

Открытая олимпиада по математике

12 декабря 2010

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ — непрерывные и сюръективные отображения из $[0, 1]$ в $[0, 1]$. Докажите, что найдётся точка x_0 из отрезка $[0, 1]$ такая, что $f(g(x_0)) = g(f(x_0))$.

2. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n k^r \cos \frac{k}{n}.$$

3. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} + \dots) = S.$$

4. Пусть f есть (не обязательно дифференцируемая) функция, удовлетворяющая для любой пары $x_1 < x_2$ неравенству

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Доказать, что тогда верно неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

5. У числа a есть p делителей, p — простое число. Докажите, что $a(a^k - 1)$ делится на p для любого натурального k .

6. Существуют ли квадратные матрицы A , B такие, что $AB - BA = E$, где E — единичная матрица?

7. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$. Разобьем N -ю частичную сумму этого ряда на два слагаемых:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{\cos n}{n} = S_N^+ + S_N^-,$$

где S_N^+ и S_N^- — суммы соответственно положительных и отрицательных членов. Докажите, что существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N^+}{S_N^-}$ и найдите его.

8. Дано конечное множество точек $\Delta = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ на плоскости и положительное число $\rho > 0$. Для произвольной точки X плоскости построим последовательность точек $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ по следующему правилу: $X_1 = X$, X_{k+1} — это центр тяжести точек из Δ , содержащихся в круге радиуса ρ с центром в точке X_k , если такие точки существуют, и $X_{k+1} = X_k$ иначе. Докажите, что при любом выборе начальной точки X данная последовательность будет постоянной, начиная с некоторого номера.