Открытая личная олимпиада по программированию
Зимний тур 2017
19 декабря 2017

A. Askhana

Автор: Бекмаганбетов Бекарыс (ММ-2016).

Обозначим

$$A = \left[\frac{N}{3}\right]\Big(1000(Q_1+Q_2+Q_3)-(P_1+P_2+P_3)\Big).$$

Тогда ответ равен:

$$\begin{cases} A, & N \equiv 0 \bmod 3, \\ A+1000Q_1-P_1, & N \equiv 1 \bmod 3, \\ A+1000(Q_1+Q_2)-(P_1+P_2), & N \equiv 2 \bmod 3. \end{cases}$$

Асимптотика: $O(1)$.
Решение за $O(N)$ было лишь частичным.

B. Binecraft

Автор: Шарипов Азат (ВМК-2016).

Обозначим $d_{i,j}$ — количество свободных клеток в прямоугольнике $(0;0)-(i;j)$. Вычислить все $d_{i,j}$ можно за $O(W\cdot H)$ с помощью формулы включения-исключения:

$$d_{i,j} = \begin{cases} d_{i-1,j}+d_{i,j-1}-d_{i,j}, & \text{если } a_{ij} \text{ — занята}, \\ d_{i-1,j}+d_{i,j-1}-d_{i,j}+1, & \text{если } a_{ij} \text{ — свободна}. \end{cases}$$

Для каждой клетки (i,j) исходной парковки можно за $O(1)$ проверить, сколько свободных клеток находится в прямоугольнике $N\times M$ с правым нижним углов в (i,j):

$$d_{i,j}-d_{i-N,j}-d_{i,j-M}+d_{i-N,j-M}.$$

Если эта величина равна $N\cdot M$, то данное расположение подходит (прибавляем к ответу 1). В случае, если машина не квадратная ($N\neq M$), то выполняем такие же действия для прямоугольника $M\times N$.
Асимптотика: $O(W\cdot H)$.
Решение за $O(N\cdot M\cdot W\cdot H)$ было лишь частичным.

C. Course

Автор: Шарипов Азат (ВМК-2016).

Сделаем предпросчет для каждого дня `d`: `t[i]` — время прихода `i`-го студента в день `d`. Отсортируем массив пар `(t[i], i)` (не более 36 пар) и заполним массив ответов `ans[d][r][c] = t[6 * (r - 1) - (c - 1)]`. Далее отвечаем на каждый запрос за $O(1)$.
Асимптотика: $O(M+D)$.
Решение за $O(M\cdot D)$ было лишь частичным.

D. Decoration

Автор: Седякин Илья (ВМК-2013).

Посчитаем аккумулированные префиксные суммы $s_m=\sum_{i=0}^{m} a_i$, при m от 0 до N. Заметим, что сумма $a_i+...+a_j=s_j-s_{i-1}$ делится на K тогда, и только тогда, когда s_j и s_{i-1} дают одинаковые остатки.

Посчитаем, d_r — количество префиксных сумм, которые дают в точности остаток r при делении на K (с подсчетом перебрав все префиксные суммы) при r от 0 до $K-1$.

Ответ легко найти за $O(K)$:

$$\sum_{r=0}^{K-1}\frac{d_r(d_r-1)}{2}.$$

Асимптотика: $O(N+K)$.
Решение за $O(N^2)$ было лишь частичным.

E. Easy shifting

Предложил: Шарипов Азат (ВМК-2016).

Число инверсий данной перестановки можно вычислить за $O(N \log N)$ с помощью известной модификации сортировки слиянием. Посчитаем как изменится число инверсий после циклического сдвига влево.

Допустим дана некоторая перестановка, в которой известно P — число инверсий. Обозначим X — первое слева число перестановки. Если убрать число X из перестановки, то количество инверсий уменьшится на $(X-1)$ (все числа меньшие X). Если добавить число X справа, то добавится $(N-X)$ инверсий. Таким образом общее количество инверсий станет

$$P - 2X + 1 - N.$$

То есть за $O(1)$ можно узнать на сколько изменится число инверсий при циклическом сдвиге влево. Максимальное число инверсий среди всех сдвигов можно найти перебором всех элементов массива без явного сдвига (за $O(N)$).

Асимптотика: $O(N \log N)$.

Решение за $O(N^2)$ было лишь частичным.

F. Fix position

Предложил: Аскергали Ануар (ВМК-2016).

Заметим, что если расстояние между i-й точкой первого ряда и j-й точкой второго ряда минимальное, то и разница координат по оси OX между этими точками будет минимальная (так как разница координат по оси OY равна 1).

Отсортируем точки в первом и втором ряду за $O(N \log N + M \log M)$. Обозначим u_i и d_j полученные координаты в первом и втором ряду соответственно.

Решение 1. Для каждой точки u_i из первого ряда запустим целочисленный тернарный поиск минимума для выпуклой вниз функции $f(j) = |u_i - d_j|$.

Асиптотика: $(N + M) \log(MN)$.

Решение 2. Заметим, что если $u_i < u_{i+1} < d_j$, то $|u_i - d_j| > |u_{i+1} - d_j|$. Заведем 2 указателя $i = 0$ и $j = 0$. Если $u_{i+1} < d_{j+1}$ то двигаем указатель $i = i + 1$, иначе двигаем указатель $j = j + 1$. Среди всех таких пар находим минимальную. Таким образом за $O(N + M)$ найдем ответ с помощью двух указателей.

Асиптотика: $O(N \log N + M \log M)$.

Решение за $O(N \cdot M)$ было лишь частичным.

G. Graphland

Автор: Бекмаганбетов Бекарыс (ММ-2016).

Построим компоненты связности обходом в ширину или в глубину за $O(N+M)$. Для каждой вершины запомним номер компоненты связности, в которой она находится. Далее переберем все ребра, которые можно добавить и которые при этом соединяют вершины из разных компонент связности. Среди таких ребер выберем наиболее дешевое.

Асиптотика: $O(N + M + T)$.