

Sprawozdanie

Metoda Halleya wyznaczania zer wielomianów

Alicja Przeździecka

mail : alicja.przezdziecka.stud@pw.edu.pl

Spis treści

Sprawozdanie	1
Metoda Halleya	3
Matematyczny opis	3
Opis funkcji implementujących metodę	4
Opis funkcji horner	4
Opis funkcji halley_method	4
Opis funkcji convergace_fun	5
Opis funkcji convergence_table	6
Opis skryptu_testujacego	7
Opis GUI pomocnego w analizie wpływu krotności pierwiastków na zbieżności metody Halleya	7
Przykłady	8
Przykład 1	8
Przykład 2	10
Przykład 3	13
Przykład 4	15
Przykład 5	17
Przykład 6	19
Przykład *	21
Podsumowanie	22

Metoda Halleya

Matematyczny opis

Metoda Halleya to iteracyjna metoda numeryczna stosowana do znajdowania pierwiastków funkcji $f(x)$. Jest to metoda trzeciego rzędu zbieżności, co oznacza, że przy spełnieniu warunków zbieżności błąd przybliżenia maleje w każdym kroku proporcjonalnie do sześciastku błędu z poprzedniego kroku.

Algorytm iteracyjny jest zdefiniowany wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - f''(x_k) \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}}$$

gdzie:

$f'(x_k)$ to pierwsza pochodna funkcji,

$f''(x_k)$ to druga pochodna funkcji.

Opis funkcji implementujących metodę

Opis funkcji horner

Funkcja 'horner' oblicza wartości wielomianu oraz jego dwóch pierwszych pochodnych w zadanych punktach, korzystając z algorytmu Hornera.

Dane wejściowe:

- x: Wektor punktów, w których obliczane będą wartości wielomianu oraz jego pochodnych.
- a: Wektor współczynników wielomianu, podanych w kolejności od najwyższej do najniższej potęgi.

Dane wyjściowe:

- F: Macierz wynikowa, w której poszczególne kolumny przedstawiają:
 1. x: Punkty wejściowe.
 2. f: Wartości wielomianu w kolejnych punktach.
 3. f1: Wartości pierwszej pochodnej wielomianu w kolejnych punktach.
 4. f2: Wartości drugiej pochodnej wielomianu w kolejnych punktach.

Przeznaczenie funkcji:

Funkcja 'horner' pozwala na szybkie i precyzyjne obliczenie wartości wielomianu oraz jego dwóch pierwszych pochodnych dla dowolnej liczby punktów, dlatego została wykorzystana do tego zadania w funkcji 'halley_method'.

Opis funkcji halley_method

Funkcja 'halley_method' implementuje metodę Halleya, która służy do znajdowania pierwiastków wielomianu. Metoda ta jest iteracyjną techniką poszukiwania miejsc zerowych funkcji, gdzie kolejne przybliżenie (x_{k+1}) jest miejscem zerowym hiperboli przybliżającej wielomian w punkcie, który był poprzednim przybliżeniem (x_k).

Dane wejściowe:

- a: Wektor współczynników wielomianu, podanych w kolejności od najwyższej do najniższej potęgi.
- x0: Punkt początkowy iteracji.
- max_iter: Maksymalna liczba iteracji, po której metoda przerywa działanie.
- eps: Tolerancja błędu między kolejnymi przybliżeniami (opcjonalne, domyślnie ustawiona na $2 * 10^{-16}$).

Dane wyjściowe:

- xn: Przybliżony pierwiastek wielomianu uzyskany metodą Halleya.
- iter: Liczba iteracji wykonanych w celu znalezienia pierwiastka.
- convergence: Flaga logiczna (wartość true/false) wskazująca, czy metoda zbiegła do rozwiązania w ustalonej maksymalnej liczbie iteracji.

Przeznaczenie funkcji:

Funkcja `halley_method` pozwala na szybkie i precyzyjne znajdowanie pierwiastków wielomianu przy użyciu metody Halleya, która cechuje się szybszą zbieżnością w porównaniu do metody Newtona. Dla poprawnej pracy wymagane jest odpowiednie dobranie punktu początkowego (x_0) szczególnie w przypadku wielomianów o wielu pierwiastkach (lub wielokrotnych pierwiastkach). Funkcja przerywa działanie między innymi, gdy pierwsza pochodna w punkcie ma wartość 0 (wzór na kolejne przybliżenia wymaga dzielenia przez pierwszą pochodną).

Opis funkcji `convergence_fun`

Funkcja `'convergence_fun'` analizuje zbieżność metody Halleya dla różnych początkowych przybliżeń, obliczając liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia pierwiastka wielomianu w zadanych tolerancjach. Funkcja korzysta z metody Halleya zaimplementowanej w `'halley_method'`.

Dane wejściowe:

- `alfa`: Wektor pierwiastków wielomianu, do których porównywane są obliczone pierwiastki.
- `a`: Wektor współczynników wielomianu, przekazywany do funkcji `halley_method2`.
- `x01`: Początkowa wartość dla zakresu początkowych przybliżeń.
- `x0n`: Końcowa wartość dla zakresu początkowych przybliżeń.
- `step`: Krok pomiędzy kolejnymi początkowymi przybliżeniami.
- `max_iter`: Maksymalna liczba iteracji dla funkcji `'halley_method'`.
- `epsConvergence`: Tolerancja błędu pomiędzy obliczonymi pierwiastkami a pierwiastkami w wektorze `alfa` (opcjonalne, domyślnie $2 * 10^{-16}$).
- `epsHalley`: Tolerancja przekazywana do funkcji `'halley_method'`, określająca precyzję zbieżności (opcjonalne, domyślnie $2 * 10^{-16}$).

Dane wyjściowe:

- `x0`: Wektor początkowych przybliżeń, generowany w zakresie od `x01` do `x0n` z krokiem `step`.
- `y`: Wektor odpowiadający liczbie iteracji potrzebnych do osiągnięcia pierwiastka dla każdego początkowego przybliżenia:
 - Jeśli metoda Halleya zbiegła do pierwiastka w wektorze `alfa` w granicach tolerancji `epsConvergence`, element wektora `y` odpowiadający analizowanemu przybliżeniu będzie równy liczbie iteracji zwracanej przez funkcję `'halley_method'`.
 - Jeśli metoda nie osiągnie zbieżności, odpowiadająca wartość będzie wynosiła -1.

Przeznaczenie funkcji:

Funkcja `convergence_fun` służy do analizy zachowania metody Halleya w zależności od początkowych przybliżeń. Pozwala zidentyfikować obszary, w których metoda dobrze zbiega, oraz miejsca, gdzie może nie być efektywna. Pozwala również na sprawdzenie

czy zmiana tolerancji błędu pozwala uzyskać lepsze wyniki dla danego wielomianu. Wykorzystana do narysowania wykresu w GUI.

Opis funkcji `convergence_table`

Funkcja `convergence_table` generuje tabelę umożliwiającą szeroką analizę dokładności wyznaczania pierwiastków wielomianów za pomocą metody Halleya, implementowanej w funkcji `halley_method`.

Dane wejściowe:

1. **alfa**: Wektor pierwiastków dokładnych, które służą jako punkty odniesienia do oceny wyników obliczeń.
2. **a**: Wektor współczynników wielomianu, podawany w kolejności od najwyższej do najniższej potęgi.
3. **x0**: Wektor punktów początkowych, dla których metoda Halleya będzie obliczać miejsca zerowe.
4. **eps** (opcjonalne): Tolerancja błędu pomiędzy kolejnymi iteracjami przekazywana do funkcji `halley_method`. Domyślnie wynosi $2 * 10^{-16}$.

Dane wyjściowe:

T: Tablica wynikowa, w której poszczególne wiersze przedstawiają szczegółowe informacje dotyczące przebiegu obliczeń dla każdego punktu początkowego x_0 .

Kolumny tabeli zawierają:

1. **x0**: Punkt początkowy iteracji.
2. **xn**: Wyznaczone miejsce zerowe po zakończeniu działania metody Halleya.
3. **Liczba iteracji**: Liczba iteracji potrzebnych do osiągnięcia zbieżności.
4. **Dokładny pierwiastek**: Najbliższy dokładny pierwiastek z wektora alfa względem wyznaczonego x_n .
5. **Błąd bezwzględny**: Różnica pomiędzy dokładnym pierwiastkiem a x_n .
6. **Wartość funkcji w x0x_0x0**: Obliczona wartość wielomianu w punkcie początkowym x_0 .
7. **Wartość pierwszej pochodnej w x_0** : Obliczona wartość pierwszej pochodnej wielomianu w x_0 .
8. **Wartość drugiej pochodnej w x_0** : Obliczona wartość drugiej pochodnej wielomianu w x_0 .

Przeznaczenie funkcji:

Funkcja `convergence_table` została zaprojektowana w celu oceny skuteczności i precyzji metody Halleya dla dowolnych punktów początkowych x_0 . Dostarczając szczegółowych informacji, pozwala na analizę:

- Zbieżności iteracji do pierwiastka.
- Liczby iteracji wymaganych do osiągnięcia rozwiązania.
- Dokładności obliczeń w odniesieniu do pierwiastków dokładnych.
- Wpływu wartości funkcji i jej pochodnych na zbieżność metody.

Opis skryptu_testującego

Chcąc korzystać ze skryptu testującego należy go uruchomić, a kolejne wartości T1 – T6 będą wynikowymi tabelami pokazującymi działanie funkcji `convergence_table` dla konkretnych wielomianów.

Opis GUI pomocnego w analizie wpływu krotności pierwiastków na zbieżności metody Halleya

W GUI wykorzystuję funkcję `'convergence_fun'`. Funkcja zwraca wektor początkowych przybliżeń oraz ilość iteracji dla każdego przybliżenia, które posłużą do narysowania wykresu zależności.

Elementy GUI:

- Lista umożliwiająca wybór jednego z 6 wielomianów poddanych analizie w dalszej części sprawozdania.
- Suwak umożliwiający wybór tolerancji błędu dla funkcji `'halley_method'`
- Suwak umożliwiający wybór tolerancji błędu dla funkcji `'convergence_fun'`
- Dwa wykresy pokazujące zależność pomiędzy punktem początkowym z zakresu $(-10, 10)$, a ilością iteracji potrzebną do osiągnięcia zbieżności w funkcji `'halley_method'` dla wielomianu w i jego kwadratu w^2 (pomocne w zauważeniu czy wielokrotność pierwiastków wpływa na metodę Halleya, kwadrat wielomianu obliczany za pomocą wbudowanej funkcji `'conv'`)
- Tabela zawierająca pierwiastki wielomianu (niektóre są wyznaczone analitycznie, a niektóre wyznaczone wbudowaną funkcją `'roots'`)

Działanie:

- Wybieramy wielomian, który chcemy analizować (przed pierwszą zmianą wielomianu, analizowany jest pierwszy wielomian z listy)
- Wybieramy wykładnik tolerancji dla funkcji `'halley_method'` (przed pierwszą zmianą jest ustawiony domyślnie na $2 * 10^{-16}$).
- Przesuwając suwakiem tolerancji błędu różnicy pierwiastka dokładnego a wyznaczonego aktualizujemy wykres. Wartość aktualnego ustawienia będzie wyświetlana w podtytule wykresu.

Przykłady

Dla każdego z 6 przykładów będę rozważać w razie możliwości punkty początkowe iteracji, które są:

- miejscami zerowymi,
- punktami położonymi blisko miejsc zerowych,
- Punktami, gdzie pierwsza pochodna przyjmuje wartość 0,
- Punktami, gdzie druga pochodna przyjmuje wartość 0,
- Losowe dalej oddalone punkty od miejsc zerowych

Przykład 1.

Wielomian: $w(x) = 8x^3 - 12x$. Pierwiastki wielomianu w: $0, \left(\frac{3}{2}\right)^{0.5}, -\left(\frac{3}{2}\right)^{0.5}$ (wszystkie pojedyncze).

do funkcji tworzącej tabelę zostały przekazane dokładne wartości pierwiastków

1	2	3	4	5	6	7	8
x0 - przybliżenie początkowe	xn - wyznaczone miejsce zerowe	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy dokładnym root a xn	f(x0)	f1(x0)	f2(x0)
0	0	1	0	0	0	-12	0
-1.2247	-1.2247	1	-1.2247	0	2.1756e-15	24.0000	-58.7878
1.2247	1.2247	1	1.2247	0	-2.1756e-15	24.0000	58.7878
-0.7071	-0.7071	1	-1.2247	0.5176	5.6569	2.6645e-15	-33.9411
0.7071	0.7071	1	1.2247	0.5176	-5.6569	2.6645e-15	33.9411
0.7000	0	8	0	0	-5.6560	-0.2400	33.6000
0.9000	1.2247	5	1.2247	0	-4.9680	7.4400	43.2000
1	1.2247	5	1.2247	2.2204e-16	-4	12	48
10	1.2247	8	1.2247	2.2204e-16	7880	2388	480

Rozważmy kolejne grupy punktów x_0 :

- Punkt startowy iteracji to miejsce zerowe: dobre uwarunkowanie, zbieżność w 1 iteracji. Widzimy wady w algorytmie Hornera, który wylicza niedokładną wartość funkcji w punktach $x_0 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

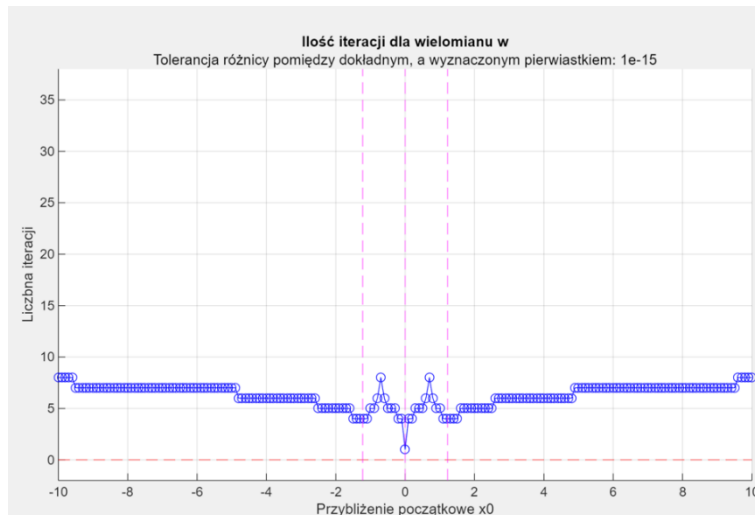
1	2	3	4	5	6	7	8
x0 - przybliżenie początkowe	xn - wyznaczone miejsce zerowe	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy dokładnym root a xn	f(x0)	f1(x0)	f2(x0)
0	0	1	0	0	0	-12	0
-1.2247	-1.2247	1	-1.2247	0	2.1756e-15	24.0000	-58.7878
1.2247	1.2247	1	1.2247	0	-2.1756e-15	24.0000	58.7878

- Punkt startowy iteracji to punkt, gdzie $w' = 0$ (możliwe ekstremum funkcji): zdecydowanie punkt nie może być punktem startowym dla metody Halleya, błąd 0.5 jest znaczący. Metoda Halleya powinna przerwać pracę w momencie, gdy $w' = 0$, ale wyznaczona wartość w' jest większa niż ustalony zakres zera (liczbę równą 0 funkcja uznaje, jeśli $liczba < 2e - 16$) i z tego powodu funkcja 'halley_method' kontynuuje pracę, ale tylko podczas jednej iteracji.

-0.7071	-0.7071	1	-1.2247	0.5176	5.6569	2.6645e-15	-33.9411
0.7071	0.7071	1	1.2247	0.5176	-5.6569	2.6645e-15	33.9411
0.7000	0	8	0	0	-5.6560	-0.2400	33.6000

Już nawet dla punktu 0.7 (względnie bliskiego omawianym ekstremom) otrzymujemy poprawny wynik w 8 iteracjach.

- Poza punktami szczególnymi, na które należy uważać, wielomian w ma wiele punktów startowych, dla których metoda jest zbieżna w małej liczbie iteracji (tolerancja rzędu 10^{-15} pozwala na uzyskanie zbieżności w każdym z pokazanych na poniższym wykresie punktów)



Wnioski:

- Wybranie punktu startowego w miejscu zerowym prowadzi do dobrych wyników.
- Wybranie punktu startowego w miejscu ekstremum może prowadzić do wyznaczenia ekstremum, a nie miejsca zerowego.

Przykład 2.

Wielomian $w(x) = x^8 - 30x^6 + 273x^4 - 820x^2 + 576$. Pierwiastki wielomianu w: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ (wszystkie pojedyncze).

1	2	3	4	5	6	7	8
x_0 - przybliżenie	p_{xn} - wyznaczone	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	$f(x_0)$	$f_1(x_0)$	$f_2(x_0)$
1	1	1	1	0	0	-720	792
2	2	1	2	0	0	720	648
3	3	1	3	0	0	-1680	-4232
4	4	1	4	0	0	10080	49752
-1	-1	1	-1	0	0	720	792
-2	-2	1	-2	0	0	-720	648
-3	-3	1	-3	0	0	1680	-4232
-4	-4	1	-4	0	0	-10080	49752
0	0	0	1	1	576	0	-1640
1.5026	2	15	2	0	-203.0334	0.0261	1.8132e+03
2.5903	3.0000	15	3	8.8818e-16	329.1976	-0.1043	-3.2610e+03
3.6787	4	15	4	0	-1.3361e+03	0.1940	1.6658e+04
0.7707	1	6	1	0	179.1087	-811.7050	0.0097
2.1180	2	4	2	0	88.0408	759.4659	-0.0126
3.3154	3.0000	7	3	8.8818e-16	-696.9127	-2.5207e+03	1.1632
0.7000	1.0000	4	1	1.1102e-16	236.2755	-803.0378	-244.2617
0.9000	1	5	1	0	75.4025	-782.3938	452.8307
10	4	9	4	0	72648576	63075600	47325960

Rozważmy kolejne grupy punktów x_0 :

- Punkt startowy iteracji to miejsce zerowe: zbieżność w 1 iteracji. Dla punktów całkowitych algorytm Hornera nie ma problemów z wyznaczaniem dokładnych wartości.

1	2	3	4	5	6	7	8
x_0 - przybliżenie	p_{xn} - wyznaczone	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	$f(x_0)$	$f_1(x_0)$	$f_2(x_0)$
1	1	1	1	0	0	-720	792
2	2	1	2	0	0	720	648
3	3	1	3	0	0	-1680	-4232
4	4	1	4	0	0	10080	49752
-1	-1	1	-1	0	0	720	792
-2	-2	1	-2	0	0	-720	648
-3	-3	1	-3	0	0	1680	-4232
-4	-4	1	-4	0	0	-10080	49752

- Punkt startowy iteracji to punkt, gdzie $w' = 0$ (możliwe ekstremum funkcji):

Roots Fewer roots Appr

$x = 0$

$$x = -\sqrt{\frac{15}{2} - \frac{43(1+i\sqrt{3})}{4\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}} - \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}}$$

$$x = \sqrt{\frac{15}{2} - \frac{43(1+i\sqrt{3})}{4\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}} - \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{15}{2} - \frac{43(1-i\sqrt{3})}{4\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}} - \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}}$$

$$x = \sqrt{\frac{15}{2} - \frac{43(1-i\sqrt{3})}{4\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}} - \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + \frac{43}{\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}} + \sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}\right)}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + \frac{43}{\sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}} + \sqrt[3]{100+3i\sqrt{7723}}\right)}$$

Roots

$x = 0$

$x \approx -1.5026$

$x \approx 1.5026$

$x \approx -2.5903$

$x \approx 2.5903$

$x \approx -3.6787$

$x \approx 3.6787$

Widzimy, że tylko jeden punkt $x_0 = 0$ jest punktem rzeczywistym, więc analizę można przeprowadzić dla 0 i wartości przybliżonych za pomocą narzędzia Wolfram.

0	0	0	1	1	576	0	-1640
1.5026	2	15	2	0	-203.0334	0.0261	1.8132e+03
2.5903	3.0000	15	3	8.8818e-16	329.1976	-0.1043	-3.2610e+03
3.6787	4	15	4	0	-1.3361e+03	0.1940	1.6658e+04

Analogicznie jak w poprzednim przykładzie dla $w' = 0$ otrzymujemy ekstremum, a nie miejsce zerowe funkcji. Dla punktów bliskich ekstremom otrzymujemy względnie dużą liczbę iteracji, ale błędy przybliżeń nie są na dużym poziomie.

- Punkt startowy iteracji to punkt, gdzie $w'' = 0$ (możliwy punkt przegięcia):

Roots

$$x = -\sqrt{\frac{75}{14} - \frac{1803(1+i\sqrt{3})}{28\sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}} - \frac{1}{28}(1-i\sqrt{3})}$$

$$x = -\sqrt{\frac{75}{14} - \frac{1803(1+i\sqrt{3})}{28\sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}} - \frac{1}{28}(1-i\sqrt{3})}$$

$$x = -\sqrt{\frac{75}{14} - \frac{1803(1-i\sqrt{3})}{28\sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}} - \frac{1}{28}(1+i\sqrt{3})}$$

$$x = \sqrt{\frac{75}{14} - \frac{1803(1-i\sqrt{3})}{28\sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}} - \frac{1}{28}(1+i\sqrt{3})}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1}{14}\left(75 + \frac{1803}{\sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}} + \sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}\right)}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{14}\left(75 + \frac{1803}{\sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}} + \sqrt{32080+7i\sqrt{98613923}}\right)}$$

Roots

$$x \approx -0.77068$$

$$x \approx 0.77068$$

$$x \approx -2.1180$$

$$x \approx 2.1180$$

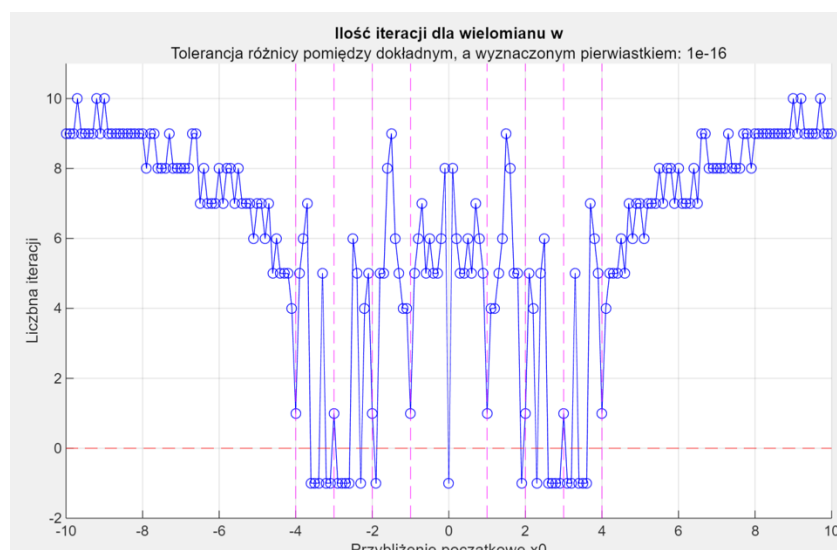
$$x \approx -3.3154$$

$$x \approx 3.3154$$

Analogicznie jak dla pierwszej pochodnej rozważymy punkty bliskie wyznaczonym analitycznie. Wyznaczone wartości w'' nie są na tyle małe, aby znacząco wpłynąć na wynik, ponieważ liczba iteracji oraz błąd są na zadowalającym poziomie.

0.7707	1	6	1	0	179.1087	-811.7050	0.0097
2.1180	2	4	2	0	88.0408	759.4659	-0.0126
3.3154	3.0000	7	3	8.8818e-16	-696.9127	-2.5207e+03	1.1632

Poza punktami szczególnymi, na które należy uważać wielomian ma też niewielkie problemy z punktami położonymi w pobliżu miejsc zerowych (szczególnie pomiędzy kilkoma miejscami zerowymi)



Wnioski:

- Wybranie punktu startowego w miejscu zerowym prowadzi do dobrych wyników.
- Wybranie punktu startowego w miejscu ekstremum może prowadzić do wyznaczenia ekstremum, a nie miejsca zerowego.
- Mimo wysokiego stopnia wielomianu metoda Halleya zbiega do miejsca zerowego w około 10 iteracjach w dużej ilości punktów.
- Punkty położone wewnątrz przedziałów pomiędzy pierwiastkami są mniej pewnymi kandydatami na miejsca zerowe niż punkty położone poza tymi przedziałami.

Przykład 3.

Wielomian $w(x) = x^3 - 2x + 2$.

Pierwiastki wielomianu w (wszystkie pojedyncze, ale są pierwiastki zespolone):

Real root A

$$x = -\frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{57}}}{3^{2/3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{3(9-\sqrt{57})}}$$

Complex roots Cartesian form A

$$x = \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{57}}}{2 \times 3^{2/3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3(9-\sqrt{57})}} + i \left(\frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{57}}}{2 \sqrt[3]{3}} - \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9-\sqrt{57}}} \right)$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{57}}}{2 \times 3^{2/3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3(9-\sqrt{57})}} + i \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9-\sqrt{57}}} - \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{57}}}{2 \sqrt[3]{3}} \right)$$

1	2	3	4	5	6	7	8
x0 - przybliżenie początkn - wyznaczone miejsc	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	f(x0)	f1(x0)	f2(x0)	
-1.7693 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	2	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	-1.7764e-15 + 0.0000e+00i	7.3912 + 0.0000i	-10.6158 + 0.0000i
0.8846 + 0.5897i	0.8846 + 0.5897i	2	0.8846 + 0.5897i	3.5108e-16	4.4409e-16 + 1.1102e-15i	-0.6956 + 3.1303i	5.3079 + 3.5385i
0.8846 - 0.5897i	0.8846 - 0.5897i	2	0.8846 - 0.5897i	3.5108e-16	4.4409e-16 - 1.1102e-15i	-0.6956 - 3.1303i	5.3079 - 3.5385i
-0.8165 + 0.0000i	-0.8165 + 0.0000i	1	-1.7693 + 0.0000i	0.9528	3.0887 + 0.0000i	-2.2204e-16 + 0.0000e+00i	-4.8990 + 0.0000i
0.8165 + 0.0000i	0.8165 + 0.0000i	1	0.8846 + 0.5897i	0.5937	0.9113 + 0.0000i	-2.2204e-16 + 0.0000e+00i	4.8990 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	8	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	2.0000 + 0.0000i	-2.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.8846 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	36	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	0.9230 + 0.0000i	0.3478 + 0.0000i	5.3079 + 0.0000i
0.8846 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	36	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	0.9230 + 0.0000i	0.3478 + 0.0000i	5.3079 + 0.0000i
1.0632 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	12	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	1.0754 + 0.0000i	1.3912 + 0.0000i	6.3792 + 0.0000i
1.0632 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	12	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	1.0754 + 0.0000i	1.3912 + 0.0000i	6.3792 + 0.0000i

Rozważmy kolejne grupy punktów x_0 :

- Punkt startowy iteracji to miejsce zerowe (lub dla zespolonych wartości dokładnego pierwiastka zostały wyznaczone za pomocą funkcji wbudowanej 'roots', dla rzeczywistego podana dokładna wartość): zbieżność w 2 iteracjach. Wartości funkcji lekko zaburzone, błąd rzędu 10^{-15} . Błąd samego wyznaczania pierwiastka również jest mały (znaczenie ma tylko pierwiastek podany dokładnie, czyli pierwszy w kolejności, ponieważ funkcja 'roots' wyznacza pierwiastki przybliżone)

1	2	3	4	5	6	7	8
x0 - przybliżenie początkn - wyznaczone miejsc	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	f(x0)	f1(x0)	f2(x0)	
-1.7693 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	2	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	-1.7764e-15 + 0.0000e+00i	7.3912 + 0.0000i	-10.6158 + 0.0000i
0.8846 + 0.5897i	0.8846 + 0.5897i	2	0.8846 + 0.5897i	3.5108e-16	4.4409e-16 + 1.1102e-15i	-0.6956 + 3.1303i	5.3079 + 3.5385i
0.8846 - 0.5897i	0.8846 - 0.5897i	2	0.8846 - 0.5897i	3.5108e-16	4.4409e-16 - 1.1102e-15i	-0.6956 - 3.1303i	5.3079 - 3.5385i

- Punkt startowy iteracji to punkt, gdzie $w' = 0$ (możliwe ekstremum funkcji) $x_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$: Analogicznie jak w przykładzie 1. Błędy są znaczące i tego rodzaju punkty nie powinny być stosowane jako początkowe przybliżenie dla metody Halleya.

-0.8165 + 0.0000i	-0.8165 + 0.0000i	1	-1.7693 + 0.0000i	0.9528	3.0887 + 0.0000i	-2.2204e-16 + 0.0000e+00i	-4.8990 + 0.0000i
0.8165 + 0.0000i	0.8165 + 0.0000i	1	0.8846 + 0.5897i	0.5937	0.9113 + 0.0000i	-2.2204e-16 + 0.0000e+00i	4.8990 + 0.0000i

- Punkty próbujące przybliżyć wartości zespolonych pierwiastków: (na tej analizie nie można oprzeć konkretnych wniosków, ponieważ porównujemy wynik do również przybliżonego wyniku wbudowanej funkcji):

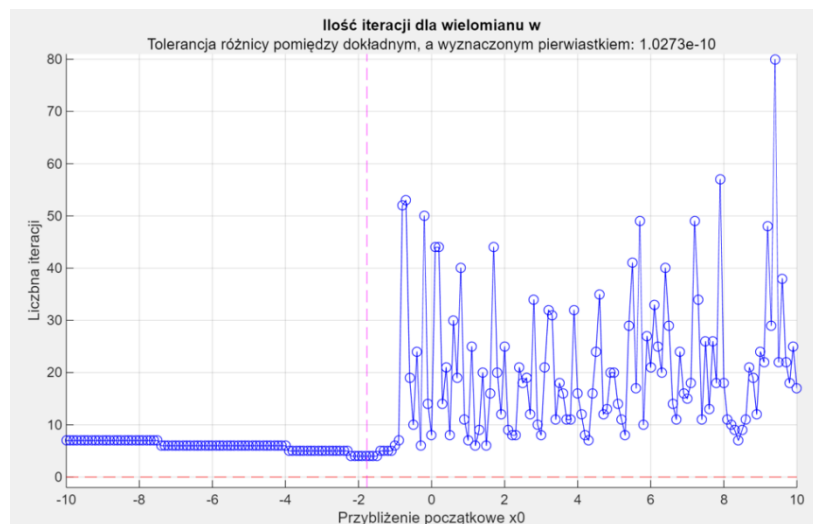
0.8846 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	36	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	0.9230 + 0.0000i	0.3478 + 0.0000i	5.3079 + 0.0000i
0.8846 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	36	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	0.9230 + 0.0000i	0.3478 + 0.0000i	5.3079 + 0.0000i
1.0632 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	12	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	1.0754 + 0.0000i	1.3912 + 0.0000i	6.3792 + 0.0000i
1.0632 + 0.0000i	-1.7693 + 0.0000i	12	-1.7693 + 0.0000i	2.2204e-16	1.0754 + 0.0000i	1.3912 + 0.0000i	6.3792 + 0.0000i

Punkty przybliżane wartością rzeczywistą z liczby zespolonej (dwa pierwsze) potrzebują dużej liczby iteracji, ale błędy są niewielkie.

Analogicznie dla przybliżenia modułem z liczby zespolonej (dwa kolejne) liczba iteracji jest znacząca, a błąd analogicznie mały.

Pragnę jeszcze raz zaznaczyć, że powyższe wartości nie mogą świadczyć o zachowaniu metody Halleya w bliskim otoczeniu pierwiastków zespolonych.

- Dla rzeczywistych punktów startowych metoda Halleya nie daje najlepszych wyników, ponieważ otrzymujemy błąd na poziomie 10^{-10} oraz bardzo dużą liczbę iteracji.



Wnioski:

- Wybranie punktu startowego w miejscu zerowym prowadzi do dobrych wyników.
- Wybranie punktu startowego w miejscu ekstremum może prowadzić do wyznaczenia ekstremum, a nie miejsca zerowego.
- Wielomian niskiego stopnia, jeśli zawiera pierwiastki zespolone może nie być dobrze uwarunkowany pod względem wyznaczania miejsc zerowych metodą Halleya.

Przykład 4.

Wielomian $w(x) = (x - 1)(x - 1.001)(x - 1.002) = x^3 - 3.003x^2 + 3.006x - 1.003$.

Pierwiastki wielomianu w (pojedyncze, blisko położone): 1, 1.001, 1.002.

1	2	3	4	5	6	7	8	
x0 - przybliżenie	p _{xn} - wyznaczone	n	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	f(x ₀)	f ₁ (x ₀)	f ₂ (x ₀)
1	1.0000	2	1	1.4810e-13	-2.2204e-16	-4.4409e-16	-0.0060	
1.0010	1.0000	9	1	1.0751e-07	-2.0000e-09	-3.0000e-06	-8.8818e-16	
1.0020	1.0000	37	1	2.9259e-08	-4.0000e-09	-6.6613e-16	0.0060	
1.0004	1.0000	9	1	2.4396e-07	-4.5511e-10	-1.9908e-06	-0.0035	
1.0016	1.0000	9	1	3.0291e-07	-3.5449e-09	-1.9908e-06	0.0035	
10	1.0030	100	1.0020	0.0010	728.7570	242.9460	53.9940	
8	1.0030	17	1.0020	0.0010	342.8530	146.9580	41.9940	
2	1.0030	13	1.0020	0.0010	0.9970	2.9940	5.9940	
4	1.0030	15	1.0020	0.0010	26.9730	26.9820	17.9940	
1.0030	1.0030	1	1.0020	1.0000e-03	0	9.0000e-06	0.0120	
-9.6000	1.0000	22	1	1.6381e-07	-1.1914e+03	337.1436	-63.6060	

Rozważmy kolejne grupy punktów x_0 :

- Punkt startowy iteracji to miejsce zerowe (lub miejsce zerowe i potencjalny punkt przegięcia):

Dla 1: punkt ten jest jednocześnie punktem, w którym $w \cong 0$ i $w' \cong 0$, dlatego metoda Halleya kończy działanie po dwóch iteracjach, zwracana wartość nie jest dokładna.

Dla 1.001: punkt przyjmuje $w \cong 0$, $w' \cong 0$, $w'' \cong 0$ metoda Halleya kończy działanie po 9 iteracjach (więcej, ponieważ $w'(1.001)$ dalej oddalone od dokładnego 0 niż $w'(1)$, zwracana wartość również niedokładna.

Dla 1.002: tylko w i w' bliskie 0, dlatego liczba iteracji większa (37) i błąd również duży.

1	2	3	4	5	6	7	8	
x0 - przybliżenie	p _{xn} - wyznaczone	n	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	f(x ₀)	f ₁ (x ₀)	f ₂ (x ₀)
1	1	0	1	0	0	0	0	-0.0026
1.0010	1.0013	100	1.0010	3.0000e-04	-3.0000e-10	4.0000e-07	0.0034	
1.0030	1.0013	100	1.0010	3.0000e-04	1.5300e-08	1.9200e-05	0.0154	

- Punkt startowy iteracji to punkt, gdzie $w' = 0$ (możliwe ekstremum funkcji)

Punkty są na tyle blisko miejsc zerowych, że nie zauważymy tu różnicy w zachowaniu

Roots

$x \approx 1.00042$

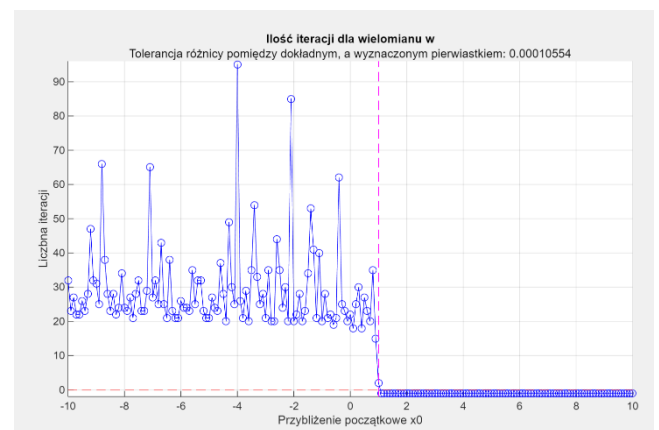
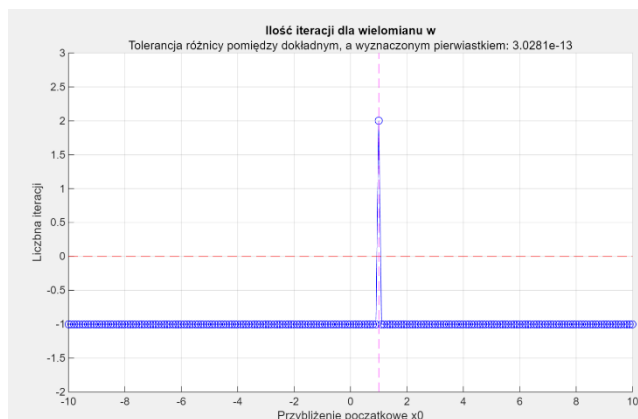
$x \approx 1.00158$

1.0004	1.0000	9	1	2.4396e-07	-4.5511e-10	-1.9908e-06	-0.0035
1.0016	1.0000	9	1	3.0291e-07	-3.5449e-09	-1.9908e-06	0.0035

- Dla pozostałych wartości można zauważyć, że liczba iteracji rośnie podczas oddalania się od miejsc zerowych, ale dokładność nie jest osiągnięta nawet w przypadku 100 iteracji (błąd rzędu 10^{-3} lub większy).

10	1.0030	100	1.0020	0.0010	728.7570	242.9460	53.9940
8	1.0030	17	1.0020	0.0010	342.8530	146.9580	41.9940
2	1.0030	13	1.0020	0.0010	0.9970	2.9940	5.9940
4	1.0030	15	1.0020	0.0010	26.9730	26.9820	17.9940
1.0030	1.0030	1	1.0020	1.0000e-03	0	9.0000e-06	0.0120
-9.6000	1.0000	22	1	1.6381e-07	-1.1914e+03	337.1436	-63.6060

- W ogólności wyznaczanie pierwiastków wielomianu w nie powinno się odbywać za pomocą tej metody.



Wnioski:

- Bliskie położenie miejsc zerowych, ekstremów i punktów przegięcia skutkuje złymi wynikami metody Halleya nawet dla punktów startowych będącymi miejscami zerowymi.
- Niski stopień wielomianu nie gwarantuje zbieżności metody.

Przykład 5.

Wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$. Pierwiastki wielomianu w (oba podwójne): $-3, 2$.

1	2	3	4	5	6	7	8
0 - przybliżenie p	xn - wyznaczone n	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	f(x0)	f1(x0)	f2(x0)
-3	-3	0	-3	0	0	0	50
2	2	0	2	0	0	0	50
-0.5000	-0.5000	0	-3	2.5000	39.0625	0	-25
-1.9434	-3.0000	17	-3	1.5245e-08	17.3611	24.0563	3.5527e-15
0.9434	2.0000	18	2	3.5372e-09	17.3611	-24.0563	7.1054e-15
4	2.0000	20	2	6.2459e-09	196	252	218
-4	-3.0000	18	-3	1.9380e-08	36	-84	122
10	2.0000	21	2	1.1701e-08	10816	4368	1298
2.0001	2.0000	10	2	4.5942e-09	2.5001e-07	0.0050	50.0060
-3.0001	-3.0000	10	-3	1.6321e-08	2.5001e-07	-0.0050	50.0060

Rozważmy kolejne grupy punktów x_0 :

- Punkt startowy iteracji to miejsce zerowe i/lub ekstremum:
Punkty, które są pierwiastkiem i ekstremum: przetrwanie funkcji w wyniku działania warunku $w' = 0$ i wyznaczany dokładny pierwiastek
Punkt, który jest ekstremum, ale nie jest miejscem zerowym: również przetrwanie funkcji, ale wyznaczone ekstremum, duży błąd.

1	2	3	4	5	6	7	8
0 - przybliżenie p	xn - wyznaczone n	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	f(x0)	f1(x0)	f2(x0)
-3	-3	0	-3	0	0	0	50
2	2	0	2	0	0	0	50
-0.5000	-0.5000	0	-3	2.5000	39.0625	0	-25

- Punkt startowy iteracji to punkt (dokładna wartość przekazana do funkcji), gdzie $w'' = 0$ (możliwy punkt przegięcia): wyznaczone punkty blisko, ale nie z pełną dokładnością.

-1.9434	-3.0000	17	-3	1.5245e-08	17.3611	24.0563	3.5527e-15
0.9434	2.0000	18	2	3.5372e-09	17.3611	-24.0563	7.1054e-15

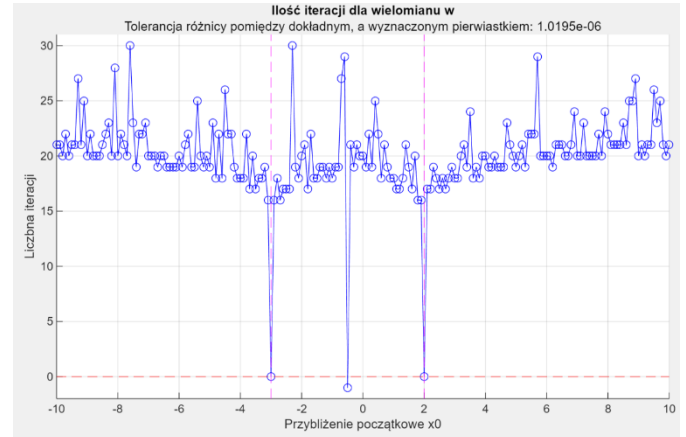
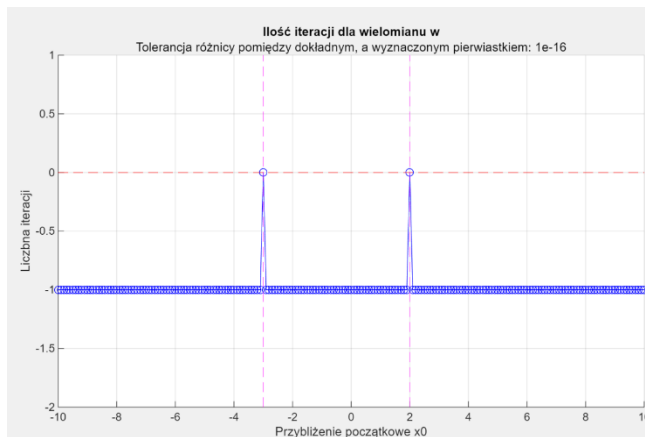
- Pozostałe punkty: podobne zachowanie jak w punkcie przegięcia

4	2.0000	20	2	6.2459e-09	196	252	218
-4	-3.0000	18	-3	1.9380e-08	36	-84	122
10	2.0000	21	2	1.1701e-08	10816	4368	1298
2.0001	2.0000	10	2	4.5942e-09	2.5001e-07	0.0050	50.0060
-3.0001	-3.0000	10	-3	1.6321e-08	2.5001e-07	-0.0050	50.0060

Na wykresie znajdującym się po prawej stronie punkt, który pozostał poniżej poziomej przerywanej osi to punkt, w którym osiągnięte jest ekstremum, a dwa punkty leżące na wspomnianej osi to miejsca zerowe, które są jednocześnie ekstremami.

Wnioski:

- Punktami, na które trzeba uważać są zdecydowanie miejsca zerowe niepokrywające się z ekstremami wielomianu.



- Widzimy zauważalny wpływ krotności pierwiastków. Już dwukrotne pierwiastki powodują dużo większe błędy w metodzie Halleya oraz większą liczbę iteracji (około 20-30)
- W przykładzie 1., gdzie wielomian był stopnia 3 o jednokrotnych pierwiastkach zbieżność zachodziła w maksymalnie 10 iteracjach na rozważanym przedziale, a problematyczne punkty potrzebowały 15 iteracji.
- Wyznaczone pierwiastki metodą Halleya, przyjmującą za punkt początkowy punkt przegięcia, nie są dokładne.

Przykład 6.

Wielomian $w(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Pierwiastki wielomianu w (jednokrotne): 1,2,3.

1	2	3	4	5	6	7	8
x0 - przybliżenie	p _{xn} - wyznaczone	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	f(x ₀)	f ₁ (x ₀)	f ₂ (x ₀)
1	1	1	1	0	0	2	-6
2	2	1	2	0	0	-1	0
3	3	1	3	0	0	2	6
1.4226	2	37	2	0	0.3849	-8.8818e-16	-3.4641
2.5774	2.0000	38	2	1.3323e-15	-0.3849	-4.4409e-16	3.4641
0	1	6	1	0	-6	11	-12
0.5000	1.0000	5	1	2.2204e-16	-1.8750	5.7500	-9
10	3	8	3	0	504	191	48
-2	1	8	1	0	-60	47	-24
-3	1	7	1	0	-120	74	-30
-1.0000e-03	1.0000	5	1	2.2204e-16	-6.0110	11.0120	-12.0060
1.9000	2	5	2	0	0.0990	-0.9700	-0.6000

Rozważmy kolejne grupy punktów x_0 :

- Punkt startowy iteracji to miejsce zerowe: pełna dokładność i maksymalna szybkość zbieżności. ($w'' = 0$ w przypadku $x = 2$ nie wpływa na otrzymany wynik)

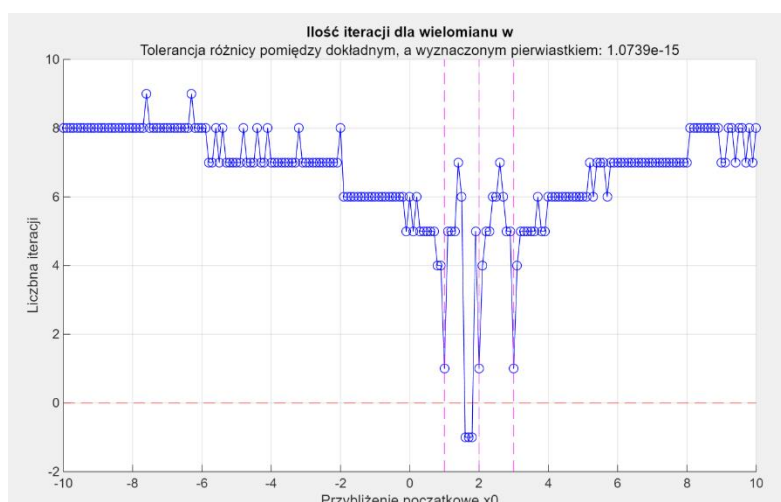
1	2	3	4	5	6	7	8
x_0 - przybliżenie	p_{xn} - wyznaczone	Liczba iteracji	Dokładny root	Różnica pomiędzy	$f(x_0)$	$f_1(x_0)$	$f_2(x_0)$
1	1	1	1	0	0	2	-6
2	2	1	2	0	0	-1	0
3	3	1	3	0	0	2	6

- Punkt startowy iteracji to punkt (dokładna wartość przekazana do funkcji), gdzie $w' = 0$ (możliwe ekstremum): duża liczba iteracji (37-38), ale zaskakująco udaje się uzyskać zbieżność z bardzo małym błędem (0 lub 10^{-15}).

1.4226	2	37	2	0	0.3849	-8.8818e-16	-3.4641
2.5774	2.0000	38	2	1.3323e-15	-0.3849	-4.4409e-16	3.4641

- Dla wartości bliskich miejscom zerowym i losowym punktom: nie ma większych błędów ani problemów ze zbieżnością.

0	1	6	1	0	-6	11	-12
0.5000	1.0000	5	1	2.2204e-16	-1.8750	5.7500	-9
10	3	8	3	0	504	191	48
-2	1	8	1	0	-60	47	-24
-3	1	7	1	0	-120	74	-30
-1.0000e-03	1.0000	5	1	2.2204e-16	-6.0110	11.0120	-12.0060
1.9000	2	5	2	0	0.0990	-0.9700	-0.6000



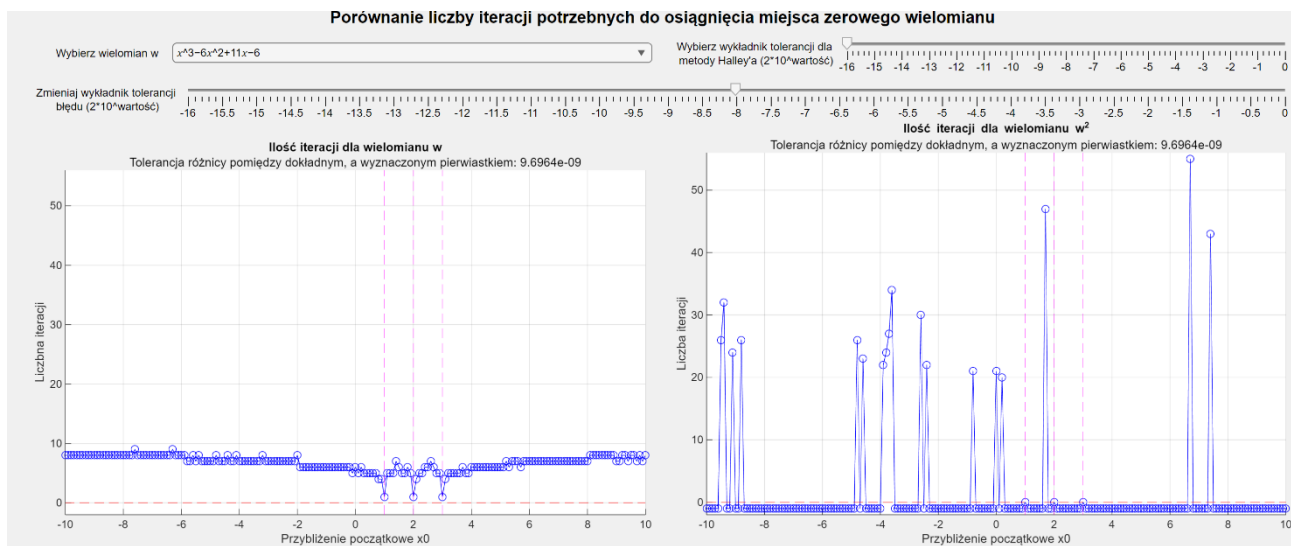
Wnioski:

- W ogólnym przypadku wielomian dobrze uwarunkowany względem metody Halleya
- Możliwe problemy w pobliżu miejsc zerowych, ale rzędu 10^{-15} .
- Punkt przegięcia nie zaburza wyniku.

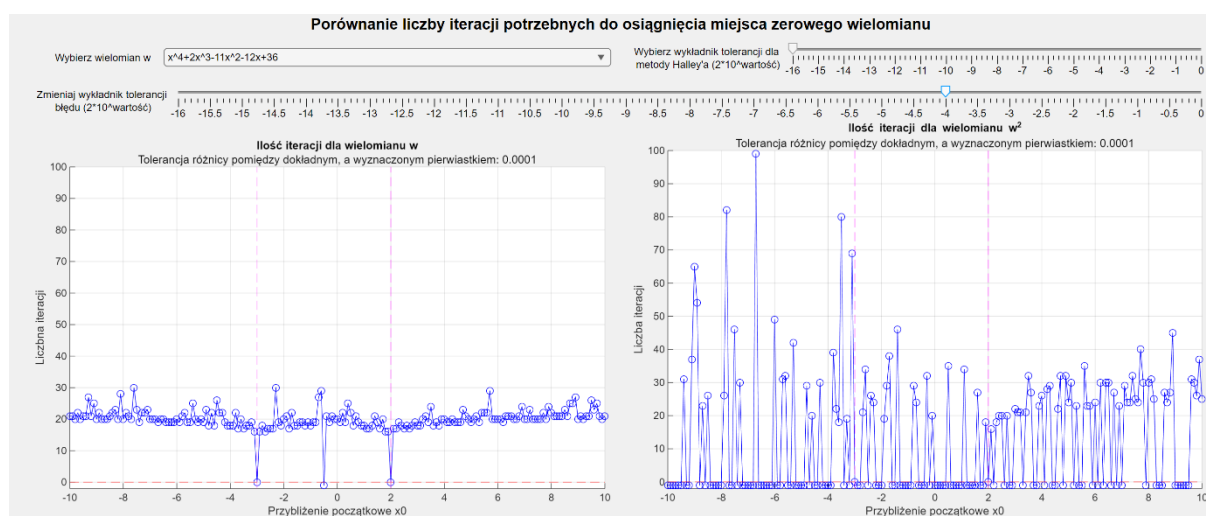
Przykład *

Wracając do wielomianu w z przykładu 6. można sprawdzić jak bardzo stopień wielomianu oraz krotność pierwiastków wpływa na ilość iteracji i dokładność metody Halleya.

Zbieżności dla wielomianu w^2 osiągane dla niewielu punktów i z dużym błędem rzędu 10^{-8} . Podobny schemat był zauważalny w przykładzie 5. (wielomian tylko 4 stopnia, czyli to krotność pierwiastków głównie wpłynęła na błędy pierwiastków i ilość iteracji).



Dodatkowo podnosząc wielomian z przykładu 5 do kwadratu widzimy, że czterokrotne pierwiastki całkowicie powinny wykluczyć używanie metody Halleya dla tego wielomianu. Dopiero dla błędu rzędu 10^{-4} otrzymujemy zbieżności w pewnych punktach, a liczba iteracji osiąga nawet 100.



Podsumowanie

Analizowane przykłady wskazują, że stosując metodę Halleya do wyznaczania pierwiastków wielomianów, należy zwrócić szczególną uwagę na punkty, w których wartości pierwszej i/lub drugiej pochodnej są równe zero. Takie punkty mogą prowadzić do poprawnych wyników, ale nie gwarantują ich dla wszystkich funkcji i mogą powodować problemy numeryczne.

Wyższe błędy obserwowano również w przypadku punktów początkowych znajdujących się blisko miejsc zerowych, co wskazuje na większą wrażliwość metody w takich przypadkach. Dodatkowym wyzwaniem okazały się wielomiany źle uwarunkowane, takie jak:

- wielomiany o bardzo bliskich pierwiastkach rzeczywistych,
- wielomiany z pierwiastkami zespolonymi.

Na liczbę iteracji wymaganych do zbieżności istotny wpływ miała nie tylko liczba pierwiastków (czyli stopień wielomianu), ale również krotność pierwiastków. Nawet pierwiastki o krotności równej dwóm znacząco spowalniały działanie metody, a w niektórych przypadkach uniemożliwiały osiągnięcie wymaganej dokładności.

Podsumowując, metoda Halleya, mimo swojej wyższej dokładności w porównaniu do metody Newtona, wymaga starannej analizy funkcji i jej pochodnych w celu uniknięcia potencjalnych trudności numerycznych.