

Открытая олимпиада по программированию  
Весенний тур 2015  
18 марта 2015

**A. Adamant digit**

Автор: Абдикалыков А.К.

Число будет состоять из  $m$  одинаковых цифр  $(n - 1) \bmod 9 + 1$ , где  $m = \left\lceil \frac{n-1}{9} \right\rceil + 1$ .  
Асимптотика:  $O(n)$ .

**B. Binary palindromes**

Автор: Баев А.Ж.

Обозначим  $f(k)$  — число, полученное перевернутой битовой записью числа  $k$ .

Пусть двоичная запись числа  $n$  состоит из  $2d$  бит. Отразим первую половину битов (число  $k = \left\lfloor \frac{n}{2^d} \right\rfloor$ ) на вторую зеркально:

$$g_1(n) = 2^d k + f(k)$$

Если  $g_1(n) \leq n$ , то  $g_1(n)$  является ответом. Иначе уменьшим на единицу первую битовую половину числа  $n$  и также отразим на вторую зеркально:

$$g_2(n) = 2^d(k - 1) + f(k - 1)$$

Если двоичная запись числа  $n$  состоит из  $2d + 1$  бит, то поступаем аналогично:

$$g_1(n) = 2^d k + f\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right)$$

$$g_2(n) = 2^d(k - 1) + f\left(\left\lfloor \frac{k - 1}{2} \right\rfloor\right)$$

Асимптотика:  $O(\log n)$ .

**C. Composition of matrices**

Автор: Баев А.Ж.

Вектор не изменит свою длину, если перед операцией проектирования на ось, он параллелен этой оси. Переберем все возможные целочисленные углы поворота  $\alpha$  от 0 до 179 (градусов). Перед каждым оператором проецирования, начиная со второго, проверим величину текущего угла по модулю 180. Если перед проецированием на  $OX$  угол отличен от 0, то  $\alpha$  не подходит. Если перед проецированием на  $OY$  угол отличен от 90, то  $\alpha$  не подходит.

Асимптотика:  $O(n)$ .

**D. Deep tree**

Автор: Абдикалыков А.К.

Заметим, что переходы по дереву соответствуют нахождению наибольшего общего делителя чисел. Причем, если наибольший общий делитель  $(p, q)$  отличен от 1, то решения нет. Значит, ответом будет количество итераций в алгоритме Евклида. Если  $\gcd(a, b)$  — количество действий для получения чисел  $(a, b)$ , то

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b) + a/b.$$

Асимптотика:  $O(\log \max(a, b))$ .

Указание: алгоритм Евклида с вычитанием не проходил из-за ограничений по времени.

## E. Empty cornet

Автор: Баяев А.Ж.

Если хотя бы у одной из трех точек координата  $z_i < 0$ , то решения нет. В противном случае, достаточно найти объем тетраэдра

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Так как уровень должен быть параллелен плоскости  $XOY$ , то необходимо произвести нормировку векторов  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  и  $(x_3, y_3, z_3)$  так, чтобы их  $z$ -координата была равна  $h = \min z_1, z_2, z_3$  — минимальной из трех. Таким образом, объем равен:

$$\tilde{V} = V \cdot \frac{h^3}{z_1 z_2 z_3}.$$

Асимптотика:  $O(1)$ .

## F. Fantastic system

Автор: Абдикалыков А.К.

Пусть  $d[i]$  — количество способов записать  $i$  в фантастической системе счисления.

Если  $i = 2k + 1$ , то разряд единиц может быть только 1, а остальные разряды являются разрядами числа  $k$ .

Если  $i = 2k$ , то разряд единиц может быть либо 0, либо 2. Если это 0, то остальные разряды соответствуют разрядам числа  $k$ . Если это 2, то остальные разряды соответствуют числу  $k - 1$ .

Итог:

$$\begin{cases} d[2k + 1] = d[k] \\ d[2k] = d[k] + d[k - 1] \end{cases}$$

Начальные значения:  $d[0] = 1$ ,  $d[1] = 1$ .

## G. Great graph

Автор: Абдикалыков А.К., Баяев А.Ж.

Строим решето Эратосфена для первых 10000 чисел. Фиксируем  $n$ . Числа будем искать обходом в глубину или ширину, где переход между числами проверяется по решету Эратосфена. Ясно, что если задача имеет решение при некотором  $n$ , то она имеет решение и при больших  $n$ . Аналогично, если она не выполнима при  $n$ , то и не выполнима при меньших. Значит ответ можно найти бинарным поиском по  $n$  из диапазона от 0 до 10 000.

Стоит отметить, что число ребер не превышает  $n^2$ .

Асимптотика:  $O(m \log m + n^2 \log m)$

## Н. Н

Автор: Абдикалыков А.К., Баяев А.Ж.

Ответом на задачу было название задачи этой олимпиады: 'Adamant digit', 'Binary palindromes', 'Composition of matrices', 'Deep tree', 'Empty cornet', 'Fantastic system', 'Great graph', 'Н', 'Insidious time limit', 'Jagged sequence'.

Асимптотика:  $O(1)$ .

## I. Insidious time limit

Автор: Абдикалыков А.К.

Используем матричное умножение:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$$

Таким образом  $(a_n, a_{n-1}, a_{n-2})^T = A^{n-2}(a_2, a_1, a_0)^T$ . Осталось вычислить степень матрицы  $A^{n-2}$ , что

можно сделать бинарным возведением в степень:  $A^m = \begin{cases} E, & \text{если } m = 0 \\ (A^{\lfloor n/2 \rfloor})^2, & \text{если } m \text{ — четное, } m > 0 \\ (A^{\lfloor n/2 \rfloor})^2 \cdot A, & \text{если } m \text{ — нечетное} \end{cases}$

Асимптотика:  $O(\log n)$

Замечание 1: все умножения в матричных действиях необходимо производить по модулю.

Замечание 2: наивное решение не проходит по ограничениям времени.

## J. Jagged sequence

Автор: Абдикалыков А.К.

Рассмотрим вспомогательную последовательность  $b_i = a_i - i$ . Необходимо изменить ее числа так, чтобы все числа стали равными.

Решение 1. Отсортируем числа по возрастанию  $\tilde{b}_i$ . Искомым числом будет медиана  $\tilde{b}[\lfloor n/2 \rfloor]$ . Действительно, если искомое число меньше, то каждое число  $\tilde{b}[i]$  при  $i \geq \lfloor n/2 \rfloor$  необходимо уменьшить дополнительно на 1, а числа  $\tilde{b}[i]$  при  $i < \lfloor n/2 \rfloor$  необходимо увеличить дополнительно на 1. Тогда общее количество изменений увеличится, так как чисел первой группы больше, чем чисел второй группы.

Асимптотика:  $O(n \log n)$ .

Решение 2. Рассмотрим  $m$  — итоговое значение всех чисел. Тогда количество изменений равно

$$f(m) = \sum_{i=1}^n |b_i - m|$$

Данная функция является кусочно-линейной и выпуклой вниз. Поэтому ее минимум можно найти бинарным поиском по  $m$  на отрезке от  $\min b_i$  до  $\max b_i$ .

Асимптотика:  $O(m \log(\max |a_i| + n))$ .