Отчет по лабораторной работе №3: Модель боевых действий

дисциплина: Математическое моделирование

Карташова Алиса Семеновна, НФИбд-03-18

Содержание

List of Figures

1 Введение

1.1 Цель работы

Онсновная цель работы - изучить и построить простейшие модели боевых действий(модели Ланчестера)

1.2 Задачи работы

Выделим основные задачи работы:

1. Рассмотреть три случая ведения боевых действий;
2. Построить график изменения числености двух армий для случая боевых действий между регулярными войсками;
3. Построить график изменения числености двух армий для случая ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

1.3 Объект и предмет исследования

Объектом исследований для данной лабораторной работы являются модели Ланчестера. Предметом исследования можно назвать различные случаи боевых моделей, а так же простейшие модели с постоянными коэфицентами

2 Терминология. Условные обозначения

Рассмотрим три случая ведения боевых действий:

1. Между регулярными войсками
2. С участием регулярной армии и партизанских отрядов
3. Между партизанскими отрядами

2.1 Первый случай

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

- $-a(t)x(t) - h(t)y(t)$ - потери, не связанные с боевыми действиями. $a(t), h(t)$ - характеризуют степень влияния различных факторов на потери(болезни, дезертирство и т.д)
- $b(t), c(t)$ - коэффиценты, указывающие на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно.

2.2 Второй случай

В этом случае считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на неизвестной территории, пропорционален не только численности армейских соединенй, но и численности самих партизан

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

2.3 Третий случай

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

2.4 Простейшие модели(с постоянными коэффицентами)

2.4.1 Первый случай

Факторы, влияющие на модель:

- b, c - постоянны
- Не учитваются потери, не с вязанные с боевыми действиями(коэффиценты $a(t), c(t)$)
- Не учитывается возможность подхода подкрепления:
- x, y - численность противостоящих армий

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -b(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t) \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$cxdx = bydy$

$cx^2 - by^2 = C$

Влияние коэффицента C:

- $C < 0$ - армия y выигрывает
- $C > 0$ - армия x выигрывает
- $C = 0$ - истребление обеих армий(требуется бесконечно большое время)

Вывод : для борьбы с вдвое большей армией нужно в 4 раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным- в девять раз и т.д.

2.4.2 Второй случай

Модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -b(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt}$ - темп изменения численности рнегулярных войск
$\frac{dy}{dt}$ - темп изменения численности партизанских войск
Уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0$$

Введем начальные данные:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

Влияние коэффицента C_1:

- $C_1 < 0$ - партизаны побеждают
- $C_1 > 0$ - регулярная армия выигрывает
- $C_1 = 0$ - истребление обоих войск(требуется бесконечно большое время)

Чтобы партизаны одержали победу, необходимо увеличить коэффицент c и повысить начальную численность. Это увеличение должно расти пропорционально второй степени $x(0)$(начальная численность регулярных войск).

Вывод : Следовательно регулярные войска находятся в более выгодном положении,так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи:

Вариант 57

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$, $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 44 150 человек, а в распоряжении страны У армия численностью в 19 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

3.2 Решение

Построим графики изменения численности войск армии Х и армии У для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0,57x(t) - 0,91y(t) + sin(5t) + 1 \\ \frac{dx}{dt} = -0,31x(t) - 0,2y(t) + cos(3t) + 2 \end{cases}$$

Начальные данные:

- x_0 = 44150

- y_0 = 19000

Коэффиценты:

- $a = -0,57, h = -0,2$ - потери, не зависящие от боевых действий
- $b == -0,91, c = -0,31$ - потери на поле боя
- $P(t) = sin(5t) + 1, Q(t) = cos(3t) + 2$- подход подкрепления

Код на Julia

```
#Подключение необходимых пактов для графиков и решения дифф.ур.
#using Pkg
using Plots
using DifferentialEquations
#тема для графиков
theme(:solarized)
#Численность первой армии
x0 = 44150;
#Численность второй армии
y0 = 19000;
#констнстанта, характеризующая потери, не связанные с боевыми действиями для армии X
 a = 0.57;
#констнстанта, характеризующая потери, не связанные с боевыми действиями для армии X
 h = 0.2;
 #Эффективность боевых действий армии y
 b = 0.91;
 #эффективность боевых действий армии x
 c = 0.31;
 #Функции, характеризующая возможность подхода подкрепления к армии x и y
 P(t) = sin(5t)+1;
 Q(t) = cos(3t)+2;
```

```
 # Система дифференциальных уравнений
 function model!(du, u, p, t)
       du[1]=-a*u[1]-b*u[2]+P(t)
       du[2]=-c*u[1]-h*u[2]+Q(t)
       end
#Вектор начальных значений
u0 = [x0, y0]
#Кортеж с и интервалом интегрирования
tspan = (0.0,1.0);

#Решение системы
 prob = ODEProblem(model!,u0,tspan)
 sol = solve(prob, saveat = 0.05);

#График
  pl = plot(sol,title = "Модель сражения регулярных войск",
  label = ["Армия X" "Армия Y"],
   xlabel = "Время(t)",
   ylabel= "Численность армии",
   lw = 3)
#Вывод графика на экран
   display(pl)
#Сохранение графика

 savefig(pl,"1.png")
```

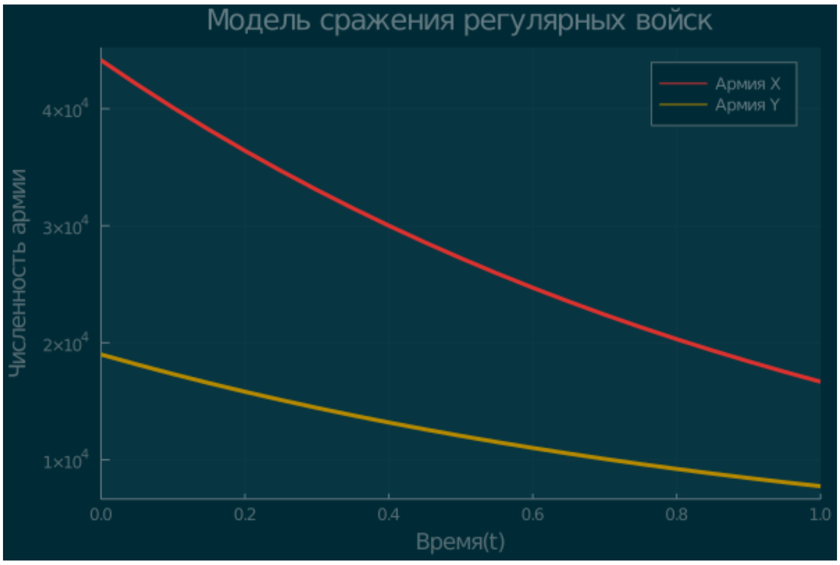

Figure 3.1: Модель боевых действий 2-х регулярных армий

Модель боевых действий 2-х регулярных армий

Вывод: армия X выйграет со значительными потерями(более половины от численности войск)

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0,39x(t) - 0,86y(t) + sin(2t) + 1 \\ \frac{dx}{dt} = -0,39x(t)y(t) - 0,21y(t) + cos(2t) + 1 \end{cases}$$

Начальные данные:

- x_0 = 44150
- y_0 = 19000

Коэффиценты:

- $a = 0,39, h = 0,21$ - потери, не зависящие от боевых действий
- $b == 0,86, c = 0,39$ - потери на поле боя
- $P(t) = sin(2t) + 1, Q(t) = cos(2t) + 1$- подход подкрепления

Код на Julia

```
#Подключение необходимых пактов для графиков и решения дифф.ур.
#using Pkg
#using Plots
#using DifferentialEquations
#тема для графиков
theme(:lime)
#Численность первой армии
x0 = 44150;
#Численность второй армии
y0 = 19000;
#констнстанта, характеризующая потери, не связанные с боевыми действиями для армии X
 a = 0.39;
#констнстанта, характеризующая потери, не связанные с боевыми действиями для армии X
 h = 0.21;
 #Эффективность боевых действий армии y
 b = 0.86;
 #эффективность боевых действий армии x
 c = 0.39;
 #Функции, характеризующая возможность подхода подкрепления к армии x и y
 P(t) = sin(2t)+1;

 Q(t) = cos(2t)+1;

 # Система дифференциальных уравнений
 function model2!(du, u, p, t)
      du[1]=-a*u[1]-b*u[2]+P(t)
      du[2]=-c*u[1]*u[2]-h*u[2]+Q(t)
      end
```

```
#Вектор начальных значений
u0 = [x0, y0]
#Кортеж с и интервалом интегрирования
tspan = (0.0,1.0);

#Решение СДУ
 prob = ODEProblem(model2!,u0,tspan)
 sol = solve(prob, saveat = 0.05);

#график
  pl = plot(sol,title = "Модель сражения регулярных войск против партизанских отрядов",
  label = ["Армия X" "Армия Y"],
   xlabel = "Время(t)",
   ylabel= "Численность армии",
    titlefontsize = 10,
   lw = 3)

   display(pl)
#Сохранение графика

 savefig(pl,"model2.png")
```

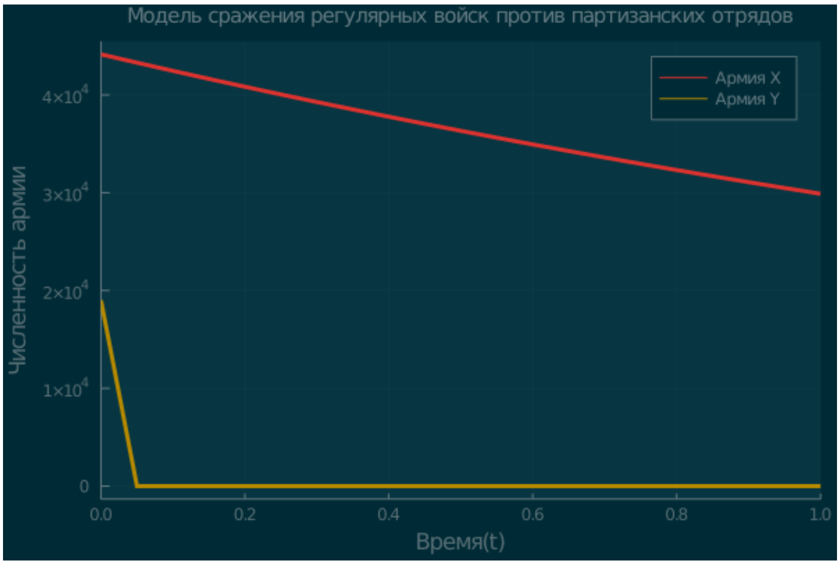

Figure 3.2: Модель боевых действий регулярной армии против партизанских войск

Модель боевых действий регулярной армии против партизанских войск

Вывод: армия X выйграет с небольшими потерями

4 Выводы

Мы изучили модели боевых действий и построили графики простейших моделей