

Введение в численные методы. Нелинейные уравнения

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

22 февраля 2020

План на семестр

1. СЛАУ (точные методы)
2. СЛАУ (итерационные методы)
3. **решение нелинейных уравнений**
4. интерполяция
5. аппроксимация
6. интегрирование
7. дифференцирование

Линейная алгебра

Дана функция $f \in C[a, b]$. Найти решение:

$$f(x) = 0$$

на отрезке $[a, b]$. Считаем, что корень существует и единственный. Необходимо вычислить корень x с заранее заданной точностью ε :

$$|x^* - x| < \varepsilon, f(x) = 0.$$

Метод деления отрезка пополам

Этот метод также называется «бинарный поиск» или «дихотомия».

Пусть

$$f(l)f(r) < 0,$$

если $l < x < r$, где x — корень.

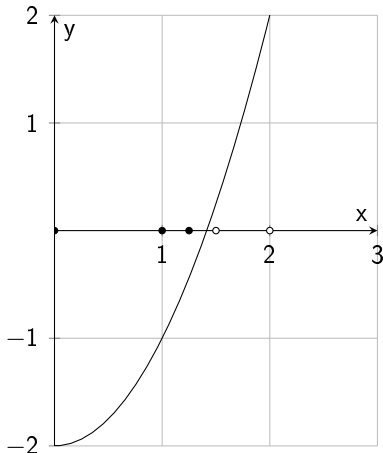
Вычислим значение в середине отрезка $m = \frac{l+r}{2}$.

Если $f(m)$ и $f(r)$ одного знака, то $x^* \in [l; m]$.

Если $f(m)$ и $f(r)$ разного знака, то $x^* \in [m; r]$.

Метод деления отрезка пополам (пример)

Найдем решение уравнения $x^2 = 2$ на отрезке $[0; 2]$ с точностью $\varepsilon = 0.2$. Рассмотрим $f(x) = x^2 - 2$. Знаки на границах:
 $f(0) = -2 < 0$, $f(2) = 2 > 0$.



1. $l = 0$, $r = 2$.
 $f(m) = f(1) = -1$. Уменьшаем отрезок до $[1; 2]$.
2. $l = 1$, $r = 2$. $f(m) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
Уменьшаем отрезок до $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
3. $l = 1$, $r = \frac{3}{2}$,
 $f(m) = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{7}{16}$.
Уменьшаем отрезок до $\left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$.
4. $l = \frac{5}{4}$, $r = \frac{3}{2}$,
 $f(m) = f\left(\frac{11}{8}\right) = -\frac{7}{64}$.
Уменьшаем отрезок до $\left[\frac{11}{8}; \frac{3}{2}\right]$.
5. $\left|\frac{7}{5} - \frac{4}{3}\right| = \frac{1}{15} < 0.2$.
Ответ: $\frac{23}{16}$ с точностью до 0.2.

Метод деления отрезка пополам (код)

```
1  l := a
2  r := b
3  s := f(b)
4  while |r - l| > eps
5      m := (r + l) / 2
6      if s * f(m) > 0
7          l := m
8      else
9          r := m
10 return (l + r) / 2
```

Метод деления отрезка пополам (сходимость)

Количество итераций можно определить из неравенства:

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Откуда легко найти количество итераций:

$$n \geq \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Скорость сходимости «линейная» с параметром $\frac{1}{2}$:

$$|x - x_{k+1}| \leq \frac{1}{2} |x - x_k|.$$

Метод хорд

Дана функцию $f(x) \in C^2[a, b]$. Функции $f'(x)$ и $f''(x)$ не изменяет знак на всем отрезке.

Проведем хорду через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Если $f'(x)f''(x) > 0$:

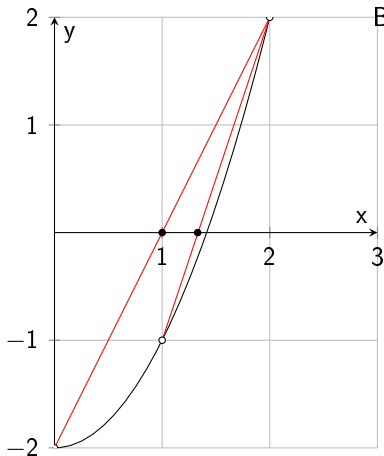
$$\begin{cases} x_0 &= a, \\ x_{k+1} &= b - f(b) \frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)} \end{cases}$$

Если $f'(x)f''(x) < 0$:

$$\begin{cases} x_0 &= b, \\ x_{k+1} &= a - f(a) \frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)} \end{cases}$$

Метод хорд (пример)

Найдем решение уравнения $x^2 - 2 = 0$ на отрезке $[0; 2]$ с точностью $\varepsilon = 0.2$. Так как $f'(x)f''(x) > 0$, итерации слева направо ($x_0 = 0$) с фиксированным правым концом хорд.



Вычисления:

$$x_{k+1} = 2 - 2 * \frac{2 - x_k}{2 - f(x_k)}.$$

1. $x_0 = 0, f(x_0) = -2.$
 $x_1 = 2 - 2 * \frac{2 - x_0}{2 - f(x_0)} = 1.$
2. $x_1 = 1, f(x_1) = -1.$
 $x_2 = 2 - 2 * \frac{2 - x_1}{2 - f(x_1)} = \frac{4}{3}.$
3. $x_1 = \frac{4}{3}, f(x_1) = -\frac{2}{9}.$
 $x_3 = 2 - 2 * \frac{2 - x_2}{2 - f(x_2)} = \frac{7}{5}.$
4. $|\frac{7}{5} - \frac{4}{3}| = \frac{1}{15} < 0.2.$

Ответ: $\frac{7}{5}$ с точностью до 0.2.

Метод хорд (код)

$f(x)$ — исходную функцию,

$f_1(x)$ — производная (вычисленная аналитически),

$f_2(x)$ — вторая производная (вычисленная аналитически).

```
1  m := (r + l) / 2
2  if f1(m) * f2(m) > 0
3      xnew := a
4      fb := f(b)
5      do
6          xold := xnew
7          xnew := b -
8              fb * (b - xold) / (fb - f(xold))
9      while |xold - xnew| > eps
10 else
11     xnew := b
12     fa := f(a)
13     do
14         xold := xnew
15         xnew := a -
16             fa * (xold - a) / (f(xold) - fa)
```

Метод хорд (сходимость)

Скорость сходимости «линейная», то есть, существует такая $0 < L < 1$, что:

$$|x - x_{k+1}| \leq L|x - x_k|.$$

Метод касательных

Дана функцию $f(x) \in C^2[a, b]$. Функции $f'(x)$ и $f''(x)$ не изменяет знак на всем отрезке.

Проведем касательную к графику через точку $(x_k; f(x_k))$. Уравнение соответствующей прямой:

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k).$$

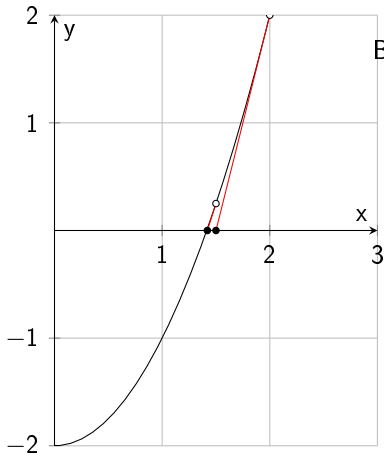
Найдем точку пересечения хорды и с осью абсцисс ($y = 0$). Откуда легко получить формулу для вычисления корня методом касательных:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Если $f'(x)f''(x) > 0$ на всем отрезке $[a; b]$, то $x_0 = b$, а иначе $x_0 = a$.

Метод касательных (пример)

Найдем решение уравнения $x^2 - 2 = 0$ на отрезке $[0; 2]$ с точностью $\varepsilon = 0.2$. Так как $f'(x) = 2x > 0$ и $f''(x) = 2 > 0$ итерации справа налево ($x_0 = 2$).



Вычисления:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

1. $x_0 = 2, f(x_0) = 2, f'(x_0) = 4.$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{3}{2}.$$
2. $x_1 = \frac{3}{2}, f(x_1) = \frac{1}{4}, f'(x_1) = 3.$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{17}{12}.$$

3. $\left| \frac{17}{12} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{12} < 0.2$

Ответ: $\frac{17}{12}$ с точностью до 0.2.

Метод касательных (код)

```
1 m := (r + l) / 2
2 if f1(m) * f2(m) > 0
3     xnew := a
4 else
5     xnew := b
6 do
7     xold := xnew
8     xnew := b - f(xold) / f1(xold)
9 while |xold - xnew| > eps
```

Метод касательных

Скорость сходимости «квадратичная», то есть, существует такой $0 < L < 1$, что:

$$|x - x_{k+1}| \leq L|x - x_k|^2.$$

Метод касательных

Theorem

Пусть в некоторой окрестности корня x^ выполнены следующие условия:*

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0$$

$$|f''(x)| \leq M_2$$

$$\frac{M_2}{2m_1} |x_0 - x^*| \leq q < 1$$

где x_0 — начальное приближение. Тогда итерационный метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

сходится и справедлива оценка:

$$|x_n - x^*| \leq Cq^{2^n}$$

Метод касательных

Доказательство.

Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_k

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{2}f''(\xi)$$

Подставим вместо x корень уравнения $f(x^*) = 0$.

$$0 = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{(x^* - x_k)^2}{2}f''(\xi)$$

Подставим x_{k+1} .

$$x_{k+1} - x^* = \frac{(x^* - x_k)^2}{2f'(x_k)}f''(\xi)$$



Метод простой итерации

Итерационный процесс

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

где $\varphi(x) = x + \rho(x)f(x)$, $\rho(x)$ постоянного знака.

Theorem

Пусть x^ — корень уравнения $\varphi(x) = x$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица*

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

с константой $L < 1$. Тогда при любом выборе x_0 итерационный процесс сходится к x^ .*

Литература

Подробно с методами можно ознакомиться в книге [1, стр. 138] и [2, стр. 130]



Калиткин Н.Н. Численные методы. - Спб.: БХВ-Петербург, 2014.



Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.