $y_0 = 12$

Код на Julia:

```
using  Gadfly
using Plots
using DifferentialEquations

a= 0.17;
b= 0.69;
c= 0.09;
d= 0.08;
x0 = 3;
y0 =12;

    function syst(du,u,p,t)
        du[1] = -a*u[1]+c*u[1]*u[2]
        du[2] = b*u[2]-d*u[1]*u[2]
    end

u0 = [x0, y0];
tspan = (0, 100);


prob = ODEProblem(syst, u0, tspan);
sol = solve(prob, RK4(),reltol=1e-6, timeseries_steps = 0.05);

N = length(sol.u)
    J = length(sol.u[1])
    U = zeros(N, J)

    for i in 1:N, j in 1:J
```

```
        U[i,j] = sol.u[i][j]
    end

set_default_plot_size(30cm, 20cm)
Gadfly.plot(x = U[:,1], y = U[:,2])

Plots.plot(sol)
```

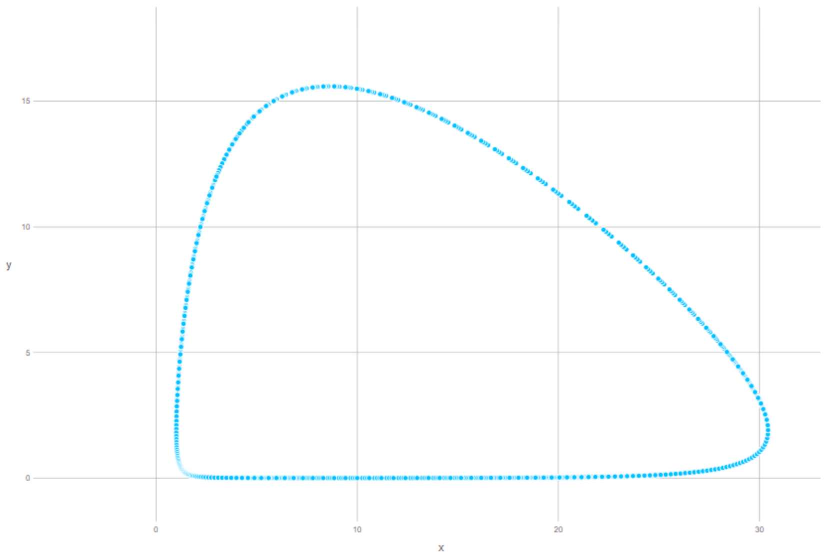

Рис. 3.1: График зависимости численности хищников от численности жертв

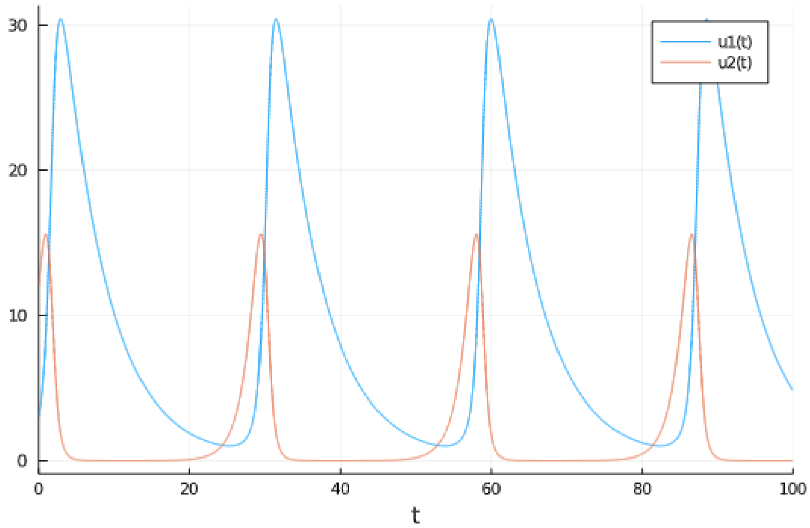

Рис. 3.2: Графики изменения численности хищников и численности жертв

- u1(t) - изменение численности хищников
- u2(t) - изменение численности жертв

4 Выводы

Мы изучили модель “хищник-жертва” и построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв