Открытая студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

8 декабря 2018

1. В множестве S выбран элемент x. Обозначим через $B(x)$ множество всех подмножеств, которые содержат x, а через $N(x)$ — множество всех подмножеств, которые не содержат x. Докажите, что множества $B(x)$ и $N(x)$ равномощны, то есть $|B(x)| = |N(x)|$.

2. Для некоторой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$ существует бесконечно много положительных чисел t таких, что для любого x
$$f(x+t) > f(x).$$
Можно ли утверждать, что $f(x)$ — возрастающая функция?

3. Даны две вещественные квадратные матрицы A и B порядка n такие, что
$$A^2(B+E) = B,$$
где E — единичная матрица порядка n. Докажите, что $AB = BA$.

4. Для каких натуральных n существует кратное 13 натуральное число, сумма цифр которого равна n? Например, $n = 8$ подходит, потому что 26 делится на 13 и сумма его цифр равна 8.

5. Назовём вещественную квадратную матрицу порядка n «особенной», если при увеличении на 1 любых двух её элементов определитель не меняется.
   (a) Найдите все «особенные» матрицы порядка 2;
   (b) Найдите все «особенные» матрицы порядка 3;
   (c) Найдите одну «особенную» ненулевую матрицу порядка 4. Покажите, что условие действительно выполняется.

6. Дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Обозначим $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Докажите, или опровергните утверждения:
   (a) если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ — абсолютно сходящийся ряд, то $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$ — тоже абсолютно сходящийся ряд;
   (b) если $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$ — абсолютно сходящийся ряд, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ — тоже абсолютно сходящийся ряд.

7. Дана дифференцируемая на $[0;1]$ функция $f(x)$ такая, что $f(1) = \frac{2}{3}$. Докажите, что
$$\int_0^1 \Big((f'(x))^2 + 2f(x)\Big)dx \geqslant 1$$
Найдите все функции $f(x)$, при которых достигается равенство.