

# Технология программирования на ЭВМ. Числа и арифметика.

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

19 октября 2019

## Виды целых чисел

Целые числа различаются:

1. по размеру (сколько байт занимает число: 1, 2, 4 или 8);
2. беззнаковые (10, 20) и знаковые (+10, -20).

## Беззнаковые числа

Стандартные размеры: 1, 2, 4 или 8 байта (то есть 8, 16, 32 или 64 бита соответственно).

Так как каждый бит может принимать значения 1 или 0, то общее количество кодируемых вариантов будет  $2^{BIT}$ .

| type               | byte | min | max                                       |
|--------------------|------|-----|---|
| unsigned char      | 1    | 0   | $2^8 - 1$ (255)                           |
| unsigned short     | 2    | 0   | $2^{16} - 1$ (65 535)                     |
| unsigned int       | 4    | 0   | $2^{32} - 1$ (4 294 967 295)              |
| unsigned long long | 8    | 0   | $2^{64} - 1$ (18 446 744 073 709 551 615) |

Беззнаковые типы, как правило, используются для подсчета количества, длины, размера.

## Знаковые числа

Стандартные размеры: 1, 2, 4 или 8 байта (то есть 8, 16, 32 или 64 бита соответственно).

Так как каждый бит может принимать значения 1 или 0, то общее количество кодируемых вариантов будет  $2^{BIT}$ .

| type      | byte | min  | max  |
|-----------|------|--|--|
| char      | 1    | $-2^7$ ( $-128$ )                                | $2^7 - 1$ ( $127$ )                        |
| short     | 2    | $-2^{15}$ ( $-32\,768$ )                         | $2^{15} - 1$ ( $32\,767$ )                 |
| int       | 4    | $-2^{31}$ ( $-2\,147\,483\,648$ )                | $2^{31} - 1$ ( $\approx 2 \cdot 10^9$ )    |
| long long | 8    | $-2^{63}$ ( $-9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ ) | $2^{63} - 1$ ( $\approx 9 \cdot 10^{18}$ ) |

Знаковые типы, как правило, используются для всего остального.

## Константы

- 42 — тип `int`;
- 42U — тип `unsigned int`;
- 42LL — тип `long long`;
- 42ULL — тип `unsigned long long`;
- 052 — тип `int` в восьмиричной системе счисления;
- 0x2A — тип `int` в шестнадцатиричной системе счисления.

Префиксы 0x и 0 задают 16-ричную и 8-ричную систему счисления соответственно.

Суффикс U обозначает беззнаковый тип.

Суффикс LL обозначает тип `long long`.

## Вещественные чисел в компьютере нет.

Так как вещественных чисел на любом конечном отрезке — несчетно, то хранить все числа из любого, даже небольшого диапазона в конечных ресурсах компьютера невозможно.

Но можно хранить рациональное приближение!

## Числа с плавающей запятой.

Запишем число 2,5 в двоичной системе счисления:

$$2,5 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 10,1_2$$

Нормализуем его:

$$10,1_2 = 1,01_2 \cdot 2^1$$

## Числа с плавающей запятой.

Запишем число 0,1 в двоичной системе счисления (умножаем на 2 и смотрим целую часть):

$$0,1 = 0,00011001100110011.._2 = 0,0(0011)_2$$

Нормализуем его (получим «экспоненту»):

$$0,1 = 0,00011001100110011.._2 = 1,1001100110011.._2 \cdot 2^{-4}$$

Оставим только 8 бит после запятой (получим «мантиссу»):

$$0,1 \approx 1,10011001 \cdot 2^{-4}$$

Мантисса:  $m = 110011001$

Экспонента:  $e = -4$



## Числа с плавающей запятой.

Общий вид

$$\pm(1 + 0,m) \cdot 2^e.$$

Числа около нуля идут достаточно плотно с шагом значительно меньше 1, число близкие к максимальным значениям идут шагом значительно больше 1.

Наиболее плотно числа расположены возле  $\pm 1.0$ .

## Числа с плавающей запятой.

Наблюдение: двоично-рациональные числа представляются точно, а любые остальные нецелые числа — приближенно (то есть, 0.25 хранится точно, а 0.1 — приближенно).

# Типы чисел.

| тип    | размер  | мантисса | экспонента | диапазон целых                   |
|--------|---------|----------|------------|----------------------------------|
| float  | 4 байта | 23 бита  | 8 бит      | $2^{24}$ (16 777 216)            |
| double | 8 байт  | 52 бита  | 11 бит     | $2^{53}$ (9 007 199 254 740 992) |

## Ошибки вещественных чисел.

Существует максимальный непрерывный диапазон целых чисел, представимых данным вещественным типом. Например, все целые числа до числа 16 777 216 можно представить в типе `float`, а число 16 777 217 — нельзя.  
Докажите!

## Константы.

- 12.3 — тип `double` со значением 12,3;
- 12.3f — тип `float` со значением 12,3;
- 12. — тип `double` со значением 12,0;
- 12.f — тип `float` со значением 12,0;

Научный стиль (scientific):

- 123e-1 — тип `double` со значением 12,3;
- 12e3 — тип `double` со значением 12 000;
- -12e3 — тип `double` со значением -12 000;
- 12e-3 — тип `double` со значением 0,012;
- -12e-3 — тип `double` со значением -0,012.

## Целочисленные арифметические операции.

Для целых чисел определены 5 арифметических операторов:

- $a + b$  сложение чисел  $a$  и  $b$ ;
- $a - b$  вычитание чисел  $a$  и  $b$ ;
- $a * b$  умножение чисел  $a$  и  $b$ ;
- $a / b$  целочисленное деление  $a$  на  $b$ ;
- $a \% b$  целочисленное деление  $a$  на  $b$ .

## Тип результата.

Если складываются 2 числа одного типа, то и результат будет этого же типа. Например:

- $1+2$  даст результат 3 типа `int`,
- $1ULL + 2ULL$  даст результат  $3ULL$  типа `unsigned long long`.

## Тип результата.

$\text{int} \rightarrow \text{unsigned int} \rightarrow \text{long long} \rightarrow \text{unsigned long long}$ .

Если складываются 2 числа разных типов, то и меньший по рангу тип преобразуется к старшему. Например

- $5 + 3\text{LL}$  преобразуется к операции  $5\text{LL} + 3\text{LL}$  и даст результат  $8\text{LL}$ ;
- $5\text{LL} - 3$  преобразуется к операции  $5\text{LL} - 3\text{LL}$  и даст результат  $2\text{LL}$ ;
- $5\text{U} * 3\text{ULL}$  преобразуется к операции  $5\text{ULL} * 3\text{ULL}$  даст результат  $15\text{ULL}$ ;
- $5 + 3\text{U}$  преобразуется к операции  $5\text{U} + 3\text{U}$  даст результат  $8\text{U}$ ;
- $5\text{ULL} - 3$  преобразуется к операции  $5\text{ULL} - 3\text{ULL}$  даст результат  $2\text{ULL}$ .



## Переполнение.

Все арифметические действия производятся по модулю  $2^{BIT}$ .  
При вычитании большего из меньшего, может получиться положительное число.

- $0U - 1U$  даст результат  $4\ 294\ 967\ 295U$ .

При сложении двух положительных знаковых чисел, может получиться отрицательное:

- $2\ 000\ 000\ 000 + 1\ 000\ 000\ 000$  даст результат  $-1\ 294\ 967\ 296$

(результат дает такой же остаток что и  $3\ 000\ 000\ 000$  при делении на  $2^{32}$ ).

## Оператор деления.

Целая часть и остаток.

- $17 / 5$  даст результат 3,
- $17 \% 5$  даст результат 2.

А если поделить:

- $5 / 17?$
- $5 \% 17?$
- $(-7) / 2?$
- $(-7) \% 2?$

## Вещественные арифметические операции.

Для вещественных чисел определены 4 арифметических операторов:

- $a + b$  сложение чисел  $a$  и  $b$ ;
- $a - b$  вычитание чисел  $a$  и  $b$ ;
- $a * b$  умножение чисел  $a$  и  $b$ ;
- $a / b$  целочисленное деление  $a$  на  $b$ .

## Тип результата.

Любой вещественный тип имеет ранг выше целочисленного.

- $5.0 + 3LL$  преобразуется к операции  $5.0 + 3.0$  и даст результат  $8.0$ ;
- $5.f - 3$  преобразуется к операции  $5.f - 3.f$  и даст результат  $2.f$ ;
- $5e-1 * 3ULL$  преобразуется к операции  $0.5 * 3.0$  даст результат  $1.5$ ;
- $5 / 3.0$  преобразуется к операции  $5.0 / 3.0$  даст результат около  $1.66667$ .

## Интересные ошибки.

- `5 % 3.0?`
- `16777216.f + 1.f?`

## Приоритет.

- Операторы одного приоритета выполняются слева направо.
- Приоритет операторов умножения и деления ( $*$  /  $%$ ) выше, чем приоритет сложения и вычитания  $+$   $-$ .
- Оператор деления  $%$  имеет абсолютно такой же приоритет, что и  $/$  и  $*$ .

## Примеры.

- $1 / 3 + 2 / 3 + 3 / 3$
- $(1 + 2 + 3) / 3$
- $1.0 / 3 + 2 / 3.0 + 3.0 / 3.0$
- $12345 \% 100 / 10$
- $12345 / 10 \% 10$
- $16 / 5 - 16 \% 5 + 16 * 5$

## Примеры.

преобразуется к

- $(1 / 3) + (2 / 3) + (3 / 3) = 0 + 0 + 1 = 1$
- $((1 + 2) + 3) / 3 = (3 + 3) / 3 = 6 / 3 = 2$
- $(1.0 / 3.0) + (2.0 / 3.0) + (3.0 / 3.0) = 0.33 + 0.67 + 1.00 = 2.00$
- $(12345 \% 100) / 10 = 45 / 10 = 4$
- $(12345 / 10) \% 10 = 1234 \% 10 = 4$
- $((16/5) - (16\%5)) + (16*5) = (3 - 1) + 80 = 82$  .



## Проверочная работа:

1. Какие из данных констант больше 30000:  
а) 0xBEEF; б) 033333; в) 33333LL?
2. Определить минимальный тип чисел, если требуется:  
а) сложить два целых числа 2 000 000 000 и 2 000 000 000;  
б) умножить два целых числа 2 000 000 и 2 000 000;  
в) поделить одно вещественно число 8,0 на 16 (точно);
3. Корректное вычисление среднего арифметического чисел 3 и 2:  
а)  $(3 + 2) / 2$ ;  
б)  $(3.f + 2.f) / 2$ ;  
в)  $(3 + 2) / 2LL$ .
4. Вычислить  
а)  $1LL * 2f + 0$ ;  
б)  $1 / 2 + 2U$ ;  
в)  $1e1 / 2e2 + 3.0$ .
5. Определить тип и объем в байтах результатов из №4.