

VII Республиканская студенческая предметная олимпиада
по направлению «Математика»
26 марта 2015

1. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ не менее трех различных нулей. Докажите, что существует точка $x \in [a, b]$ такая, что $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$.
2. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$. Известно, что $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ и $\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \leq 2$ для всех $x \in [0, +\infty)$. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 0$.
3. Известно, что для квадратных матриц A и B одинакового порядка выполнены следующие равенства $AB = BA$, $A^{99} = E$, $B^{100} = E$, где E — единичная матрица. Докажите, что существует матрица C такая, что $(A + E + B)C = C(A + E + B) = E$.
4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}.$$

Доказать существование и найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$.