Введение в численные методы. Интерполяция и аппроксимация

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

29 февраля 2020

План на семестр

1. СЛАУ (точные методы)
2. СЛАУ (итерационные методы)
3. решение нелинейных уравнений
4. **интерполяция**
5. аппроксимация
6. интегрирование
7. дифференцирование

Интерполяция

Интерполяция — способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Дана сетка порядка n:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

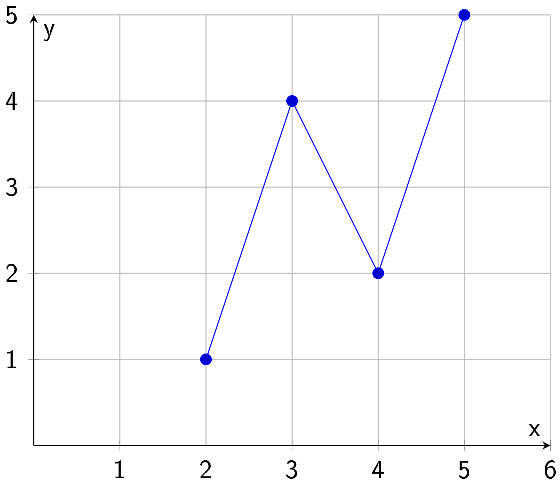
Дан набор измерений:

$$y_i = f(x_i)$$

Необходимо восстановить значение функции f в другом наборе точек $z_0 < z_1 < \ldots < z_m$,

Кусочно-линейная интерполяция

$$f(x) = \left\{ \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + y_i, x \in [x_i; x_{i+1}) \right.$$



Кусочно-линейная интерполяция

Недостатки: недифференцируема (большинство физический и экономических процессов имеют более гладкий характер).

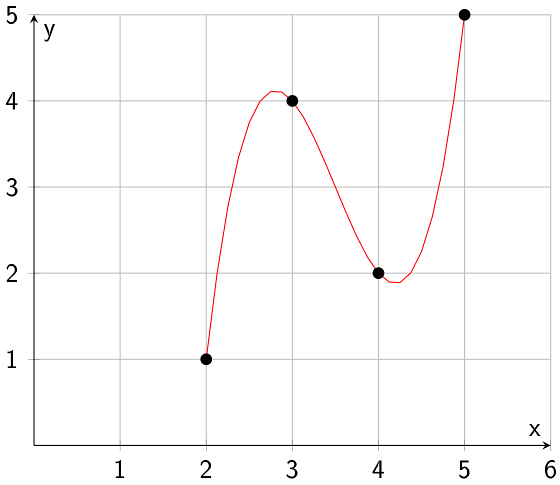
Кусочно-линейная интерполяция

Для восстановления зависимости в точке z необходимо определить $x_i \leqslant z < x_{i+1}$.

Асимптотика для восстановления зависимости в m точках: $O(m \log n)$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Строим $P(x)$ — многочлен n-й степени, который будет проходить через заданные точки (x_i, y_i).

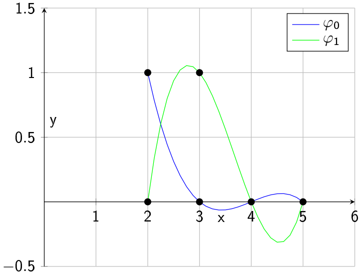


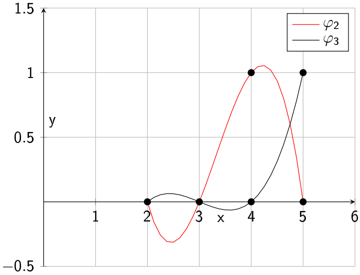
Интерполяционный многочлен Лагранжа

Введём базис из многочленов $\varphi_i(x)$ таких, что

$$\varphi_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

Основное свойство: $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$.





$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Недостатки: большая вариация для некоторых классов функций $f(x)$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

```
x = np.zeros(n + 1)
y = np.zeros(n + 1)

...

def phi(i, z):
    p := 1
    for j := 0 .. n
        p := p * (z - x[j]) / (x[i] - x[j])
    return p

def P(z):
    s := 0
    for i := 0 .. n
        s := s + y[i] * phi(i, z)
    return s
```

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Для восстановления зависимости в точке z необходимо вычислить значения для каждого $\varphi_i(z)$.

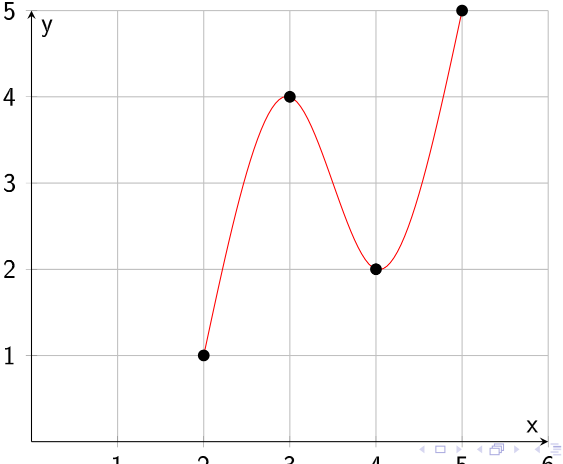
Асимптотика для восстановления зависимости в m точках: $O(mn^2)$.

Асимптотику можно улучшить. Подумайте как!

Сплайновая интерполяция

$f(x)$ — сплайновая интерполяция, то есть на i-м отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ равна:

$$P_i(x) = A_i * (x - x_i)^3 + B_i * (x - x_i)^2 + C_i * (x - x_i) + D_i, i = \overline{0, n-1}$$



Сплайновая интерполяция

Пусть сетка x_i — равномерная. То есть $x_i = a + i * h$, где $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.
Пусть функция дважды непрерывно дифференцируема в узлах.

1. Значение i-го сплайна на левом конце равно y_i:

$$P_i(x_i) = y_i, i = \overline{0, n-1}$$

2. Значение i-го сплайна на правом конце равно y_{i+1}:

$$P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = \overline{1, n}$$

3. Первые производные сплайнов непрерывны в узлах:

$$P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1}), i = \overline{0, n-2}$$

4. Вторые производные сплайнов непрерывны в узлах:

$$P_i''(x_{i+1}) = P_{i+1}''(x_{i+1}), i = \overline{0, n-2}$$

5. Края свободны:

$$P_0''(x_0) = 0, P_{n-1}''(x_n) = 0$$

Сплайновая интерполяция

$$\begin{cases} D_i = y_i, & i = \overline{0, n-1} \\ A_i h^3 + B_i h^2 + C_i h + y_i = y_{i+1}, & i = \overline{0, n-1} \\ 3A_i h^2 + 2B_i h + C_i = C_{i+1}, & i = \overline{0, n-2} \\ 6A_i h + 2B_i = 2B_{i+1}, & i = \overline{0, n-2} \\ 2B_0 = 0 \\ 6A_{n-1} h + 2B_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Ответ для D_i:

$$D_i = y_i, i = \overline{0, n-1}$$

Выразим A_i через B_i и введем фиктивный элемент $B_n = 0$:

$$A_i = \frac{B_{i+1} - B_i}{3h}, i = \overline{0, n-1}$$

Сплайновая интерполяция

Подставим A_i в оставшиеся неразрешенные соотношения:

$$\begin{cases} (B_{i+1} - B_i)\frac{h^2}{3} + B_i h^2 + C_i h + y_i = y_{i+1}, & i = \overline{0, n-1} \\ (B_{i+1} - B_i)h + 2B_i h + C_i = C_{i+1}, & i = \overline{0, n-2} \\ B_0 = 0 \\ B_n = 0 \end{cases}$$

Выразим C_i через B_i:

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (B_{i+1} + 2B_i)\frac{h}{3}, i = \overline{0, n-1}$$

Получим замкнутую систему для B_i:

$$B_i + 4B_{i+1} + B_{i+2} = 3\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2}, i = \overline{0, n-2}$$

Сплайновая интерполяция

$$\begin{cases} B_0 = B_n = 0 \\ B_{i-1} + 4B_i + B_{i+1} = 3\dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

Сводится к СЛАУ $(n+1)$-го порядка с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{n-2} \\ B_{n-1} \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y_{xx,1} \\ 3y_{xx,2} \\ 3y_{xx,3} \\ \vdots \\ 3y_{xx,n-2} \\ 3y_{xx,n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

где $y_{xx,i} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$

Сплайновая интерполяция

По диагоналям:

$$a = (0, 1, 1, 1, ..., 1, 1, 0)$$

$$b = (1, 4, 4, 4, ..., 4, 4, 1)$$

$$c = (0, 1, 1, 1, ..., 1, 1, 0)$$

$$f = 3 \cdot (0, y_{xx,1}, y_{xx,2}, y_{xx,3}, \dots, y_{xx,n-2}, y_{xx,n-1}, 0)$$

Методом прогонки можно решить систему $As = f$ и получить вектор коэффициентов B. Остальные коэффициенты определяются по формулам:

$$\begin{cases} B_i &= s_i \\ A_i &= \frac{B_{i+1} - B_i}{3h} \\ C_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (B_{i+1} + 2B_i)\,\frac{h}{3} \\ D_i &= y_i \end{cases}$$

Сплайновая интерполяция

Дана сетка на $n = 3$ отрезка со значениями в узлах: $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 5)$.
Шаг сетки: $h = 1$. Посчитаем правые части для СЛАУ:

$$3y_{xx,1} = 3(y_0 - 2y_1 + y_2)/h^2 = 3 * (1 - 2 * 4 + 2) = -15$$

$$3y_{xx,2} = 3(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2 = 3 * (4 - 2 * 2 + 5) = 15$$

Решаем методом прогонки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ: $B = (0, -5, 5, 0)$.

Сплайновая интерполяция

Коэффициенты B:

$$B_0 = 0, B_1 = -5, B_2 = 5$$

Коэффициенты A:

$$A_0 = \frac{B_1 - B_0}{3h} = -\frac{5}{3}, A_1 = \frac{B_2 - B_1}{3h} = \frac{10}{3}, A_2 = \frac{B_3 - B_2}{3h} = -\frac{5}{3}$$

Коэффициенты C:

$$C_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{(B_1 + 2B_0)h}{3} = \frac{14}{3}, C_1 = \frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{(B_2 + 2B_1)h}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$C_2 = \frac{y_3 - y_2}{h} - \frac{(B_3 + 2B_2)h}{3} = -\frac{1}{3}$$

Коэффициенты D:

$$D_0 = y_0 = 1, D_1 = y_1 = 4, D_2 = y_2 = 2$$

Сплайновая интерполяция:

$$P(x) = \begin{cases} -\frac{5}{3}(x-2)^3 + 0(x-2)^2 + \frac{14}{3}(x-2) + 1, & x \in [2;3) \\ \frac{10}{3}(x-3)^3 - 5(x-3)^2 - \frac{1}{3}(x-3) + 4, & x \in [3;4) \\ -\frac{5}{3}(x-4)^3 + 5(x-4)^2 - \frac{1}{3}(x-4) + 2, & x \in [4;5] \end{cases}$$

Сплайновая интерполяция

```
def generateSpline(x, y):
  n = x.shape[0] - 1
  h = (x[n] - x[0]) / n

  a = np.array([0] + [1] * (n - 1) + [0])
  b = np.array([1] + [4] * (n - 1) + [1])
  c = np.array([0] + [1] * (n - 1) + [0])
  f = np.zeros(n + 1)
  for i in range(1, n):
    f[i] := 3 * (y[i-1] - 2 * y[i] + y[i+1]) / h**2
  s = sweep(n+1, a, b, c, f)

  for i in range(0, n):
    B[i] := s[i]
    A[i] := (B[i+1] - B[i]) / (3 * h)
    C[i] := (y[i+1] - y[i]) / h - \
            (B[i+1] + 2 * B[i]) * h / 3
    D[i] := y[i]
  return A, B, C, D
```

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Для определения коэффициентов необходимо решить прогонкой СЛАУ $O(n)$.

Асимптотика для восстановления зависимости в m точках: $O(mn)$.

Домашнее задание №3

Даны 3 текстовых файла с числами записанными по столбцам:

1. train.dat — значения $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$;
2. train.ans — значения $y_0, y_1, \ldots, < y_n$;
3. test.dat — значения $z_0, z_1, \ldots, < z_m$;

Необходимо построить 3 различных интерполяционных модели $y_i = f(x_i)$ по парам (x_i, y_i) и применить каждую из них на множестве z_j. Результат вывести в файл test.ans в виде m чисел.

Домашнее задание №3

Базовый вариант:

1 линейная интерполяция на неравномерной сетке;
2 интерполяция лагранжа на неравномерной сетке;
3 интерполяция сплайнами на равномерной сетке (гарантируется, что x_i — равномерная сетка).

Бонус №1

2 интерполяция лагранжа на неравномерной сетке быстрее, чем $O(mn^2)$ (должно работать менее 1 секунды при m и n порядка 1000).

Бонус №2

3 интерполяция сплайнами на неравномерной сетке (вывод формул необходимо сдать в письменной форме).

Супербонус №3

3 построить двумерную интерполяцию сплайнами $(x(t), y(t))$ на равномерной сетке по t с графическим интерфейсом. Необходимо обрабатывать добавление точки мышкой на графическом полотне и достраивать интерполяцию. Принимают исключительно на $PyQt$.

Литература

Подробнее в [1, стр. 44] и [2, стр. 65].

- Калиткин Н.Н. Численные методы. - Спб.: БХВ-Петербург, 2014.
- Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.