Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
8 декабря 2018

1. (Васильев А.Н.) Для произвольного $b \in B(x)$ построим $a \in N(x)$ как дополнение до S, то есть $a = S \setminus b$. Действительно, $x \in b$ тогда и только тогда, когда $x \notin a$. Значит, $|B(x)| = |N(x)|$.

2. (Абдикалыков А.К.) Это утверждение не верно. Условию удовлетворяет любая функция вида $f(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ — возрастающая, $h(x)$ — периодическая, например, не являющиеся возрастающими $f_1(x) = x + \{x\}$ и $f_2(x) = x + 2\sin x$.

3. (Баев А.Ж.) Свойство 1. Если $XY = E$, то $YX = E$.

   Свойство 2. Если $XYZ = E$, то $ZXY = E$ и $YZX = E$.

   Преобразуем условие
   $$(E - A^2)(B + E) = E.$$

   Заметим, что $(E - A)(E + A) = (E + A)(E - A)$.

   Получаем, что
   $$\begin{cases}(E - A^2)(B + E) = E\\ (B + E)(E - A^2) = E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(E - A)(E + A)(B + E) = E\\ (B + E)(E + A)(E - A) = E\end{cases}$$
   $$\begin{cases}(E + A)(B + E)(E - A) = E\\ (E - A)(B + E)(E + A) = E\end{cases} \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases}-A^2B - A^2 + AB - BA + B = 0\\ -A^2B - A^2 + BA - AB + B = 0\end{cases}$$

4. (Абдикалыков А.К.) Заметим, что 1001 делится на 13. Значит, для любого k можно составить кратное 13 число с суммой цифр $2k$ — 10011001...1001 (k раз подряд записанная последовательность цифр 1001). Заметим, что и число 10101 также делится на 13. Значит, можно получить число с суммой цифр $2k+3$, кратное 13 — 10011001...100110101 (k раз подряд 1001, затем 10101 в конце).

   Остается проверить $n = 1$. Если число имеет сумму цифр 1, то это степень десятки — не делится на 13.

   Ответ: все $n > 1$.

5. (Абдикалыков А.К.) Пусть M' — матрица, полученная из «особенной» матрицы M увеличением на 1 двух элементов на позициях (i, j_1) и (i, j_2). Тогда по свойствам определителей $|M'| = |M| + A_{ij_1} + A_{ij_2}$, из чего следует, что алгебраические дополнения любых двух элементов одной строки должны быть противоположны. Аналогично выводится то, что противоположны алгебраические дополнения любых двух элементов одного столбца.

   (a) Для случая $n = 2$ это означает просто, что все элементы матрицы равны друг другу. Осталось теперь подобрать такой x, что
   $$\begin{vmatrix}x & x\\ x & x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x+1 & x\\ x & x+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & x+1\\ x+1 & x\end{vmatrix}.$$

   Получаем, что единственной «особенной» матрицей порядка 2 является матрица
   $$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

   Если $n > 2$, то это означает, что $A_{ij} = 0$ для всех элементов матрицы. Пусть теперь M' — матрица, полученная из M увеличением на 1 двух элементов на позициях (i_1, j_1) и (i_2, j_2). Тогда

$|M'| = |M| + A_{ij_1} + A_{ij_2} + A^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}$; таким образом, $A^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} = 0$ для любых i_1, i_2, j_1, j_2, следовательно, $\operatorname{rg} M \leqslant n - 3$.

(b) Для случая $n = 3$ это означает, что M может быть только нулевой. Нетрудно проверить, что нулевая матрица порядка 3 является «особенной», причём, она является единственной «особенной» матрицей порядка 3.

(c) Для случая $n = 4$ подходящей ненулевой матрицей может быть только матрица ранга 1. Возьмём, например, матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При изменении любых двух её элементов останутся как минимум две одинаковые строки, и значит, её определитель останется равным нулю.

6. (Васильев А.Н.)

   (a) Неверно, например, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Ряд из $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к 1, так как

   $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

   Тогда ряд из $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ расходится:

   $$r_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

   (b) Верно, так как $|a_n| = |r_{n-1} - r_n| \leqslant |r_{n-1}| + |r_n|$.

7. (Баев А.Ж.) Заметим, что

$$\int\limits_0^1 \Big(f'(x) - x\Big)^2 dx \geqslant 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \Big((f'(x))^2 - 2xf'(x)\Big) dx + \frac{1}{3} \geqslant 0.$$

После интегрирования по частям $\int\limits_0^1 2xf'(x)dx = \frac{4}{3} - \int\limits_0^1 2f(x)dx$ получаем требуемое. Равенство будет достигаться, если $f'(x) = x$, значит, единственной подходящей функцией является $f(x) = \frac{3x^2+1}{6}$.