

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
8 декабря 2018

1. В множестве  $S$  выбран элемент  $x$ . Обозначим через  $B(x)$  множество всех подмножеств, которые содержат  $x$ , а через  $N(x)$  — множество всех подмножеств, которые не содержат  $x$ . Докажите, что множества  $B(x)$  и  $N(x)$  равномощны, то есть  $|B(x)| = |N(x)|$ .
2. Для некоторой непрерывной на  $\mathbb{R}$  функции  $f(x)$  существует бесконечно много положительных чисел  $t$  таких, что для любого  $x$

$$f(x+t) > f(x).$$

Можно ли утверждать, что  $f(x)$  — возрастающая функция?

3. Даны две вещественные квадратные матрицы  $A$  и  $B$  порядка  $n$  такие, что

$$A^2(B+E) = B,$$

где  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ . Докажите, что  $AB = BA$ .

4. Для каких натуральных  $n$  существует кратное 13 натуральное число, сумма цифр которого равна  $n$ ? Например,  $n = 8$  подходит, потому что 26 делится на 13 и сумма его цифр равна 8.
5. Назовём вещественную квадратную матрицу порядка  $n$  «особенной», если при увеличении на 1 любых двух её элементов определитель не меняется.
  - (a) Найдите все «особенные» матрицы порядка 2;
  - (b) Найдите все «особенные» матрицы порядка 3;
  - (c) Найдите одну «особенную» ненулевую матрицу порядка 4. Покажите, что условие действительно выполняется.
6. Дан ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ . Обозначим  $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ . Докажите, или опровергните утверждения:
  - (a) если  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  — абсолютно сходящийся ряд, то  $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$  — тоже абсолютно сходящийся ряд;
  - (b) если  $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$  — абсолютно сходящийся ряд, то  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  — тоже абсолютно сходящийся ряд.
7. Дана дифференцируемая на  $[0; 1]$  функция  $f(x)$  такая, что  $f(1) = \frac{2}{3}$ . Докажите, что

$$\int_0^1 \left( (f'(x))^2 + 2f(x) \right) dx \geq 1$$

Найдите все функции  $f(x)$ , при которых достигается равенство.