

Открытая командная олимпиада по программированию  
Весенний тур 2016  
30 апреля 2016

**A. Alexandra's subtractions**

Автор: Абдикалыков А.К.

Вторая максимальная разность равна:  $d_2 = \max(a_n - a_2, a_{n-1} - a_1)$ .

Асимптотика:  $O(n)$ .

Замечание: прямой перебор  $O(n^2)$  не проходит по ограничениям времени.

**B. Book of all the words**

Автор: Абдикалыков А.К.

Перевести число  $(k - 1)$  в  $n$ -ричную систему счисления.

Асимптотика:  $O(m)$ .

Замечание: прямой перебор  $O(n^m)$  не проходит по ограничениям времени.

**C. Change the word**

Автор: Баяев А.Ж.

Если запретить операцию изменения букв строки на симметричные, то ответ будет:

$$f(s_1, s_2) = \text{len}(s_1) + \text{len}(s_2) - 2 * \text{len}(\text{lcs}(s_1, s_2)),$$

где  $\text{len}(a)$  — длина строки  $a$ ,  $\text{lcs}(a, b)$  — наибольшая общая подстрока строк  $a$  и  $b$  (считается динамическим программированием за  $O(\text{len}(a) * \text{len}(b))$ ).

Если вернуть операцию изменения строк, то ясно, что она применяется не более одного раза. Тогда ответ на задачу:

$$\max(f(s_1, s_2), f(s_1, \bar{s}_2) + 1),$$

где  $\bar{s}$  — строка, полученная из строки  $s$  заменой всех букв на симметричные.

Асимптотика:  $O(\text{len}(s_1)\text{len}(s_2))$ .

**D. Doubtful numbers**

Автор: Абдикалыков А.К.

Легко понять, что подходят только числа вида  $pq$ , где  $p$  и  $q$  — различные простые числа. Обозначим через  $z(n)$  — количество чисел такого вида среди чисел от 1 до  $n$  (тогда ответ вычисляется как  $z(b) - z(a - 1)$ ). Фиксируем простое  $p$ . Подходящих чисел вида  $pq$ , где  $p < q$  и  $pq \leq n$  будет:  $\pi\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\right) - \pi(p)$ . Заметим, что перебирать данные  $p$  достаточно до  $\sqrt{n}$ :

$$z(n) = \sum_{p \leq \sqrt{n}} \pi\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\right) - \pi(p)$$

Решение состоит из трёх частей: построение всех простых от 1 до  $n$  за  $O(n \log \log n)$  (решето Эратосфена), просчет  $\pi(k)$  за  $O(n)$  и вычисление  $z(n)$  за  $O(\sqrt{n})$ .

Вместо вычисления функции  $\pi(n)$  можно вычислить данную сумму с помощью 2 указателей ( $p$  — первый указатель,двигающийся от 1 до  $n$ ,  $q$  — второй указатель,двигающийся от  $n$  до 1).

Асимптотика:  $O(n \log \log n)$ .

Замечание 1: решения с асимптотикой  $O(n\sqrt{n})$  и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: решения с неэффективным построением решета (например 2 целочисленных массива размера  $n$ ) не проходят по ограничениям памяти.

Замечание 3: данную задачу можно решить с асимптотикой  $O(\sqrt{n})$ , используя подход Генри Лемера для метода Мейсселя.

## Е. Experiment with tea

Автор: Баяев А.Ж.

Зафиксируем некоторый уровень воды  $h$ . Построим компоненту связности, начиная с нулевой по высоте клетки, на таблице со следующим условием связности: из клетки  $(i_1, j_1)$  можно попасть в  $(i_2, j_2)$ , если эти клетки соседние по стороне и  $a_{i_2 j_2} < h$ . Обход можно произвести с помощью алгоритма поиска в ширину или в глубину. При этом, если мы выходим на граничные клетки, то считаем, что обход завершился переполнением. Задача сводится к поиску максимального  $h$ , при котором обход не завершается переполнением, что легко решается бинарным поиском по  $h$ .

Асимптотика:  $O(n^2 \log(h))$ .

Замечание: решения с асимптотикой  $O(n^2 h)$  и хуже не проходят по ограничениям времени.

## Ф. Five words

Автор: Абдикалыков А.К., Баяев А.Ж.

Подсказка 1: «Коровы понимают каждое сказанное человеком слово, правда, только частично».

Подсказка 2: первые буквы каждой строки (КФМГУ).

Ответом является подстрока длины 3 строки:

moscowstateuniversitykazakhstanbranch

## Г. Glowing letters

Автор: Абдикалыков А.К.

Для строки длины  $m$  без букв 'а' количество подстрок равно

$$\frac{m(m+1)}{2},$$

а количество подпоследовательностей

$$2^m - 1.$$

Пусть буквы 'а' делят исходную строку на подстроки без букв 'а' с длинами  $m_1, m_2, \dots, m_k$ . Тогда количество подстрок равно

$$\sum_{i=1}^k \frac{m_i(m_i+1)}{2},$$

а количество подпоследовательностей

$$2^{\sum_{i=1}^k m_i} - 1.$$

Асимптотика:  $O(n)$ .

Замечание 1: решения с асимптотикой  $O(n^2)$  и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: решения с неаккуратным взятием ответа по модулю не проходят некоторые тесты. Например следующий код дает неверный ответ:

$$ans := (ans + m[i] * m[i+1]) \mod 1000000007.$$

## Н. Harmonic permutations

Автор: Абдикалыков А.К.

Решим эту задачу в общем виде, а именно найдём число  $d(s, t)$  перестановок длины  $s + t$  таких, что:

1.  $a_1 < a_2 < \dots < a_s$  ;
2.  $a_{s+1} < a_{s+2} < \dots < a_{s+t}$  ;
3.  $a_i < a_{s+i}, \forall i = 1, 2, \dots, \min(s, t)$ .

Тогда ответом будет число  $d(n, n)$ .

Чтобы найти  $d(s, t)$ , определим положение числа  $s + t$ . Если  $s \leq t$ , то возможен только один вариант:  $a_{s+t} = s + t$ . Если  $s > t$ , то появляется второй вариант  $a_s = s + t$ . Таким образом определяется рекуррентная формула:

$$d(s, t) = \begin{cases} d(s, t-1) + d(s-1, t), & s > t, \\ d(s, t-1), & s \leq t. \end{cases}$$

Асимптотика:  $O(n^2)$ .

Замечание 1: решения с асимптотикой  $O(n^3)$  и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: если заметить соответствие строящейся перестановки с правильными скобочными структурами, то можно понять, что ответом будут числа Каталана, соответственно существует решение за  $O(n)$ .

## I. Infinity problem

Автор: Абдикалыков А.К.

Числа с суммой цифр равной 3 представляются в виде:  $10^b + 10^c + 10^d$ . Сгенерируем все остатки  $10^i \bmod n$ ; их будет не более  $n$  штук (для данных ограничений, можно убедиться, что их не более 2000):  $rem[t] = 1$ , если остаток  $t$  был сгенерирован, и  $rem[t] = 0$  иначе. Далее достаточно перебрать все возможные остатки  $t_1$  и  $t_2$ , которые сгенерированы и проверить наличие остатка  $n - t_1 - t_2$ .

Асимптотика:  $O(n^2)$ .

Замечание 1: решения с асимптотикой  $O(n^3)$  и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: заметим, что при  $n$  взаимно простым с 10 число  $10^b + 10^c + 10^d$  делится на  $n$  только если  $10^{b-d} + 10^{c-d} + 1$ . Соответственно существует решение за  $O(n)$ .

## J. Jelly cake

Автор: Баев А.Ж.

Легко доказывается, что вершины треугольника с минимальной площадью будут соседними. Поэтому сортируем все точки по их углам  $\varphi_i$ , перебираем все тройки соседних точек и выбираем минимальную. Площадь каждого такого треугольника можно найти по формуле:

$$2R^2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma),$$

где  $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$ ,  $\beta = \frac{1}{2}(\varphi_{i+2} - \varphi_{i+1})$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}(\varphi_{i+2} - \varphi_i)$  и углы  $\varphi_i$  зациклены (то есть  $\varphi_{n+k} = \varphi_k$ ).

Асимптотика:  $O(n \log n)$ .

Замечание 1: решения с асимптотикой  $O(n^2)$  и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: решение на типе *float* на языке C получает неверный ответ из-за ошибок округления.