

Тренировочная студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
15 марта 2014

1. Операцию деления пополам можно получить следующим образом:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}$$

А операцию умножения так:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

2. Ответ: 1. По теореме Виета: $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Используя уравнения, заменим

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha}{\alpha^3}.$$

Осталось заметить, что:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma) = 1.$$

3. Ответ: 25. Пример:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Первый случай: если 4-ки стоят на позициях, в которых сумма индексов разной четности, то определитель равен:

$$\Delta = 4 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 + 4 \cdot s_3 + 4 \cdot s_4 + s_5 + s_6,$$

где $s_i = \pm 1$. Легко понять, что он не больше 18.

Второй случай: если 4-ки стоят на позициях, в которых сумма индексов одинаковой четности, то определитель равен:

$$\Delta = 4 \cdot 4 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 + 4 \cdot s_3 + s_4 + s_5 + s_6.$$

Ясно, что этот определитель не превосходит 27 и является нечетным. Достаточно показать, что все s_i одновременно не могут быть 1.

4. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \frac{i}{2}$. После замены $t = \frac{1}{z}$ система примет вид:

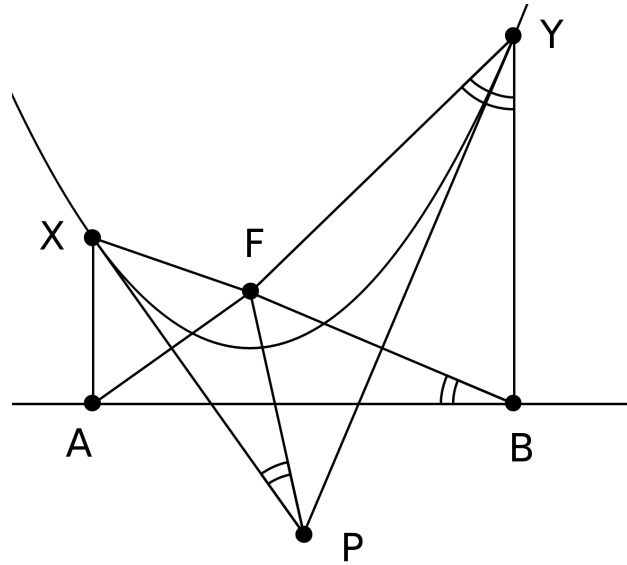
$$\begin{cases} |t| = 1 \\ t + t^{11} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Откуда легко получить, что $|t - \sqrt{3}| = 1$. Значит, решения могут находиться только среди точек пересечения единичных окружностей в центрах в $(0; 0)$ и $(\sqrt{3}; 0)$.

5. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Разобьем интеграл по области интегрирования на два и сделаем замену $x = -t$ в первом:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} + \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} = \\ & = \int_0^1 \frac{dt}{(e^{-t} + 1)(t^2 + 1)} + \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} = \\ & = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

6. Известно, что P — центр описанной окружности треугольника AFB (см. задачу 3 из олимпиады 2012–2013). Значит, $\angle FPX = \angle FBA = \angle FYP$. То есть треугольники FYP и FPX подобны.



7. (Баев А.Ж.) Утверждение: $f^{2014}(x) = x$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f(x) = x$ имеет решение. Легко доказывается от противного для произвольного уравнения $f^k(x) = x$ при $k > 1$.

Пусть $f(x) \neq x$. Легко показать, что $f(x_v) > x_v$, где x_v — вершина параболы. Это значит, что множество значений $f(x)$ вложено в область возрастания $f(x)$. То есть $f(x) \geq f(x_{\min}) > x_{\min}$. Значит, минимальное значение $f^{k+1}(x)$ будет больше, чем минимальное значение $f^k(x)$.

8. (Баев А.Ж.) Композицией мы можем получить функции:

$$s(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{x};$$

$$h(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(\cos(\operatorname{arctg}(x)))) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Применив k раз функцию $h(x)$, можно получить:

$$g_k(x) = h(h(\dots h(x) \dots)) = \sqrt{x^2 + k}.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}, n > 1$ существует такое $k = n^2 - 1$, что $g_k(1) = n$. То есть, для любого натурального существует композиция такая, что $R(1) = n$.

Рассмотрим

$$g_2(s(x)) = \sqrt{\frac{1 + 2x^2}{x^2}}.$$

Если в качестве x положить n (из условия $m^2 - 2n^2 = 1$), то получим $g_2(s(n)) = \frac{m}{n}$.

9. Индукцией по l доказывается, что

$$H_{2^l} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^l} \leq l + 1.$$

Далее, с учетом того, что $p_i < 2^{100}$:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \right)^k < k! \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq n} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} \leq$$

$$\leq k!(H_{2^{100k}} - 1) \leq (100k)k!,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} < ((100k) \cdot k!)^{\frac{1}{k}}.$$

Здесь k — любое натуральное. Положим $k = 4$.