

# Введение в численные методы. Интерполяция и аппроксимация

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

18 февраля 2019

- 1 СЛАУ (точные методы)
- 2 СЛАУ (итерационные методы)
- 3 решение нелинейных уравнений
- 4 **интерполяция**
- 5 аппроксимация
- 6 интегрирование
- 7 дифференцирование

# Интерполяция

Интерполяция — способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Дана сетка порядка  $n$ :

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

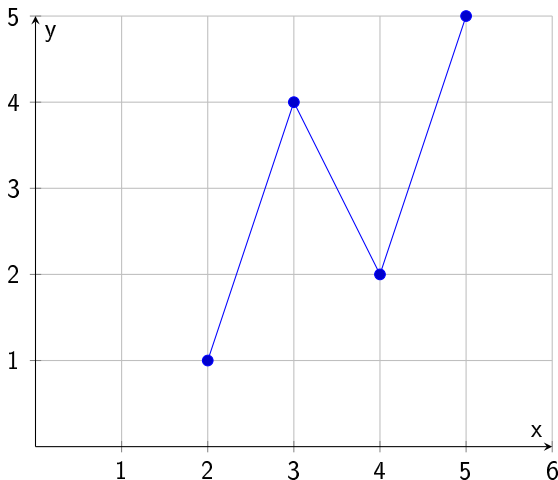
Дан набор измерений:

$$y_i = f(x_i)$$

Необходимо восстановить значение функции  $f$  в другом наборе точек  $z_0 < z_1 < \dots < z_m$ ,

# Кусочно-линейная интерполяция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} (x - x_i) + y_i, x \in [x_i; x_{i+1}) \end{cases}$$



# Кусочно-линейная интерполяция

Недостатки: недифференцируема (большинство физических и экономических процессов имеют более гладкий характер).

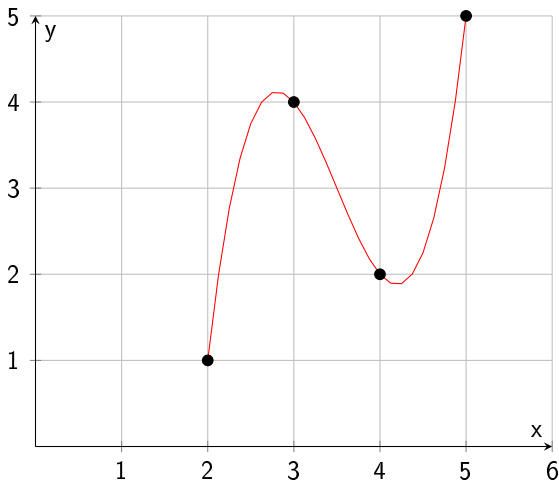
# Кусочно-линейная интерполяция

Для восстановления зависимости в точке  $z$  необходимо определить  $x_i \leq z < x_{i+1}$ .

Асимптотика для восстановления зависимости в  $m$  точках:  $O(m \log n)$ .

# Интерполяционный многочлен Лагранжа

Строим  $P(x)$  — многочлен  $n$ -й степени, который будет проходить через заданные точки  $(x_i, y_i)$ .

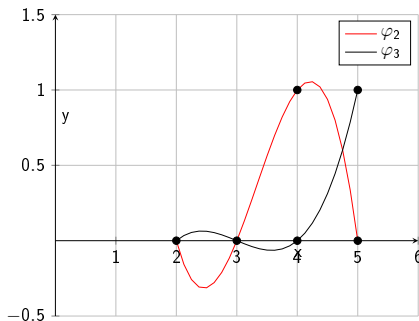
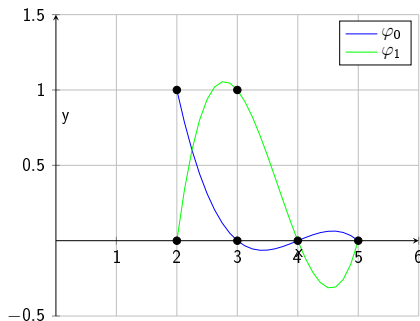


# Интерполяционный многочлен Лагранжа

Введём базис из многочленов  $\varphi_i(x)$  таких, что

$$\varphi_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Основное свойство:  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ .



$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x)$$



# Интерполяционный многочлен Лагранжа

Недостатки: большая вариация для некоторых классов функций  $f(x)$ .

# Интерполяционный многочлен Лагранжа

```
x = np.zeros(n + 1)
y = np.zeros(n + 1)

...

def phi(i, z):
    p := 1
    for j := 0 .. n
        p := p * (z - x[j]) / (x[i] - x[j])
    return p

def P(z):
    s := 0
    for i := 0 .. n
        s := s + y[i] * phi(i, z)
    return s
```

# Интерполяционный многочлен Лагранжа

Для восстановления зависимости в точке  $z$  необходимо вычислить значения для каждого  $\varphi_i(z)$ .

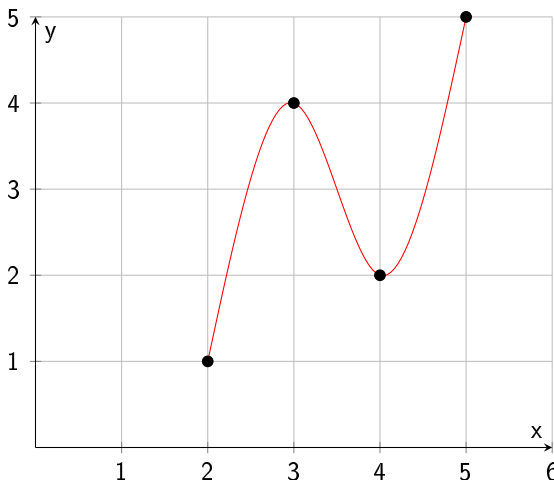
Асимптотика для восстановления зависимости в  $m$  точках:  $O(mn^2)$ .

Асимптотику можно улучшить. Подумайте как!

# Сплайновая интерполяция

$f(x)$  — сплайновая интерполяция, то есть на  $i$ -м отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  равна:

$$P_i(x) = A_i * (x - x_i)^3 + B_i * (x - x_i)^2 + C_i * (x - x_i) + D_i, i = \overline{0, n-1}$$



# Сплайновая интерполяция

Для более простых соотношений считаем, что сетка  $x_i$  — равномерная. То есть  $x_i = a + i * h$ , где  $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ . Строим аппроксимацию достаточно гладкую в узлах (дважды непрерывно дифференцируемая).

1. Значение  $i$ -го сплайна на левом конце равно  $y_i$ :

$$P_i(x_i) = y_i, i = \overline{0, n-1}$$

2. Значение  $i$ -го сплайна на правом конце равно  $y_{i+1}$ :

$$P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = \overline{1, n}$$

3. Первые производные сплайнов непрерывны в узлах:

$$P'_i(x_{i+1}) = P'_{i+1}(x_{i+1}), i = \overline{0, n-2}$$

4. Вторые производные сплайнов непрерывны в узлах:

$$P''_i(x_{i+1}) = P''_{i+1}(x_{i+1}), i = \overline{0, n-2}$$

5. Края свободны:

$$P''_0(x_0) = 0, P''_{n-1}(x_n) = 0$$

$$\begin{cases} D_i = y_i, & i = \overline{0, n-1} \\ A_i h^3 + B_i h^2 + C_i h + y_i = y_{i+1}, & i = \overline{0, n-1} \\ 3A_i h^2 + 2B_i h + C_i = C_{i+1}, & i = \overline{0, n-2} \\ 6A_i h + 2B_i = 2B_{i+1}, & i = \overline{0, n-2} \\ 2B_0 = 0 \\ 6A_{n-1} h + 2B_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Ответ для  $D_i$ :

$$D_i = y_i, i = \overline{0, n-1}$$

Выразим  $A_i$  через  $B_i$  и введем фиктивный элемент  $B_n = 0$ :

$$A_i = \frac{B_{i+1} - B_i}{3h}, i = \overline{0, n-1}$$

# Сплайновая интерполяция

Подставим  $A_i$  в оставшиеся неразрешенные соотношения:

$$\begin{cases} (B_{i+1} - B_i)\frac{h^2}{3} + B_i h^2 + C_i h + y_i = y_{i+1}, & i = \overline{0, n-1} \\ (B_{i+1} - B_i)h + 2B_i h + C_i = C_{i+1}, & i = \overline{0, n-2} \\ B_0 = 0 \\ B_n = 0 \end{cases}$$

Выразим  $C_i$  через  $B_i$ :

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (B_{i+1} + 2B_i)\frac{h}{3}, i = \overline{0, n-1}$$

Получим замкнутую систему для  $B_i$ :

$$B_i + 4B_{i+1} + B_{i+2} = 3\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2}, i = \overline{0, n-2}$$

# Сплайновая интерполяция

$$\begin{cases} B_0 = B_n = 0 \\ B_{i-1} + 4B_i + B_{i+1} = 3 \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

Сводится к СЛАУ  $(n+1)$ -го порядка с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{n-2} \\ B_{n-1} \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y_{xx,1} \\ 3y_{xx,2} \\ 3y_{xx,3} \\ \vdots \\ 3y_{xx,n-2} \\ 3y_{xx,n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

где  $y_{xx,i} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$



# Сплайновая интерполяция

По диагоналям:

$$a = (0, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0)$$

$$b = (1, 4, 4, 4, \dots, 4, 4, 1)$$

$$c = (0, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0)$$

$$f = 3 \cdot (0, y_{xx,1}, y_{xx,2}, y_{xx,3}, \dots, y_{xx,n-2}, y_{xx,n-1}, 0)$$

Методом прогонки можно решить систему  $As = f$  и получить вектор коэффициентов  $B$ . Остальные коэффициенты определяются по формулам:

$$\begin{cases} B_i &= s_i \\ A_i &= \frac{B_{i+1} - B_i}{3h} \\ C_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (B_{i+1} + 2B_i) \frac{h}{3} \\ D_i &= y_i \end{cases}$$

# Сплайновая интерполяция

Дана сетка на  $n = 3$  отрезка со значениями в узлах:  $(2, 1)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 5)$ .  
Шаг сетки:  $h = 1$ . Посчитаем правые части для СЛАУ:

$$3y_{xx,1} = 3(y_0 - 2y_1 + y_2)/h^2 = 3 * (1 - 2 * 4 + 2) = -15$$

$$3y_{xx,2} = 3(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2 = 3 * (4 - 2 * 2 + 5) = 15$$

Решаем методом прогонки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ:  $B = (0, -5, 5, 0)$ .

# Сплайновая интерполяция

Коэффициенты  $B$ :

$$B_0 = 0, B_1 = -5, B_2 = 5$$

Коэффициенты  $A$ :

$$A_0 = \frac{B_1 - B_0}{3h} = -\frac{5}{3}, A_1 = \frac{B_2 - B_1}{3h} = \frac{10}{3}, A_2 = \frac{B_3 - B_2}{3h} = -\frac{5}{3}$$

Коэффициенты  $C$ :

$$C_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{(B_1 + 2B_0)h}{3} = \frac{14}{3}, C_1 = \frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{(B_2 + 2B_1)h}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$C_2 = \frac{y_3 - y_2}{h} - \frac{(B_3 + 2B_2)h}{3} = -\frac{1}{3}$$

Коэффициенты  $D$ :

$$D_0 = y_0 = 1, D_1 = y_1 = 4, D_2 = y_2 = 2$$

Сплайновая интерполяция:

$$P(x) = \begin{cases} -\frac{5}{3}(x-2)^3 + 0(x-2)^2 + \frac{14}{3}(x-2) + 1, & x \in [2; 3) \\ \frac{10}{3}(x-3)^3 - 5(x-3)^2 - \frac{1}{3}(x-3) + 4, & x \in [3; 4) \\ -\frac{5}{3}(x-4)^3 + 5(x-4)^2 - \frac{1}{3}(x-4) + 2, & x \in [4; 5] \end{cases}$$

# Сплайновая интерполяция

```
def generateSpline(x, y)
    n = x.shape[0] - 1
    h = (x[n] - x[0]) / n

    a = np.array([0] + [1] * (n - 1) + [0])
    b = np.array([1] + [4] * (n - 1) + [1])
    c = np.array([0] + [1] * (n - 1) + [0])
    f = np.zeros(n + 1)
    for i in range(1, n):
        f[i] := 3 * (y[i-1] - 2 * y[i] + y[i+1]) / h**2
    s = sweep(n+1, a, b, c, f)

    for i in range(0, n):
        B[i] := s[i]
        A[i] := (B[i+1] - B[i]) / (3 * h)
        C[i] := (y[i+1] - y[i]) / h - \
                (B[i+1] + 2 * B[i]) * h / 3
        D[i] := y[i]
    return A, B, C, D
```

# Интерполяционный многочлен Лагранжа

Для определения коэффициентов необходимо решить прогонкой СЛАУ  $O(n)$ .

Асимптотика для восстановления зависимости в  $m$  точках:  $O(mn)$ .

# Домашнее задание №3

Даны 3 текстовых файла с числами записанными по столбцам:

- 1 train.dat — значения  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ;
- 2 train.ans — значения  $y_0, y_1, \dots, < y_n$ ;
- 3 test.dat — значения  $z_0, z_1, \dots, < z_m$ ;

Необходимо построить 3 различных интерполяционных модели  $y_i = f(x_i)$  по парам  $(x_i, y_i)$  и применить каждую из них на множестве  $z_j$ . Результат вывести в файл test.ans в виде  $m$  чисел.

# Домашнее задание №3

Базовый вариант:

- 1 линейная интерполяция на неравномерной сетке;
- 2 интерполяция лагранжа на неравномерной сетке;
- 3 интерполяция сплайнами на равномерной сетке (гарантируется, что  $x_i$  — равномерная сетка).

Бонус №1

- 2 интерполяция лагранжа на неравномерной сетке быстрее, чем  $O(mn^2)$  (должно работать менее 1 секунды при  $m$  и  $n$  порядка 1000).

Бонус №2

- 3 интерполяция сплайнами на неравномерной сетке (вывод формул необходимо сдать в письменной форме).

Супербонус №3

- 3 построить двумерную интерполяцию сплайнами  $(x(t), y(t))$  на равномерной сетке по  $t$  с графическим интерфейсом. Необходимо обрабатывать добавление точки мышкой на графическом полотне и достраивать интерполяцию. Принимают исключительно на *PyQt*.

Подробнее в [1, стр. 44] и [2, стр. 65].



Калиткин Н.Н. Численные методы. - Спб.: БХВ-Петербург, 2014.



Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.