

Sprawozdanie z projektu nr 2

Rozwiązywanie macierzowego układu równań $X * A = B$ w dziedzinie zespolonej metodą Cholesky'ego Banachiewicza (rozkład LDL^h macierzy A)

Dla macierzy hermitowskich, dodatnio określonych i pięciodiagonalnych.

Dane:

Alicja Przeździecka

mail :

alicja.przezdziecka.stud@pw.edu.pl

Metoda Cholesky'ego Banachiewicza dla macierzy hermitowskich, dodatnio określonych i pięciodiagonalnych

Rozkład LDL^h macierzy A

W celu poprawy dokładności i efektywności rozwiązywania równań macierzowych stosuje się rozkład macierzy A przed rozwiązaniem równania. Późniejsze kroki sprowadzają się do rozwiązania równania $XLDL^h = B$ w kolejnych krokach:

1. $ZL^h = B$
2. $YD = Z$
3. $XL = Y$

, gdzie:

- L to macierz dolnotrójkątna z jedynkami na głównej przekątnej
- D to macierz diagonalna
- L^h to macierz sprzężona do L

Takie podejście jest efektywniejsze niż bezpośrednie rozwiązywanie układu, ponieważ wymaga mniej operacji arytmetycznych oraz pamięci potrzebnej do przechowywania macierzy (L pozostaje macierzą z trzema niezerowymi przekątnymi (główną i dwiema poniżej), a D diagonalną z dodatnimi i rzeczywistymi elementami na diagonalu). Rozwiązanie równania 2. z macierzą diagonalną sprowadza się tylko do dzielenia przez dodatnie i rzeczywiste wartości. Ponad to przy wielokrotnym rozwiązywaniu równania dla różnych B

rozkład wykonujemy raz, a układ równań z macierzami diagonalnymi i trójkątnym jest bardziej numerycznie stabilny do rozwiązywania.

Opis funkcji potrzebnych do implementacji

1. Funkcja *ifProperMatrix* sprawdza, czy dana macierz *A* spełnia trzy warunki:

- Jest kwadratowa (sprawdzone na podstawie rozmiaru macierzy).
- Jest hermitowska (sprawdzone przez porównanie macierzy *A* z jej transponowaną macierzą).
- Jest pięciodiagonalna (sprawdzone, czy poza przekątnymi główną oraz dwoma pierwszymi i ostatnimi przekątnymi, pozostałe elementy są zerowe).

Dodatkowo, funkcja weryfikuje, czy macierz jest dodatnio określona, co oznacza, że wszystkie jej wartości własne są dodatnie. Jeśli wszystkie warunki są spełnione, funkcja zwraca wartość *true*, w przeciwnym razie *false*.

Dane wejściowe:

- *A*: macierz kwadratowa, której właściwości mają zostać sprawdzone.

Dane wyjściowe:

- *booleanValue*: wartość logiczna (*true* lub *false*), która wskazuje, czy macierz spełnia wymagane warunki.

2. Funkcja *rozklad_cholesky_LDLh_optimized* wykonuje rozkład LDL^h dla macierzy pięciodiagonalnej hermitowskiej i dodatnio określonej.

Dane wejściowe:

- *A*: macierz pięciodiagonalna, hermitowska i dodatnio określona.

Dane wyjściowe:

- *L* : macierz dolnotrójkątna z jedynkami na głównej przekątnej.
- *D* : macierz diagonalna zawierająca obliczone wartości $D(k)$.

Funkcja sprawdza, czy macierz spełnia wymagania, a następnie oblicza elementy macierzy *L* i *D* za pomocą zoptymalizowanego algorytmu, co zapewnia efektywność obliczeń dla tej specyficznej struktury macierzy.

3. Funkcja *matrix_decomposition* oblicza rozkład LDL^h dla macierzy hermitowskiej, dodatnio określonej, z dodatkowym założeniem pięciodiagonalności. Jeśli macierz nie

spełnia tego założenia, algorytm może być również zastosowany do ogólnych macierzy hermitowskich.

Dane wejściowe:

- A : macierz hermitowska, dodatnio określona (z założeniem pięciodiagonalności).

Dane wyjściowe:

- L : macierz dolnotrójkątna.
- D : macierz diagonalna, zawierająca wartości $D(k)$.

Funkcja sprawdza, czy macierz spełnia odpowiednie warunki, a następnie oblicza macierze L i D przy użyciu standardowego algorytmu rozkładu LDL^h .

4. Funkcja *solveUsingCholesky* rozwiązuje układ równań macierzowych w postaci $XA=B$ przy użyciu różnych metod. Macierz A musi być hermitowska, pięciodiagonalna i dodatnio określona.

Dane wejściowe:

- A : macierz, która spełnia warunki hermitowskości, pięciodiagonalności i dodatniej określoności.
- B : macierz, której wiersze to wektory b w równaniu $XA=B$.
- $param$: liczba wybierająca metodę rozwiązania równania
 - **$param = 2$** : Używa zoptymalizowanego rozkładu LDL^h dla macierzy pięciodiagonalnych.
 - **$param = 3$** : Korzysta z wbudowanej funkcji *ldl*, standardowy rozkład LDL^h dla ogólnych macierzy.
 - **$param = 4$** : Wykorzystuje metodę *matrix_decomposition*, alternatywę dla zoptymalizowanego rozkładu.
 - **$param = 5$** : Rozwiązuje układ bez rozkładu, wykorzystując funkcję B / A dla macierzy odwracalnych.

Dane wyjściowe:

- *wynik*: macierz, w której kolejne wiersze to rozwiązania dla odpowiednich równań $XA = B$.

- L : macierz dolnotrójkątna uzyskana w wyniku rozkładu LDL^h .
- D : macierz diagonalna uzyskana w wyniku rozkładu LDL^h .

5. Funkcja *cholesky_statistics* oblicza wskaźniki statystyczne dla równań macierzowych $XA=BXA = BXA=B$ przy użyciu różnych metod rozkładu Cholesky'ego. Zawiera cztery metody:

- rozklad_cholesky_LDLh_optimized**: Używa zoptymalizowanego rozkładu LDL^h , dedykowanego dla macierzy pięciodiagonalnych, co zapewnia większą efektywność obliczeniową.
- matrix_decomposition**: Wykorzystuje standardowy rozkład macierzy LDL^h , mogący być zastosowany do ogólnych macierzy hermitowskich i dodatnio określonych.
- ldl**: Korzysta z wbudowanej funkcji *ldl*, będącej klasycznym rozwiązaniem rozkładu LDL^h dla ogólnych macierzy.
- B/A**: Wykorzystuje prostą operację odwrócenia macierzy (jeśli jest odwracalna), aby uzyskać wynik, bez użycia rozkładu.

Funkcja generuje tabelę wyników, zawierającą błędy obliczeń, wskaźniki stabilności i poprawności, oraz błędy rozkładu dla każdej z metod.

6. Funkcja *generate_positive_definite_pentadiagonal* generuje macierze pięciodiagonalne dodatnio określone o rozmiarach od 5×5 do $n \times n$ (gdzie $n \geq 5$).

Wejście : n - maksymalny rozmiar macierzy.

Wyjście: **matrices**: - komórka zawierająca wygenerowane macierze.

Opis:

Funkcja tworzy macierze pięciodiagonalne z losowymi wartościami na przekątnych oraz elementami zespolonymi poza główną przekątną. Macierze są modyfikowane, aby zapewnić dodatnią określoność.

Uwaga:

Czasami generowane macierze mogą nie spełniać założeń (np. dodatnia określoność), ale przypadki te są rzadkie i wykrywane w dalszych etapach skryptu.

7. Funkcja *drawplot* rysuje wykresy błędów (rozwiązania, rozkładu, metody $B \backslash A$) oraz współczynnika uwarunkowania macierzy.

Wejście: Błędy oraz współczynnik uwarunkowania, zakres rozmiarów macierzy, parametr dla osi X (różne tytuły osi x).

Opis:

Wykresy błędów i współczynnika uwarunkowania z dwiema osiami Y.

8. Skrypt:

Instrukcje:

1. Można ustawić dowolną macierz Z lub wybrać jedną z dostępnych w skrypcie.
2. Skrypt jest podzielony na bloki zgodnie z podziałem widniejącym w sprawozdaniu.

Przykłady

W przykładach analizę będę opierała na funkcji zaimplementowanej zoptymalizowanej pod kątem macierzy pięciodiagonalnych oraz bezpośrednim rozwiązaniu B/A (poza przykładami opartymi na analizie tabeli a nie wykresu).

W przykładach opierających się na wielu macierzach i analizie wykresów zdecydowałam się pominąć wyliczanie współczynnika stabilności oraz poprawności. Po przeanalizowaniu dużej liczby przykładów doszłam do wniosku, że te wskaźniki nie są kluczowe w wyciąganiu istotnych wniosków. Niemniej jednak, wskaźniki te można łatwo wyznaczyć za pomocą funkcji

`cholesky_statistics`. Ponadto, wklejanie wielu tabel mogłoby jedynie zaburzyć płynność analizy oraz wniosków.

Macierze rzeczywiste rozmiaru 5x5

W tym podpunkcie będę rozważać poniższe macierze:

$$A0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -1 & 4 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A4 = \begin{pmatrix} 6.9378 & -2.0657 & -1.4554 & 0 & 0 \\ -2.0657 & 4.3818 & -1.2078 & -0.7302 & 0 \\ -1.4554 & -1.2078 & 8.1936 & -2.5097 & -0.4876 \\ 0 & -0.7302 & -2.5097 & 3.5736 & -1.6042 \\ 0 & 0 & -0.4876 & -1.6042 & 4.4132 \end{pmatrix}$$

$$A5 = \begin{pmatrix} 23.2904 & -9.4886 & -5.8119 & 0 & 0 \\ -9.4886 & 40.1439 & -8.6689 & -9.2368 & 0 \\ -5.8119 & -8.6689 & 19.3262 & -10.5067 & -4.4213 \\ 0 & -9.2368 & -10.5067 & 34.1298 & -7.6254 \\ 0 & 0 & -4.4213 & -7.6254 & 10.6095 \end{pmatrix}$$

$$A6 = \begin{pmatrix} 28.1750 & -21.4240 & -7.6822 & 0 & 0 \\ -21.4240 & 87.9700 & -19.2470 & -9.0065 & 0 \\ -7.6822 & -19.2470 & 33.8959 & -17.0160 & -9.3408 \\ 0 & -9.0065 & -17.0160 & 33.8335 & -17.9227 \\ 0 & 0 & -9.3408 & -17.9227 & 68.6256 \end{pmatrix}$$

Są tu macierze, które mają jedną, trzy i pięć niezerowych przekątnych oraz dodatnie i ujemne elementy, w celu zauważenia wpływu struktury macierzy na błąd rozwiązywania.

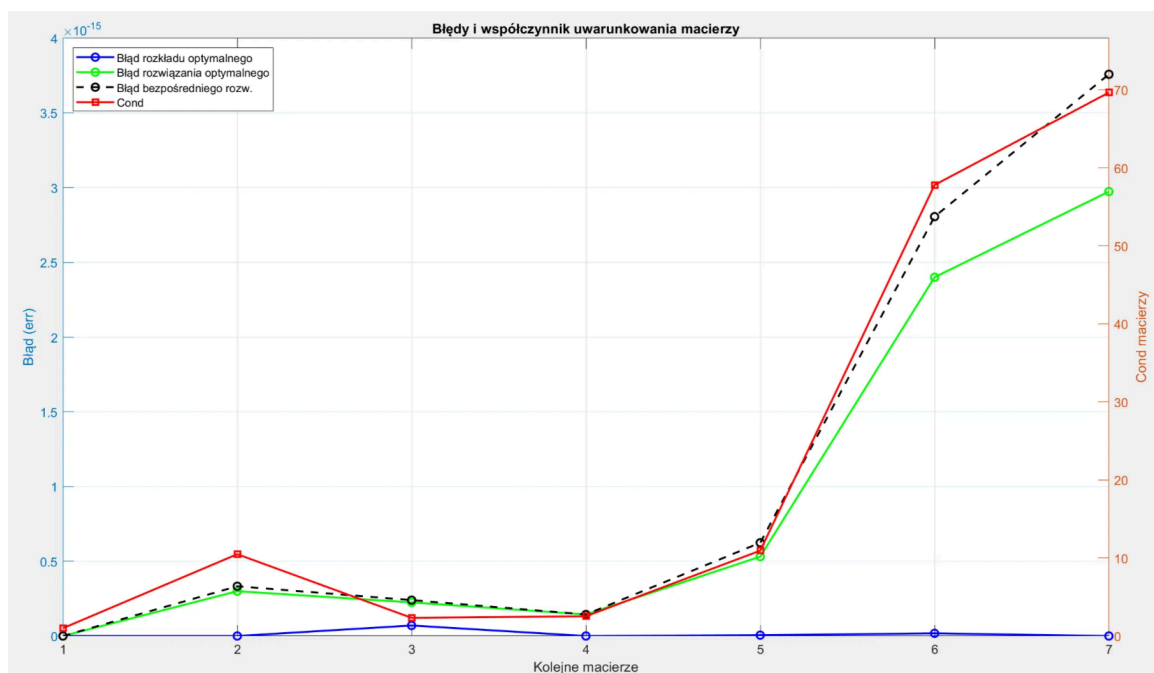
- Początkowe wiersze wygenerowanej macierzy Z (cały Z ma 100 wiersz):

$Z =$

1.0e+02 *

```
0.8854 - 0.5591i    0.2909 - 0.7083i    -0.1188 - 0.0145i    -0.1748 - 1.1361i    0.5354 - 1.7435i
-0.2572 - 1.1061i    0.4868 + 0.1019i    1.0818 - 0.7432i    -0.5895 - 0.0132i    0.4100 + 0.8463i
-0.5521 + 0.4313i    -3.2994 + 0.2680i    -0.6301 + 2.3918i    0.2343 + 1.6269i    -1.3799 - 0.7889i
-0.9188 + 2.5234i    0.4030 + 0.5306i    1.9306 + 0.2135i    -0.6488 + 0.4491i    0.0664 - 1.0915i
-0.5922 - 0.1456i    -0.9451 - 0.5028i    -0.8461 - 0.4083i    0.4077 + 0.4158i    1.9484 - 0.4477i
0.5422 - 1.1808i    1.5355 - 0.1917i    1.8041 - 0.6729i    -1.2858 + 0.3065i    -1.1895 + 0.2432i
```

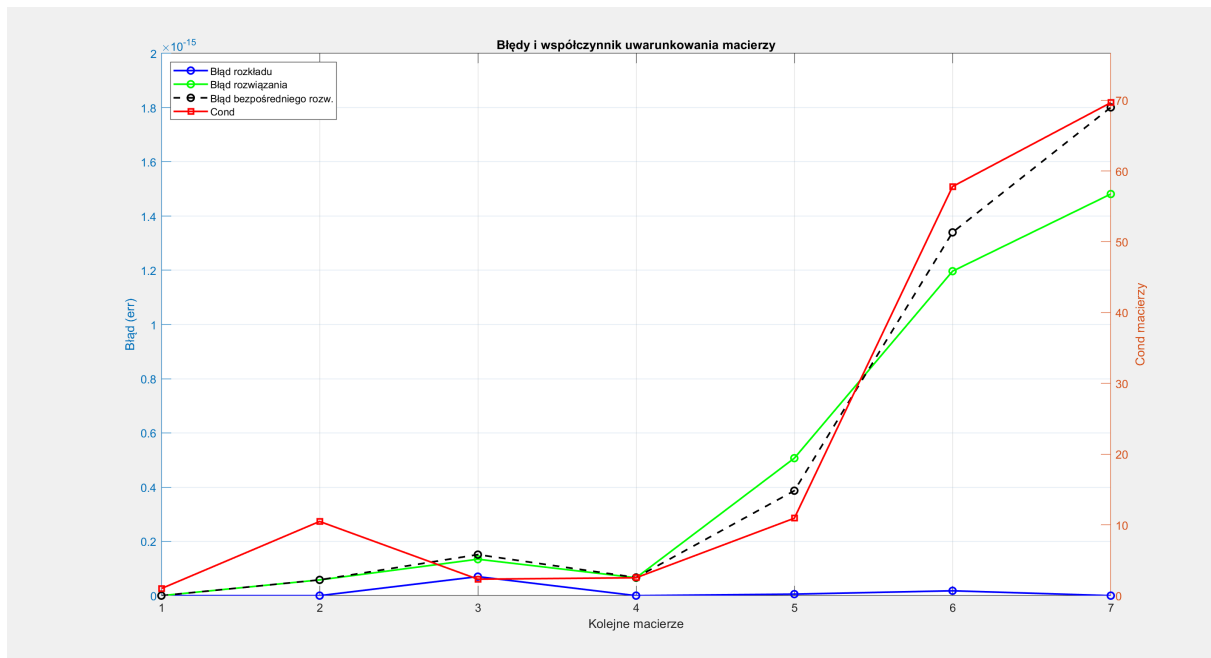
- Błędy rozwiązania układu macierzowego $Z * A = B$:



- Dla wektora Z podanego w postaci:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 100 & -100 & 200 & -300 & 20 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 100 & -100 & 100 & -100 & 0 \\ 4 & 80 & -4 & 80 & 100 \\ 1i & 1i & 1i & 1i & 1i \\ 2i & 3i & 4i & 5i & 6i \\ 0 & 1i & -1i & 1i & -1i \\ 1i & 1 & 1i & 1 & -1i \end{pmatrix}$$

- Błędy rozwiązywania układu macierzowego $Z * A = B$:



Wyniki analizy błędów rozkładu macierzy i rozwiązania równania macierzowego $Z * A = B$ dwoma funkcjami (wbudowaną bezpośrednią B/A i zaimplementowaną zoptymalizowaną pod kątem macierzy pięciodiagonalnych) :

1. Porównanie błędów dla losowego Z i podanego Z:

- Błędy dla losowego wektora Z są maksymalnie dwa razy większe niż dla Z podanego, ale wciąż mieszczą się w zakresie tolerancji.
- Błędy dla losowego Z są rzędu 10^{-15} , co wskazuje na bardzo wysoką precyzję obliczeń.

2. Wydajność algorytmu dla różnych macierzy:

- Dla losowego Z zaimplementowana funkcja radzi sobie lepiej w każdym przypadku.
- Dla podanego Z, jedynie macierz A4 wypada delikatnie lepiej w przypadku użycia metody bezpośredniego rozwiązania.
- Dla macierzy jednostkowej wyniki są dokładne dla obu funkcji.

3. Zalety zaimplementowanej funkcji:

- Błędy zaimplementowanej metody są bardzo małe i mieszczą się w granicach tolerancji (rzędu 10^{-16}) lub 10^{-15} dla bardzo źle uwarunkowanych macierzy.
- Metoda jest korzystna szczególnie dla macierzy o dużej rozmiarze, ponieważ posiada liniową złożoność obliczeniową.

4. Wzrost błędów przy dużych współczynnikach uwarunkowania:

- Mimo bardzo małych błędów rozkładu (rzędu 10^{-17}), błędy rozwiązania rosną przy większych współczynnikach uwarunkowania macierzy.

- Żle uwarunkowane macierze są bardzo czułe na błędy, a nawet mały błąd rozkładu może znacząco zwiększyć błędy rozwiązania.

5. Podsumowanie:

- Pomimo pewnych problemów związanych z dużymi współczynnikami uwarunkowania, wszystkie błędy pozostają w granicach tolerancji.
- Zaimplementowana funkcja jest więc bardzo skutecznym narzędziem, które można polecać do rozwiązywania układów równań dla tego typu macierzy.
- Dla macierzy rzeczywistych nie widać związku ze strukturą macierzy (poza współczynnikiem uwarunkowania), a błędem rozwiązania.

Macierze zespolone rozmiaru 5x5

W tym podpunkcie będę rozważać poniższe macierze:

$$A7 = \begin{pmatrix} 10 & 1 - 1i & 0 & 0 & 0 \\ 1 + 1i & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A8 = \begin{pmatrix} 5 & 3 + 1i & 0 & 0 & 0 \\ 3 - 1i & 6 & 2 - \frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \frac{1}{2}i & 7 & 1 - \frac{1}{3}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{3}i & 10 & -\frac{1}{4}i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}i & 1 \end{pmatrix}$$

$$A9 = \begin{pmatrix} 2 & -1i & 0 & 0 & 0 \\ 1i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A10 = \begin{pmatrix} 4 & 1 + 1i & 0 & 0 & 0 \\ 1 - 1i & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 + 1i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1i & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

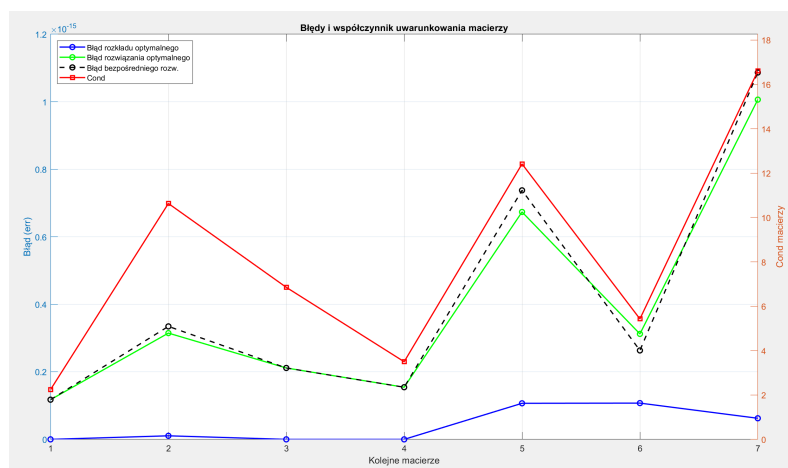
$$A11 = \begin{pmatrix} 4 & 1 + 1i & 2 & 0 & 0 \\ 1 - 1i & 3 & 0 & 2 + 1i & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 + 1i & -1 \\ 0 & 2 - 1i & 1 - 1i & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 1 + 1i & 0 & 0 & 0 \\ 1 - 1i & 3 & 1 + 1i & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 1i & 5 & 1 + 1i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1i & 6 & 1 + 1i \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 1i & 7 \end{pmatrix}$$

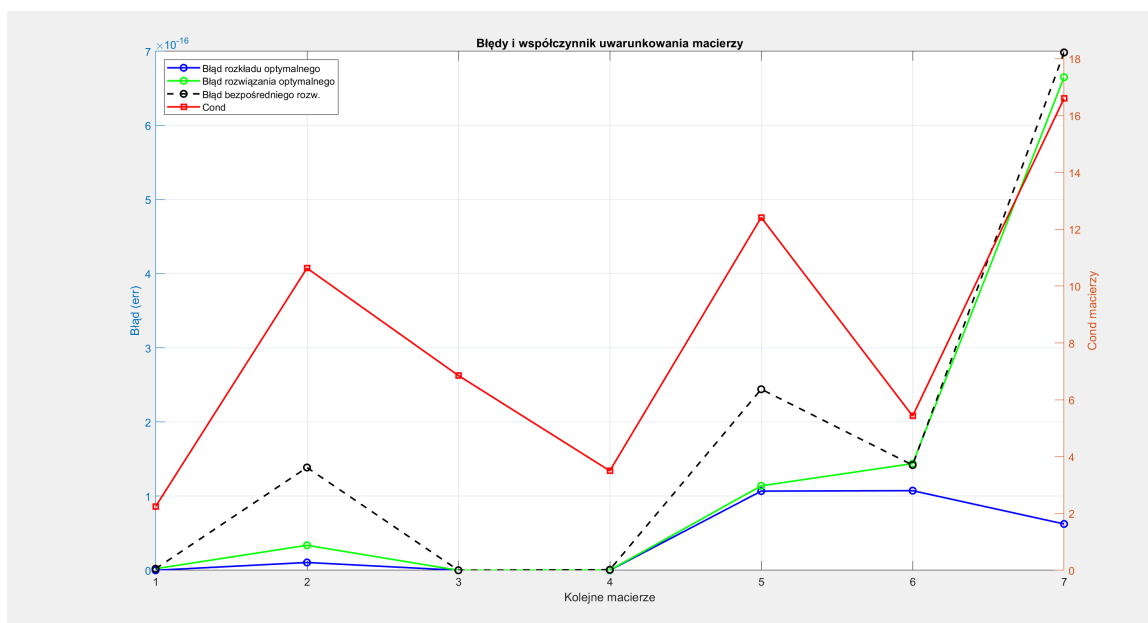
$$A_{13} = \begin{pmatrix} 8.9378 & -2.0657 + i & -1.4554 + 2i & 0 & 0 \\ -2.0657 - i & 6.3818 & -1.2078 - 0.5i & -0.7302 + 3i & 0 \\ -1.4554 - 2i & -1.2078 + 0.5i & 10.1936 & -2.5097 - 0.3333i & -0.4876 + 4i \\ 0 & -0.7302 - 3i & -2.5097 + 0.3333i & 5.5736 & -1.6042 - 0.25i \\ 0 & 0 & -0.4876 - 4i & -1.6042 + 0.25i & 6.4132 \end{pmatrix}$$

Są tu macierze, które mają jedną, trzy i pięć niezerowych przekątnych oraz dodatnie i ujemne elementy, w celu zauważenia wpływu struktury macierzy zespolonej na błąd rozwiązania.

- Do równania $Z * A = B$ podany wektor Z będzie taki sam jak w poprzednim przykładzie, a Z ponownie zostanie wygenerowany.
- Błędy rozwiązania układu macierzowego $Z * A = B$ (Z wygenerowane):



- Błędy rozwiązania układu macierzowego $Z * A = B$ (Z podane):



Wyniki analizy błędów rozkładu macierzy i rozwiązania równania macierzowego $Z * A = B$ dwoma funkcjami (wbudowaną bezpośrednią B/A i zaimplementowaną zoptymalizowaną pod kątem macierzy pięciodiagonalnych) :

1. Wielkość błędów rozkładu a kondycja macierzy:

- Dla macierzy o dużym współczynniku uwarunkowania ($cond$) nawet niewielkie błędy rozkładu (rzędu 10^{-16}) mogą wpływać na dokładność rozwiązania.
- Mimo że błędy rozwiązania mieszczą się w granicach tolerancji, są większe niż te uzyskane przy bezpośrednim rozwiązaniu.

2. Wyniki dla macierzy o trzech przekątnych niezerowych:

- Dla pierwszych czterech macierzy na wykresie (posiadających tylko trzy niezerowe przekątne) błędy są mniejsze, nawet gdy współczynnik uwarunkowania jest stosunkowo duży (np. 10).

3. Dokładność wyników:

- Ogólnie, wyniki są obarczone błędem maksymalnie rzędu 10^{-15} , co można uznać za bardzo dobry wynik.

4. Wpływ dobrej kondycji macierzy:

- Dla dobrze uwarunkowanych macierzy błąd dodatkowo maleje.

5. Błąd dla macierzy z pięcioma niezerowymi przekątnymi:

- Dla macierzy, które mają pięć niezerowych przekątnych, pojawia się błąd rozkładu rzędu 10^{-16} .
- Pomimo tego, duży współczynnik uwarunkowania macierzy powoduje wzrost błędu rozwiązania.

6. Podsumowanie:

- Zaimplementowana funkcja jest skuteczna szczególnie przy macierzach zespolonych o maksymalnie trzech niezerowych przekątnych, ponieważ błąd rozkładu jest wtedy najmniejszy. To w połączeniu z dobrym uwarunkowaniem samej macierzy daje możliwie najbliższy wynik.
- Pełne macierze pięciodiagonalne (pięć niezerowych przekątnych) wypadają trochę gorzej, ale dalej dla dobrego uwarunkowania błąd jest równy 10^{-16} . Dla gorszego może być nawet 6 razy większy, ale $6 * 10^{-16}$ to jest też błąd w zakresie tolerancji.

Macierze zespolone 5x5 o złym uwarunkowaniu

W tym podpunkcie będę rozważać poniższe macierze:

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 28.175 & -21.424 + 10i & -7.682 + 2i & 0 & 0 \\ -21.424 - 10i & 87.97 & -19.247 - 0.5i & -9.006 + 3i & 0 \\ -7.682 - 2i & -19.247 + 0.5i & 33.896 & -17.016 - 0.333i & -9.341 + 4i \\ 0 & -9.006 - 3i & -17.016 + 0.333i & 33.834 & -17.923 - 0.25i \\ 0 & 0 & -9.341 - 4i & -17.923 + 0.25i & 68.626 \end{pmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 23.2904 & -9.4886 + 1i & -5.8119 + 2i & 0 & 0 \\ -9.4886 - 1i & 40.1439 & -8.6689 - 0.05i & -9.2368 + 3i & 0 \\ -5.8119 - 2i & -8.6689 + 0.05i & 19.3262 & -10.5067 - 0.333i & -4.4213 + 4i \\ 0 & -9.2368 - 3i & -10.5067 + 0.333i & 34.1298 & -7.6254 - 0.25i \\ 0 & 0 & -4.4213 - 4i & -7.6254 + 0.25i & 10.6095 \end{pmatrix}$$

Są to macierze o wyjątkowo złym uwarunkowaniu. Ze względu na to zostały pokazane w oddzielnym podpunkcie, aby nie wpływać na wnioski odczytane z wykresu.

- Dla losowego wektora Z :

Współczynnik uwarunkowania macierzy A
168.0136

Tabela wyników:

	błąd względny rozwiązania	współczynnik stabilności	współczynnik poprawności	błąd rozkładu
rozklad_cholesky_LDLh_optimized	9.7334e-15	5.7932e-17	1.1739e-16	1.4078e-16
matrix_decomposition	9.4498e-15	5.6244e-17	1.1158e-16	1.4078e-16
ldl (wbudowane)	8.9425e-15	5.3225e-17	1.7634e-16	8.8318e-18
B/A(bezpośrednie rozwiązanie)	1.026e-14	6.1067e-17	1.6536e-16	-1

Współczynnik uwarunkowania macierzy A
2.2196e+03

Tabela wyników:

	błąd względny rozwiązania	współczynnik stabilności	współczynnik poprawności	błąd rozkładu
rozklad_cholesky_LDLh_optimized	1.0463e-13	4.7138e-17	1.2649e-16	5.3104e-17
matrix_decomposition	1.1836e-13	5.3327e-17	1.1179e-16	6.6343e-17
ldl (wbudowane)	1.0048e-13	4.5271e-17	1.199e-16	5.3655e-17
B/A(bezpośrednie rozwiązanie)	1.1208e-13	5.0495e-17	9.6051e-17	-1

- Dla wektora Z podanego (taki sam jak w pierwszym przykładzie):

Współczynnik uwarunkowania macierzy A
168.0136

Tabela wyników:

	błąd względny rozwiązania	współczynnik stabilności	współczynnik poprawności	błąd rozkładu
rozklad_cholesky_LDLh_optimized	2.7207e-15	1.6193e-17	9.7301e-17	1.4078e-16
matrix_decomposition	2.7161e-15	1.6166e-17	1.0399e-16	1.4078e-16
ldl (wbudowane)	3.8985e-15	2.3203e-17	6.9331e-17	8.8318e-18
B/A (bezpośrednie rozwiązanie)	1.9538e-15	1.1629e-17	9.9764e-17	-1

Współczynnik uwarunkowania macierzy A
2.2196e+03

Tabela wyników:

	błąd względny rozwiązania	współczynnik stabilności	współczynnik poprawności	błąd rozkładu
rozklad_cholesky_LDLh_optimized	1.2706e-13	5.7246e-17	8.9271e-17	5.3104e-17
matrix_decomposition	8.1256e-14	3.6609e-17	5.1717e-17	6.6343e-17
ldl (wbudowane)	3.7849e-14	1.7053e-17	9.3622e-17	5.3655e-17
B/A (bezpośrednie rozwiązanie)	1.033e-13	4.6542e-17	6.1262e-17	-1

- Korzystanie z zoptymalizowanego algorytmu prowadzi do nieco większych błędów rozwiązań w porównaniu z rozwiązaniem przy użyciu wbudowanej funkcji *ldl*.
- Żadna z metod nie uzyskuje pełnej dokładności przy tak wysokich wartościach *cond*. Z tego powodu, jeśli nie zależy nam na jak najlepszej poprawności można wykorzystać zaimplementowaną funkcję, która ma liniową złożoność.

Macierze innych rozmiarów

W tym podpunkcie rozpatrujemy tylko macierz Z wygenerowaną losowo (nie można wykorzystać poprzedniej Z, ze względu na zmianę wymiarów), ale wnioskując z poprzednich podpunktów wyniki nie powinny się znacznie różnić dla podanego i wygenerowanego Z.

- Macierz 8×8:

$$A_{16} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -\frac{1}{2} + i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} - i & -1 & 6 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 7 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 7 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 6 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy A
3.0681

Tabela wyników:

	błąd względny rozwiązania	współczynnik stabilności	współczynnik poprawności	błąd rozkładu
rozklad_cholesky_LDLh_optimized	1.9606e-16	6.3904e-17	9.5057e-17	5.443e-17
matrix_decomposition	1.9606e-16	6.3904e-17	9.5057e-17	1.1216e-16
ldl (wbudowane)	2.0401e-16	6.6496e-17	1.2361e-16	5.443e-17
B/A (bezpośrednie rozwiązanie)	2.1378e-16	6.9678e-17	1.2313e-16	-1

- Macierz 6×6:

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy A
3.9637

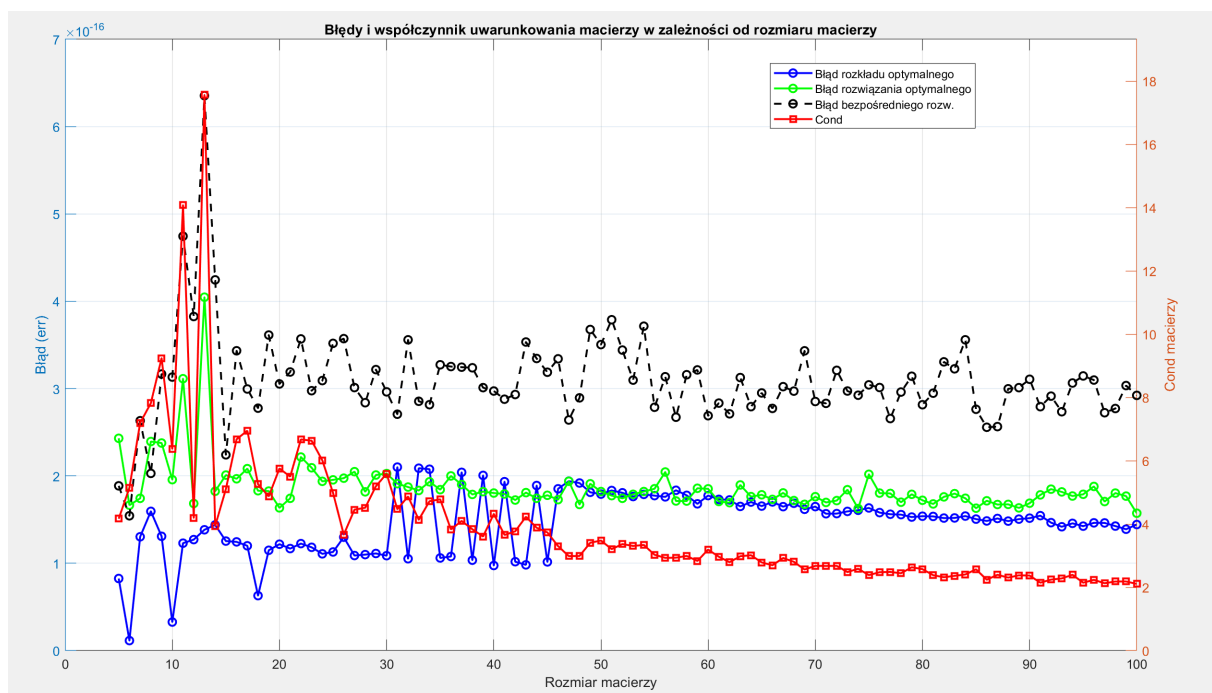
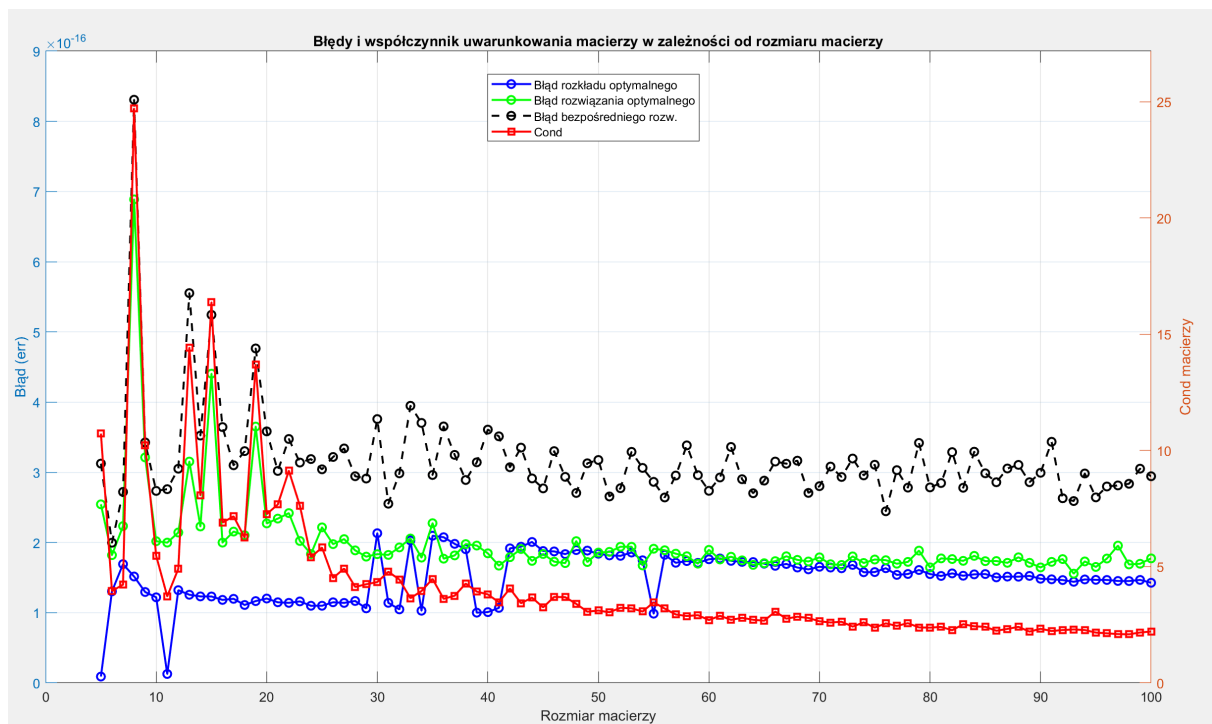
Tabela wyników:

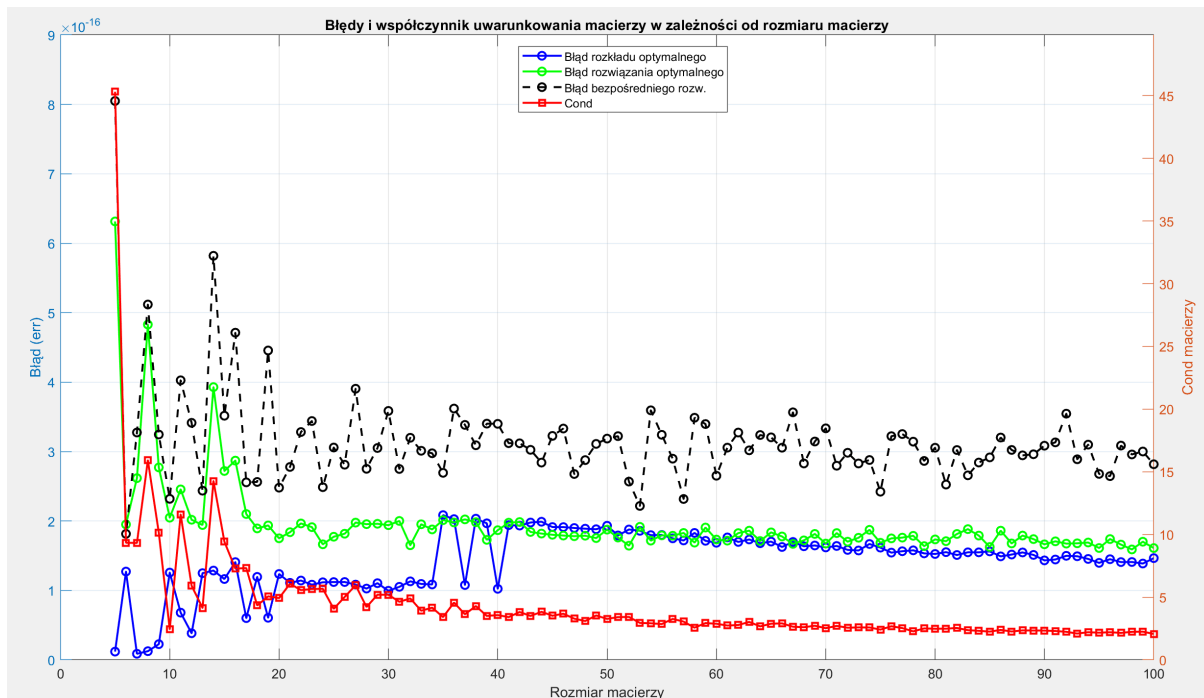
	błąd względny rozwiązania	współczynnik stabilności	współczynnik poprawności	błąd rozkładu
rozkład_cholesky_LDLh_optimized	2.2767e-16	5.7437e-17	9.3676e-17	8.4623e-18
matrix_decomposition	2.1777e-16	5.4941e-17	9.0353e-17	8.4623e-18
ldl (wbudowane)	2.1027e-16	5.305e-17	8.5877e-17	1.3749e-16
B/A (bezpośrednie rozwiązanie)	2.1943e-16	5.5359e-17	9.0809e-17	-1

- W przypadku macierzy o niewielkim współczynniku uwarunkowania (około 4), błędy rozwiązania są również stosunkowo niewielkie.
- Różnice między wynikami uzyskanymi za pomocą różnych funkcji nie są znaczące, co sugeruje, że dla dobrze uwarunkowanych macierzy algorytmy są stabilne i efektywne. Choć błędy są obecne, mieszczą się one w akceptowalnych granicach, co sprawia, że wyniki są wiarygodne.
- Dla tego typu macierzy różnice w dokładności są minimalne, a wybór metody może zależeć głównie od innych czynników, takich jak złożoność obliczeniowa.

Macierze kolejnych rozmiarów generowane losowo

W tym przykładzie generowane są macierze kolejnych rozmiarów od 5 do 100, spełniające założenia projektu (hermitowskie, dodatnio określone, pięciodiagonalne). Na tej podstawie możemy zobaczyć, czy jest jakaś zależność pomiędzy rozmiarem macierzy, a błędem rozwiązania równania macierzowego z taką macierzą.





Dla różnych losowych macierzy A i macierzy Z można zauważyć kilka rzeczy:

- Powtarza się schemat, że wraz ze wzrostem wymiarów macierzy stabilizuje się błąd rozkładu, rozwiązania (rzędu około 10^{-16}) oraz współczynnik uwarunkowania.
- Dla większych macierzy rozwiązanie zaimplementowaną funkcją jest zdecydowanie lepsze od bezpośredniego rozwiązania B/A .
- Ciekawa jest pierwsza macierz na ostatnim wykresie. Pomimo małego błędu rozkładu, błąd rozwiązania jest większy od wszystkich pozostałych, co potwierdza, że nawet rozkład bliski dokładnemu nie gwarantuje małego błędu rozwiązania układu jeśli macierz ma zły współczynnik uwarunkowania.

Podsumowanie przykładów

- Bardzo duża dokładność uzyskiwana jest dla macierzy rzeczywistych i zespolonych z maksymalnie trzema niezerowymi przekątnymi, co czyni tę metodę skuteczną w specyficznych przypadkach zastosowań takich jak analiza układów o rzadkich strukturach.
- Macierze o lepszym uwarunkowaniu prowadzą do mniejszych błędów rozwiązań równania macierzowego, co może znacznie poprawić jakość wyników w praktycznych obliczeniach.
- Zaimplementowana funkcja jest szczególnie przydatna w przypadku macierzy o dużych rozmiarach, gdzie tradycyjne metody (niekorzystające z rozkładu LDL^h) mogą wymagać zbyt dużej ilości pamięci i czasu obliczeniowego.
- Metody oparte na rozkładzie LDL^h zapewniają wyższą stabilność numeryczną, ale mogą być wrażliwe na bardzo źle uwarunkowane macierze.