Модель гармонических колебаний

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Уравнение (1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения (1.1) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (2) необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

Уравнение второго порядка (2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \tag{4}$$

Начальные условия (3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

Пример 1.

Построение фазового портрета гармонических колебаний без затухания

Код в среде Scilab:

```
//Параметры осциллятора
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
//w - частота
//g - затухание
w = 1.00;
g = 0.00;
//Правая часть уравнения f(t)
function f=f(t)
f = sin(0.0.* t);
endfunction
///Вектор-функция f(t, x)
///для решения системы дифференциальных уравнений
///x' = y(t, x)
///где x - искомый вектор
function dx=y(t, x)
dx(1) = x(2);
dx(2) = -w.* w.* x(1) - g.* x(2) - f(t);
endfunction
//Точка, в которой заданы
//начальные условия
t0 = 0;
//Вектор начальных условий
//x(t0) = x0
x0 = [-1; 1];
//Интервал на котором будет
//решаться задача
t = [0: 0.05: 50];
//Решаем дифференциальные уравнения
//с начальным условием x(t0) = x0
//на интервале t
//с правой частью, заданной y
//и записываем решение в матрицу x
x = ode(x0, t0, t, y);
//Количество столбцов в матрице
n = size(x, "c");
```

```
//Переписываем отдельно
//x в y1, x' в y2
for i = 1: n
y1(i) = x(1, i);
y2(i) = x(2, i);
end
//Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x')
plot(y1, y2);
xgrid();
```

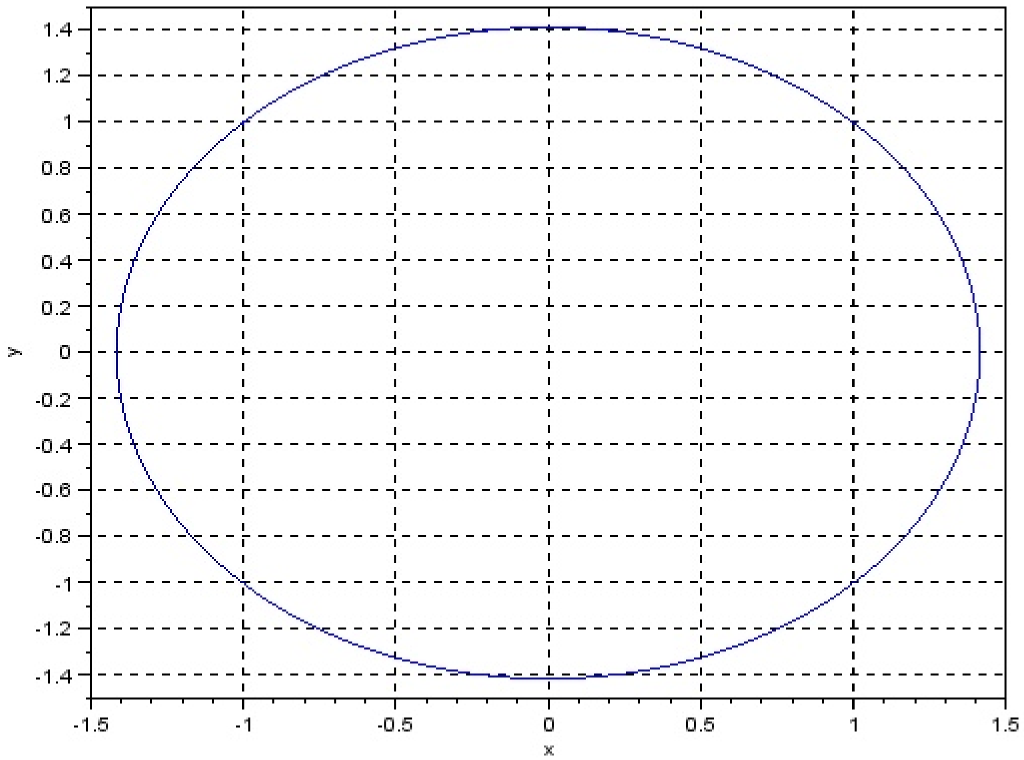

Рисунок 1.1. Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 1$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$ (скорость)

Лабораторная работа № 3

Задание

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания (2)
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.

3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

***Примечание*:** Параметры γ и ω_0 задаются самостоятельно

Вопросы к лабораторной работе

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний
2. Дайте определение осциллятора
3. Запишите модель математического маятника
4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка
5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?