Задача об эпидемии

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из *N* особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через *S(t).* Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их *I(t).* А третья группа, обозначающаяся через *R(t)* – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(\mathrm{t}) > \mathrm{I}^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа *S(t)* меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, \text{ если } I(\mathrm{t}) > \mathrm{I}^* \\ 0, \text{ если } I(\mathrm{t}) \le \mathrm{I}^* \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{ если } I(\mathrm{t}) > \mathrm{I}^* \\ -\beta I, \text{ если } I(\mathrm{t}) \le \mathrm{I}^* \end{cases} \tag{2}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{3}$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия .Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни *R(0)=0*, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$

соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \le I^*$ и $I(0) > I^*$

Лабораторная работа № 5

Задание

Придумайте свой пример задачи об эпидемии, задайте начальные условия и коэффициенты пропорциональности. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

а) если $I(0) \le I^*$

б) если $I(0) > I^*$

Пример 4.1.

На одном небольшом острове вспыхнула эпидемия свинки. Известно, что из всех проживающих на острове (*N=2000*) в момент начала эпидемии (*t=0*) число заболевших свинкой людей (являющихся распространителями инфекции) *I(0)=100,* А число здоровых людей с иммунитетом к болезни *R(0)=0*. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени S*(0)=N-I(0).* Считаем, что данный случай соответствует случаю, когда $I(0) \le I^*$. Тогда получим следующую динамику изменения числа людей из каждой группы (рис. 7.1):

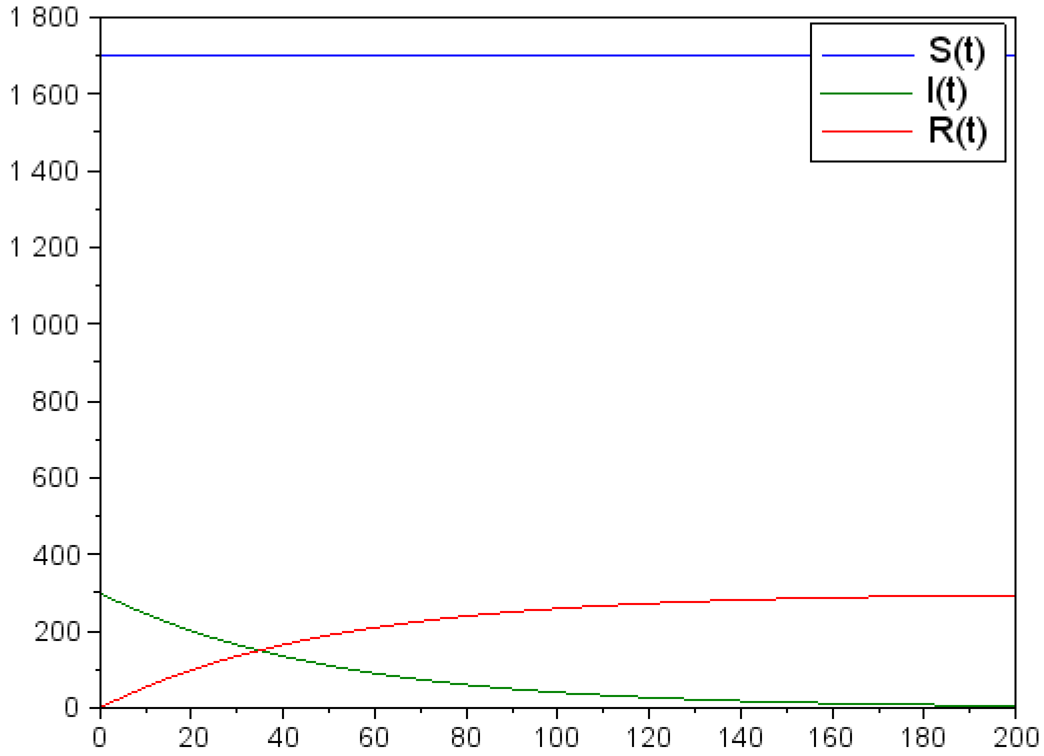

Рисунок 7.1. Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I\left(0\right)\leq I^{*}$, с начальными условиями *I(0)=100, R(0)=0,* S(0)=1900. Коэффициенты $\alpha=0.01, \beta=0.02$.

Код в среде Scilab

```
a = 0.01;// коэффициент заболеваемости
b = 0.02;//коэффициент выздоровления
N = 2000;// общая численность популяции
I0 = 300; // количество инфицированных особей в начальный момент
времени
S0 = N - I0 - R0; // количество восприимчивых к болезни особей в
начальный момент времени
R0 = 0; // количество здоровых особей с иммунитетом  в начальный
момент времени

// случай, когда I(0)<=I*
function dx=syst(t, x)
dx(1) = 0;
dx(2) = - b*x(2);
dx(3) = b*x(2);
endfunction

t0 = 0;
```

```
x0=[S0;I0;R0]; //начальные значения

t = [0: 0.01: 200];

y = ode(x0, t0, t, syst);

plot(t, y); //построение динамики изменения числа особей в каждой из трех групп

hl=legend(['S(t)';'I(t)';'R(t)']);
```