Alicja Nowakowska

Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Matematyka Stosowana

Modele demograficzne

Spis treści

1 Wstęp

Demografia, z definicji, to analizowanie za pomocą metod matematycznych i statystycznych liczebności i cech populacji ludzkiej na przestrzeni czasu. Istotą demografii jest traktowanie populacji jako całości, nie skupiając się na jednostce.
Modele matematyczne umożliwiają przewidywanie przyszłości i zrozumienie przeszłości. Celem modelowania demograficznego jest posiadanie jak najszerszej wiedzy na temat kondycji społeczeństwa. Tego typu statystyki są wykorzystywane np. w biznesie celem przewidywania liczebności konsumentów, czy też w diagnozowania obecnych i przyszłych problemów socjoekonomicznych.
W projekcie analizie zostały poddane modele, które mają charakter deterministyczny i są oparte na równaniach różniczkowych. Staramy się porównać, opisać i zweryfikować, w ramach możliwości, ich prawdziwość względem danych rzeczywistych.

2 Podstawowe modele

Podstawowe modele charakteryzują się znaczącym upraszczaniem rzeczywistości, pomijaniem intereakcji międzypopulacyjnych i ujednoliceniem struktury populacji. Zazwyczaj biorą pod uwagę tylko jeden wskaźnik (np. współczynnik narodzin). Początkowo większość z takich modeli powstała, by opisywać populacje organizmów zdecydowanie prostszych niż człowiek, lecz można je zastosować także do opisu populacji ludzkiej, choć jest ona dużo bardziej skomplikowana zarówno pod względem struktury, jak i procesów oddziałujących na nią.

2.1 Model wykładniczy

Jednym z najprostszych modeli dotyczących populacji jest model wykładniczy zaproponowany w 1798 roku przez Thomasa Matlhusa.

Założenia modelu

Zakładamy, że populacja ludzka jest rozmieszczona równomiernie, każdy osobnik ma nieograniczony dostęp do pożywienia i miejsc lęgowych oraz potomkowie wydawani są na świat regularnie i w tej samej liczbie za każdym razem. Model przewiduje dwa możliwe stany: populacja rośnie w bardzo szybkim tempie albo wymiera.

Postać i rozwiązanie modelu

Do opisu liczebności populacji stosujemy poniższe równanie:

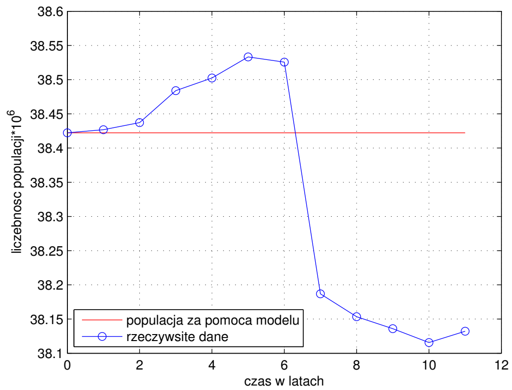
$$\frac{dN}{dt} = rN, \tag{1}$$

$$N(t) = N(0)e^{rt}, \tag{2}$$

Gdzie, r to współczynnik narodzin pomniejszony o współczynnik zgonów.

Sprawdzenie modelu

Na podstawie powyższego wzoru sporządziłam wykres na przestrzeni 11 lat (od roku 2006 do 2017). Przyjęłam, że w ciągu roku rodzi się około 380 tysięcy dzieci. Jest to dobre zaokrąglenie zmian współczynnika narodzin w okresie około dziesięciu lat. Zgodnie z danymi empirycznymi liczba zgonów i urodzeń w przeciągu ostatnich dwudziestu lat była właściwie identyczna, z czego wynikałoby, że liczebność populacji mieszkańców Polski jest stała w czasie.



Rysunek 1

2.2 Model logistyczny

Model logistyczny, znany również jako model Verhultsa lub model krzywej wzrostu. Został opublikowany przez Pierrego Verhultsa w 1845r. Pierwotnie był zapisany jako dyskretne równanie kwadratowe, zwane mapą logistyczną. Model służy do opisania wzrostu populacji, jednakże, inaczej niż w modelu wykładniczym uwzględniamy tu pojemność środowiska.

Założenie

Najważniejszym założeniem tego modelu jest to, że środowisko lub ilość pożywienia może hamować rozwój populacji. Początkowo uzyskałam wyniki bardzo podobne, co w modelu wykładniczym, lecz w późniejszej fazie następuje spowolnienie wzrostu i prawie zatrzymanie go.

Postać modelu

W modelu logistycznym wprowadza się zmienne S i k, które ulepszają model wykładniczy. Liczebność populacji opisuje równanie:

$$y' = ky(1 - \frac{y}{S}), \tag{3}$$

Gdzie:

k - stała wzrostu

S - pojemność środowiska

Rozwiązanie

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - \frac{y}{S}), \tag{4}$$

Na początek rozdzielamy zmienne:

$$\frac{dy}{y(1 - \frac{y}{S})} = kdt. \tag{5}$$

Następnie całkujemy:

$$\int \frac{dy}{y(1 - \frac{y}{S})} = \int kdt. \tag{6}$$

W wyniku całkowania otrzymujemy:

$$\ln\left|\left(\frac{y}{S - y}\right)\right| = kt + C \tag{7}$$

Stąd mamy funkcję:

$$y(t) = \frac{Se^C e^{kt}}{1 + e^C e^{kt}}, \tag{8}$$

Jeżeli przyjmiemy $y(0) = y_0$ to:

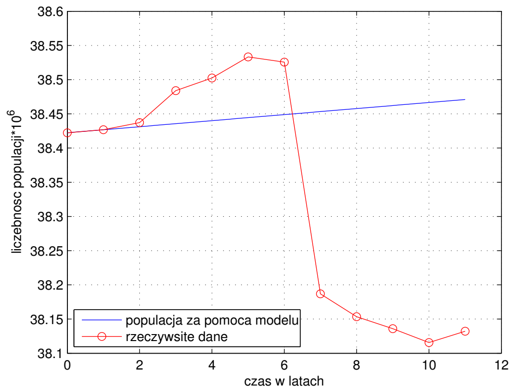
$$y_0 = \frac{Se^c}{1 + e^c} \tag{9}$$

Zatem za e^c podstawimy $\dfrac{y_0}{S - y_0}$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{S} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{S}\right)e^{-kt}} \tag{10}$$

Sprawdzenie

Na podstawie dostępnych danych z Głównego Urzędu Statystycznego uzyskałam poniższy wykres. Przyjęłam, że pojemność środowiskowa Polski wynosi 55 mln mieszkanców. Model daje lepsze wyniki niz model wykładniczy.



Rysunek 2

3 Układy równań opisujące oddziaływania populacji względem siebie

Jako, że demografia społeczeństw jest zależna od bardzo wielu czynników i zróżnicowana, proste modele demograficzne takie jak model logistyczny, czy wykładniczy są znaczącym uproszczeniem rzeczywistości. Celem stosowania układów równań różniczkowych jest uwzględnienie zależności oddziaływań międzypopulacyjnych i procesów socjoekonomicznych.

3.1 Modele opisujące populację kobiet i mężczyzn

Przy prostszych modelach opisujących dynamikę populacji ludzkiej, jednym z założeń jest jednopłciowość populacji lub rozważanie względem tylko jednej z płci. Przy modelach bardziej skomplikowanych, więc także hipotetycznie bardziej precyzyjnych koniecznym jest uwzględnienie obu.

3.1.1 Model jednopłciowy ze strukturą wieku

Opisany przez McKendricka Von Foerstera. Jego celem jest zamodelowanie zmian w liczebności populacji jednej płci - zazwyczaj kobiet, zakładając, że populacja mężczyzn jest stała.

Założenia modelu

Jest to model oparty na strukturze wiekowej. Pod uwagę bierze jedną z płci, którą zazwyczaj jest populacja kobiet. Zakłada zróżnicowaną płodność kobiet w różnym wieku i stabilność populacji mężczyzn. Celem jest opisanie funkcji narodzin kobiet. [1][2]

Postać modelu

W modelu użyte są funkcje:

$u(x,t)$ - liczebność populacji kobiet w wieku x w chwili t,

$\pi(x)$ - prawdopodobieństwo, że kobieta dożyje wieku x,

$\beta(x)$ - ile średnio dzieci rodzi kobieta w wieku x,

$B(t)$ - ile dzieci w wieku zerowym jest dla chwili t,

ω - maksymalny wiek jakiego może dożyć kobieta,

Ponadto zakładamy, że czas i wiek jest mierzony w tej samej jednostce.
Wtedy liczba kobiet, które są w wieku x po upływie czasu Δt, jest równa liczbie kobiet w czasie t, które są w wieku $x - \Delta t$, pomniejszona o te kobiety, które umarły od chwili t do chwili $t + \Delta t$ (np. liczba kobiet w wieku lat 30 w 2002 roku jest równa liczbie kobiet w wieku lat 29 w roku 2001 pomniejszona o wszystkie kobiety, które zmarły między rokiem 2001, a rokiem 2002). Stąd otrzymujemy równanie:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x - \Delta t, t) - \mu(x)u(x, t)\Delta t. \tag{11}$$

Dzieląc obie strony równania przez Δt mamy:

$$\frac{u(x, t + \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{u(x - \Delta t, t)}{-\Delta t} - \mu(x)u(x, t). \tag{12}$$

Uzyskujemy równanie różniczkowe cząstkowe postaci:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta x} = -\mu(x)u(x, t). \tag{13}$$

Nasze warunki początkowe definiują strukturę społeczną względem wieku w chwili $t = 0$.
Ponadto zakładamy, że liczba narodzonych dzieci (kobiet w wieku $x = 0$) jest równa całce z funkcji o postaci: $\beta(x)u(x, t)$. Funkcja ta definiuje liczbę dzieci urodzonych przez kobiety w wieku x w czasie t. Stąd otrzymujemy układ równań postaci:

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta x} = -\mu(x)u(x, t), \\ u(0, t) = \int_0^\infty \beta(x)u(x, t)dx, \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \tag{14}$$

Ponadto pamiętając, że funkcja $B(t)$ określa liczbę nowonarodzonych dzieci w czasie t mamy:

$$u(0, t) = B(t) = \int_0^\infty \beta(x)u(x, t)dx. \tag{15}$$

Rozwiązanie modelu

Zakładając brak imigracji i migracji możemy przyjąć, że liczba nowonarodzonych dzieci może być opisana modelem wykładniczym zależnym od czasu, warunków początkowych i parametru λ. Przyjmujemy, więc:

$$B(t) = B(0) \cdot e^{\lambda t}. \tag{16}$$

Znając postać funkcji $B(t)$ możemy rozwiązać nasz układ równań. Z postaci $B(t)$ wynika, że funkcja $e^{\lambda t}$ opisuje zmiany w liczebności populacji w czasie, stąd:

$$u(x, t) = e^{\lambda t}s(x). \tag{17}$$

Podstawiając nasze na nowo opisane $u(x,t)$ do równania cząstkowego otrzymujemy,że:

$$\frac{\delta u}{dx} + \frac{\delta u}{dt} = e^{\lambda t} s'(x) + s(x)\lambda e^{\lambda t}. \tag{18}$$

Podstawiając to wyrażenie do pierwszego równania opisującego nasz układ równań otrzymujemy:

$$s'(x) = -\lambda s(x) - \mu(x)s(x),$$

To sprowadza się do postaci:

$$s'(x) = s(x)(-\lambda - \mu(x)). \tag{19}$$

Przeszliśmy z równania cząstkowego do równania różniczkowego pierwszego rzędu. Rozwiązując to równanie otrzymujemy postać ogólną rozwiązania równania:

$$s(x) = e^{-\lambda x} e^{-\int_0^\infty \mu(x)dx} s(0) = e^{-\lambda x}\pi(x)s(0). \tag{20}$$

Przyjmuje się, że funkcja $e^{-\int_0^\infty \mu(x)dx}$ jest funkcją prawdopodobieństwa przeżycia. Wtedy nasza funkcja opisująca populację jest dana wzorem:

$$u(x,t) = e^{\lambda t} s(x) = e^{\lambda t} e^{-\lambda x} s(0)\pi(x), \tag{21}$$

Ponadto liczba nowonarodzonych dzieci dla czasu t:

$$u(0,t) = e^{\lambda t} \cdot 1 \cdot s(0)\pi(0), \tag{22}$$

Poszukujemy teraz postaci $s(0)$. Jako, że:

$$u(0,t) = e^{\lambda t} s(0), \tag{23}$$

oraz z drugiego równania naszego układu równań

$$u(0,t) = \int_0^\infty \beta(x)u(x,t)dx, \tag{24}$$

Stąd podstawiając $u(x,t) = s(x)e^{\lambda t}$ mamy:

$$u(0,t) = \int_0^\infty \beta(x)s(x)e^{\lambda t}dx, \tag{25}$$

Otrzymujemy, że:

$$s(0) = \int_0^\infty \beta(x)s(x)dx. \tag{26}$$

Przyjmując, że prawdopodobieństwo dożycia wieku zerowego wynosi jeden i korzystając z drugiego równania naszego układu równań, mamy że:

$$u(0,t) = e^{\lambda t} s(0)\pi(0), \tag{27}$$

$$u(0,t) = \int_0^\infty \beta(x)u(x,t)dx = \int_0^\infty \beta(x)e^{\lambda t}e^{-\lambda x}s(0)\pi(x)dx, \tag{28}$$

Stąd otrzymujemy:

$$1 = \int_0^\infty \beta(x)e^{-\lambda x}\pi(x)dx, \tag{29}$$

Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym. Rozpisując $e^{-\lambda x}$ za pomocą trzech pierwszych wyrazów szeregu Taylora (jest to odpowiednie zaokrąglenie, gdyż dla małych λ kolejne wyrazy szeregu będą pomijalnie małe).

$$e^{-\lambda x} = 1 - \lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2. \tag{30}$$

Podstawiając to do równania charakterystycznego mamy:

$$1 = \int_0^\infty \beta(x)\pi(x)dx - \int_0^\infty x\lambda\beta(x)\pi(x)dx + \int_0^\infty \frac{1}{2}x^2\lambda^2\beta(x)\pi(x)dx. \tag{31}$$

Przyjmując $R_n = \int_0^\infty x^n\beta(x)\pi(x)dx$. Otrzymujemy:

$$1 = R_0 - R_1\lambda + \frac{1}{2}R_2\lambda^2, \tag{32}$$

$$\lambda = \frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 2R_2(R_0 - 1)}}{R_2}. \tag{33}$$

Powyższe wyprowadzenie wzoru na λ jest nazywane metodą Lotka. Znając postać λ, znamy postać funkcji $B(t) = B(0)e^{\lambda t}$.

Sprawdzenie modelu

Do sprawdzenia modelu przyjęłam, że dane w naszym równaniu są postaci:

chwilą t=0 jest rok 2004,

ω wynosi 80,

$\pi(x)$ - funkcja $\pi(x)$ jest postaci listy danych, które pobrałam z tablic długości trwania życia ze strony Głównego Urzędu Statystycznego,

$u(x,0)$ - jest postaci listy danych dotyczących roku 2004 pobranych z Roczników Demograficznych.

$\beta(x)$ - ze względu na brak danych odnośnie dzietności kobiet w wieku x przyjęłam, że $\beta(x)$ jest stała w czasie. Współczynnik dzietności oznacza liczbę dzieci, które urodziłaby kobieta podczas całego swojego wieku rozrodczego. W naszym kraju wynosił w roku 2004- 1.35, stąd:

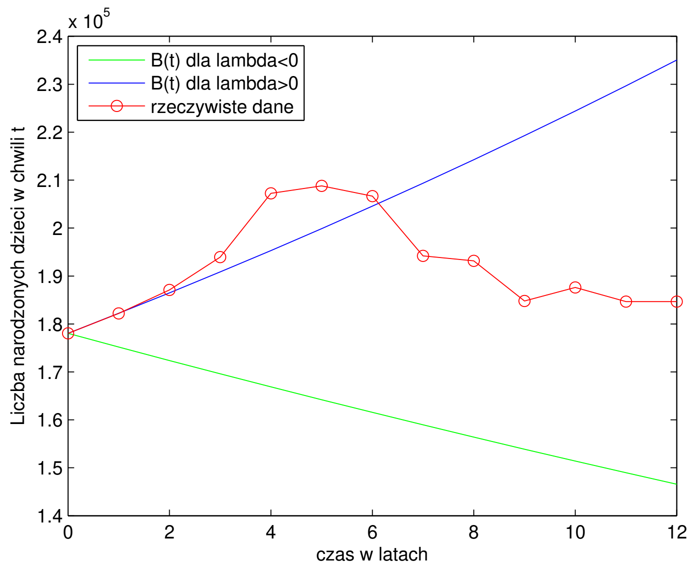
$$\alpha = \frac{1.35}{\omega}.$$

Stałą α musimy podzielić przez 2, gdyż poszukujemy współczynnika opisującego, ile dziewczynek rodzi kobieta, a nie ile dziewczynek i chłopców rodzi, wtedy:

$$\beta(x) = \beta = \frac{\alpha}{2} = 0.008125.$$

Przyjęta stała β jest obarczona sporym błędem, gdyż współczynnik dzietności jest zmienny w zależności od wieku, zakładam, że jest taki sam dla kobiety w każdym wieku.

Skorzystałam z programu Matlab i metody trapezów umożliwiającej liczenie numeryczne całek. Otrzymałam, że $\lambda_1 = 0.0231$ i $\lambda_2 = -0.0162$, sporządziłam wykres funkcji $B(t)$, który ma następującą postać:



Rysunek 3

Pomimo uproszczeń rzeczywistości, które stosuje się w tym modelu, krzywa dla $\lambda > 0$ jest stosunkowo dobrze dopasowana do rzeczywistych danych na przestrzeni 6 lat. Potem następuje widoczna rozbieżność z rzeczywistymi danymi. Krzywa dla $\lambda < 0$ opisuje populację wymierającą, więc jest nieadekwatna.

3.1.2 Model Kendalla

Był to pierwszy znaczący model opisujący dynamikę populacji kobiet i mężczyzn. Jednym z jego celów jest opisanie funkcji narodzin w zależności od liczebności obu populacji. Model nie uwzględnia struktury wiekowej. [2]

Założenia modelu

Zmiana w liczebności jednej z płci zachodzi w wyniku śmierci i narodzin. Liczebność jednej z płci jest zależna od liczebności drugiej.

Postać modelu

Poniższy układ równań definiuje model:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\mu_1 M + \alpha_1 K(M,F), \\ \frac{dF}{dt} = -\mu_2 F + \alpha_2 K(M,F), \end{cases} \tag{34}$$

Gdzie:

M - liczba mężczyzn,

F - liczba kobiet,

μ_1 - współczynnik umieralności mężczyzn,

μ_2 - współczynnik umieralności kobiet,

$K(M,F)$ - funkcja narodzin zależna od populacji kobiet i mężczyzn,

α_1 - współczynnik narodzin dla mężczyzn,

α_2 - współczynnik narodzin dla kobiet.

Rozwiązanie modelu

Do rozwiązania modelu potrzebujemy znać postać funkcji $K(M,F)$. Przyjmiemy, że $K(M,F) = \min(M,F)$. W Polsce przewagę liczebną mają kobiety, więc $K(M,F) = M$. Ponadto zakładamy, że znamy $F(0)$, $M(0)$ Wtedy:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\mu_1 M + \alpha_1 M, \\ \frac{dF}{dt} = -\mu_2 F + \alpha_2 M, \end{cases} \tag{35}$$

Pierwsze równanie jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, które po rozwiązaniu daje:

$$M(t) = e^{(\alpha_1 - \mu_1)t} M(0), \tag{36}$$

Stąd równanie opisujące populację kobiet ma postać:

$$\frac{dF}{dt} = -\mu_2 F + \alpha_2 e^{(\alpha_1 - \mu_1)t} M(0), \tag{37}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

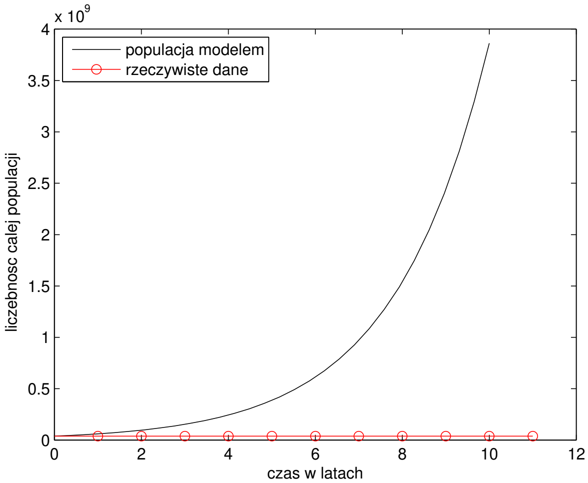
$$(Fe^{\mu_2 t})' = \alpha_2 e^{(\alpha_1 - \mu_1)t} M(0) e^{\mu_2 t}, \tag{38}$$

Po scałkowaniu i podstawieniu warunków początkowych:

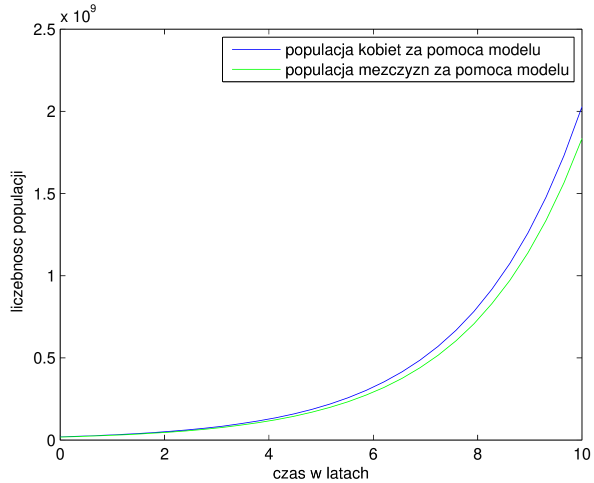
$$F(t) = \alpha_2 M(0) \frac{1}{\alpha_1 - \mu_1 + \mu_2} e^{(\alpha_1 - \mu_1)t} + \frac{F(0) - \alpha_2 M(0) \frac{1}{\alpha_1 - \mu_1 + \mu_2}}{e^{\mu_2 t}}. \tag{39}$$

Sprawdzenie modelu

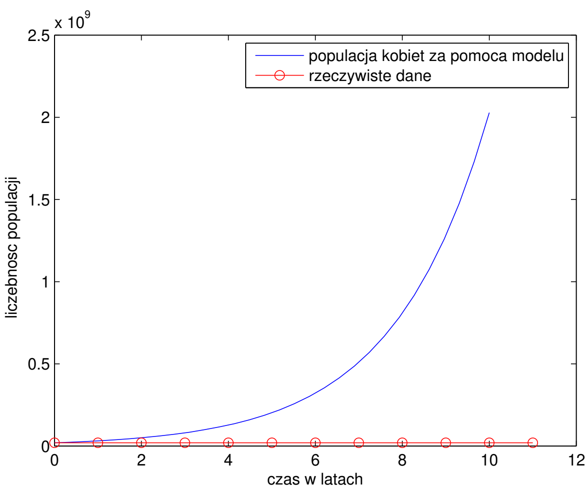
Zgodnie z danymi Głównego Urzędu Statystycznego na każde sto narodzonych dzieci 48 to mężczyźni. Ponadto podczas roku na sto mężczyzn średnio umiera dwóch i na sto kobiet jedna. Stąd: $\mu_1 = 0.02$, $\mu_2 = 0.01, \alpha_1 = 0.48, \alpha_2 = 0.52$. Za rok zero przyjęłam rok 2004. Na tej podstawie uzyskałam poniższe wykresy:



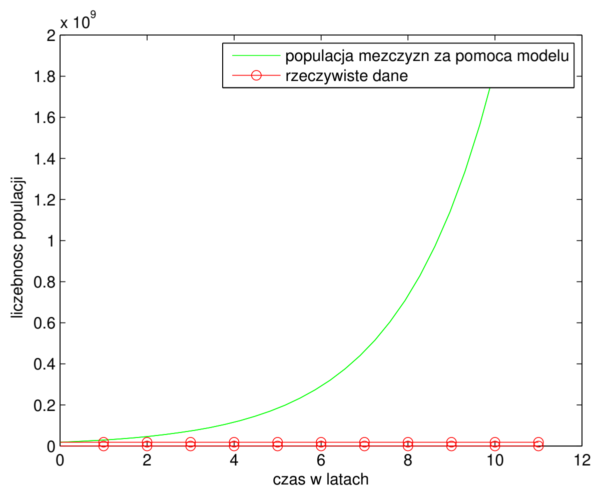
Rysunek 4



Rysunek 5



Rysunek 6



Rysunek 7

Krótkoterminowo rozważany model pokrywa się z rzeczywistością, lecz później następują duże rozbieżności, wynikające z wykładniczej postaci rozwiązań układu równań. Błędy powstają, ponieważ model jest zbyt dużym uproszczeniem rzeczywistości.

3.1.3 Ulepszony model Kendalla

Jest to układ równań różniczkowych opisujących liczebność populacji kobiet, mężczyzn oraz związków małżeńskich. Model ma także zastosowanie epidemiologiczne, gdyż jest wykorzystywany do opisu dynamiki AIDS.

Założenia modelu

Zgodnie z nim przyrost samotnych kobiet/mężczyzn rośnie w wyniku narodzin z małżeństw, śmierci partnera lub rozwodów. Związek małżeński istnieje tylko pomiędzy kobietą i mężczyzną. Model uwzględnia, że współczynnik narodzin jest zależny od bardzo istotnego zachowania społecznego, jakim jest wiązanie się ludzi w pary. W demografii przyjmuje się, że proces zawierania małżeństw jest oparty na prawach rynku rządzonego zasadami współzawodnictwa.

Postać modelu

s_f - liczba samotnych kobiet,

s_m -liczba samotnych mężczyzn,

c - liczba par,

b_f - współczynnik narodzin kobiet z małżeństw,

b_m - współczynnik narodzin mężczyzn z małżeństw,

μ_f - współczynnik śmierci kobiet,

μ_m - współczynnik śmierci mężczyzn,

σ - współczynnik rozwodów,

$M(sf, fm)$ - funkcja małżeństw,

Model jest opisany za pomocą układu równań.

$$\begin{cases} \frac{ds_f}{dt} = (b_f + \mu_m + \sigma)c - \mu_f s_f - M(s_f, f_m), \\ \frac{ds_m}{dt} = (b_m + \mu_f + \sigma)c - \mu_m s_m - M(s_f, f_m), \\ \frac{dc}{dt} = -(\mu_m + \mu_f + \sigma)c + M(s_f, f_m). \end{cases} \tag{40}$$

Badania nad funkcją małżeństw, która jest najważniejszym elementem tego modelu i zarówno najtrudniejszym ze względu na swoją złożoność kulturową i socjologiczną (czynniki etniczne, religijne, ekonomiczne, zdrowotne, wiekowe), i zarówno najważniejszym, zostały rozpoczęte w późnych latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Opisuje ona liczbę małżeństw, które powstają w zależności od liczebności populacji samotnych kobiet i mężczyzn. Zakłada się, że $M(s_f, f_m)$:

1. Jest nieliniowa.
2. Określona tylko dla dodatnich s_f i f_m.
3. Gdy liczebność populacji jednej z płci jest zerowa funkcja małżeństw także wynosi zero.

$$M(s_f, 0) = M(s_m, 0) = 0.$$

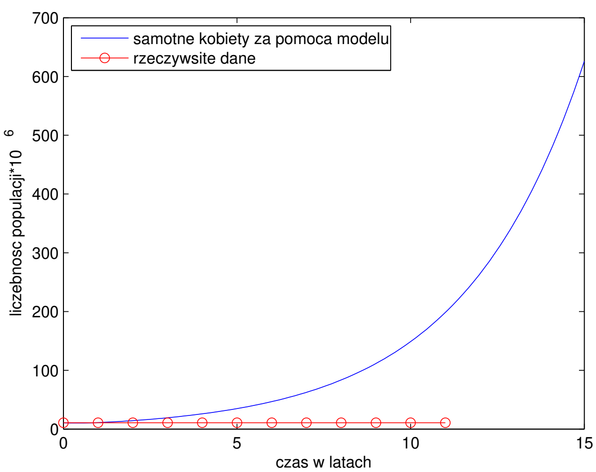
4. Gdy liczba samotnych kobiet i mężczyzn wzrasta, to liczba zawartych małżeństw także. W szczególności, gdy liczba samotnych kobiet i mężczyzn wzrośnie α razy to liczba zawartych małżeństw też wzrośnie α razy ($\alpha > 0$).

Przykłady funkcji spełniających te założenia:

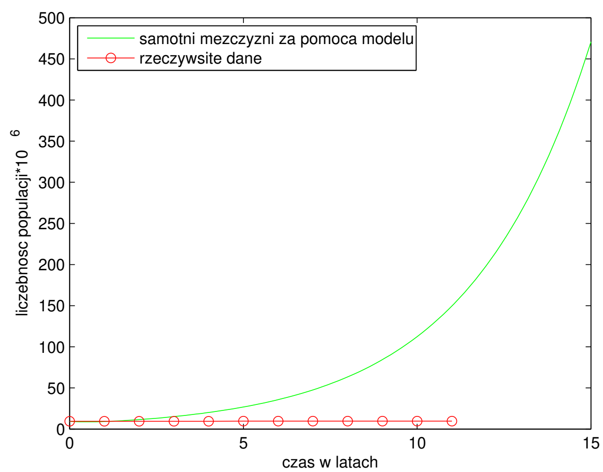
1. $M(s_f, f_m) = \min(s_f, f_m)$,
2. $M(s_f, f_m) = \sqrt{s_f f_m}$,
3. $M(s_f, f_m) = \frac{2 \cdot s_f \cdot f_m}{s_f + f_m}$,

Rozwiązanie i sprawdzenie modelu

Ze względu na nieliniowy charakter układu równań, wynikający z nieliniowości funkcji małżeństw, zastosowałam obliczenia numeryczne. Dane potrzebne do rozwiązania pobrałam ze strony Głównego Urzędu Statystycznego. Przyjęłam, że: $b_f = 0.52$, $\mu_m = 0.02$, $\sigma = 0.25$, $\mu_f = 0.01$, $b_m = 0.48$, a za warunki początkowe: $c(0) = 9$mln $s_f(0) =$ (liczba kobiet w Polsce) $-$ (liczba kobiet, które są w związku małżeńskim) $= 10.6962$, $s_m(0) = 9.4361$, chwilą $t = 0$ jest rok 2004. Gdy $M(s_f, f_m) = \min(s_f, f_m)$ otrzymałam wykresy:



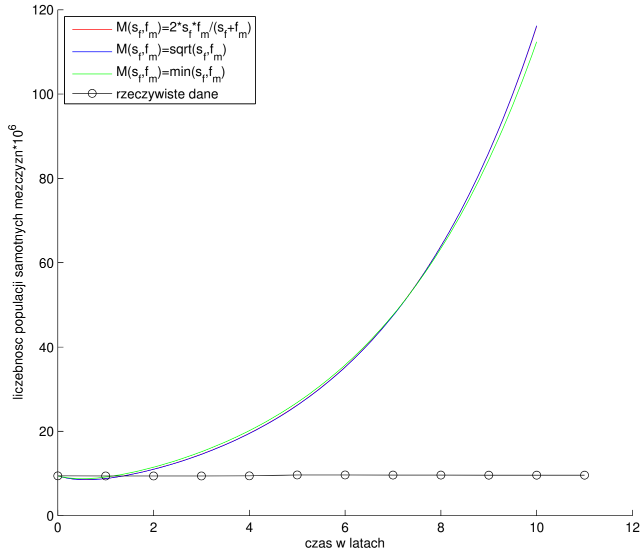
Rysunek 8



Rysunek 9

Rysunek 10

Gdy przyjmiemy, że $M(s_f, f_m) = \sqrt{s_f f_m}$ lub $M(s_f, f_m) = \frac{2 \cdot s_f \cdot f_m}{s_f + f_m}$ różnice w liczebności samotnych kobiet i mężczyzn dla różnych $M(s_f, f_m)$ są bardzo małe. Poniżej znajduje się porównanie krzywych dla poszczególnych funkcji małżeństw.



Rysunek 11

Jak widać krzywe rozwiązań pokrywają ze sobą, lecz rozbieżne są z danymi rzeczywistymi.

3.2 Modele opisujące migracje ludności

Migracja ludności jest jednym z kluczowych i bardzo skomplikowanych socjologicznie procesów mających wpływ na liczebność populacji. Jednocześnie faktem jest, że nie została poddana szerokim studiom matematycznym.

3.2.1 Model Lotki-Volterra

Jeden z podstawowych modeli uwzględniających oddziaływanie populacji na siebie. Ma szerokie zastosowanie w ekologii, lecz jest także istotny w demografii.
Do opisu zależności między populacjami dwóch krajów rozwiniętego i nierozwiniętego uzasadnionym byłoby zastosowanie tego modelu. [3]

Założenia modelu

Model Lotki-Volterra opisuje liczbę osobników dwóch populacji rywalizujących ze sobą i powiązanych ze sobą (np. system ofiara-drapieżnik). Zakłada się, że: [1]

1. Zasoby pożywienia dla drapieżników zależą całkowicie od wielkości populacji ofiar.
2. Zmiana w liczebności populacji jest proporcjonalna do jej rozmiaru.
3. Środowisko nie zmienia się na korzyść jednego z gatunków i nie występuje genetyczna adaptacja.
4. Drapieżniki mają nieskończony apetyt.
5. Przyrost ofiar jest odwrotnie proporcjonalny do liczebności drapieżników.

W rozważanym przypadku zmodyfikowane założenia modelu to:

1. Populacja drapieżników to populacja mieszkańców kraju rozwiniętego, a populacja ofiar to populacja mieszkańców kraju nierozwiniętego.
2. Zakładam, że proces migracji odpowiada procesowi jedzenia.
3. Czynniki środowiskowo-polityczne są stałe.
4. Kraj rozwinięty przyjmuje liczbę imigrantów, tak długo, jak pozwala mu na to pojemność środowiska.
5. Wielkość populacji kraju nierozwiniętego maleje w wyniku migracji. W obu populacjach mamy do czynienia z narodzinami nowych mieszkańców.

Postać modelu

Model jest opisany za pomocą poniższego układu równań.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x, \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y, \end{cases} \tag{41}$$

Gdzie:

a - częstość narodzin ofiar lub współczynnik przyrostu ofiar,

b - częstość umierania ofiar na skutek drapieżnictwa,

c - częstość narodzin drapieżników lub współczynnik przyrostu drapieżników,

d - częstość umierania drapieżników lub współczynnik ubywania drapieżników,

Współczynniki w równaniu w naszym przypadku:

a - współczynnik przyrostu mieszkańców kraju nierozwiniętego,

b – współczynnik migracji mieszkańców z kraju nierozwiniętego do rozwiniętego,

c - współczynnik przyrostu mieszkańców kraju rozwiniętego,

d – współczynnik śmierci mieszkańców kraju rozwiniętego,

Rozwiązanie

Powyższego równania nie da się rozwiązać uzyskując funkcje $x(t)$ i $y(t)$. Rozwiązania równania można uzyskać za pomocą metod numerycznych. Stosuje się także wzór uzależniający populację y od x.
Wyprowadzenie zależności y od x:
Mnożąc obie strony równań przez dt otrzymujemy:

$$dx = (ax - bxy)dt, \tag{42}$$

$$dy = (cxy - dy)dt, \tag{43}$$

Dzieląc pierwsze równanie przez drugie:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(ax - bxy)dt}{(cxy - dy)dt} = \frac{x(a - by)}{y(cx - d)} = -\frac{x}{y}\frac{by - a}{cx - d}, \tag{44}$$

Stąd mamy:

$$-\frac{dy(by-a)}{y}=\frac{dx(cx-d)}{x}, \tag{45}$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$-(b-\frac{a}{y})dy=(c-\frac{d}{x})dx, \tag{46}$$

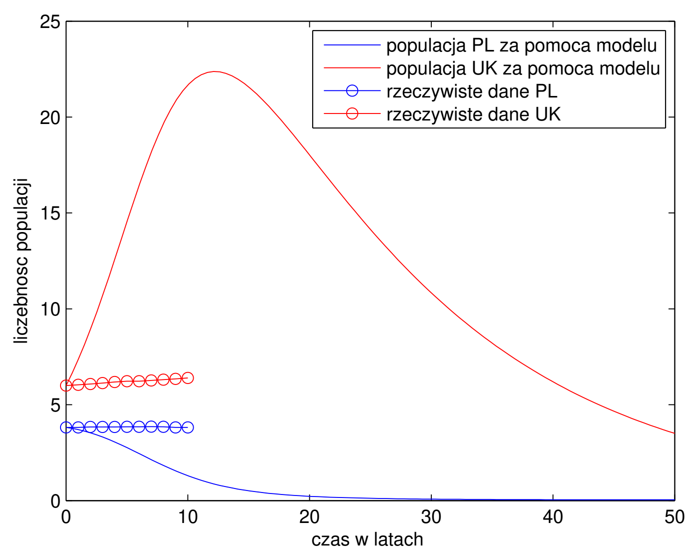
$$-by+a\ln y=cx-d\ln x+D, \tag{47}$$

$$D=-by+a\ln y-cx+d\ln x. \tag{48}$$

Gdzie D jest stałą wynikającą z warunków początkowych.

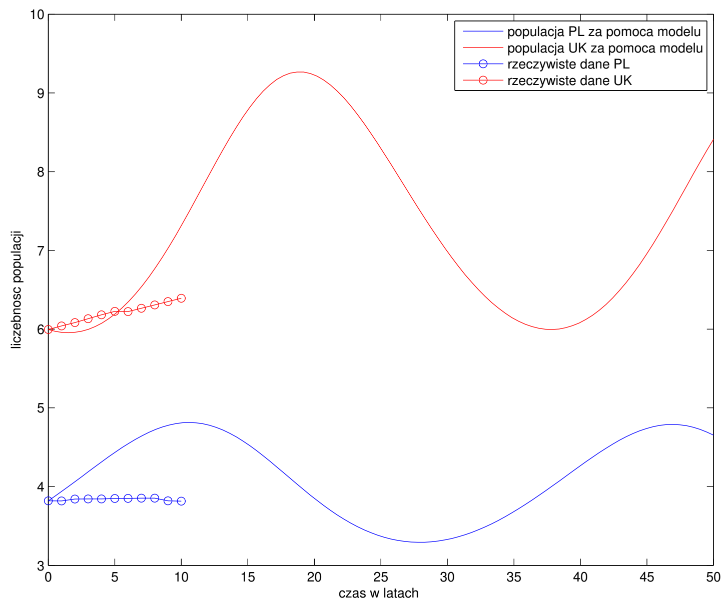
Sprawdzenie modelu

Prawdziwość powyższego modelu sprawdziłam biorąc pod uwagę populację Polski i Wielkiej Brytanii w okresie 10 lat od roku 2004 do 2014, gdyż to tam migrowali mieszkańcy Polski ze względów finansowych. Dane pobrałam z roczników statystycznych. Założyłam, że statystycznie sto tysięcy Polaków emigruje rocznie do Wielkiej Brytanii i przyjęłam: a=0.035; b=0.01; c=0.07; d=0.06;
warunki początkowe - y_0=[3.81906 5.9950]. Wtedy wykres liczebności populacji w czasie (czas wyrażony jest w latach, a rokiem zerowym jest rok 2004) ma postać:



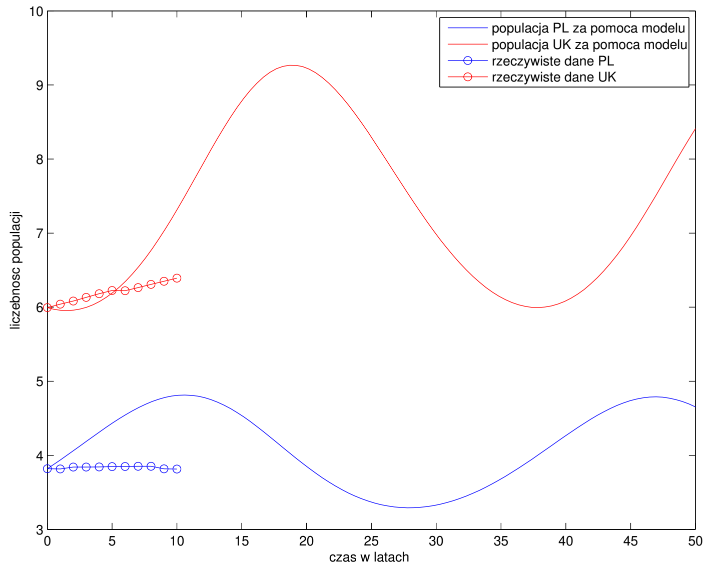
Rysunek 12

Zmieniłam parametry, by uzyskać bardziej dopasowane krzywe. Stąd dla $a = 0.15, b = 0.02, c = 0.06, d = 0.2$ uzyskujemy:



Rysunek 13

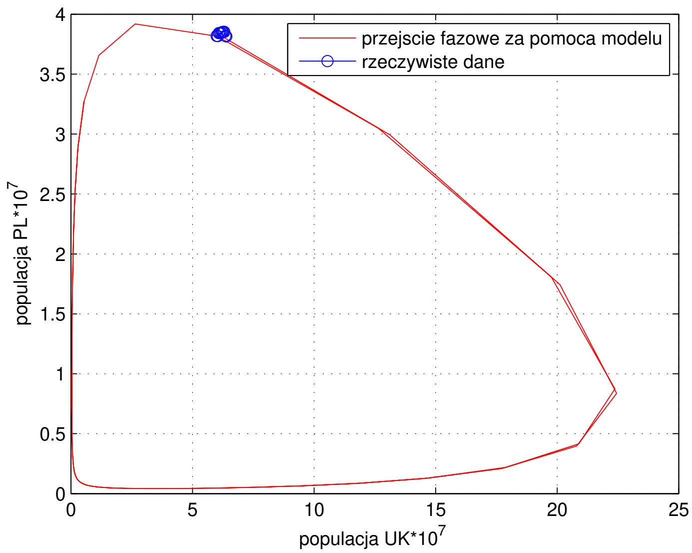
Z powyższego wykresu uzyskałam dobre wyniki dla populacji Polski dla 10 lat. Dla $a = 0.15; b = 0.02; c = 0.05; d = 0.2$; wykres ma postać:



Rysunek 14

Zamodelowana populacja Wielkiej Brytanii na powyższym wykresie pokrywa się z uzyskanymi danymi.

Wykres przejścia fazowego dla danych ma postać:



Rysunek 15

Na podstawie modelu można wywnioskować tendencje w zmianie liczebności populacji, przy manipulacji parametrami uzyskać stosunkowo adekwatne krzywe, lecz długoterminowo (na przykład prognozy na 30 lat) model przewiduje zbyt dużą liczebność populacji.

3.2.2 Ulepszony model Lotki- Volterra

Ulepszenie modelu następuje, gdy uwzględnimy równanie logistyczne, które bierze pod uwagę, że im większa jest populacja tym wolniejsze jej tempo wzrostu.

Założenia modelu

Te same, co w podstawowej postaci modelu, lecz z uwzględnieniem pojemności środowiska.

Postać modelu

Równanie logistyczne dane jest wzorem:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}) \tag{49}$$

Gdzie r to współczynnik narodzin, a K jest stałą pojemności środowiska.
Wtedy zmodyfikowany model Lotki-Volterra dla dwóch populacji ma postać:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_x x(1 - \frac{x+\alpha y}{K_x}), \\ \frac{dy}{dt} = r_y y(1 - \frac{y+\beta x}{K_y}), \end{cases} \tag{50}$$

Gdzie :

r_x - współczynnik narodzin populacji x,

r_y - współczynnik narodzin populacji y,

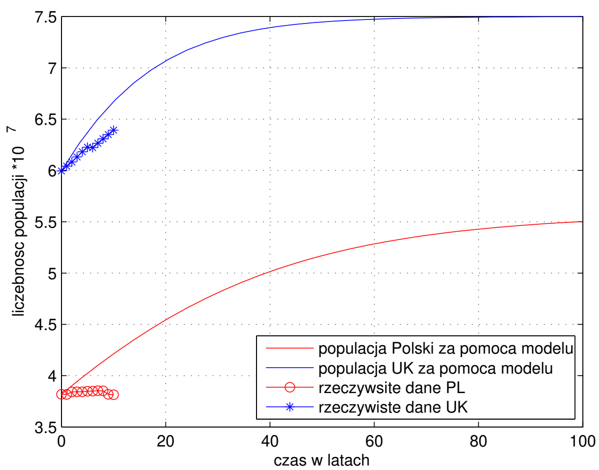
α - jest stałą opisującą efekt populacji y na populację x,

β - jest stałą opisującą efekt populacji x na populację y,

Model można uogólnić na n oddziałujących ze sobą populacji.

Sprawdzenie modelu

Do opisu rozważanych dwóch populacji zastosowałam ulepszony model Lotki-Volterra, zakładając, że pojemność środowiska dla mieszkańców Polski wynosi 55 mln. i dla mieszkańców Wielkiej Brytanii wynosi 75 mln. Otrzymałam wtedy poniższy wykres:



Rysunek 16

Ulepszony model Lotki-Volterra stosunkowo poprawnie modeluje populację mieszkańców Wielkiej Brytanii, lecz nieadekwatnie opisuje populację mieszkańców Polski.

4 Bibliografia

Literatura

[1] William James Hall: *McKendrick Partial Differential Equation and Its Uses in Epidemiology and Population Study B. L. KEYFITDepartment of Mathematics, University of Houston Houston, TX 77204-3476. U.S.A. N. KEYFITZ Department of Sociology TEX*, Cambridge, MA 02138. U.S.A.

[2] M. Iannelli, M. Martcheva, F. A. Milner: *Gender Structured Population modelling TEX*, Università di Trento, Povo, Italy, Polytechnic University, Brooklyn, New York, Purdue University, West Lafayette, Indiana

[3] Thomas K. Burch: *Does demography need differential equations?* TEX, University of Victoria Tu poprawic to co dokleilam do bibliografii David Weil: Economic Growth. Londyn: Pearson Addison Wesley, 2009

D. Weil, Economic Growth, roz. 4, Pearson Addison Wesley: Londyn 2009.