

## Открытая олимпиада по математике

13 марта 2018

*Время работы: 180 минут  
Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Найдите определитель матрицы  $A$  порядка  $n$ , где

$$a_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$$

для всех  $1 \leq i \leq n$  и  $1 \leq j \leq n$ .

2. Найдите сумму ряда

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{(n^3 - n)^2}.$$

3. Найдите все непрерывные функции  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что

$$f(x^2) + f(x) = 2.$$

4. При каких  $m, n$  правильный  $m$ -угольник можно разрезать на несколько (два и более) равных правильных  $n$ -угольников?

5. Дана обратимая выпуклая вниз функция  $f(x) \in C(R)$ . Известно, что существует такая точка  $c$ , что  $f(c) < c$  и  $f'(c) = 1$ . Докажите, что существуют такие различные точки  $a$  и  $b$ , что

$$\int_a^b (f(x) + f^{-1}(x)) dx = b^2 - a^2.$$