

Открытая олимпиада по математике

21 декабря 2012

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Будем называть целочисленную квадратную матрицу порядка n «весёлой», если сумма элементов каждой её строки чётна. Докажите, что для любой целочисленной матрицы A и для любой «весёлой» матрицы B произведение AB тоже является «весёлой» матрицей.
2. Пусть $(A, +, *)$ — конечное кольцо с единицей, в котором $1 + 1 = 0$. Докажите, что уравнения $x^2 = 0$ и $x^2 = 1$ имеют одинаковое количество корней в кольце.
3. Прямые l_1 и l_2 касаются параболы в точках A и B , соответственно, и пересекаются в точке C . Точка K — середина отрезка AB . Докажите, что середина отрезка KC лежит на параболе.
4. При каких натуральных n выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^n [\sqrt[k]{n}] = 2n?$$

5. Последовательность $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$ состоит из всех натуральных чисел, являющихся степенью 3 или представимых в виде суммы различных степеней 3. Найдите 100-й член этой последовательности.
6. Квадратная матрица A порядка m такова, что $A^{n+1} = 0$, а A^n не равна нулевой. Докажите, что

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E = 0$$

тогда, и только тогда, когда вещественные коэффициенты $a_i = 0$ при любом $i = 0, 1, \dots, n$. Здесь E — единичная матрица.

7. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^3 + 2^3 + \dots + k^3}.$$

Примечание: соотношение $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ считать известным.

8. Докажите, что 11 коней не могут побить все оставшиеся 53 поля шахматной доски.
9. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $\int_0^1 x f(x) dx = 0$. Докажите, что

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4 \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$