Практикум на ЭВМ. Преобразование Фурье.

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

11 апреля 2020

Фурье

1. Непрерывное преобразование Фурье
2. Дискретное преобразование Фурье
3. Обработка звука
4. WAV-файлы

Непрерывное преобразование Фурье

Дана комплекснозначная функция от вещественного аргумента (времени) при $t \in [0, 1]$

$$f(t)$$

Разложим его по базису из комплекснозначных функций $\{\varphi_i = e^{2\pi k t \mathrm{i}}\}$

$$f(t) = c_0 \cdot 1 + c_1 e^{2\pi t \mathrm{i}} + c_2 e^{4\pi t \mathrm{i}} + c_2 e^{6\pi t \mathrm{i}} + \dots$$

Непрерывное преобразование Фурье

Базисных функций бесконечно много, как и значений функций. Если взять n (конечное число) значений функции, то можно взять конечное число базисных функций!

Дискретное преобразование Фурье

Дан вектор комплексных чисел

$$\vec{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$$

Разложим его по базису из комплексных векторов $\{\varphi_i\}$

$$\vec{f} = c_0\vec{\varphi}_0 + c_1\vec{\varphi}_1 + c_2\vec{\varphi}_2 + \ldots + c_{n-1}\vec{\varphi}_{n-1}$$

Если $\{\varphi_i\}$ — ортогональный базис, то легко найти коэффициенты:

$$c_i = \frac{(f_i, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$$

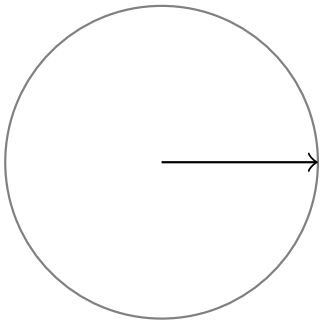
Дискретное преобразование Фурье

Выберем в качестве базисного вектора $\vec{\varphi}_k$ — значения сеточной функции

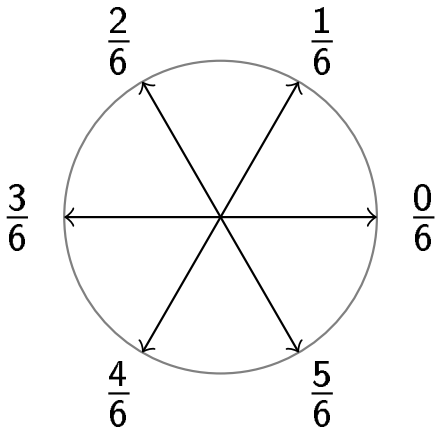
$$e^{2\pi k x \mathrm{i}}$$

для значений x на равномерной сетке $[0, 1)$ с шагом $\frac{1}{n}$.

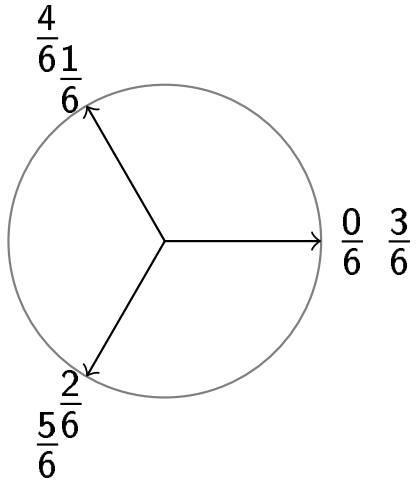
Например, при $n = 6$. Рассмотрим значения при $x = 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$



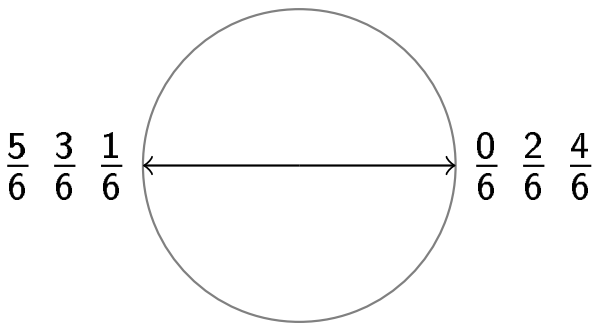
$\varphi_0(x) = 1$



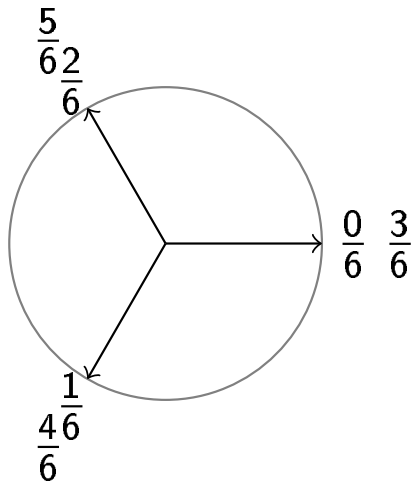
$\varphi_1(x) = e^{2\pi x}$



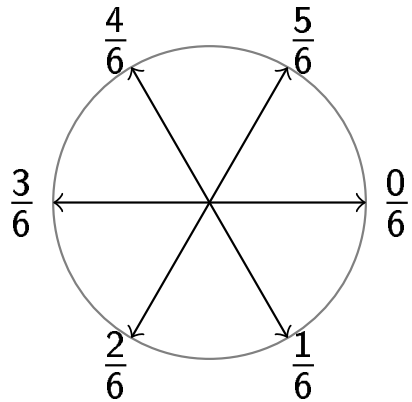
$\varphi_2(x) = e^{4\pi x}$



$\varphi_3(x) = e^{6\pi x}$



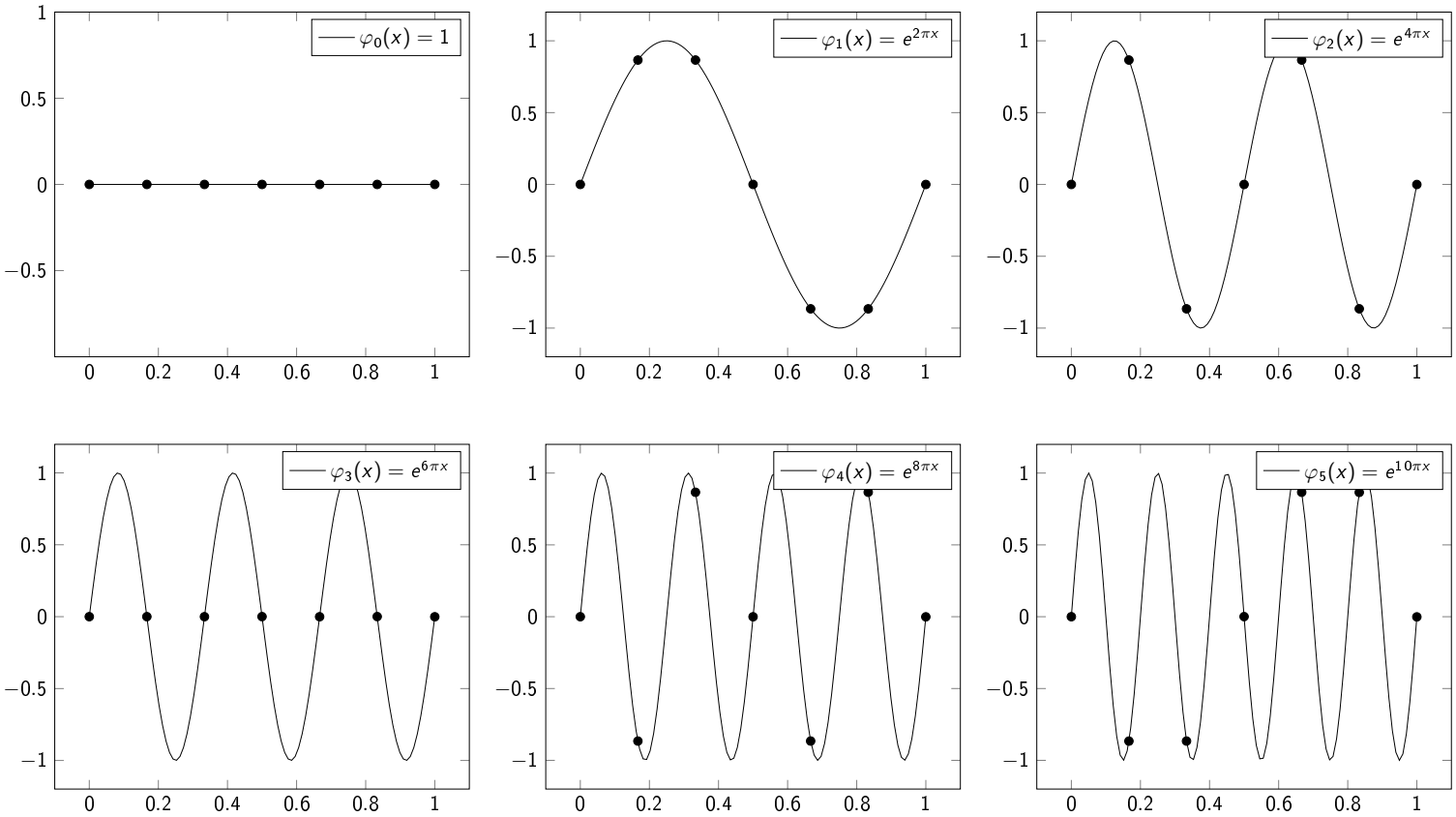
$\varphi_4(x) = e^{8\pi x}$



$\varphi_5(x) = e^{10\pi x}$

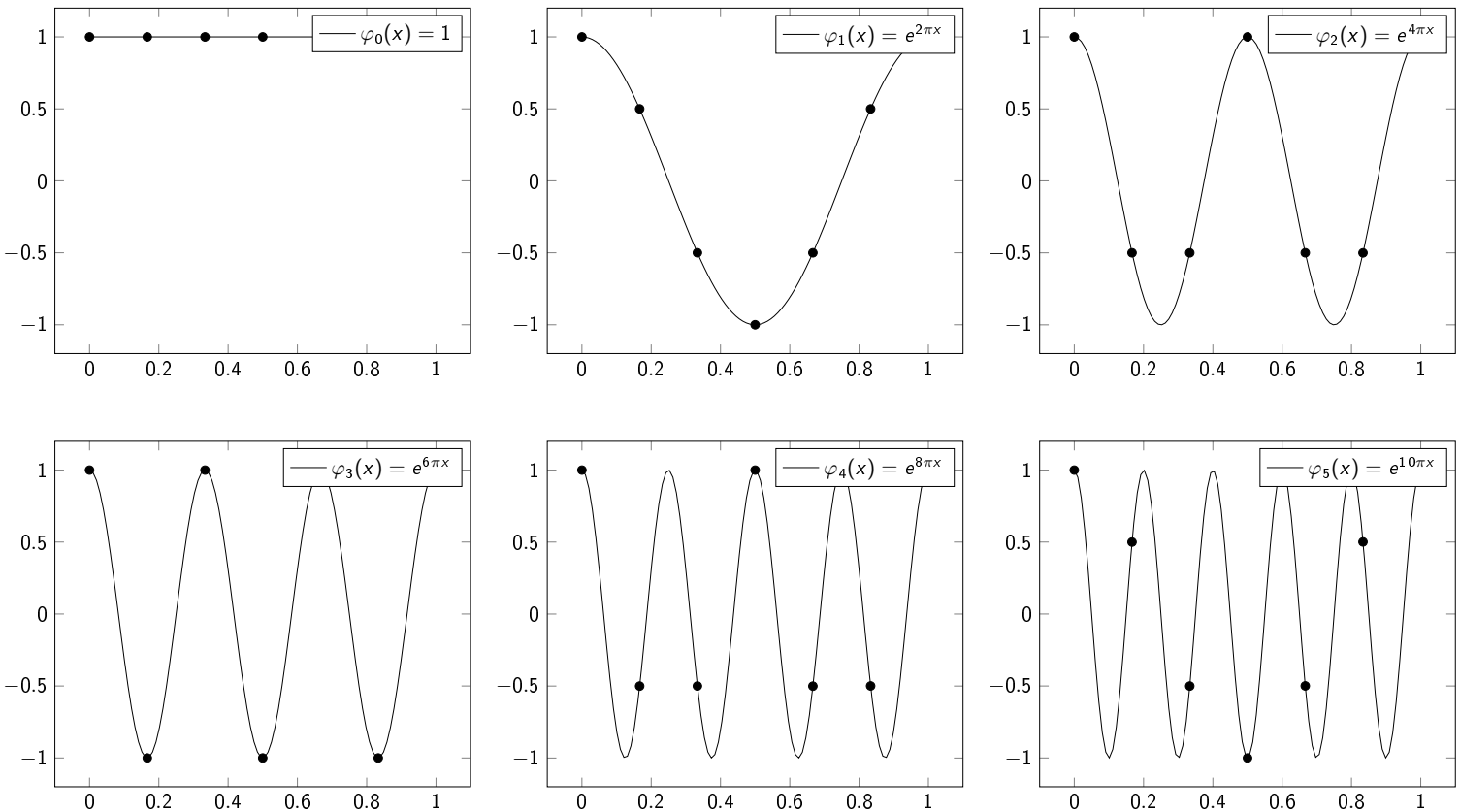
Дискретное преобразование Фурье

Мнимая часть



Дискретное преобразование Фурье

Вещественная часть



Дискретное преобразование Фурье

Обозначим через

$$\lambda = e^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$$

Тогда

$$\varphi_k\left(\frac{j}{n}\right) = e^{\frac{2\pi k}{n}\mathrm{i}} = \lambda^{kj}$$

Здесь j соответствует шкале времени, k соответствует частоте функции.

Обратное преобразование Фурье

Разложение по базису:

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^{kj} = c_0 + c_1 \lambda^j + c_2 \lambda^{2j} + \ldots + c_{n-1} \lambda^{(n-1)j}$$

Прямое преобразование Фурье

Коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j \lambda^{-kj} = \frac{1}{n}\left(f_0 + f_1\lambda^{-k} + f_2\lambda^{-2k} + \ldots + f_{n-1}\lambda^{-(n-1)k}\right)$$

Код

Опишем класс комплексных чисел:

```
class Complex {
    double _re, _im;
public:
    Complex();
    Complex(double re, double im = 0);
    double re() const;
    double amp() const;
    double phase() const;
    Complex operator+=(const Complex &z) const;
    Complex operator*(double x) const;
    Complex operator/(double x) const;
    Complex operator^(double alpha) const;
};
```

Значения: амплитуды `amp()` и фазы `phase()`.

Операторы: сложения с комплексным числом, умножения на вещественное, деления на вещественное и поворот на α радиан (то есть умножение на $e^{2\pi\alpha \mathrm{i}} = \cos 2\pi\alpha + \mathrm{i} \sin 2\pi\alpha$).

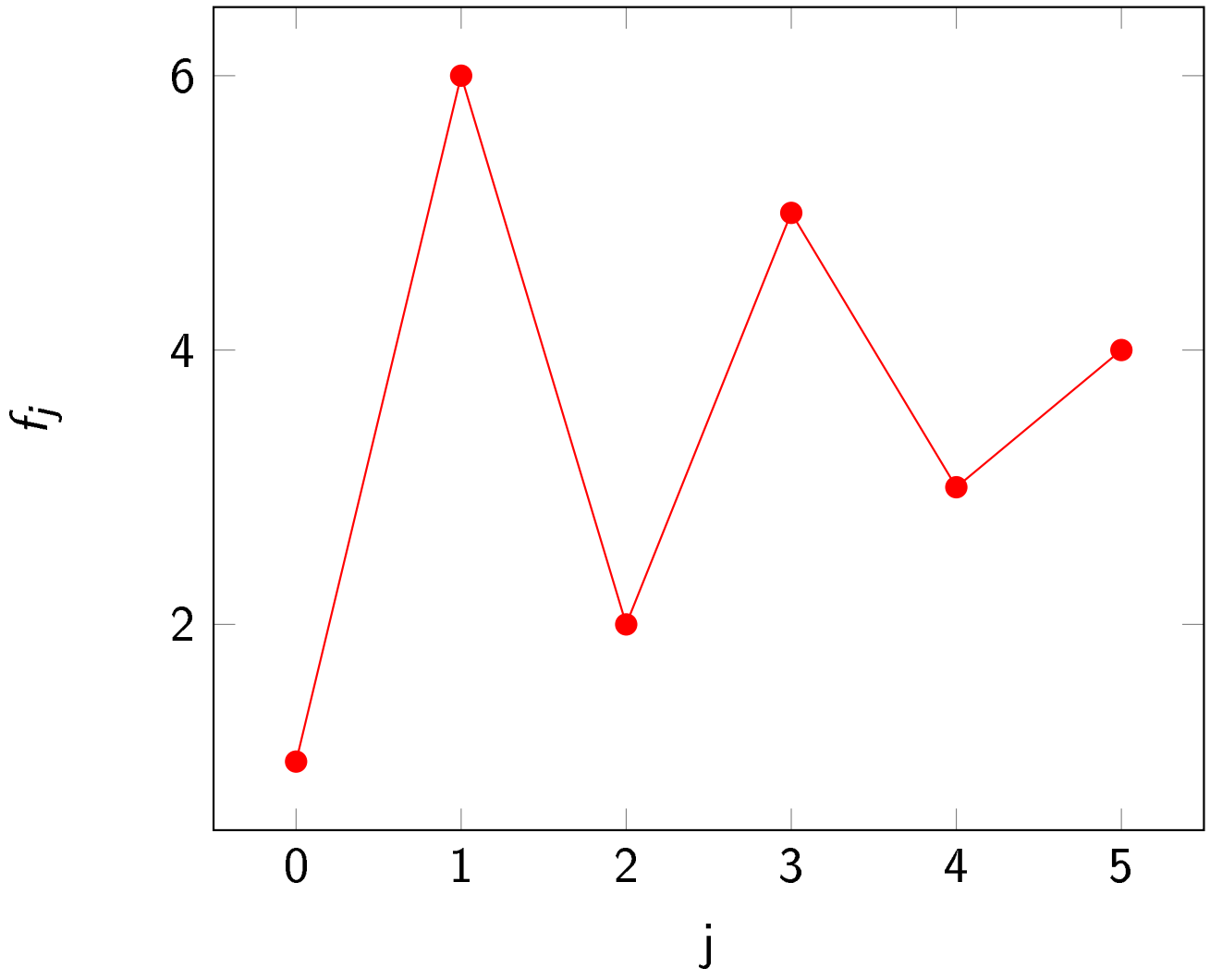
Пример сигнала (код)

Создадим вектор из чисел, которые описывают значения исходной функции (сигнала).

```
std::vector<Complex> function({1, 6, 2, 5, 3, 4});
```

Пример сигнала

Сигнал:
$f_0 = 1$
$f_1 = 6$
$f_2 = 2$
$f_3 = 5$
$f_4 = 3$
$f_5 = 4$



Пример спектра (код)

Создадим вектор из чисел, которые описывают спектр исходной функции.

```
std::vector<Complex> f2s(const std::vector<Complex> &
{
  std::vector<Complex> c;
  int n = f.size();
  c.resize(n);
  for (int k = 0; k < n; ++k) {
    for (int j = 0; j < n; ++j)
      c[k] += f[j] ^ ((- 2 * M_PI * k * j) / n);
    c[k] = c[k] / n;
  }
  return c;
}
...
std::vector<Complex> spectr = f2s(function);
```

Пример спектра

Спектр:

$c_0 = 3.5$

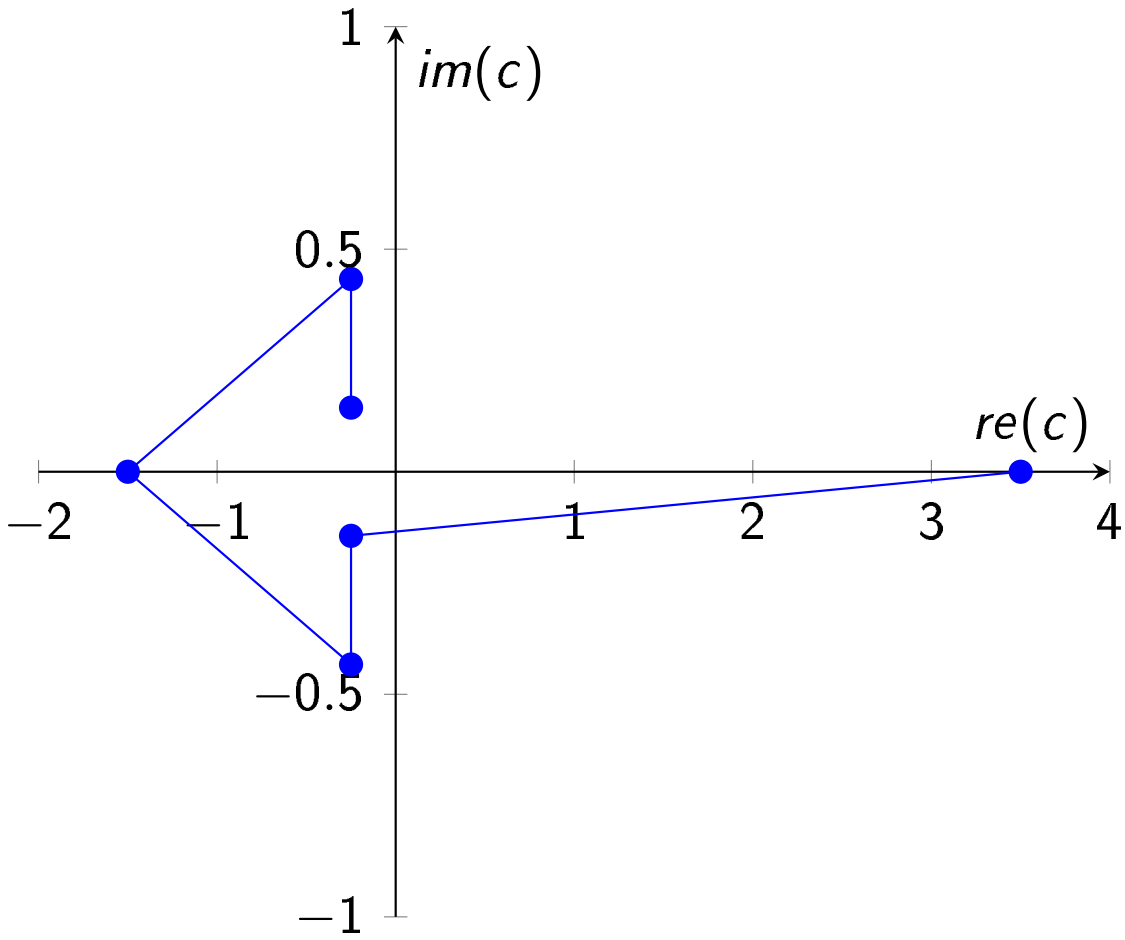
$c_1 = -0.25 - 0.144\text{i}$

$c_2 = -0.25 - 0.433\text{i}$

$c_3 = -1.5$

$c_4 = -0.25 + 0.433\text{i}$

$c_5 = -0.25 + 0.144\text{i})$



Пример спектра

Амплитуды спектра:

$|c_0| = 3.5$

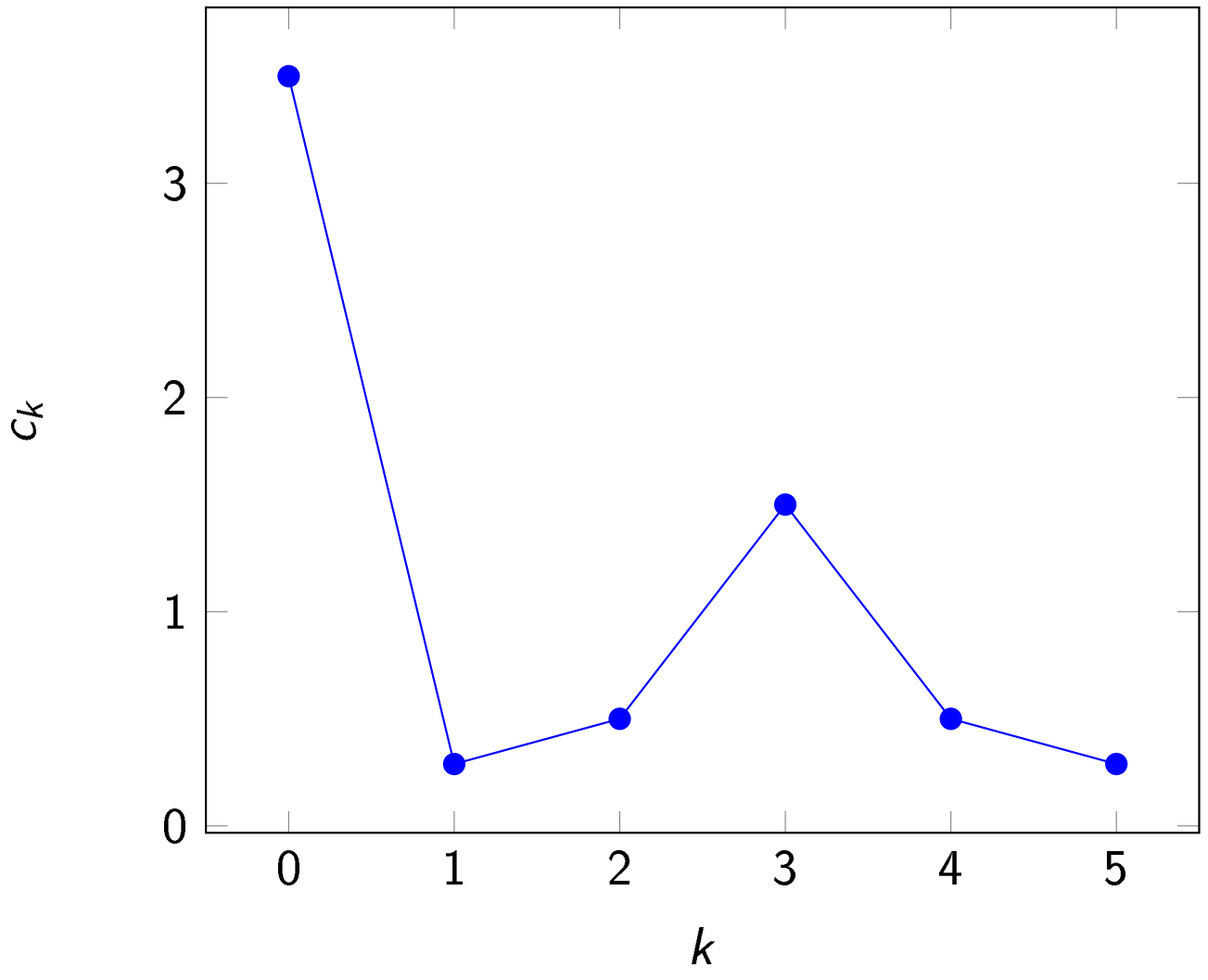
$|c_1| = 0.289$

$|c_2| = 0.5$

$|c_3| = 1.5$

$|c_4| = 0.5$

$|c_5| = 0.289$



Пример восстановления функции (код)

```
std::vector<Complex> s2f(
       const std::vector<Complex> &c) {
    std::vector<Complex> f;
    int n = c.size();
    f.resize(n);
    for (int j = 0; j < n; ++j)
        for (int k = 0; k < n; ++k) {
            alpha = (2 * M_PI * k * j) / n;
            f[j] += c[k] ^ ();
        }
    return f;
}
...
std::vector<Complex> func = s2f(spectr);
```

Скачиваем WAV файл

BBC выложил более 16 000 звуковых эффектов в бесплатный доступ для образовательных целей:

`http://bbcsfx.acropolis.org.uk/`

Для примера выберем в категории Telephones «Touch tone phone - quick dial 7 digits.» на 7 секунд.

`http://bbcsfx.acropolis.org.uk/assets/07070057.wav`

Скачиваем WAV файл

Для начала посмотрим свойства файла в терминале:

```
file 07070057.wav
```

Получим:

```
07070057.wav:
RIFF (little-endian) data, WAVE audio,
Microsoft PCM, 16 bit, stereo 44100 Hz
```

Здесь есть полезная информация: битность 16 и частота дискретизации 44100.

Работа с бинарными файлами на C++.

Данные в файле записаны в бинарном виде. Считаем всё побайтово.
Конструктор итератора с потоком

```
std::istreambuf_iterator<char>(input)
```

создает указатель на начало данных в потоке.
Конструктор по умолчанию

```
std::istreambuf_iterator<char>()
```

создает указатель на «конец файла».
Итоговый код, который записывает бинарные данные в вектор buf:

```
std::ifstream input("07070057.wav", std::ios::binary)
std::istreambuf_iterator<char> start(input);
std::istreambuf_iterator<char> end;
std::vector<char> buf(start, end);
```

Извлекаем данные из WAV файла

Подробнее про формат `https://audiocoding.ru/article/2008/05/22/wav-file-structure.html`

Первая секция находится на 36 байте. Каждая секция состоит из:

1. имени из 4 ascii символов (4 байта);
2. числа n, которое задает размер секции (4 байта);
3. сырые данные (n байт).

```
std::string chunk_name(
  buf.begin() + chunk_start,
  buf.begin() + chunk_start + 4);
chunk_start += 4;

int chunk_size = *(int *)(buf.data() + chunk_start);
chunk_start += 4;
```

Извлекаем данные из WAV файла

Если имя секции отлично от «data», то пропустим эту секцию (сдвинемся на (8 + chunk_size)).

```
while (chunk_name != "data") {
  chunk_start += chunk_size;
  chunk_name = std::string(
    buf.begin() + chunk_start,
    buf.begin() + chunk_start + 4);
  chunk_start += 4;
  chunk_size = *(int *)(buf.data() + chunk_start);
  chunk_start += 4;
}
```

Например, в приведённом файле 07070057.wav целых 3 секции с метаданными (то есть не относятся к звуку):

```
name  start  size
sav1  44     42
bext  94     642
pad   744    16
data  768    1159536
```

Извлекаем данные из WAV файла

Чтобы извлечь данные из файла `07070057.wav` надо понимать сколько занимает места один дискретный тик: 2 канала по 16 бит каждый. То есть 4 байта на тик.
На каждую амплитуду приходится один short:

```
*(short *)(buf.data() + i)
```

Забираем только четные амплитуды (один канал).

```
std::vector<Complex> function;
for (int i = 0; i < chunk_size; i+=4) {
    short value = *(short *)(buf.data() + i);
    function.push_back(value);
}
```

Всего получилось 289 884 амплитуды. Учитывая дискретизацию в 44 100 Гц, можно получить длительность записи: 6.573 секунды.

Смотрим на звук из WAV файла

Поскольку звук начинается не сразу, то все начальные значения амплитуд почти не отличаются от 0. Выведем 4410 амплитуд начиная с 5000-й:

```
std::vector<Complex> function = parse(buf);
int shift = 5000, size = 4410;
std::vector<Complex> function_part(
    function.begin() + shift,
    function.begin() + shift + size
);
```

Результат отправим в файл

```
std::ofstream file_function;
file_function.open ("f.txt");
for (int i = 0; i < size; i++)
    file_function << i + shift << ' ' 
                  << function_part[i].re() << '\n';
file_function.close();
```

Смотрим на звук из WAV файла

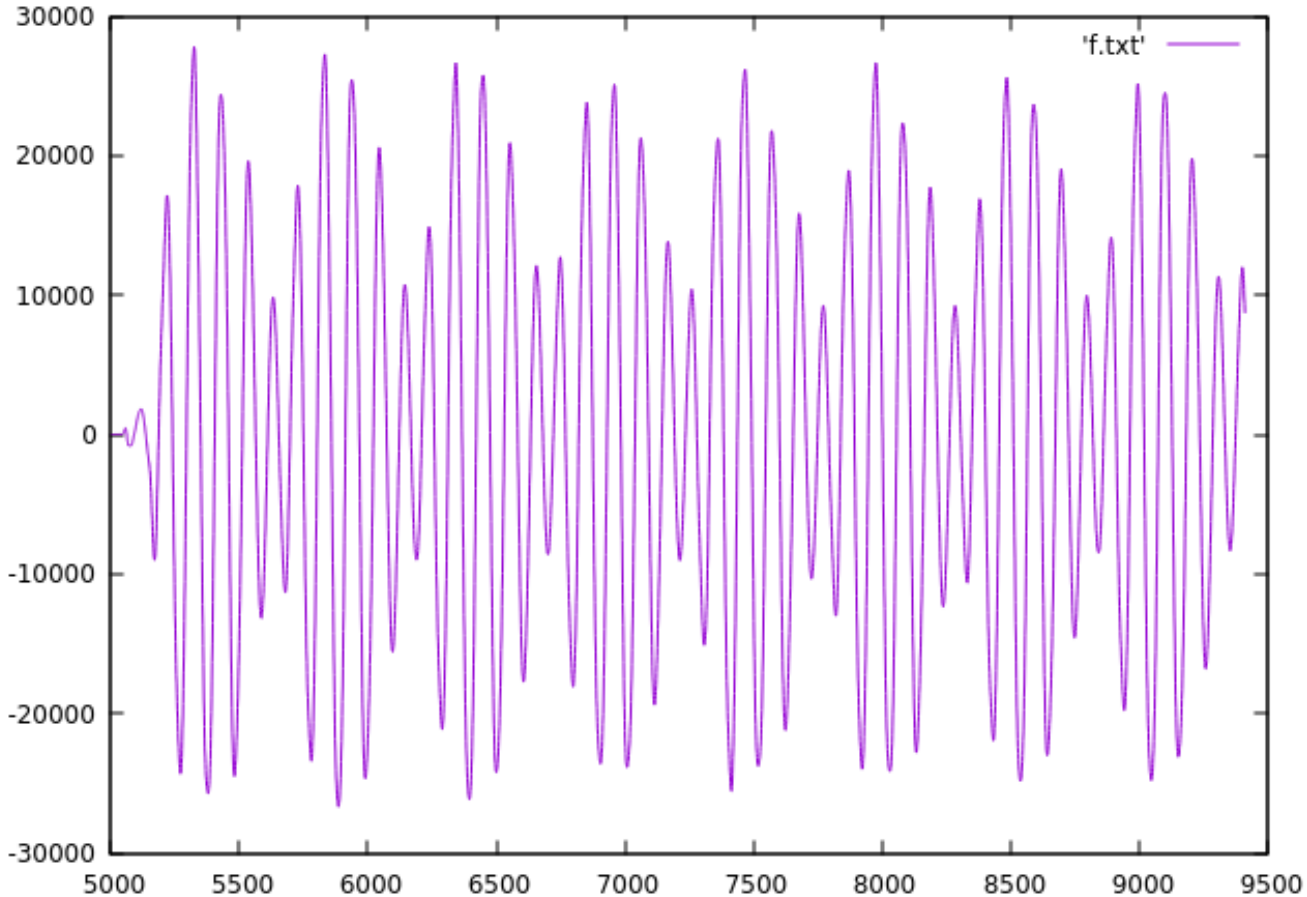
Посмотрим на график из них

```
gnuplot -p -e "plot 'f.txt' with lines"
```

Суффикс `-p` разрешает создание отдельного окна, `-e` выполняет команды gnuplot из строки. Команда `plot` строит данные из файла. Параметры `with lines` задают соединение точек.

Смотрим на звук из WAV файла

Частота дискретизации 44100 означает, что на 1 секунду приходится 44100 амплитуд. То есть данная картинка показывает звук длительностью 0.1 секунды.



Смотрим на звук из WAV файла

Вычислим спектр для выбранного отрезка.

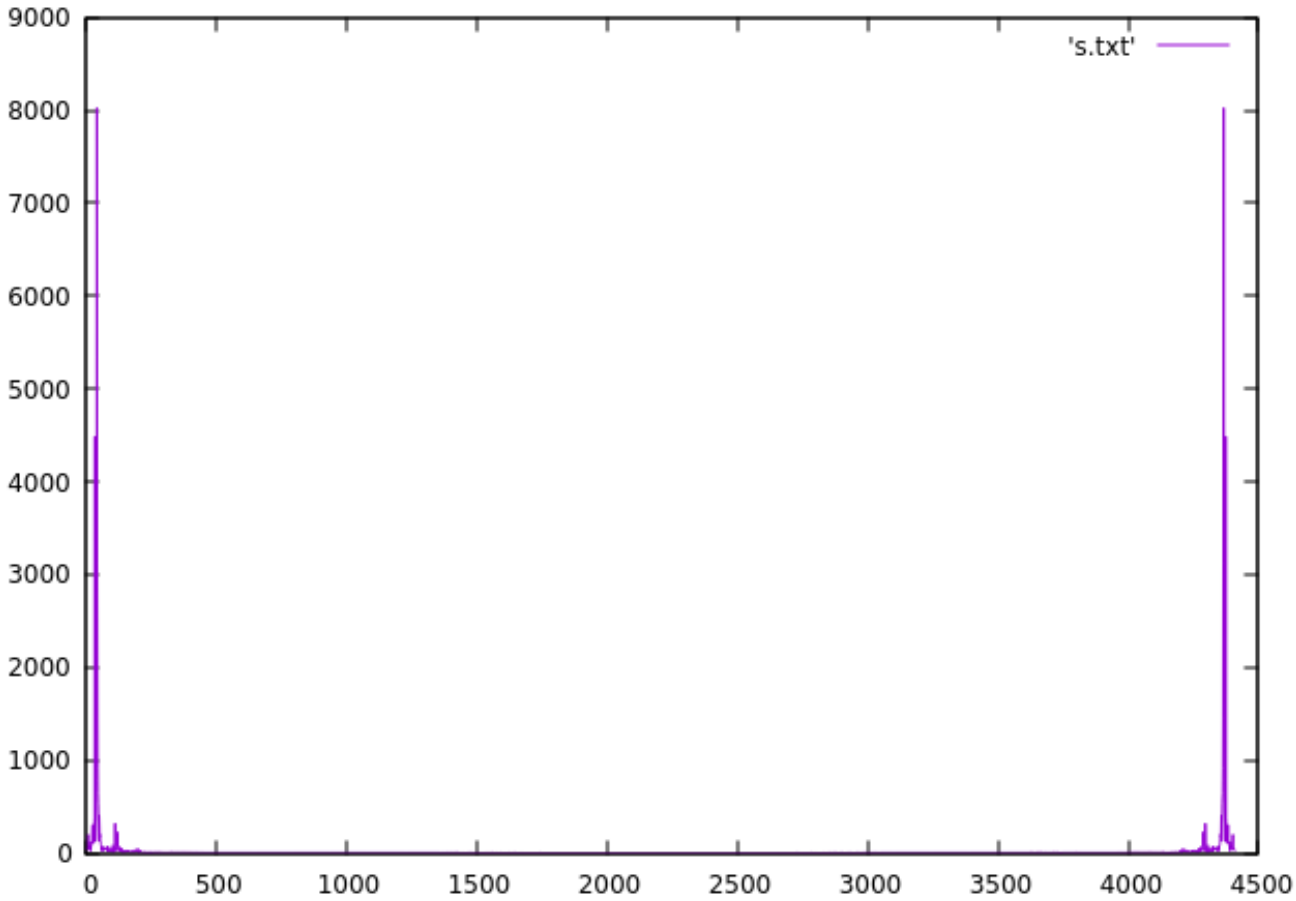
```
std::vector<Complex>  spectr = f2s(function_part);


std::ofstream file_spectr;
file_spectr.open ("s.txt");
for (int i = 0; i < size; i++)
  file_spectr << i << ' ' << spectr[i].amp() << '\n';
file_spectr.close();
```

Обратите внимание, что выводятся модули комплексных чисел!

Смотрим на звук из WAV файла

Явно выбивается одна частота

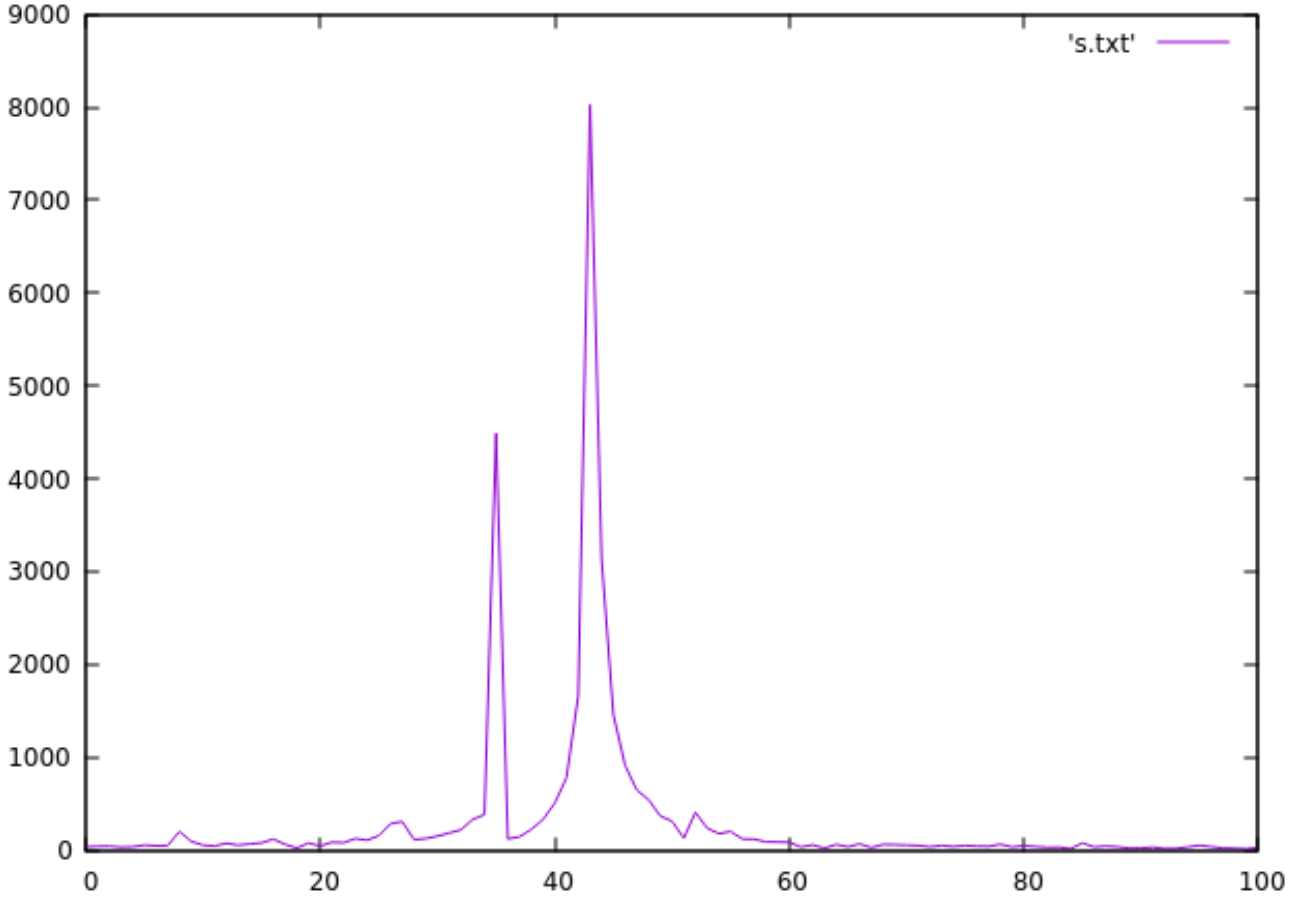


Рассмотрим поближе

```
gnuplot -p -e "plot[0:100] 's.txt' with lines"
```

Смотрим на звук из WAV файла

Примерно 41-й коэффициент Фурье из 1000.



На 1000 коэффициентов приходится диапазон в 44100 Гц. Значит, шаг дискретизиации по частотам — $44100/4410 = 10$ Гц. То есть в данном сегменте явно превалирует звук частота звука 410 Гц.

Смотрим на звук из WAV файла

Подпишем корректно ось времени

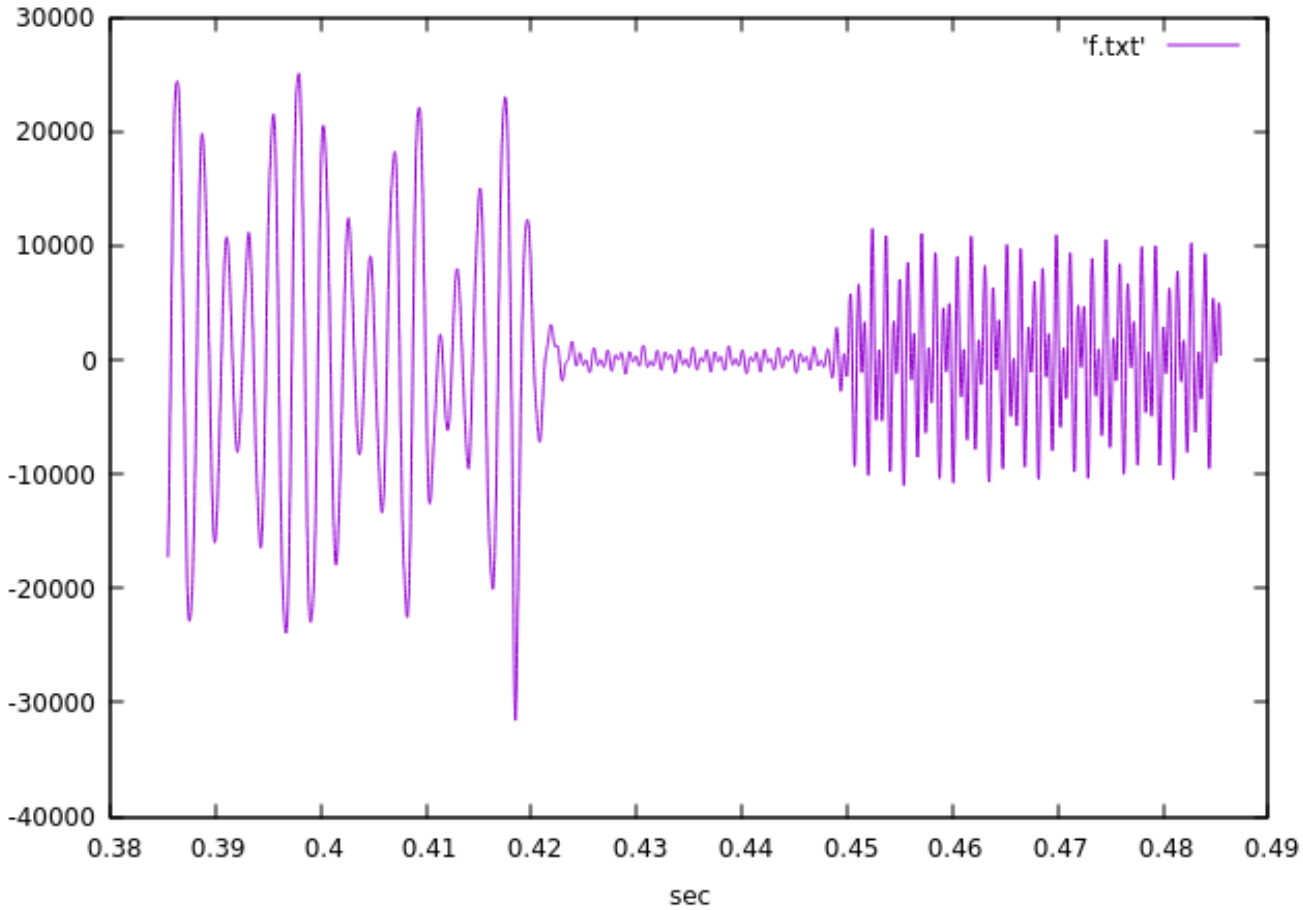
```
for (int i = 0; i < size; i++) {
    double time = (i + shift) / 44100.0;
    file_function << time << ' '
                  << function_part[i].re() << '\n';
}
```

Подпишем корректно ось частот

```
for (int i = 0; i < size; i++) {
    double frequency = 44100.0 / size * i ;
    file_spectr << frequency << ' '
                << spectr[i].amp() <<  '\n';
}
```

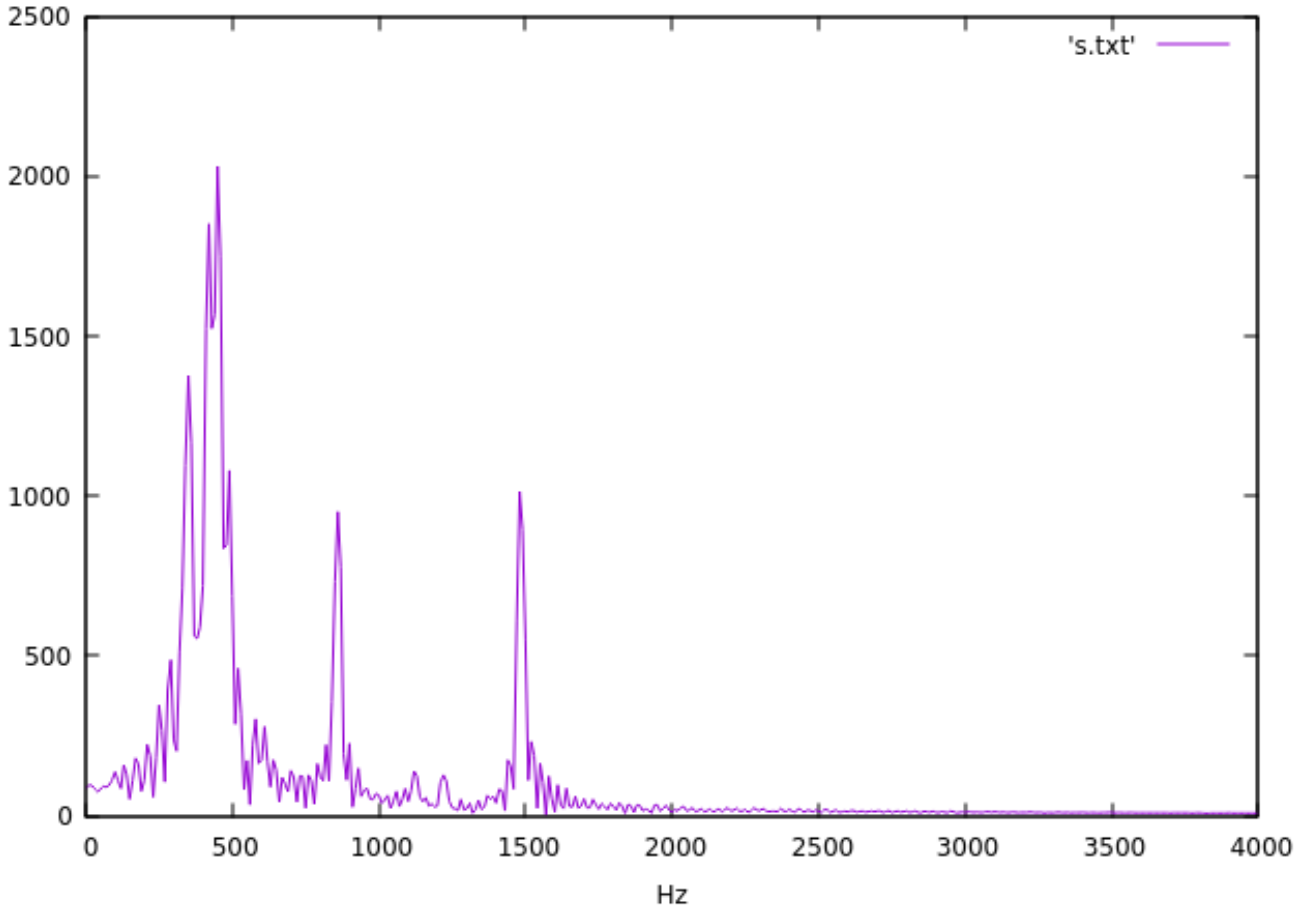
Смотрим на звук из WAV файла

Аналогичные картинки для старта на 1700-й амплитуде и длительностью 4410 амплитуд



Переключается звук.

Смотрим на звук из WAV файла



Смешивается частота 410 Гц и 1500 Гц.