Введение в численные методы. Интегрирование

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

18 апреля 2019

План на семестр

1. СЛАУ (точные методы)
2. СЛАУ (итерационные методы)
3. решение нелинейных уравнений
4. интерполяция
5. аппроксимация
6. **интегрирование**
7. дифференцирование

Интегрирование

Дана непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$. Необходимо вычислить:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Основная идея: реализовать суммы Дарбу.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum f(\xi_i)\Delta_i.$$

Типы методов

1. детерминированные (метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона и др.);
2. стохастические (метод Монте-Карло, геометрический метод и др.).

Детерминированные методы

Введём равномерную сетку на отрезке $[a; b]$ порядка n:

$$x_i = a + i * h, i = 0..n$$

где $h = \frac{1}{n}$.
Обозначим значения функции в этих узлах:

$$f_i = f(x_i), i = 0..n$$

Взвешенная сумма

$$\sum_{i=0}^{n} c_i f_i$$

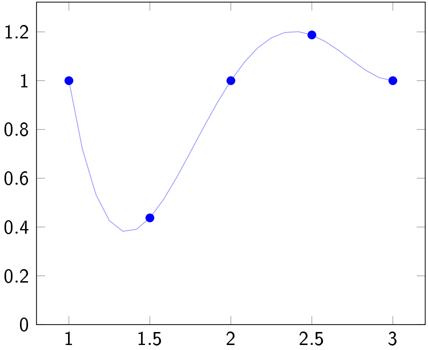
приближает интеграл при условии, что $\sum_{i=0}^{n} c_i = b - a$.
Подбирая различные веса, можно получить различные приближения интеграла.

Пример

Вычислим интеграл:

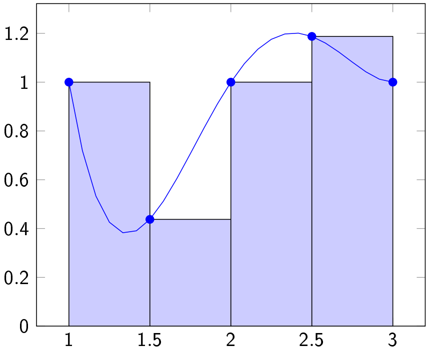
$$I = \int_1^3 \big(1 + (x-1)(x-2)(x-3)(x-3)\big)\, dx = \frac{26}{15}.$$

Сеточная функция:



Метод левых прямоугольников

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot h = h \sum_{i=0}^{n-1} f_i.$$



Интеграл для примера: $I_4 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{16} + 1 + \frac{19}{16}\right) = \frac{29}{16}$.
Погрешность для примера: $|I_4 - I| = \left|\frac{29}{16} - \frac{26}{15}\right| = \frac{17}{120} \approx 0.1417$.

Метод левых прямоугольников

Погрешность: $|I - I_n| = O(h) = O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Отдельный прямоугольник (интерполяционный полином 1 степени)

$$f(x) - f(x_i) = f'(\xi)(x - x_i)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))dx = f'(\xi) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)dx = f'(\xi) \int_0^h xdx = f'(\xi) \cdot \frac{h^2}{2}$$

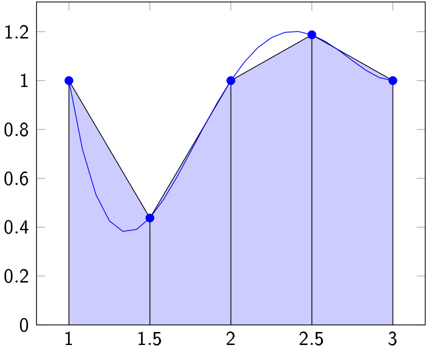
$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))dx \right| \leqslant M_1$$

$$|I - I_n| \leqslant n \cdot M_1 \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{M_1 \cdot h}{2} \cdot (b - a)$$

Метод трапеций

Основная идея: на каждом отрезке кусочно-линейная аппроксимация.

$$\bar{I}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i + f_{i+1}}{2} h = h\left(\frac{f_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i + \frac{f_n}{2}\right)$$



Интеграл для примера: $\bar{I}_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{16} + 1 + \frac{19}{16} + \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{16}$.

Погрешность для примера: $|\bar{I}_4 - I| = \left|\frac{29}{16} - \frac{26}{15}\right| = \frac{17}{120} \approx 0.1417$.

Метод трапеций

Погрешность: $|I - \overline{I}_n| = O(h^2) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

Отдельный прямоугольник (интерполяционный полином 2 степени)

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$|I - I_n| \leqslant n \cdot M_2 \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{M_2 \cdot h^2}{12} \cdot (b - a)$$

Метод Симпсона

Основная идея: на трех подряд идущих узлах кусочно-квадратичная аппроксимация (применим при $n = 2m$).

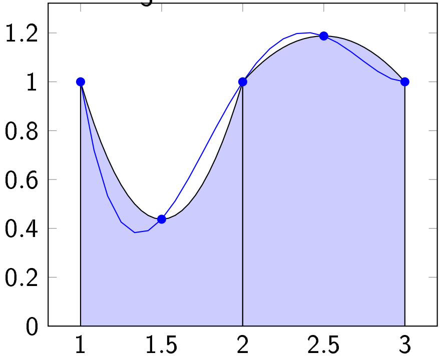
$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{b-a}{3}(b^2 + ba + a^2) = \frac{b-a}{6}\left(b^2 + (b+a)^2 + a^2\right).$$

Пусть $a = x_{2k}$, $b = x_{2k+2}$. Тогда $a + b = 2x_{2k+1}$ и $b - a = 2h$:

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} x^3 dx = \frac{h}{3}\left(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right).$$

Метод Симпсона

$$\tilde{I}_n = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}}{3} h = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{2n-1} + f_{2n} \right).$$



Интеграл для примера:
$\tilde{I}_4 = \frac{1}{6} \left(1 * 1 + 4 * \frac{7}{16} + 2 * 1 + 4 * \frac{19}{16} + 1 * 1 \right) = \frac{7}{4}.$
Погрешность для примера: $|\tilde{I}_4 - I| = \left| \frac{7}{4} - \frac{26}{15} \right| = \frac{1}{60} \approx 0.0167.$

Метод Симпсона

Погрешность: $|I - \tilde{I}_n| = O(h^3) = O\left(\frac{1}{N^3}\right)$.

Отдельная пара прямоугольников (интерполяционный полином 3 степени)

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f^{iv}(\xi)}{4!}(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

$$|I - I_n| \leqslant \frac{M_4 \cdot h^3}{2880} \cdot (b-a)$$

Вероятностный метод Монте Карло

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum f(\xi_i)\Delta_i.$$

Пусть ξ_i — случайная равномерно распределенная на отрезке $[a; b]$ величина, то есть

$$\xi_i = a + u_i * (b - a)$$

где $u_i \in U[0, 1]$.
Интеграл будет аппроксимироваться так:

$$\hat{I}_n = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i).$$

Погрешность: $|I - \tilde{I}_n| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Вероятностный метод Монте Карло

Пример $N = 20$: 1.7888, 2.5969, 1.3951, 2.5365, 2.1079, 2.2577, 2.0268, 2.8324, 2.4346, 2.2139, 1.4858, 2.6084, 1.8019, 1.2176, 1.4365, 2.6782, 1.5921, 2.0486, 2.9456, 2.5427.

$$\hat{I}_{20} = 1.824732.$$

Погрешность:

$$|\hat{I}_{20} - I| = \left|1.824732 - \frac{26}{15}\right| \approx 0.0914.$$

Геометрическое вероятностное приближение

Рассмотрим прямоугольник:

$$[a; b] \times [0, M],$$

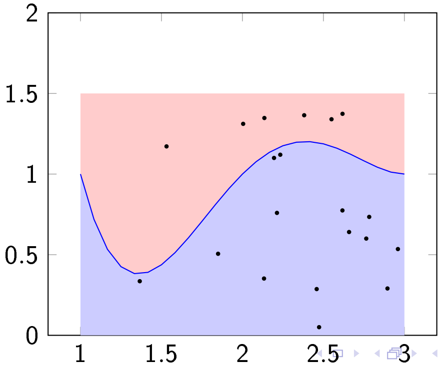
где $0 < f(x) < M$. Площадь прямоугольника:

$$S = (b - a)M.$$

Геометрическое вероятностное приближение

Сгенерируем n случайных равномерно распределенных по каждой координате точек (x_i, y_i) (т.е. $x_i \in U[a;b]$, $y_i \in U[0;M]$).
Посчитаем n_0 — количество точек, которые попали под график функции $f(x)$, т.е. $f(x_i) < y_i$. Отношение попавших точек к общему количеству аппроксимирует отношение интеграла к площади прямоугольника:

$$\frac{n_0}{n} \approx \frac{I}{S} \Leftrightarrow I_n = \frac{n_0}{n} * S.$$



Геометрическое вероятностное приближение

Для примера: $M = 1.5$, $S = (b-a) * M = 2 * 1.5 = 3$, $n = 20$, $n_0 = 14$.
Интеграл для примера:

$$\tilde{I}_{20} \approx \frac{14}{20} * 3 = \frac{21}{10}$$

Погрешность для примера:

$$|\tilde{I}_{20} - I| = \left|\frac{21}{10} - \frac{26}{15}\right| = \frac{11}{30} \approx 0.3667.$$

Погрешность: $|I - \tilde{I}_n| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. При выборе минимально возможного прямоугольника старший коэффициент в погрешности будет меньше, чем в предыдущем методе.

Правило Рунге

Бывает сложно заранее подобрать размер разбиения $n(\varepsilon)$ для вычисления интеграла с заданной точностью ε.
Для автоматического выбора размера разбиения используется правило Рунге:

1. задается начальное $n = n_0$ (например 4);
2. вычисляется I_n и I_{2n};
3. если $|I_n - I_{2n}| < \varepsilon$, то I_{2n} и будет ответом;
4. иначе n удваивается $n := 2n$ и происходит возврат к шагу 2.

Правило Рунге

Правило Рунге:

```
I2 = integral(n)
do
    I1 = I2
    n = 2 * n
    I2 = integral(n)
while |I2 - I1| > eps
```

python

```
import numpy as np
from scipy import integrate

def f(x):
    return 1 + (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-3)

x = np.linspace(1.0, 3.0, 5)
y = np.vectorize(f)(x)

It = integrate.trapz(y, x)
Is = integrate.simps(y, x)
```

Справка

```
from scipy import integrate

help(integrate)
help(integrate.trapz)
```

Литература

Подробнее в [1, стр. 86, 117] и [2, стр. 72].

Калиткин Н.Н. Численные методы. - Спб.: БХВ-Петербург, 2014.

Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.