

Вступительный экзамен по математике — 2013

Вариант 1

1. Докажите, что число

$$\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[6]{3}\right)^3 \cdot \left(9 + 5\sqrt{3}\right)$$

является целым и найдите это целое число.

2. Решите неравенство

$$\frac{13 \cdot |x + 2| - 5}{2 \cdot |x + 2| + 1} < 4.$$

3. Решите уравнение

$$2 + \cos(\pi + 9x) = 5 \sin \frac{\pi - 9x}{2}.$$

4. В возрастающей арифметической прогрессии произведение седьмого и восьмого членов на 46 больше, чем произведение пятого и девятого членов, и на 108 больше, чем произведение третьего и десятого членов. Чему равна сумма первых 25 членов этой прогрессии?

5. Решите неравенство

$$(18 - 3x) \cdot \log_{2^x - 12} \sqrt[3]{2} \leq 1.$$

6. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 20, а длина боковой стороны CD равна $10\sqrt{3}$. Через точки A , B , C проходит окружность, пересекающая основание трапеции AD в точке F . Угол AFB равен 60° . Найдите длину отрезка BF .

7. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 26. Результат разделили на сумму исходных натуральных чисел с остатком. В частном получили 5, а в остатке 60. Найдите исходные натуральные числа.

8. Квадрат $ABCD$ со стороной 3 см является основанием двух пирамид $MABCD$ и $NABCD$, причем MA и NC — высоты этих пирамид и точки M , N лежат по одну сторону от плоскости $ABCD$. Сумма длин высот MA и NC равна 9 см, а объем общей части пирамид равен 6 см^3 . Найдите отношение высот MA и NC .