Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
10 декабря 2014

1. Ответ: $f(x) = x - \frac{3}{2}$. Рассмотрим функцию
$$g(x) = f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right).$$
Она непрерывна и удовлетворяет соотношению
$$g(2x+1) = \frac{1}{3}g(x),$$
для любого $x \in \mathbb{R}$. После замены $t = 2x+1$:
$$g(t) = \frac{1}{3}g\left(\frac{t-1}{2}\right).$$
Отсюда $g(-1) = 0$. Далее, для каждого $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим последовательность, заданную рекуррентным способом:
$$\begin{cases} y_1 = y, \\ y_{n+1} = \frac{y_n - 1}{2}. \end{cases}$$
Тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = -1$ и $g(y_n) = \frac{1}{3}g(y_{n+1})$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Значит,
$$g(y) = \frac{1}{3^n}g(y_n).$$
В силу непрерывности имеем $g(y) = 0$.

2. Ответ: $-\frac{\pi^2}{18}$.
Во-первых:
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = \{u = v^2\} = 2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-v^2)}{v}\,dv =$$
$$= 2\left(\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-v)}{v}\,dv + \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v}\,dv\right),$$
то есть
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = -2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v}\,dv.$$
Во-вторых:
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = \{z = v^3\} = 3\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-z^3)}{z}\,dz$$

3. Ответ: нет. Для некоторого $N \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \frac{H}{N!} + r_N,$$
где $H \in \mathbb{Z}$ и
$$|r_N| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{N+2} + ...\right) <$$
$$< \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(N+1)!} < \frac{1}{N!}.$$
При этом $r_N \neq 0$, так как $r_N = \frac{1}{(N+1)!}\varepsilon_{N+1} + r_{N+1}$ и $|r_{N+1}| < \frac{1}{(N+1)!}$.

4. (Абдикалыков А.К.) Пусть $f(\lambda) = |B - \lambda I|$ — характеристический многочлен матрицы B. Заметим, что требуется доказать то, что $f(1) \neq 0$; другими словами, то, что число 1 не является собственным значением матрицы B. А поскольку из $AB = A + 2014B$ следует $(A - 2014I)(B - I) = 2014I$, то матрица $B - I$ обязана быть невырожденной.

5. Ответ: при четном n выиграет начинающий, а при нечетном — его соперник. Легко заметить, что если текущее число нечетное, то игрок изменит число на четное; а если четное, то игрок всегда может уменьшить число на 1.

6. Пусть x таково, что $x^3 - x - 1 = 0$. Но тогда
$$x^5 - x^4 - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1) = 0.$$

7. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Из тождества
$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$
можно получить соотношение
$$\operatorname{arcctg} F_{2n+1} = \operatorname{arcctg} F_{2n} - \operatorname{arcctg} F_{2n+2}.$$
Искомая сумма, таким образом, будет равна
$$\operatorname{arcctg} F_2 = \pi/4.$$

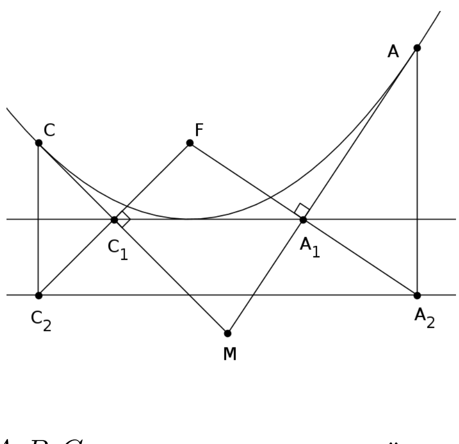
8. Все перестановки, обратные сами себе, можно представить в виде композиции непересекающихся циклов длины 2. Число перестановок α порядка $n+1$ таких, что $\alpha = \alpha^{-1}$ и $\alpha_{n+1} = n+1$, очевидно, равно a_n; число же перестановок α порядка $n+1$ таких, что $\alpha = \alpha^{-1}$ и $\alpha_{n+1} = k \neq n+1$ для некоторого фиксированного k, равно a_{n-1}. Общее число инволюций порядка $n+1$ равно $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$.

9. (Баев А.Ж.) Ответ: 24. Пусть столбцов не меньше, чем строк. Если столбцов не менее 5, то строк менее 5. Доказательство от противного (в первой строке как минимум 3 клетки одного цвета, значит, в остальных строках обязательно найдется прямоугольник с клетками противоположного цвета). Если строк 3 или 4, то столбцов менее 7 (доказательство аналогично предыдущему).

   Так как столбцов не более 6, строк не более 4, то ответ 24. Пример:

A	A	A	B	B	B
A	B	B	B	A	A
B	A	B	A	B	A
B	B	A	A	A	B

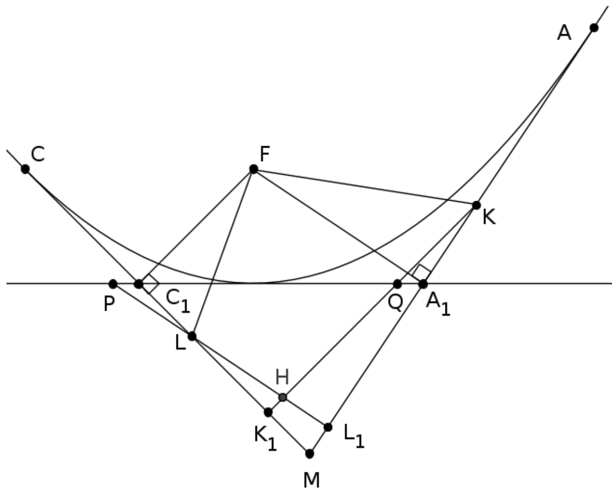
10. Обозначим: KLM — исходный треугольник, A, B, C — точки касания параболы и прямых MK, KL, LM. A_2, B_2, C_2 — проекции A, B, C на директрису. F — фокус параболы. A_1, B_1, C_1 — середины A_2F, B_2F, C_2F.



   Свойство 1. Прямая, содержащая $A_1B_1C_1$, является касательной к параболе и параллельна директрисе. Данный факт легко получить из оптического свойства параболы и определения параболы (треугольник FAA_2 — равнобедренный).

   Свойство 2. Треугольники FA_1K и FC_1L подобны. Данный факт получается из вписанных четырехугольников FKA_1B_1 и FB_1LC_1.

   Обозначим: L_1 — основание высоты из L на KM, K_1 — основание высоты из K на LM. P и Q — точки пересечения LL_1 и KK_1 с A_1C_1.



Свойство 3. $A_1Q = PC_1$. По соответствующим теоремам синусов для треугольников PC_1L, KA_1Q и C_1FA_1 можно получить, что

$$\frac{PC_1}{A_1Q} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{\sin Q}{\sin P} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin A_1} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{A_1F}{C_1F} = 1$$

Последнее верно из свойства 2.

Свойство 3. H лежит на директрисе. Для этого достаточно заметить, что треугольники PHQ и A_1FC_1 равны. Значит, расстояние от H и F до прямой A_1C_1 одинаково.