Тренировочная студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

15 марта 2014

1. Операцию деления пополам можно получить следующим образом:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}$$

А операцию умножения так:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

2. Ответ: 1. По теореме Виета: $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Используя уравнения, заменим

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha}{\alpha^3}.$$

Осталось заметить, что:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma) = 1.$$

3. Ответ: 25. Пример:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Первый случай: если 4-ки стоят на позициях, в которых сумма индексов разной четности, то определитель равен:

$$\Delta = 4 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 + 4 \cdot s_3 + 4 \cdot s_4 + s_5 + s_6,$$

где $s_i = \pm 1$. Легко понять, что он не больше 18.

Второй случай: если 4-ки стоят на позициях, в которых сумма индексов одинаковой четности, то определитель равен:

$$\Delta = 4 \cdot 4 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 + 4 \cdot s_3 + s_4 + s_5 + s_6.$$

Ясно, что этот определитель не превосходит 27 и является нечетным. Достаточно показать, что все s_i одновременно не могут быть 1.

4. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \frac{i}{2}$. После замены $t = \frac{1}{z}$ система примет вид:

$$\begin{cases} |t| = 1 \\ t + t^{11} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Откуда легко получить, что $|t - \sqrt{3}| = 1$. Значит, решения могут находиться только среди точек пересечения единичных окружностей в центрами в $(0;0)$ и $(\sqrt{3};0)$.

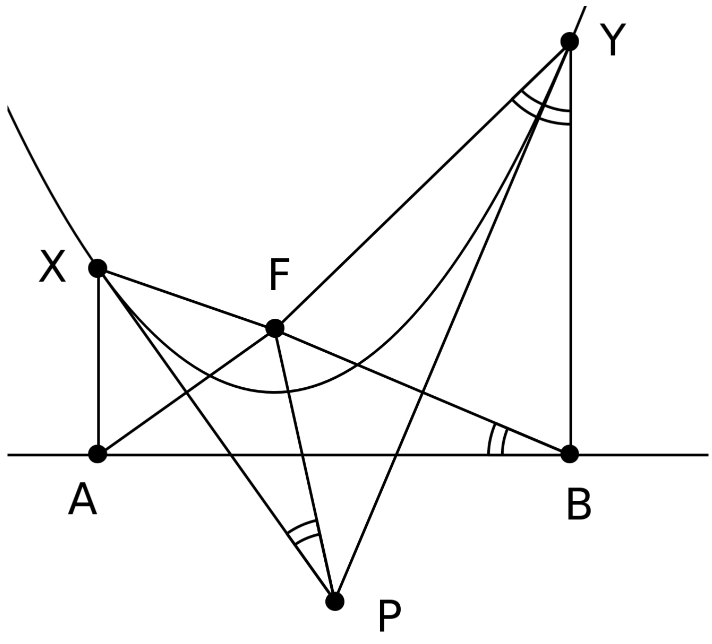
5. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Разобьем интеграл по области интегрирования на два и сделаем замену $x = -t$ в первом:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Известно, что P — центр описанной окружности треугольника AFB (см. задачу 3 из олимпиады 2012–2013). Значит, $\angle FPX = \angle FBA = \angle FYP$. То есть треугольники FYP и FPX подобны.



7. (Баев А.Ж.) Утверждение: $f^{2014}(x) = x$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f(x) = x$ имеет решение. Легко доказывается от противного для произвольного уравнения $f^k(x) = x$ при $k > 1$.

   Пусть $f(x) \neq x$. Легко показать, что $f(x_v) > x_v$, где x_v — вершина параболы. Это значит, что множество значений $f(x)$ вложено в область возрастания $f(x)$. То есть $f(x) \geqslant f(x_{min}) > x_{min}$. Значит, минимальное значение $f^{k+1}(x)$ будет больше, чем минимальное значение $f^k(x)$.

8. (Баев А.Ж.) Композицией мы можем получить функции:

$$s(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{x};$$

$$h(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(\cos(\operatorname{arctg}(x)))) = \sqrt{x^2+1}.$$

   Применив k раз функцию $h(x)$, можно получить:

$$g_k(x) = h(h(...h(x)...)) = \sqrt{x^2+k}.$$

   Для всех $n \in \mathbb{N}, n > 1$ существует такое $k = n^2 - 1$, что $g_k(1) = n$. То есть, для любого натурального существует композиция такая, что $R(1) = n$.

   Рассмотрим

$$g_2(s(x)) = \sqrt{\frac{1+2x^2}{x^2}}.$$

   Если в качестве x положить n (из условия $m^2 - 2n^2 = 1$), то получим $g_2(s(n)) = \frac{m}{n}$.

9. Индукцией по l доказывается, что

$$H_{2^l} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^l} \leqslant l + 1.$$

   Далее, с учетом того, что $p_i < 2^{100}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}\right)^k < k! \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n \leqslant n} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}} \leqslant$$

$$\leqslant k!(H_{2^{100k}} - 1) \leqslant (100k)k!,$$

   откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} < \left((100k) \cdot k!\right)^{\frac{1}{k}}.$$

   Здесь k — любое натуральное. Положим $k = 4$.