Открытая олимпиада по программированию
Зимний тур 2014
9 декабря 2014

A. Automultiplicative numbers

Автор: Абдикалыков А.К.

Автомультипликативными числами будут только однозначные числа, так как если число разрядов $n \geqslant 1$, то

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant 10^{n-1} \cdot a_1 > 9^{n-1} \cdot a_1 \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Ответ: $\max(\min(b, 9) - a + 1, 0)$.

Асимптотика: $O(1)$.

B. BNF

Автор: Абдикалыков А.К.

Символ c может находиться на любой из N позиций. Остальные позиции могут быть заняты одним из 2 символов: a или b. Общее количество строк: $2^{N-1}N$. Стоит отметить, что ответ должен быть вычислен по модулю, соответственно, все умножения производятся по модулю. Ограничения N не позволяют вычислять 2^{N-1} наивно — следовало воспользоваться бинарным возведением в степень:

$$2^K = \begin{cases} 2^{K/2}, \text{ если К — четное,} \\ 2^{K/2} \cdot 2, \text{ если К — нечетное,} \\ 1, \text{ если К} = 0 \end{cases}$$

Асимптотика: $O(\log N)$.

C. Cheer up!

Обозначим $dp[n][s]$ — вероятность того, что после n бросков выпадет сумма s. По определению полной вероятности:

$$dp[n][s] = \frac{1}{6} \sum_{i \in [1;6], x[i] \leqslant s}^{6} dp[n-1][s - x[i]].$$

Начальные значения: $dp[0][0] = 1.0$, $dp[i][0] = 0.0$ при всех $i > 0$.

Асимптотика: $O(ns)$.

D. Decks

Автор: Баев А.Ж.

Для каждой строки подсчитаем $count[i][c]$ сколько раз в i-й строке встречается символ c (каждая из 26 возможных букв). Далее для каждой буквы выберем минимальное значение среди всех строк $ans[c] = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} count[i][c]$. Выведем каждый символ c в количестве $ans[c]$.

Асимптотика: $O(n)$.

E. Ellipse

Автор: Баев А.Ж.

Эллипс с полуосями a и b (где $a > b$) получается из окружности радиуса a параллельным проектированием, при котором все площади умножаются $\frac{b}{a}$. Соответственно, достаточно решить задачу для окружности. Максимальную площадь будет иметь правильный n-угольник, вписанный в окружность радиуса a: $\frac{na^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Ответ: $\frac{nab}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Асимптотика: $O(1)$.

F. Flip

Автор: Баев А.Ж.

Необходимо было посчитать количество совпадающих символов в исходной и перевернутой строке.

Асимптотика: $O(n)$.

G. GOR

Автор: Баев А.Ж.

Реализовать наивное решение можно с помощью рекурсивного определения:

$$gor(x,y) = \begin{cases} gor([\frac{x}{g}],[\frac{y}{g}]) \cdot g + (x+y) \bmod g, \text{ если } x > 0, y > 0 \\ x+y, \text{ если } x = 0 \text{ или } y = 0 \end{cases}$$

Но ограничения по времени не дают возможности просчитать всё наивно, поэтому оптимизируем операцию. Основная идея заключается в том, что операция производится независимо по всем разрядам (при записи чисел в g-чной системе счисления). Поэтому результат можно вычислить отдельно по каждому разряду.

Вычислим за $O(1)$ сумму из N подряд идущих чисел от gk до $gk+(g-1)$. Рассмотрим некоторый разряд, отличный от младшего. У всех g чисел он будет одинаковым. Так как сумма g одинаковых чисел при делении на g дает остаток ноль, то все разряды результата, отличные от младшего, равны нулю. Рассмотрим самый младший разряд: это сумма чисел от 0 до $g-1$ по модулю g. Если g нечетно, то сумма равна нулю, если g четно — $g/2$.

Теперь можно суммировать все числа эффективно: ищем минимальное $L \geqslant A$ и максимальное $R \leqslant B$, которые кратны g. Находим результат вычисления от A до $L-1$ наивно, от L до $R-1$ эффективно и от R до B наивно.

Асимптотика: $O(g\log n/\log g)$.

H. Holes

Автор: Абдикалыков А.К.

Рассмотрим граф, у которого вершины — клетки, а ребрами соединены либо соседние по границе клетки, либо клетки с одинаковым буквенным обозначением. Запустим обход в ширину или в глубину из левого верхнего угла и проверим, достижим ли правый нижний угол.

Асимптотика: $O(nm)$.

I. Interesting permutation

Автор: Абдикалыков А.К.

Пусть $(q-1)^2 < n \leqslant q^2$. Построим решение жадно: для n выберем позицию a_n так, что $n+a_n = q^2$. Следует принять во внимание, что a_n определяется корректно ($a_n \leqslant n$), так как

$$(q-1)^2 \leqslant n-1$$

$$q \leqslant \sqrt{n-1}+1$$

$$q^2 - n \leqslant 2\sqrt{n-1} \leqslant n$$

так как $4n-4 \leqslant n^2$. Таким же образом можно расставить числа $(n-k)$ на позиции $a_{n-k} = q^2-(n-k)$, для которых $a_{n-k} \leqslant n$, то есть $k \leqslant 2n - q^2$.

Среди еще не расставленных чисел (это все числа от 0 до $q^2 - n - 1$) выберем максимальное и проведем такую процедуру.

Асимптотика: $O(n)$.

Замечание: ответов может несколько, данное решение строит только один из вариантов.