Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Вступительное испытание по математике
Пособие для поступающих
в Казахстанский филиал МГУ

Астана
2018

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
Б15

Рекомендовано к печати Ученым советом
Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова

Авторы пособия: преподаватели кафедры математики и информатики Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова

Баев Ален Жуматаевич,
Васильев Антон Николаевич,
Галиева Нургуль Кадыржановна.

Рецензенты: кафедра математики и информатики Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова; доцент кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова Клячко А. А.

Вступительное испытание по математике: пособие для поступающих в Казахстанский филиал МГУ / А. Ж. Баев, А. Н. Васильев, Н. К. Галиева. — Астана, 2018. — 109 с.

ISBN 978-601-7804-61-9

Данное пособие предназначено для поступающих в Казахстанский филиал МГУ, учителей и выпускников средних школ. В пособии содержатся подробные решения задач, предложенных абитуриентам на вступительном экзамене по математике в 2011–2018 годах.

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

ДОРОГИЕ АБИТУРИЕНТЫ!

Московский университет — старейший и крупнейший университет России, один из ведущих университетов мира. Он внес огромный вклад в развитие мировой науки, образования и культуры и является одним из престижных университетов мира.

Казахстанский филиал МГУ — структурное подразделение Московского университета на территории Республики Казахстан. Филиал создан по инициативе Президента Республики Казахстан Н. А. Назарбаева.

В Казахстанском филиале МГУ создана уникальная система образования, которая гарантирует высокое качество обучения студентов. Это достигается как полным соблюдением учебных программ Московского университета в Филиале, так и тем, что учебный процесс в Филиале обеспечивается в основном профессорами и преподавателями МГУ. Ежегодно более 120 профессоров и преподавателей МГУ командируются Московским университетом в Филиал для чтения лекций и проведения семинаров.

Все студенты Филиала на старших курсах обучаются в МГУ и получают диплом об окончании Московского университета. На время обучения в Москве им предоставляются места в общежитиях МГУ.

Выпускники Казахстанского филиала работают в различных ведомствах, институтах и национальных компаниях Республики Казахстан, успешно занимаются бизнесом.

Приглашаем поступать в Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Директор
Казахстанского филиала МГУ
профессор **А. В. СИДОРОВИЧ**

Содержание

Введение

На сегодняшний день невозможно представить нашу жизнь без научно-технического прогресса. Наука играет важнейшую роль практически во всех областях человеческой деятельности, являясь её фундаментом. Также верно и то, что современная наука немыслима без математики: математические методы все больше и больше проникают в те её сферы, в которых какую-нибудь сотню-другую лет назад с ними были абсолютно незнакомы. Это и общественные науки, и медицина, и даже лингвистика. Поэтому неудивительно, что в МГУ имени М.В. Ломоносова — флагмане фундаментального образования на постсоветском пространстве — без знания математики невозможно поступить практически ни на один факультет. Без её успешного освоения невозможно формирование полноценного специалиста.

Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова на сегодня имеет пять навправлений подготовки: математика, прикладная математика и информатика, экономика, экология и природопользование, филология. При поступлении на первые четыре необходимо успешно сдать экзамен по математике.

Экзамен по математике

Вступительный экзамен по математике Казахстанского филиала проводится в письменной форме. Продолжительность экзамена составляет 4 часа. Максимальная оценка за экзамен — 100 баллов. Вариант состоит из восьми задач различной сложности: задача на арифметические преобразования, четыре задачи на стандартные алгебраические приемы, одна алгебраическая задача повышенной сложности и по одной задаче на планиметрию и стереометрию. Каждая задача оценивается по следующей шкале:

$\boxed{+}$ — полное решение, подробные выкладки, абсолютно верный ответ;

$\boxed{\pm}$ — полное решение с неполными выкладками или арифметической ошибкой, которая не влияет на дальнейший ход решения;

$\boxed{\mp}$ — неполное решение, которое содержит некоторые случаи из правильного решения, или решение с арифметической ошибкой, которая существенно меняет дальнейший ход решения;
$\boxed{-}$ — неверное решение, отсутствие продвижений за исключением тривиальных.

Объем знаний и степень владения материалом, описанные в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

Программа экзамена и предъявляемые требования

Понятия, которыми должен владеть абитуриент:

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

2. Целые, рациональные и действительные числа.

3. Формулы сокращенного умножения.

4. Квадратные уравнения. Дискриминант. Теорема Виета.

5. Квадратные неравенства. Парабола.

6. Проценты.

7. Модуль числа.

8. Дробно-рациональные уравнения и неравенства. Метод интервалов.

9. Степень, корень, арифметический корень.

10. Уравнения и неравенства, содержащие радикалы.

11. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

12. Координатная плоскость. Уравнение прямой и окружности.

13. Синус, косинус, тангенс, котангенс угла. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

14. Тригонометрический круг.

15. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения аргумента. Формулы двойных углов. Формулы синуса (косинуса, тангенса, котангенса) суммы и разности. Формулы суммы синусов (косинусов, тангенсов и котангенсов). Формулы произведения синусов (косинусов).

16. Логарифм.

17. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.

18. Уравнение, неравенство, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.

19. Задачи с параметром.

20. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота и их свойства.

21. Прямоугольный треугольник и его свойства. Теорема Пифагора.

22. Формулы площади треугольников.

23. Теорема синусов. Теорема косинусов.

24. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция и их свойства.

25. Правильный многоугольник.

26. Окружность и круг. Касательная, секущая, хорда. Круговой сектор и сегмент. Центральный и вписанные углы.

27. Вписанные и описанные четырехугольники и их свойства.

28. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол. Трехгранный угол. Теорема о трех перпендикулярах.

29. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.

30. Цилиндр, конус, шар, сфера.

31. Площадь поверхности и объем тетраэдра, цилиндра, конуса, шара.

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1. выполнять без калькулятора действия над числами и числовыми выражениями;

2. преобразовывать буквенные выражения;

3. сравнивать числа и находить их приближенные значения без калькулятора;

4. доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;

5. решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;

6. исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;

7. пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;

8. пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
9. изображать геометрические фигуры на чертеже;
10. делать дополнительные построения;
11. применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
12. пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
13. составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
14. излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

Литература

Рекомендуемая литература для подготовки к вступительному экзамену:

1. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика: Методические указания к ответам на теоретические вопросы билетов устного экзамена по математике. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2007.
2. Разгулин А.В., Федотов М.В. Алгебра: Учебно–методическое пособие. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2007.
3. Воронин В.П., Федотов М.В. Геометрия: Учебно–методическое пособие. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2006.

4. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2007.

5. Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Айрис-пресс, 2003.

Электронные ресурсы

Следующие электронные ресурсы будут полезны для ознакомления с вариантами, предложенными в разные годы в различных подразделениях МГУ:

- Официальный сайт Центральной приемной комиссии МГУ:
  `http://cpk.msu.ru/`
- Официальный сайт Приемной комиссии мехмата МГУ:
  `http://pk.math.msu.ru/ru/specialist/variant`

Желаем успехов!

Условия

2011 год

1 вариант

1. Какие из чисел 2, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{7}+2$, $\sqrt{7}-2$ являются корнями уравнения

$$4x^3+9=19x^2?$$

2. Представьте число $\sqrt{33}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,1.

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-\sin(\pi+4x)=\sin 4x+\sin x.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x\cdot 32^y=256, \\ \sqrt{2x-2}=y. \end{cases}$$

5. В арифметической прогрессии 34 члена, и разность этой прогрессии равна 12. Сумма всех членов прогрессии в 4 раза больше, чем сумма членов, стоящих на нечетных местах. Найдите первый член этой прогрессии.

6. В трапеции, описанной около окружности радиуса 4, разность длин боковых сторон равна 4, а длина средней линии равна 12. Найдите длины сторон трапеции.

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(x+6)\cdot\log_5(x+5)}{x+4}\leqslant\frac{\log_5(x+6)\cdot\log_2(x+5)}{x+3}.$$

8. В пирамиде $ABCD$: $AB=1$, $AC=2$, $AD=3$, $BC=\sqrt{5}$, $BD=\sqrt{10}$, $CD=\sqrt{13}$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

2 вариант

1. Какие из чисел 2, $-\frac{2}{3}$, $\sqrt{5}+3$, $\sqrt{5}-3$ являются корнями уравнения

$$3x^3 = 16x^2 - 8?$$

2. Представьте число $\sqrt{39}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,1.

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) + \sin(\pi - 3x) = \sin 3x - \cos x.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8^x \cdot 64^y = 128, \\ \sqrt{12y - 7} = x. \end{cases}$$

5. В арифметической прогрессии 26 членов, и разность этой прогрессии равна 15. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше, чем сумма членов, стоящих на нечетных местах. Найдите первый член этой прогрессии.

6. В трапеции, описанной около окружности радиуса 6, разность длин боковых сторон равна 4, а длина средней линии равна 15. Найдите длины сторон трапеции.

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x-3)\cdot\log_4(x-4)}{x-5} \leqslant \frac{\log_4(x-3)\cdot\log_3(x-4)}{x-6}.$$

8. В пирамиде $ABCD$: $AB = 1$, $AC = 3$, $AD = 4$, $BC = \sqrt{10}$, $BD = \sqrt{17}$, $CD = 5$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

2012 год

1 вариант

1. Определите, какие из чисел являются целыми, и вычислите эти целые числа:

   а) $\frac{19}{7} + \frac{7}{5} - \frac{4}{35}$;

   б) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{6}$;

   в) $\frac{2{,}9 \cdot 3{,}4}{4{,}93}$.

2. Решите уравнение
$$\sqrt{x^2 + 24} = 6 - x^2.$$

3. Решите уравнение
$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 |\cos x + \sin x| = \frac{\pi^2}{4} (\cos x + \sin x).$$

4. В арифметической прогрессии десятый член больше пятого члена на 15 и больше второго члена в 13 раз. Найдите сумму всех членов этой прогрессии, начиная с сотого члена и заканчивая двухсотым.

5. Решите неравенство
$$\log_7 x \leqslant 5 + 2\log_{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{7}\right).$$

6. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120° и четыре последовательные стороны имеют длины 2, 3, 3, 4. Найдите площадь шестиугольника.

7. Найдите все значения, которые принимает функция
$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1}.$$

8. Кусок сыра в форме правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина пирамиды) разрезали одним плоским разрезом, который проходит через ребро AB и делит ребро SC в отношении $1:3$, считая от вершины S. Найдите отношение объемов полученных кусков сыра.

2 вариант

1. Определите, какие из чисел являются целыми, и вычислите эти целые числа:

а) $\frac{11}{3} + \frac{9}{11} + \frac{17}{33}$;

б) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{35} \cdot \sqrt{10}$;

в) $\frac{3{,}1 \cdot 3{,}8}{5{,}89}$.

2. Решите уравнение
$$\sqrt{x^2+12} = 8 - x^2.$$

3. Решите уравнение
$$\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 |\cos x - \sin x| = \frac{\pi^2}{4} (\cos x - \sin x)\,.$$

4. В арифметической прогрессии девятый член больше четвертого члена на 10 и больше третьего члена в 5 раз. Найдите сумму всех членов этой прогрессии, начиная с двухсотого члена и заканчивая трехсотым.

5. Решите неравенство
$$3\log_{\sqrt{x}} 11 \leqslant 8 + 2\log_{11}\left(\frac{1}{x}\right).$$

6. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120° и четыре последовательные стороны имеют длины 4, 5, 5, 6. Найдите площадь шестиугольника.

7. Найдите все значения, которые принимает функция
$$f(x) = \frac{3x^2+x+1}{2x^2-x+1}.$$

8. Кусок сыра в форме правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина пирамиды) разрезали одним плоским разрезом, который проходит через ребро AB и делит ребро SC в отношении $2:3$, считая от вершины S. Найдите отношение объемов полученных кусков сыра.

2013 год

1 вариант

1. Докажите, что число

$$\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[6]{3}\right)^3\cdot\left(9+5\sqrt{3}\right)$$

является целым и найдите это целое число.

2. Решите неравенство
$$\frac{13\cdot|x+2|-5}{2\cdot|x+2|+1}<4.$$

3. Решите уравнение

$$2+\cos(\pi+9x)=5\sin\frac{\pi-9x}{2}.$$

4. В возрастающей арифметической прогрессии произведение седьмого и восьмого членов на 46 больше, чем произведение пятого и девятого членов, и на 108 больше, чем произведение третьего и десятого членов. Чему равна сумма первых 25 членов этой прогрессии?

5. Решите неравенство

$$(18-3x)\cdot\log_{2^x-12}\sqrt[3]{2}\leqslant 1.$$

6. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 20, а длина боковой стороны CD равна $10\sqrt{3}$. Через точки A, B, C проходит окружность, пересекающая основание трапеции AD в точке F. Угол AFB равен $60°$. Найдите длину отрезка BF.

7. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 26. Результат разделили на сумму исходных натуральных чисел с остатком. В частном получили 5, а в остатке 60. Найдите исходные натуральные числа.

8. Квадрат $ABCD$ со стороной 3 см является основанием двух пирамид $MABCD$ и $NABCD$, причем MA и NC — высоты этих пирамид и точки M, N лежат по одну сторону от плоскости $ABCD$. Сумма длин высот MA и NC равна 9 см, а объем общей части пирамид равен 6 см^3. Найдите отношение высот MA и NC.

2 вариант

1. Докажите, что число

$$\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[6]{2}\right)^3 \cdot \left(20+14\sqrt{2}\right)$$

является целым и найдите это целое число.

2. Решите неравенство

$$\frac{11\cdot|x+3|-6}{6\cdot|x+3|+5}<1.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(11x-\pi)=4+7\sin\frac{\pi-11x}{2}.$$

4. В возрастающей арифметической прогрессии произведение шестого и седьмого членов на 44 больше, чем произведение четвертого и восьмого членов, и на 104 больше, чем произведение второго и девятого членов. Чему равна сумма первых 23 членов этой прогрессии?

5. Решите неравенство

$$(6-2x)\cdot\log_{3^x-6}\sqrt{3}\leqslant 1.$$

6. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны CD равна 6. Через точки A, B, C проходит окружность, пересекающая основание трапеции AD в точке F. Длина отрезка BF равна $6\sqrt{2}$. Угол AFB равен 45°. Найдите длину основания AD.

7. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 25. Результат разделили на сумму исходных натуральных чисел с остатком. В частном получили 4, а в остатке 50. Найдите исходные натуральные числа.

8. Квадрат $ABCD$ со стороной 6 см является основанием двух пирамид $MABCD$ и $NABCD$, причем MA и NC — высоты этих пирамид и точки M, N лежат по одну сторону от плоскости $ABCD$. Сумма длин высот MA и NC равна 8 см, а объем общей части пирамид равен 18 см^3. Найдите отношение высот MA и NC.

2014 год

1 вариант

1. К какому целому числу находится ближе всего на числовой оси число

$$\frac{5,1 \cdot 4,2 + 11,76}{2,3 \cdot 2,2 - 2,46}?$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{41 - 6x - x^2}}{3 - x} = 1.$$

3. Решите уравнение

$$6\sin^2 3x + 2\cos^2 6x = 5.$$

4. Даны арифметическая прогрессия, в которой разность отлична от 0, и геометрическая прогрессия. Известно, что 1-й, 2-й и 10-й члены арифметической прогрессии совпадают, соответственно, со 2-м, 5-м и 8-м членами геометрической прогрессии. Найдите отношение суммы 8 первых членов геометрической прогрессии к сумме 8 первых членов арифметической прогрессии.

5. Решите неравенство

$$\log_{x^2}\left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3}\right)^2 \leqslant 2.$$

6. Высота AH и биссектриса BL в треугольнике ABC пересекаются в точке K. При этом $AK = 4$, $KH = 2$, $BL = 11$. Найдите длину стороны BC.

7. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a\left(x^2 + x^{-2}\right) - (a+1)\left(x + x^{-1}\right) + 5 = 0$$

не имеет решений.

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны 180° и $AD = BC$. Длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A, равна 40 см. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

2 вариант

1. К какому целому числу находится ближе всего на числовой оси число

$$\frac{7,2\cdot 3,1+10,14}{3,2\cdot 2,1-4,52}?$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{22-4x-x^2}}{2-x}=1.$$

3. Решите уравнение

$$7\sin^2 5x+\cos^2 10x=2.$$

4. Даны арифметическая прогрессия, в которой разность отлична от 0, и геометрическая прогрессия. Известно, что 2-й, 3-й и 11-й члены арифметической прогрессии совпадают, соответственно, с 1-м, 4-м и 7-м членами геометрической прогрессии. Найдите отношение суммы 9 первых членов геометрической прогрессии к сумме 9 первых членов арифметической прогрессии.

5. Решите неравенство

$$\log_{x^2}\left(2x^2+\frac{13}{2}x-\frac{15}{2}\right)^2\leqslant 2.$$

6. Высота CH и биссектриса BL в треугольнике ABC пересекаются в точке K. При этом $CK=8$, $KH=4$, $BL=18$. Найдите длину стороны AB.

7. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a\left(x^2+x^{-2}\right)-(a+2)\left(x+x^{-1}\right)+7=0$$

не имеет решений.

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и D равны 180° и $AC=BD$. Радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен 3 см. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A.

2015 год

1 вариант

1. Какое из чисел больше и почему: 4,5 или $\sqrt{\frac{21}{8}+\frac{17}{6}}$?

2. Решите уравнение

$$(x^2-8x+16)(x^2-8x+18)-24=0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{24}\cos x=\sqrt{11\cos x-\cos 2x}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2+2xy=40x,\\ 16x^2+8xy=5y. \end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_{25}\left(7-\frac{x}{2}\right)}{\log_{125}(22-x)}\leqslant\frac{3}{4}.$$

6. В треугольнике длины двух сторон равны 4 и 5, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\frac{20}{9}$. Найдите площадь этого треугольника.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x+1)^4-(a+3)(x^2+2x)+a^2+3a+1=0$$

имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{51}:\sqrt{19}$. Сторона основания равна 3. Найти объем данной шестиугольной пирамиды.

2 вариант

1. Какое из чисел больше и почему: 5,5 или $\sqrt{\frac{20}{7}+\frac{23}{6}}$?

2. Решите уравнение

$$(x^2-7x+16)(x^2-7x+19)-28=0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{20}\sin x=\sqrt{9\sin x+\cos 2x}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2y^2+xy=15x,\\ 5x^2+10xy=12y.\end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_{64}\left(5+\frac{x}{2}\right)}{\log_{16}(18+x)}\leqslant\frac{1}{3}.$$

6. В треугольнике длины двух сторон равны 8 и 3, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\frac{24}{11}$. Найдите площадь этого треугольника.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x-1)^4-(a+4)(x^2-2x)+a^2+5a+5=0$$

имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{37}:\sqrt{13}$. Сторона основания равна 2. Найти объем данной шестиугольной пирамиды.

2016 год

1 вариант

1. Сколько различных решений имеет уравнение

$$7x^2 + 6x + 7 = 2\sqrt{10} \cdot (x^2 - 1)?$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x^3 - y^3 = 335. \end{cases} .$$

3. Дана квадратная таблица 10×10 клеток (10 строк, 10 столбцов). В каждой клетке таблицы стоит число. Известно, что при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку, расположенную ниже, число увеличивается на 4, а при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку справа число уменьшается на 1. Сумма всех чисел в таблице равна 250. Какое число стоит в самой левой клетке нижнего ряда?

4. Решите неравенство

$$\sqrt{7 + 2^{\log_x 5}} \geqslant 1 + 4^{\log_x \sqrt{5}}.$$

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 9\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 3\cos^2 x.$$

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD в $\sqrt{\frac{19}{4}}$ раз длиннее стороны BC и $AB = CD = 2$. Продолжения сторон AB (за точку B) и DC (за точку C) пересекаются в точке K, при этом $BK = 1$, $CK = 2$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\cos \frac{(10x - 48)\pi}{3x + 5} = 1.$$

8. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара в 3 раза короче высоты и равен $7 + \sqrt{21}$. Найдите радиус шара, который касается всех ребер пирамиды.

2 вариант

1. Сколько различных решений имеет уравнение

$$9x^2 + 4x + 9 = \sqrt{77} \cdot (1 - x^2)?$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 342. \end{cases}.$$

3. Дана квадратная таблица 8×8 клеток (8 строк, 8 столбцов). В каждой клетке таблицы стоит число. Известно, что при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку, расположенную ниже, число уменьшается на 2, а при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку справа число увеличивается на 3. Сумма всех чисел в таблице равна 160. Какое число стоит в самой правой клетке верхнего ряда?

4. Решите неравенство

$$\sqrt{31 + 5^{\log_x 3}} \geqslant 1 + 25^{\log_x \sqrt{3}}.$$

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 6\cos^2 x - 4\sin x \cos x - 2\sin^2 x.$$

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD в $\sqrt{\frac{23}{12}}$ раз длиннее стороны BC и $AB = CD = 1$. Продолжения сторон AB (за точку B) и DC (за точку C) пересекаются в точке K, при этом $BK = 2$, $CK = 3$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\cos \frac{(4x - 50)\pi}{3x + 7} = 1.$$

8. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара в 3 раза короче высоты и равен $\sqrt{21} + 3$. Найдите радиус шара, который касается всех ребер пирамиды.

2017 год

1 вариант

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{3}\cdot\sqrt{85}$ и $\frac{14-1{,}7}{3-2{,}3}$.

2. Решите уравнение $|x^2-14x+48| = 14x-42-x^2$.

3. В 9 коробках с номерами от 1 до 9 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{7}{6}$ раз больше, чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в пордяке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 25%, а в третьей — 50% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

4. Решите уравнение

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \frac{y^2}{x}, \\ \left(\log_3 x^2\right)\cdot\log_x\left(2x-\frac{3}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 60^\circ$, $AD = 21$, $BC = 40$. Окружность с центром на стороне BC касается сторон AB, AD и CD. Найдите длины сторон AB и CD.

7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$13+\sin^2 x > 3a^2-a+(4a-5)\cos x$$

выполняется для всех x.

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как $5:9$. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

2 вариант

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{5}\cdot\sqrt{39}$ и $\frac{15-2{,}6}{2-1{,}2}$.

2. Решите уравнение $|x^2 - 15x + 56| = 15x - 52 - x^2$.

3. В 10 коробках с номерами от 1 до 10 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{5}{4}$ раз больше, чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 20%, а в третьей — 40% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

4. Решите уравнение

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} \cdot x^{\log_y x} = x, \\ \left(\log_2 x^3\right) \cdot \log_x (5x - 6y) = 9 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AD = 24$, $BC = 13$. Окружность с центром на стороне AD касается сторон AB, BC и CD. Найдите длины сторон AB и CD.

7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$11 + \cos^2 x > 3a^2 + 5a - (4a - 1)\sin x$$

выполняется для всех x.

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как 7 : 25. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

2018 год

1 вариант

1. Какое целое число задано выражением $\frac{\sqrt{8}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\sqrt{32}}$?

2. Решить уравнение:
$$\sqrt{10x+6}=5x-9.$$

3. Решить неравенство:
$$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{x}} \leqslant \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}.$$

4. В геометрической прогрессии 50 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, то получится 1325. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 30 членов, то получится 495. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 5\sin y - 3\sqrt{5}\cos x = 7 - 2\cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases}$$

6. В треугольнике ABC со сторонами: $AB=4$, $BC=5$, $AC=6$ проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3. Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3 : H_2H_3$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$|(2-a)x-a| = (2-a)(x+1)^2 + 2ax - 2x + 2a$$
имеет ровно одно решение.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA=MB=MC=\sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC, опущенной из вершины B. Найдите объем пирамиды $SABC$.

2 вариант

1. Какое целое число задано выражением $\frac{\sqrt{48}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{7}\right)}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)\cdot\sqrt{12}}$?

2. Решить уравнение:
$$\sqrt{14-5x}=5x-8.$$

3. Решить неравенство:
$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2-x}}\leqslant\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{3}{x}}.$$

4. В геометрической прогрессии 40 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, то получится 900. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 20 членов, то получится 250. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases}3\cos y-4\sqrt{10}\cos x=4-2\sin^2 y,\\ \operatorname{tg} x=3.\end{cases}$$

6. В треугольнике ABC со сторонами: $AB=6$, $BC=5$, $AC=7$ проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3. Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3:H_2H_3$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$|(1-a)x-2a|=(1-a)(x+2)^2+2ax+4a+2$$
имеет ровно одно решение.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA=MB=MC=3$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC, опущенной из вершины B. Найдите объем пирамиды $SABC$.

Решения

2011 год

1 вариант

1. Какие из чисел 2, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{7}+2$, $\sqrt{7}-2$ являются корнями уравнения

$$4x^3 + 9 = 19x^2?$$

Решение:

Проверим соответствующие соотношения:

а) $4 \cdot 2^3 + 9 = 19 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 41 = 76$ — неверно;

б) $4 \cdot \frac{3^3}{4^3} + 9 = 19 \cdot \frac{3^2}{4^2} \Leftrightarrow \frac{27}{16} + 9 = \frac{171}{16}$ — верно;

в) $4(\sqrt{7}+2)^3 + 9 = 19(\sqrt{7}+2)^2 \Leftrightarrow$
$4(7\sqrt{7} + 42 + 12\sqrt{7} + 8) + 9 = 19(7 + 4\sqrt{7} + 4) \Leftrightarrow$
$76\sqrt{7} + 209 = 209 + 76\sqrt{7}$ — верно;

г) $4(\sqrt{7}-2)^3 + 9 = 19(\sqrt{7}-2)^2 \Leftrightarrow$
$4(7\sqrt{7} - 42 + 12\sqrt{7} - 8) + 9 = 19(7 - 4\sqrt{7} + 4) \Leftrightarrow$
$76\sqrt{7} - 191 = 209 - 76\sqrt{7}$ — неверно.

Ответ: $\frac{3}{4}$; $\sqrt{7}+2$.

2. Представьте число $\sqrt{33}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,1.

Решение:

Из неравенства $5^2 < 33 < 6^2$, понятно, что $5 < \sqrt{33} < 6$. Значит, целая часть равна 5. Обозначим первую цифру после запятой через x (x — целое число от 0 до 9). Тогда верно неравенство:

$$5 + 0.1x < \sqrt{33} < 5 + 0.1(x+1) \Rightarrow$$

$$25 + x + 0.01x^2 < 33 < 25 + (x+1) + 0.01(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$2500 + 100x + x^2 < 3300 < 2500 + 100(x+1) + (x+1)^2.$$

Получим 2 квадратных неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + 100x - 800 < 0, \\ x^2 + 102x - 699 > 0. \end{cases}$$

Несложно проверить, что первому неравенству удовлетворяют все цифры x от 0 до 7, а второму — от 7 до 9. Значит, первая цифра после запятой — 7.

Ответ: 5,7.

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - \sin(\pi + 4x) = \sin 4x + \sin x.$$

Решение:

Применим формулы приведения:

$$\sin 2x + \sin 4x = \sin 4x + \sin x \Leftrightarrow \sin 2x - \sin x = 0.$$

Далее используем формулу синуса двойного угла:

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

Если обращается в ноль первый множитель, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если второй — то $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x \cdot 32^y = 256, \\ \sqrt{2x-2} = y. \end{cases}$$

Решение:

Приведем в первом уравнении все множители к степени двойки:

$$2^{2x} \cdot 2^{5y} = 2^8.$$

Данное уравнение сводится к линейному $2x + 5y = 8$. А второе уравнение возведем в квадрат (с условием, что $y \geqslant 0$). Получим систему:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8, \\ 2x - 2 = y^2, \\ y \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y - 6 = 0, \\ 2x = 2 + y^2, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решения $y = 1$ и $y = -6$. С учетом условия $y \geqslant 0$, оставим только $y = 1$ и соответствующий ему $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

5. В арифметической прогрессии 34 члена, и разность этой прогрессии равна 12. Сумма всех членов прогрессии в 4 раза больше, чем сумма членов, стоящих на нечетных местах. Найдите первый член этой прогрессии.

Решение:

Сумма всех членов равна $S = \frac{a_1 + a_{34}}{2} \cdot 34$. Выражая a_{34} через первый член и разность прогрессии $a_{34} = a_1 + 33d = a_1 + 33 \cdot 12$, получим:

$$S = 34(a_1 + 33 \cdot 6).$$

Заметим, что члены, стоящие на нечетных местах, тоже образуют арифметическую прогрессию. Причем количество таких членов равно 17 (первый член a_1, последний — a_{33}), а разность $f = 24$. Соответственно, сумму членов, стоящих на нечетных местах, тоже можно посчитать как сумму арифметической прогрессии: $T = \frac{a_1+a_{33}}{2} \cdot 17$. Выражая a_{33} через первый член и разность прогрессии $a_{33} = a_1 + 32d = a_1 + 32 \cdot 12$, получим:

$$T = 17(a_1 + 32 \cdot 6).$$

Из условия известно, что S в 4 раза больше, чем T, легко найти a_1:

$$34(a_1 + 33 \cdot 6) = 4 \cdot 17(a_1 + 32 \cdot 6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 33 \cdot 6 = 2a_1 + 64 \cdot 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 = 6(33 - 64) = -186$$

Ответ: -186.

6. В трапеции, описанной около окружности радиуса 4, разность длин боковых сторон равна 4, а длина средней линии равна 12. Найдите длины сторон трапеции.

Решение:

Обозначим: A, B, C, D — вершины трапеции; $BC = a$, $AD = b$ — длины оснований трапеции; $CD = f$, $AB = e$ — боковые стороны трапеции ($e > f$). Так как около трапеции можно описать окружность, то $a + b = e + f$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = e + f, \\ f - e = 4, \\ \frac{a+b}{2} = 12. \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнения легко получить, что $e + f = 24$. А с учетом второго соотношения $f - e = 4$, находим ответ $f = 14$, $e = 10$.

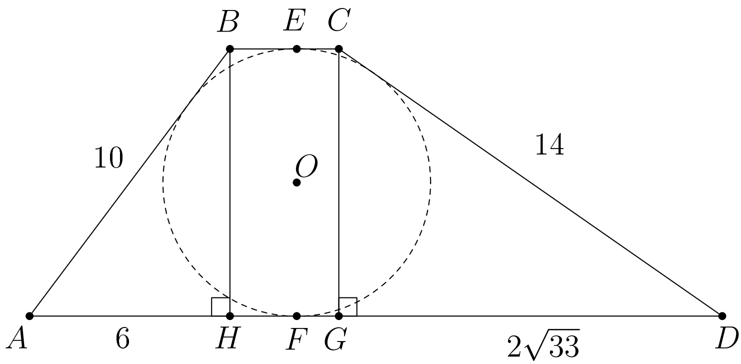


Рис. 1: к задаче №6 (1 случай)

Чтобы найти боковые стороны, сделаем стандартное дополнительное построение: опустим высоты BH и CG. Так как диаметр вписанной окружности EF равен высоте трапеции, то известно, что $BH = CG = EF = 8$. По теореме Пифагора найдем AH и DG:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Leftrightarrow AH = 6,$$

$$GD^2 = CD^2 - CG^2 = 14^2 - 8^2 = 132 \Leftrightarrow GD = 2\sqrt{33}.$$

Так как $BCGH$ — прямоугольник, то $GH = BC = a$. Обратим внимание на два принципиальных случая расположения точек A, H, G и D на прямой: $A{-}H{-}G{-}D$ и $H{-}A{-}G{-}D$ (стоит отметить, что остальные варианты соответствуют одному из данных двух).

В первом случае $AH + a + GD = b$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = 24, \\ b - a = 2\sqrt{33} + 6. \end{cases}$$

Откуда легко найти $a = 9 - \sqrt{33}$ и $b = 15 + \sqrt{33}$.

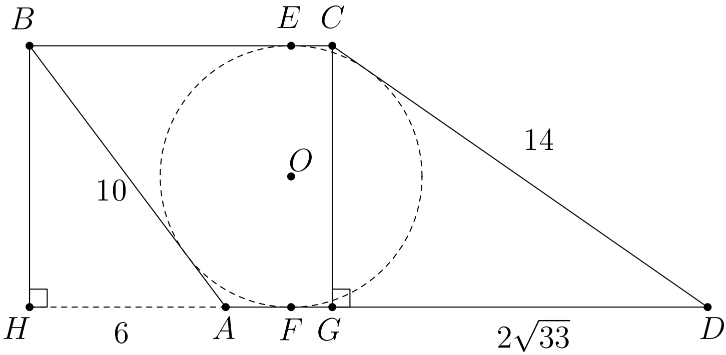


Рис. 2: к задаче №6 (2 случай)

Во втором случае $HA + b = a + GD$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = 24, \\ b - a = 2\sqrt{33} - 6. \end{cases}$$

Откуда легко найти $a = 15 - \sqrt{33}$ и $b = 9 + \sqrt{33}$.

Ответ: 10; $9 - \sqrt{33}$; 14; $15 + \sqrt{33}$ или 10; $15 - \sqrt{33}$; 14; $9 + \sqrt{33}$.

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(x+6) \cdot \log_5(x+5)}{x+4} \leqslant \frac{\log_5(x+6) \cdot \log_2(x+5)}{x+3}.$$

Решение:

Предварительно отметим несложное свойство логарифмов при допустимых значениях a, b, c и d:

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b.$$

Для доказательства этого свойства достаточно переписать каждый логарифм как отношение двух логарифмов по одному и тому же основанию (например, по основанию e):

$$\frac{\ln b}{\ln a}\cdot\frac{\ln d}{\ln c}=\frac{\ln d}{\ln a}\cdot\frac{\ln b}{\ln c}.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{\log_5(x+6)\cdot\log_2(x+5)}{x+4}\leqslant\frac{\log_5(x+6)\cdot\log_2(x+5)}{x+3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_5(x+6)\cdot\log_2(x+5)\cdot\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\right)\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_5(x+6)\cdot\log_2(x+5)}{(x+4)(x+3)}\geqslant 0.$$

Неравенство решим методом интервалов, предварительно для каждого из трех сомножителей (знаменатель — один сомножитель) обозначив области, в которых они неотрицательны.

$$\log_5(x+6)\geqslant 0\Leftrightarrow x+6\geqslant 1\Leftrightarrow x\in[-5,+\infty),$$

$$\log_2(x+5)\geqslant 0\Leftrightarrow x+5\geqslant 1\Leftrightarrow x\in[-4,+\infty),$$

$$(x+4)(x+3)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup(-3,+\infty).$$

	$(-5,-4)$	$(-4,-3)$	$(-3,+\infty)$
$\log_5(x+6)$	$+$	$+$	$+$
$\log_2(x+5)$	$-$	$+$	$+$
$(x+4)(x+3)$	$+$	$-$	$+$
L	$-$	$-$	$+$

С учетом области определения $x\in(-5,-4)\cup(-4,-3)\cup(-3,+\infty)$ можно выделить интервалы знакопостоянства выражения

$$L=\frac{\log_5(x+6)\cdot\log_2(x+5)}{(x+4)(x+3)}.$$

Отметим, что точки, в которых числитель обнуляется, не принадлежат области допустимых значений.

Ответ: $(-3; +\infty)$.

8. В пирамиде $ABCD$: $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$, $BC = \sqrt{5}$, $BD = \sqrt{10}$, $CD = \sqrt{13}$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

Решение:

Радиус вписанного шара найдем с помощью формулы объема пирамиды:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} R \cdot S,$$

где S — площадь полной поверхности. Вычислим объем и площадь пирамиды.

Найдем объем V_{ABCD}. Заметим, что все плоские углы BAC, CAD, DAB с вершиной в точке A — прямые. Для этого достаточно проверить выполнение теоремы Пифагора для треугольников CAB ($\sqrt{5}^2 = 1^2 + 2^2$), BAD ($\sqrt{10}^2 = 1^2 + 3^2$) и DAC ($\sqrt{13}^2 = 2^2 + 3^2$). Так как все углы при вершине A — прямые, то DA является высотой, опущенной из вершины D на плоскость ABC, которая является прямоугольным треугольником. Значит,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AD \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} AD \cdot AB \cdot AC = 1.$$

Найдем площадь полной поверхности $S = S_{ABC} + S_{ADC} + S_{ABD} + S_{BCD}$. Первые три треугольника прямоугольные и их площади, соответственно, равны:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot AC = 1,$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} DA \cdot AC = 3,$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} BA \cdot AD = \frac{3}{2}.$$

Последний треугольник имеет стороны $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Найти площадь треугольника со сторонами в виде радикалов можно двумя способами: либо с использованием теоремы Пифагора для двух треугольников, образованных одной из высот, либо с помощью развернутой формулы Герона, которая зависит только от квадратов сторон:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Подставим квадраты сторон:

$$S_{BCD} = \frac{1}{4}\sqrt{2(5 \cdot 10 + 10 \cdot 13 + 13 \cdot 5) - 5^2 - 10^2 - 13^2} = \frac{1}{4}\sqrt{196} = \frac{7}{2}.$$

Площадь полной поверхности: $S = 1 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 9$. Радиус вписанной сферы: $R = \frac{3V_{ABCD}}{S} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2012 год

1 вариант

1. Определите, какие из чисел являются целыми, и вычислите эти целые числа:

а) $\dfrac{19}{7}+\dfrac{7}{5}-\dfrac{4}{35}$;

б) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{33}\cdot\sqrt{6}$;

в) $\dfrac{2{,}9\cdot 3{,}4}{4{,}93}$.

Решение:

Вычислим значения данных выражений:

а) $\dfrac{19}{7}+\dfrac{7}{5}-\dfrac{4}{35}=\dfrac{95+49-4}{35}=\dfrac{140}{35}=4$ — целое;

б) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{33}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot 11\cdot 3\cdot 11\cdot 2\cdot 3}=2\cdot 3\cdot 11=66$ — целое;

в) $\dfrac{2{,}9\cdot 3{,}4}{4{,}93}=\dfrac{29\cdot 34}{493}=2$ — целое.

Ответ: все три числа являются целыми: 4, 66, 2.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+24}=6-x^2.$$

Решение:

Возведем обе части уравнения в квадрат (с условием неотрицательности правой части):

$$\sqrt{x^2+24}=6-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+24}=(6-x^2)^2,\\ 6-x^2\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 13x^2 + 12 = 0, \\ x^2 \leqslant 6. \end{cases}$$

Сделаем стандартную для биквадратного уравнения замену $t = x^2$:

$$\begin{cases} t^2 - 13t + 12 = 0, \\ t \leqslant 6. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет корни 1 и 12. Учитывая второе неравенство, получаем $t = 1$. Вернемся к исходной переменной: $x^2 = 1$ и получим ответ $x = \pm 1$.

Ответ: -1; 1.

3. Решите уравнение

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 |\cos x + \sin x| = \frac{\pi^2}{4} (\cos x + \sin x).$$

Решение:

Раскроем модуль $|\cos x + \sin x|$.

а) $\cos x + \sin x = 0$. В этом случае уравнение эквивалентно верному тождеству $0 = 0$. Найдем все x, которые удовлетворяют условию а):

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) $\cos x + \sin x > 0$. Сократим на $\cos x + \sin x > 0$:

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Находим корни данного квадратного уравнения: 0 и π. Условию б) удовлетворяет только первый корень. Значит, $x = 0$.

в) $\cos x + \sin x < 0$. Сократим на $\cos x + \sin x < 0$:

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Полученное уравнения не имеет корней.

Ответ: $\left\{0; \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. В арифметической прогрессии десятый член больше пятого члена на 15 и больше второго члена в 13 раз. Найдите сумму всех членов этой прогрессии, начиная с сотого члена и заканчивая двухсотым.

Решение:

Используем стандартные обозначения для членов арифметической прогрессии: a_n — n-й член прогрессии, d — разность прогрессии:

$$\begin{cases} a_{10} = a_5 + 15, \\ a_{10} = 13a_2 \end{cases}$$

С учетом формулы $a_n = a_1 + (n-1)d$ найдем первый член и разность прогрессии:

$$\begin{cases} a_1 + 9d = a_1 + 4d + 15, \\ a_1 + 9d = 13a_1 + 13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3, \\ a_1 = -1. \end{cases}$$

Чтобы найти сумму членов прогрессии с сотого до двухсотого, просуммируем 101 подряд идущий член арифметической прогрессии:

$$S = a_{100} + a_{101} + \dots + a_{200} = \frac{a_{100} + a_{200}}{2} \cdot 101.$$

Найдем необходимые члены прогрессии:

$$a_{100} = a_1 + 99d = -1 + 99 \cdot 3 = 296,$$

$$a_{200} = a_1 + 199d = -1 + 199 \cdot 3 = 596.$$

Получим ответ: $S = \frac{296+596}{2} \cdot 101 = 45046$.

Ответ: 45046.

5. Решите неравенство

$$\log_7 x \leqslant 5 + 2\log_{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{7}\right).$$

Решение:

Приведем логарифм справа к основанию 7:

$$\log_{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{7}\right) = \log_{x^{1/2}} 7^{-1} = -2\log_x 7 = -\frac{2}{\log_7 x}.$$

Сделаем замену переменной $t = \log_7 x$:

$$t \leqslant 5 - \frac{4}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 4}{t} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-4)}{t} \leqslant 0.$$

Решим методом интервалов: $t \in (-\infty, 0) \cup [1, 4]$. Для возврата к искомой переменной x, перепишем в виде неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} t < 0, \\ \begin{cases} t \geqslant 1, \\ t \leqslant 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_7 x < 0, \\ \begin{cases} \log_7 x \geqslant 1, \\ \log_7 x \leqslant 4 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 7, \\ x \leqslant 7^4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(0; 1) \cup [7; 2401]$.

6. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120° и четыре последовательные стороны имеют длины 2, 3, 3, 4. Найдите площадь шестиугольника.

Решение:

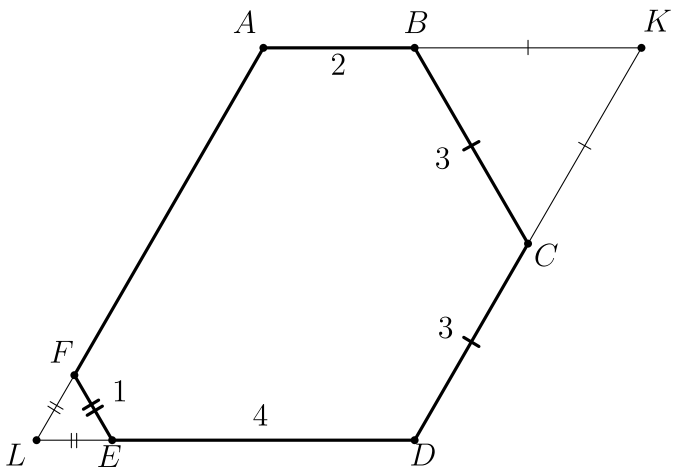


Рис. 3: к задаче №6

Обозначим вершины 6-угольника через A, B, C, D, E и F. Причем $AB = 2$, $BC = CD = 3$, $DE = 4$. Продолжим прямые AB и CD по пересечения в точке K и прямые AF и DE до пересечения в точке L.

Треугольник BCK — равносторонний, так как $\angle CBK = \angle BCK = 60^\circ$. Значит, $BK = KC = CB = 3$. Аналогично, треугольник LFE тоже равносторонний, $LF = FE = EL$.

Так как $\angle A = \angle D = 120^\circ$ и $\angle K = \angle L = 60^\circ$, то $AK || DL$ и $AL || KD$, то есть $AKDL$ — параллелограмм. Найдем сторону параллелограмма $LD = AK = AB + BK = 2 + 3 = 5$. Откуда $EF = FL = LE = LD - ED = 5 - 4 = 1$.

Из построения ясно, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна площади параллелограмма $AKDL$ за вычетом суммы площадей равносторонних треугольников BCK и FEL:

$$S_{ABCDEF} = S_{AKDL} - S_{BCK} - S_{FEL}.$$

Вычислим площадь параллелограмма

$$S_{AKDL} = LD \cdot DK \cdot \sin \angle LDK = 5 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 15\sqrt{3}$$

и площади треугольников

$$S_{BCK} = BC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{FEL} = FE^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Площадь шестиугольника $S_{ABCDEF} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

7. Найдите все значения, которые принимает функция

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1}.$$

Решение:

Найдем все значения параметра a такие, что уравнение

$$\frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1} = a$$

имеет по крайней мере одно решение.

Заметим, что знаменатель $3x^2 - x + 1$ — это квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом $D = -11 < 0$. Значит, знаменатель никогда не обращается в нуль, и уравнение эквивалентно следующему:

$$(2 - 3a)x^2 + (1 + a)x + (1 - a) = 0.$$

Рассмотрим два случая:

а) $2 - 3a = 0$. Уравнение будет линейным. Значит, при $a = \frac{2}{3}$, решение существует: $x = -\frac{1}{5}$.

б) $2 - 3a \neq 0$. Уравнение будет квадратным. Значит, при $a \neq \frac{2}{3}$, решение существует тогда, и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$(1+a)^2 - 4(2-3a)(1-a) \geqslant 0 \Leftrightarrow 11a^2 - 22a + 7 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11} \leqslant a \leqslant 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}.$$

Несложно проверить, что число $\frac{2}{3}$ лежит в указанном множестве на отрезке. Тогда с учетом условия б) во втором случае ответом будет:

$$a \in \left[1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}\right].$$

Объединим ответы из двух случаев: $a \in \left[1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11}, 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}\right]$.

Ответ: $\left[1 - 2\frac{\sqrt{11}}{11}; 1 + 2\frac{\sqrt{11}}{11}\right]$.

8. Кусок сыра в форме правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина пирамиды) разрезали одним плоским разрезом, который проходит через ребро AB и делит ребро SC в отношении $1:3$, считая от вершины S. Найдите отношение объемов полученных кусков сыра.

Решение:

Обозначим: K — точка, которая делит SC в отношении $1:3$, считая от вершины S; L — точка пересечения плоскости ABK и ребра SD. Докажем, что сечение, проходящее через точку K и ребро AB — это равнобедренная трапеция $ABKL$.

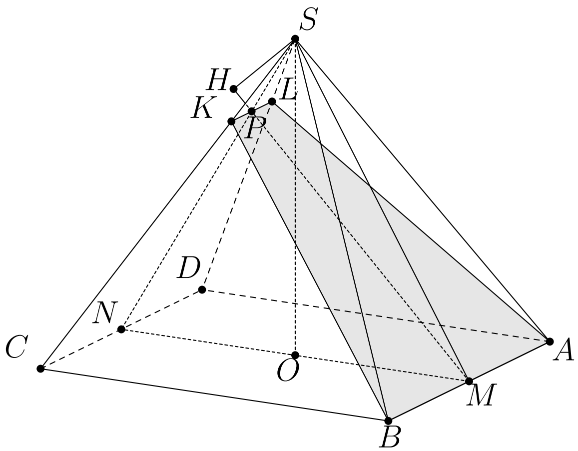


Рис. 4: к задаче №8

Четырехугольник $KLDC$ — плоский. Значит, либо прямые KL, CD и AB пересекаются в одной точке, либо — параллельны. Первый вариант невозможен, так как в правильной пирамиде AB параллельно CD. Значит, KL параллельно CD и $ABKL$ — трапеция. Так как треугольники ALD и BKC равны, то сечение $ABKL$ — равнобедренная трапеция.

Введем обозначения: M — середина отрезка AB, N — середина отрезка CD, P — середина отрезка KL, O — центр квадрата $ABCD$. Понятно, что точки P и O будут лежать в плоскости SMN, а плоскости SMN и $ABKL$ будут перпендикулярны (в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SMN). Значит, перпендикуляр SH из S на плоскость $ABKL$ тоже будет лежать в плоскости SMN.

Запишем отношение объемов пирамид $SABCD$ и $SABKL$:

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{ABKL} \cdot SH}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO} = \frac{S_{ABKL}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{SH}{SO}$$

Отметим, что $ABKL$ — равнобедренная трапеция с высотой MP и площадью $S_{ABKL} = \frac{AB+KL}{2} \cdot MP$, а $ABCD$ — квадрат с площадью $S_{ABCD} = AB \cdot MN$.

Перепишем отношение объемов:

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{2}(AB+KL) \cdot MP \cdot SH}{AB \cdot MN \cdot SO} = \frac{AB+KL}{2AB} \cdot \frac{MP \cdot SH}{MN \cdot SO}.$$

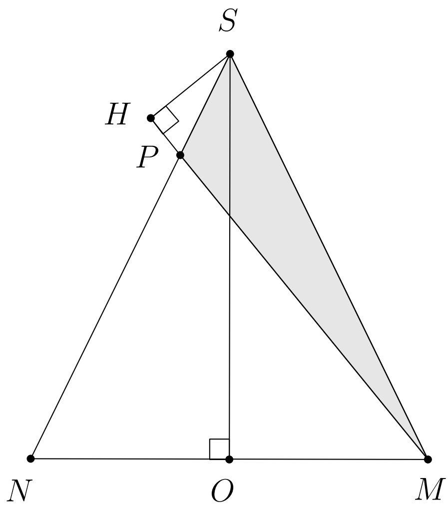


Рис. 5: к задаче №8

С учетом того, что

$$MP \cdot SH = 2S_{SMP} = SP \cdot SM \cdot \sin \angle NSM,$$

$$MN \cdot SO = 2S_{SMN} = SN \cdot SM \cdot \sin \angle NSM,$$

получаем соотношение

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{AB+KL}{2AB} \cdot \frac{SP}{SN}$$

Обозначим длину стороны основания пирамиды через a. Легко заметить, что треугольники SKL и SCD подобны с коэффициентом подобия $1 : 4$. Значит, $KL = \frac{a}{4}$ и $\frac{SP}{SN} = \frac{1}{4}$.

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{a + \frac{a}{4}}{2a} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$$

Откуда легко найти отношение, в котором делится объем:

$$\frac{V_{ABLKDC}}{V_{SABKL}} = \frac{27}{5}.$$

Ответ: $27 : 5$.

2013 год

1 вариант

1. Докажите, что число

$$\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[6]{3}\right)^3\cdot\left(9+5\sqrt{3}\right)$$

является целым и найдите это целое число.

Решение:

Упростим выражение с помощью формулы куба разности:

$$\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[6]{3}\right)^3\cdot\left(9+5\sqrt{3}\right)=$$

$$=\left(9-3\sqrt[3]{9^2}\sqrt[6]{3}+3\sqrt[3]{9}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt{3}\right)\left(9+5\sqrt{3}\right)=$$

$$=\left(9-3\cdot 3^{\frac{3}{2}}+3\cdot 3-\sqrt{3}\right)\left(9+5\sqrt{3}\right)=2\left(9-5\sqrt{3}\right)\left(9+5\sqrt{3}\right)=$$

$$=2\cdot(81-75)=12.$$

Ответ: 12.

2. Решите неравенство

$$\frac{13\cdot|x+2|-5}{2\cdot|x+2|+1}<4.$$

Решение:

Замена $t=|x+2|\geqslant 0$.

$$\frac{13t-5}{2t+1}<4\Leftrightarrow\frac{5t-9}{2t+1}<0.$$

Решаем методом интервалов и получаем решение $t \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$. С учетом допустимых значений t получим, что:

$$0 \leqslant t < \frac{9}{5} \Leftrightarrow |x+2| < \frac{9}{5} \Leftrightarrow -\frac{9}{5} < x+2 < \frac{9}{5} \Leftrightarrow -\frac{19}{5} < x < -\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\left(-3\frac{4}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

3. Решите уравнение

$$2 + \cos(\pi + 9x) = 5 \sin \frac{\pi - 9x}{2}.$$

Решение:

Используя формулы приведения, приведем уравнение к следующему виду:

$$2 - \cos 9x = 5 \cos \frac{9x}{2}.$$

Применим формулу понижения степени:

$$3 - 2\cos^2 \frac{9x}{2} = 5 \cos \frac{9x}{2}.$$

После замены $t = \cos \frac{9x}{2} \in [-1; 1]$ получим квадратное уравнение

$$2t^2 + 5t - 3 = 0.$$

Из двух корней $t = -3$ и $t = \frac{1}{2}$ первый является посторонним. Значит:

$$\cos \frac{9x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{27} + \frac{4\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{27} + \frac{4\pi n}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. В возрастающей арифметической прогрессии произведение седьмого и восьмого членов на 46 больше, чем произведение пятого и девятого членов, и на 108 больше, чем произведение третьего и десятого членов. Чему равна сумма первых 25 членов этой прогрессии?

Решение:

Перепишем условие задачи в стандартных обозначениях арифметической прогрессии:

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_8 = 46 + a_5 \cdot a_9, \\ a_7 \cdot a_8 = 108 + a_3 \cdot a_{10} \end{cases}$$

Выражая все члены прогрессии через разность прогрессии и первый член, получим систему:

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+7d) = 46 + (a_1+4d)(a_1+8d), \\ (a_1+6d)(a_1+7d) = 108 + (a_1+2d)(a_1+9d) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 d + 10d^2 = 46, \\ 2a_1 d + 24d^2 = 108. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения удвоенное первое, получим $d^2 = 4$. С учетом того, что прогрессия возрастающая, получим $d = 2$ и, соответственно, $a_1 = 3$. Найдем $a_{25} = a_1 + 24d = 51$ и сумму первых 25 членов:

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = \frac{3+51}{2} \cdot 25 = 675.$$

Ответ: 675.

5. Решите неравенство

$$(18-3x) \cdot \log_{2^x-12} \sqrt[3]{2} \leqslant 1.$$

Решение:

Используя свойства логарифмов, перейдем к эквивалентному неравенству:

$$\log_{2^x-12} 2^{6-x} \leqslant 1.$$

а) $2^x - 12 > 1$ — знак неравенства сохраняется при снятии логарифма. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^x - 12 > 1, \\ 2^{6-x} \leqslant 2^x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 13, \\ \frac{2^{2x}-12\cdot 2^x-64}{2^x} \geqslant 0. \end{cases}$$

Производя замену $t = 2^x > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} t > 13, \\ \frac{(t-16)(t+4)}{t} \geqslant 0, \end{cases}$$

решение которой находится методом интервалов: $t \geqslant 16$. Возвращаясь к исходной переменной, получим: $x \geqslant 4$.

б) $0 < 2^x - 12 < 1$ — знак неравенства меняется на противоположный при снятии логарифма. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 < 2^x - 12 < 1, \\ 2^{6-x} \geqslant 2^x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 < 2^x < 13, \\ \frac{2^{2x}-12\cdot 2^x-64}{2^x} \leqslant 0. \end{cases}$$

Снова производя замену $t = 2^x > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} 12 < t < 13, \\ \frac{(t-16)(t+4)}{t} \leqslant 0, \end{cases}$$

решение которой находится методом интервалов: $12 < t < 13$. Возвращаясь к исходной переменной, получим ответ во втором случае: $\log_2 12 < x < \log_2 13$.

Ответ: $(\log_2 12; \log_2 13) \cup [4; +\infty)$.

6. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 20, а длина боковой стороны CD равна $10\sqrt{3}$. Через точки A, B, C проходит окружность, пересекающая основание трапеции AD в точке F. Угол AFB равен $60°$. Найдите длину отрезка BF.

Решение:

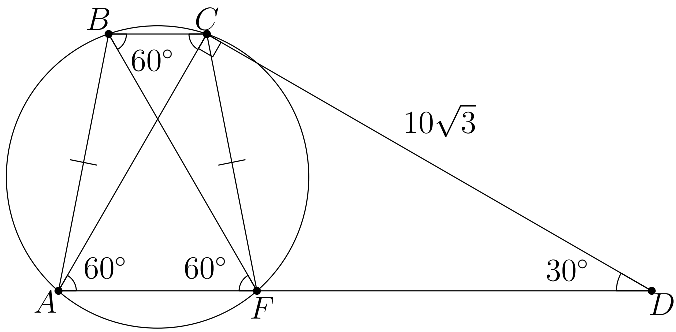


Рис. 6: к задаче №6

Трапеция $ABCF$ — вписанная. Следовательно, она равнобедренная: $BF = CA$ и $\angle AFB = \angle CAF = 60°$. По теореме синусов для треугольника ACD:

$$\frac{CD}{\sin \angle CAF} = \frac{AD}{\sin \angle ACD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle ACD = \frac{AD}{CD} \cdot \sin \angle CAF = \frac{20}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Значит, угол ACD — прямой. Найдем AC по теореме Пифагора для треугольника ACD:

$$AC^2 = AD^2 - CD^2 = 20^2 - (10\sqrt{3})^2 = 100.$$

Откуда легко получить $BF = AC = 10$.

Ответ: 10.

7. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 26. Результат разделили на сумму исходных натуральных чисел с остатком. В частном получили 5, а в остатке 60. Найдите исходные натуральные числа.

Решение:

Запишем по определению деление с остатком:

$$a \cdot b - 26 = (a + b) \cdot 5 + 60, \text{ где } 60 < a + b.$$

Разложим полученное уравнение на линейные множители:

$$ab - 5(a + b) = 86 \Leftrightarrow (a - 5)(b - 5) = 111.$$

Справа стоит положительное число, значит слева произведение либо двух отрицательных, либо двух положительных чисел. В первом случае $a < 5$ и $b < 5$. Тогда их сумма не может быть больше 60. Значит $(a-5)$ и $(b-5)$ — это два натуральных делителя 111, которые в произведении дают 111. Варианты разложения:

$$111 = 1 \cdot 111 = 3 \cdot 37 = 37 \cdot 3 = 111 \cdot 1.$$

Из описанных вариантов условию $a+b > 60$ удовлетворяют только первый и последний, откуда легко найти ответы.

Ответ: $(116; 6)$; $(6; 116)$.

8. Квадрат $ABCD$ со стороной 3 см является основанием двух пирамид $MABCD$ и $NABCD$, причем MA и NC — высоты этих пирамид и точки M, N лежат по одну сторону от плоскости $ABCD$. Сумма длин высот MA и NC равна 9 см, а объем общей части пирамид равен 6 см^3. Найдите отношение высот MA и NC.

Решение:

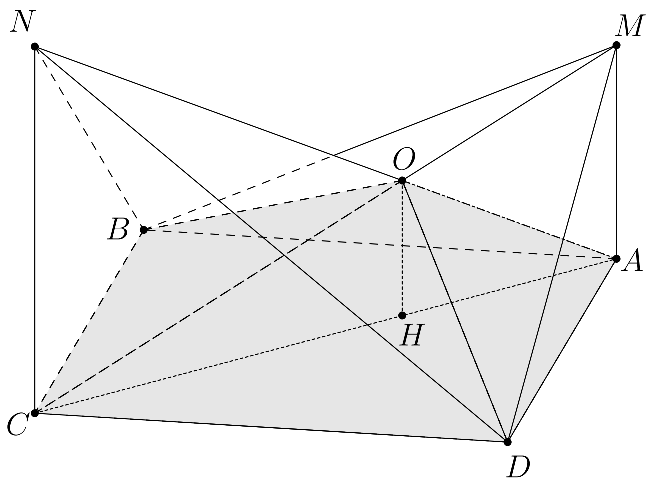


Рис. 7: к задаче №8

Пересечением пирамид $MABCD$ и $NABCD$ является тоже пирамида. Введем обозначения: O — точка пересечение отрезков MC и AN (вершина полученной пирамиды); H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость $ABCD$.

Найдем высоту OH:

$$V_{ABCDO} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot OH \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot OH \Leftrightarrow OH = 2.$$

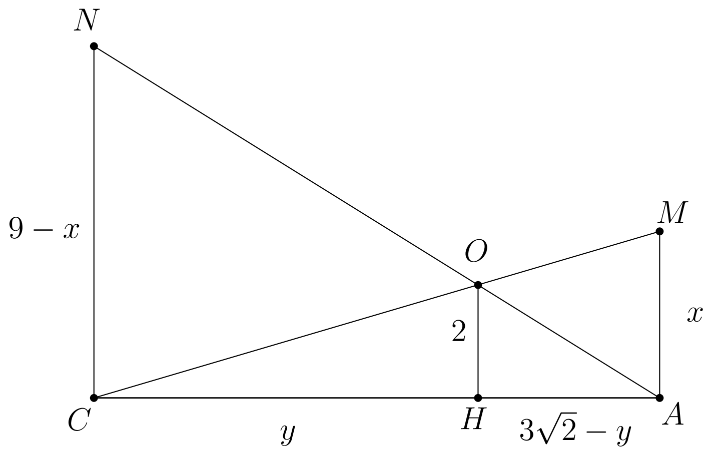


Рис. 8: к задаче №8

Найдем высоты AM и CN. Обозначим $AM = x$, $HC = y$. Тогда $NC = 9 - x$ и $AH = 3\sqrt{2} - y$. Две пары треугольников MAC, OHC и NCA, OHA подобны:

$$\frac{MA}{OH} = \frac{AC}{HC},$$

$$\frac{NC}{OH} = \frac{CA}{HA}.$$

Из данных соотношений получим систему уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{y}, \\ \frac{9-x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6\sqrt{2}, \\ (9-x)(3\sqrt{2}-y) = 6\sqrt{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6\sqrt{2}, \\ 27\sqrt{2} - 3\sqrt{2}x - 9y + xy = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} xy = 6\sqrt{2}, \\ y = 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}x \end{cases}$$

Подставим y в первое уравнение и получим квадратное уравнение

$$x^2 - 9x + 18 = 0,$$

которое имеет корни 6 и 3. Соответственно, искомое отношение $\frac{MA}{NC}$ будет равно либо $\frac{1}{2}$, либо 2.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$.

2014 год

1 вариант

1. К какому целому числу находится ближе всего на числовой оси число
$$\frac{5,1\cdot 4,2+11,76}{2,3\cdot 2,2-2,46}?$$

Решение:

Имеем:
$$5,1\cdot 4,2+11,76=21,42+11,76=33,18,$$
$$2,3\cdot 2,2-2,46=5,06-2,46=2,6.$$

Следовательно,
$$\frac{5,1\cdot 4,2+11,76}{2,3\cdot 2,2-2,46}=12,7\ldots$$

Ясно, что ближайшим целым числом к полученному числу будет 13.

Ответ: 13.

2. Решите уравнение
$$\frac{\sqrt{41-6x-x^2}}{3-x}=1.$$

Решение:

Уравнение равносильно следующей системе:
$$\begin{cases}\sqrt{41-6x-x^2}=3-x,\\ 3-x\neq 0,\end{cases}$$

которая, в свою очередь преобразуется к виду:

$$\begin{cases} 41 - 6x - x^2 = (3-x)^2, \\ 3 - x > 0. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы сводится к квадратному уравнению $x^2 - 16 = 0$ с корнями $x = \pm 4$. Неравенству в системе удовлетворяет лишь меньший корень.

Ответ: -4.

3. Решите уравнение

$$6\sin^2 3x + 2\cos^2 6x = 5.$$

Решение:

Применяя к первому слагаемому формулу понижения степени, получим уравнение, равносильное исходному:

$$3 - 3\cos 6x + 2\cos^2 6x = 5.$$

Замена $t = \cos 6x \in [-1, 1]$ преобразует уравнение к квадратному

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

с корнями $-\frac{1}{2}$ и 2. Очевидно, что второй корень не подходит. Получаем:

$$\cos 6x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Даны арифметическая прогрессия, в которой разность отлична от 0, и геометрическая прогрессия. Известно, что 1-й, 2-й и 10-й члены арифметической прогрессии совпадают, соответственно, со 2-м, 5-м и 8-м членами геометрической прогрессии. Найдите отношение суммы 8 первых членов геометрической прогрессии к сумме 8 первых членов арифметической прогрессии.

Решение:

Оставаясь в рамках стандартных обозначений, мы можем переписать условие задачи в виде системы:

$$\begin{cases} a_1 = b_2, \\ a_2 = b_5, \\ a_{10} = b_8, \\ d \neq 0. \end{cases}$$

Используя соотношение $b_5^2 = b_2 b_8$, выполняющееся для любой геометрической прогрессии, мы получаем следующее соотношение для данной арифметической прогрессии:

$$a_1(a_1 + 9d) = (a_1 + d)^2.$$

Раскрывая скобки и учитывая неравенство $d \neq 0$, имеем: $d = 7a_1$. Следовательно:

$$q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8a_1}{a_1} = 8,$$

то есть $q = 2$.

Выпишем выражения для суммы первых 8 членов арифметической и геометрической прогрессий, соответственно:

$$S_8^{\text{А}} = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = \frac{51a_1}{2} \cdot 8 = 204a_1,$$

$$S_8^{\Gamma} = b_1 \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{b_2}{q} \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{255}{2} a_1.$$

Отсюда находим ответ на задачу:

$$\frac{S_8^{\Gamma}}{S_8^{\text{A}}} = \frac{255a_1}{2} \cdot \frac{1}{204a_1} = \frac{5}{8}.$$

Ответ: $\frac{5}{8}$.

5. Решите неравенство

$$\log_{x^2}\left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3}\right)^2 \leqslant 2.$$

Решение:

Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 15x^2 - 20x - 32 \neq 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

То есть $x \neq \frac{10 \pm 2\sqrt{145}}{15}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$. Запишем правую часть неравенства в виде логарифма:

$$\log_{x^2}\left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3}\right)^2 \leqslant \log_{x^2} x^4.$$

Рассмотрим два случая:

а) $x^2 > 1$. Тогда неравенство преобразуется к виду

$$\left(5x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3}\right)^2 \leqslant x^4.$$

Перенесем правую часть влево и распишем разность квадратов:

$$\left(4x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3}\right)\left(6x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{32}{3}\right) \leqslant 0.$$

Последнее неравенство после разложения квадратных трехчленов на множители равносильно следующему:

$$24\left(x-\frac{8}{3}\right)(x+1)(x-2)\left(x+\frac{8}{9}\right)\leqslant 0.$$

Решим методом интервалов:

$$x\in\left[-1;-\frac{8}{9}\right]\cup\left[2;\frac{8}{3}\right].$$

С учетом ограничений $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ и области допустимых значений (учтем, что число $\frac{10+2\sqrt{145}}{15}$ лежит в интервале $\left[2,\frac{8}{3}\right]$), получим ответ в случае а):

$$x\in\left[2;\frac{10+2\sqrt{145}}{15}\right)\cup\left(\frac{10+2\sqrt{145}}{15};\frac{8}{3}\right].$$

б) $0<x^2<1$. Тогда неравенство преобразуется к виду

$$\left(5x^2-\frac{20}{3}x-\frac{32}{3}\right)^2\geqslant x^4,$$

которое эквивалентно

$$24\left(x-\frac{8}{3}\right)(x+1)(x-2)\left(x+\frac{8}{9}\right)\geqslant 0.$$

Решим методом интервалов:

$$x\in(-\infty;-1]\cup\left[-\frac{8}{9};2\right]\cup\left[\frac{8}{3};+\infty\right).$$

С учетом ограничений $x\in(-1;0)\cup(0;1)$ и области допустимых значений (учтем, что число $\frac{10-2\sqrt{145}}{15}$ не лежит в интервале $\left[-\frac{8}{9};0\right)$), получим ответ в случае б):

$$x\in\left[-\frac{8}{9};0\right)\cup(0;1).$$

Ответ: $\left[-\frac{8}{9}; 0\right) \cup (0; 1) \cup \left[2; \frac{10+2\sqrt{145}}{15}\right) \cup \left(\frac{10+2\sqrt{145}}{15}; 2\frac{2}{3}\right]$.

6. Высота AH и биссектриса BL в треугольнике ABC пересекаются в точке K. При этом $AK = 4$, $KH = 2$, $BL = 11$. Найдите длину стороны BC.

Решение:

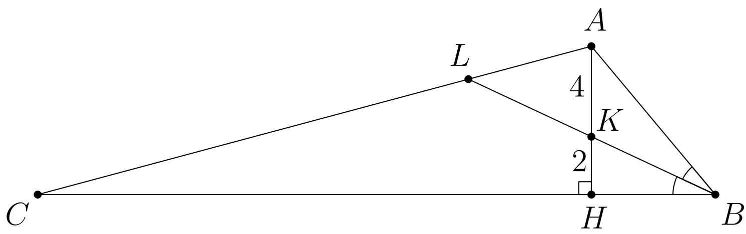


Рис. 9: к задаче №6

Ясно, что угол $\angle ABC$ и угол $\angle ACB$ — острые, иначе биссектриса не пересекала бы высоту, находящуюся вне треугольника. Согласно свойству биссектрисы внутреннего угла имеем:

$$\cos\angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{KH}{AK} = \frac{1}{2},$$

откуда $\angle ABH = 60°$. Следовательно, $\angle ABC = 60°$.

Из прямоугольного треугольника ABH, находим $AB = \frac{AH}{\sin 60°} = 4\sqrt{3}$.

Подставим в формулу длины биссектрисы

$$l_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$$

все известные параметры

$$11 = \frac{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3} + BC} = \frac{12 \cdot BC}{4\sqrt{3} + BC}$$

Откуда легко найти $BC = 44\sqrt{3}$.

Ответ: $44\sqrt{3}$.

7. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a\left(x^2 + x^{-2}\right) - (a+1)\left(x + x^{-1}\right) + 5 = 0$$

не имеет решений.

Решение:

Сделаем замену: $t = x + \frac{1}{x}$. Уравнение примет следующий вид:

$$at^2 - (a+1)t + (5-2a) = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $x^2 - tx + 1 = 0$ разрешимо тогда, и только тогда, когда $D = t^2 - 4 \geqslant 0$, то $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Значит, областью значений функции $t(x) = x + \frac{1}{x}$ является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Обозначим функцию $f(t) = at^2 - (a+1)t + (5-2a)$. Равносильную задачу можно сформулировать так: найти все значения параметра a, при которых уравнение $at^2 - (a+1)t + (5-2a) = 0$ не имеет решений на множестве $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Рассмотрим три случая:

а) $a < 0$ — ветви параболы $f(t) = at^2 - (a+1)t + (5-2a)$ направлены вниз.

б) $a = 0$ — функция $f(t) = -t + 5$ является линейной.

в) $a > 0$ — ветви параболы $f(t) = at^2 - (a+1)t + (5-2a)$ направлены вверх.

В первом случае на интервале уравнение $f(t) = 0$ обязательно имеет корень $[2; +\infty)$, поскольку $f(2) = 4a - 2(a+1) + (5-2a) = 3 > 0$ и ветви направлены вниз. Во втором случае существует единственный корень $t = 5$. Следовательно, значения $a \leqslant 0$ тоже не удовлетворяют нашему условию. Рассмотрим третий случай:

1) Уравнение $f(t) = 0$ не имеет корней. Значит, дискриминант квадратного уравнения $f(t) = 0$ отрицателен:

$$(a+1)^2 - 4a(5-2a) < 0 \Leftrightarrow 9a^2 - 18a + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Стоит отметить, что интервал целиком вложен во множество $a > 0$.

2) Все корни уравнения $f(t) = 0$ лежат в интервале $(-2; 2)$. Это верно, при выполнении трех условий:

- дискриминант квадратного уравнения $f(t) = 0$ неотрицателен;
- вершина параболы лежит на интервале $(-2; 2)$;
- $f(t)$ принимает положительные значения на краях интервала.

Получим соответствующую алгебраическую систему:

$$\begin{cases} a > 0, \\ (a+1)^2 - 4a(5-2a) \geqslant 0, \\ -2 < \frac{a+1}{2a} < 2, \\ 4a - 2(a+1) + (5-2a) > 0, \\ 4a + 2(a+1) + (5-2a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty; 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right] \cup \left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right), \\ a > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right).$$

Объединяя ответы последних двух случаев, получим, что корней у исходного уравнения не будет при $a \in \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$.

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны 180° и $AD = BC$. Длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A, равна 40 см. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Решение:

Сделаем плоскую развертку $EFGABC$ треугольной пирамиды в вершинах B и C, где грань DAB соответствует треугольнику FAB, грань DBC — GBC, грань DAC — EAC. Равные отрезки (в том числе, согласно условию) на рисунке отмечены одинаковыми засечками.

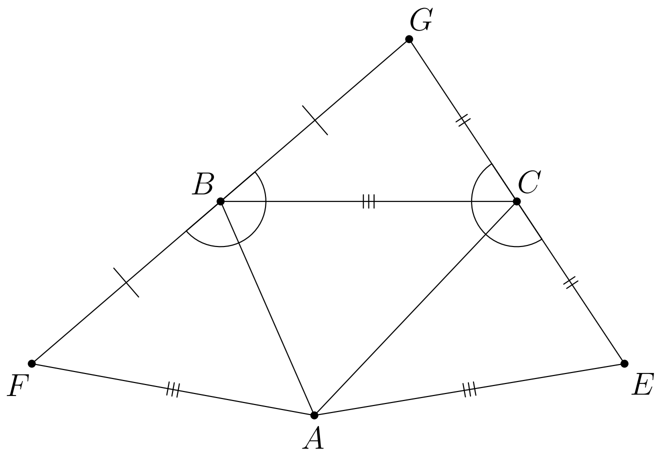


Рис. 10: к задаче №8

Докажем, что точка A лежит на EF. Действительно, отрезок BC

является средней линией треугольника EFG, значит $EF = 2BC$. В тоже время $EA = AF = BC$. То есть в неравенстве треугольника $EF \leqslant EA + AF$ достигается равенство, что может быть только если A лежит на EF.

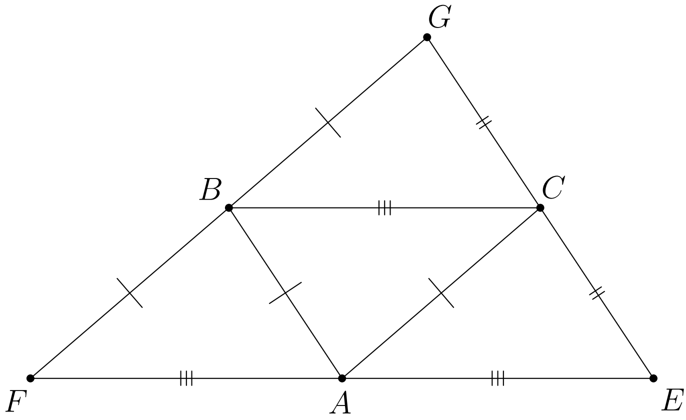


Рис. 11: к задаче №8

Значит, ABC — треугольник, образованный средними линиями треугольника EFG. Следовательно, треугольники ABF, CGB, ECA и BAC равны. То есть все грани пирамиды равны между собой.

Пусть V — объем пирамиды, h — длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A, а r — радиус вписанного в пирамиду шара. Поскольку все грани пирамиды равны, имеем:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_{ABC} + S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DAC}) \cdot r = \frac{4}{3} \cdot S_{ABC} \cdot r.$$

Иными словами, $r = \frac{1}{4}h = 10$.

Ответ: 10 см.

2015 год

1 вариант

1. Какое из чисел больше и почему: 4,5 или $\sqrt{\frac{21}{8}} + \frac{17}{6}$?

Решение:

$$\frac{9}{2} - \frac{17}{6} \vee \sqrt{\frac{21}{8}} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \vee \sqrt{\frac{21}{8}}$$

Возведем в квадрат обе части:

$$\frac{25}{9} \vee \frac{21}{8} \Leftrightarrow 25 \cdot 8 \vee 21 \cdot 9 \Leftrightarrow 200 \vee 189$$

Число слева больше.

Ответ: 4,5.

2. Решите уравнение

$$(x^2 - 8x + 16)(x^2 - 8x + 18) - 24 = 0.$$

Решение:

Сделаем замену:

$$t = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 \geqslant 0.$$

Тогда уравнение приводится к квадратному

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

с корнями $t = 4$ и $t = -6$. Второй корень посторонний ($t \geqslant 0$). Отсюда получаем решения:

$$(x-4)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Ответ: 2; 6.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{24}\cos x = \sqrt{11\cos x - \cos 2x}.$$

Решение:

Сделаем замену:

$$\cos x = y \in [-1; 1].$$

Имеем уравнение с радикалами:

$$\sqrt{24}y = \sqrt{11y - (2y^2 - 1)}.$$

Поскольку справа стоит неотрицательное число, то с учетом $y \geqslant 0$ можно возвести уравнение в квадрат:

$$24y^2 = 11y - (2y^2 - 1) \Leftrightarrow 26y^2 - 11y - 1 = 0$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{13}$, из которых второй посторонний, так как $y \geqslant 0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 2xy = 40x, \\ 16x^2 + 8xy = 5y. \end{cases}$$

Решение:

Разложим на множители левые части уравнений:

$$\begin{cases} y(2x + y) = 40x, \\ 8x(2x + y) = 5y. \end{cases}$$

Если $x = 0$, то $y = 0$. Это является решением.

Если $x \neq 0$, то из первого уравнения $y \neq 0$ и $2x + y \neq 0$. Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{y}{8x} = \frac{8x}{y} \Rightarrow (y - 8x)(y + 8x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 8x, \\ y = -8x. \end{array}\right.$$

Подставляя $y = 8x$ в первое уравнение, получим уравнение: $80x^2 = 40x$. Откуда легко найти решение $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$. Подставляя $y = -8x$, получим: $-48x^2 = -40x$. Откуда легко найти решение $x = \frac{5}{6}$, $y = -\frac{20}{3}$.

Ответ: $(0; 0)$; $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$; $\left(\frac{5}{6}; -6\frac{2}{3}\right)$.

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_{25}\left(7 - \frac{x}{2}\right)}{\log_{125}(22 - x)} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Решение:

Выпишем область допустимых значений:

$$\begin{cases} 7 - \frac{x}{2} > 0, \\ 22 - x > 0, \\ 22 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 14).$$

Приведем логарифмы к основанию 5:

$$\frac{\frac{1}{2}\log_5\left(7 - \frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{3}\log_5(22 - x)} \leqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\log_5\left(7 - \frac{x}{2}\right)}{\log_5(22 - x)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

С учетом допустимых значений получаем, что знаменатель всегда строго положителен, так как при $x < 14$ верно:

$$\log_5(22 - x) > \log_5(22 - 14) = \log_5 8 > 0.$$

Значит, можно домножить неравенство на положительный знаменатель:

$$2\log_5\left(7-\frac{x}{2}\right) \leqslant \log_5(22-x).$$

Внесем множитель 2 в логарифм как степень и с учетом того, что основание логарифмов больше 1, получим:

$$\left(7-\frac{x}{2}\right)^2 \leqslant 22-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-24x+108 \leqslant 0, \\ 22-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [6;18]$$

С учетом области допустимых значений, получаем окончательный ответ: $x \in [6;14)$

Ответ: $[6;14)$.

6. В треугольнике длины двух сторон равны 4 и 5, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\frac{20}{9}$. Найдите площадь этого треугольника.

Решение:

Подставим в формулу длины биссектрисы

$$l_b = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

все известные параметры

$$\frac{20}{9} = \frac{2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{4+5} \Leftrightarrow \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $\gamma \in (0;180^\circ)$, получаем $\gamma = 120^\circ$.

Воспользуемся формулой площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\sin 120^\circ = 5\sqrt{3}.$$

Ответ: $5\sqrt{3}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x+1)^4 - (a+3)(x^2+2x) + a^2 + 3a + 1 = 0$$

имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Решение:

После замены $t = (x+1)^2 \geqslant 0$ уравнение примет вид:

$$t^2 - (a+3)t + (a^2 + 4a + 4) = 0.$$

Каждый положительный корень $t > 0$ данного уравнения дает два различных корня x исходного уравнения. Каждый отрицательный корень $t < 0$ не дает корней x, а нулевой корень $t = 0$ дает только один корень $x = 0$.

Чтобы исходное уравнение имело 4 различных корня, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $t^2 - (a+3)t + (a^2+4a+4) = 0$ имело два положительных корня t_1 и t_2. Знак корней определяется теоремой Виета, а существование корней условием $D > 0$:

$$\begin{cases} a+3 > 0, \\ (a+2)^2 > 0, \\ (a+3)^2 - 4(a+2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{7}{3}; -2\right) \cup (-2; -1)$$

Считаем, что $t_1 > t_2$. Корни исходного уравнения, выписанные в порядке возрастания:

$$-1 - \sqrt{t_1} < -1 - \sqrt{t_2} < -1 + \sqrt{t_2} < -1 + \sqrt{t_1}.$$

Данные корни образуют арифметическую прогрессию тогда, и только тогда, когда соседние корни отличаются на одну и ту же величину:

$$(-\sqrt{t_2}) - (-\sqrt{t_1}) = \sqrt{t_2} - (-\sqrt{t_2}) = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}.$$

Эти соотношения эквиваленты условию $\sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2}$, то есть $t_1 = 9t_2$.

Согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} 10t_2 = a + 3, \\ 9t_2^2 = (a+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{100}(a+3)^2 = (a+2)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{11}{7}, \\ a = -\dfrac{29}{13}. \end{array}\right.$$

Оба параметра a подходят, так как лежат во множестве $\left(-\frac{7}{3}; -2\right) \cup (-2; -1)$.

Ответ: $-2\frac{3}{13}$; $-1\frac{4}{7}$.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{51} : \sqrt{19}$. Сторона основания равна 3. Найти объем данной шестиугольной пирамиды.

Решение:

Введем обозначения: M — середина отрезка AB; N — середина отрезка AC; O — центр основания ($h = SO$ — высота пирамиды).

Найдем площадь основания пирамиды, которое образует правильный шестиугольник $ABCDEF$:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{OAB} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Из шестиугольника $ABCDEF$ несложно найти $OM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $ON = \frac{3}{2}$. По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников SON и SOM:

$$SN = \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}},$$

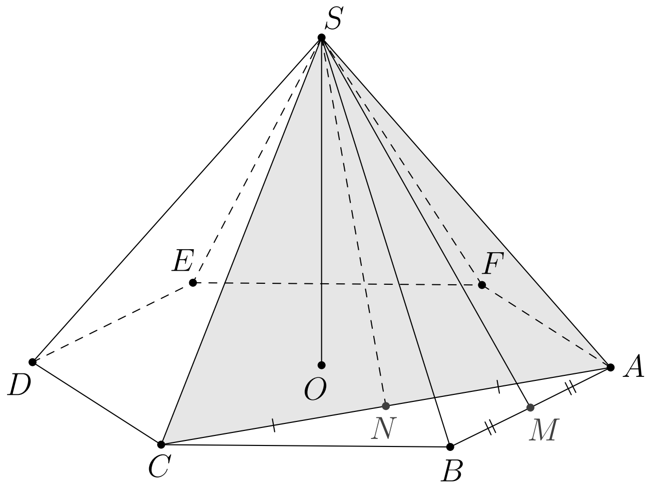


Рис. 12: к задаче №8

$$SM = \sqrt{h^2 + \frac{27}{4}}.$$

Площади треугольников SAB и SAC:

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = \frac{3}{2}\sqrt{h^2 + \frac{27}{4}},$$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot SN = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{h^2 + \frac{9}{4}}.$$

Согласно условию задачи:

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{h^2 + \frac{9}{4}}}{\frac{3}{2}\sqrt{h^2 + \frac{27}{4}}} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{19}}$$

Найдем высоту пирамиды:

$$\frac{h^2 + \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{27}{4}} = \frac{17}{19} \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6.$$

Объем пирамиды:

$$V_{SABCDEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCDEF} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 27\sqrt{3}.$$

Ответ: $27\sqrt{3}$.

2016 год

1 вариант

1. Сколько различных решений имеет уравнение

$$7x^2 + 6x + 7 = 2\sqrt{10} \cdot (x^2 - 1)?$$

Решение:

Запишем квадратное уравнение в стандартном виде:

$$(7 - 2\sqrt{10})x^2 + 6x + (7 + 2\sqrt{10}) = 0.$$

Вычислим дискриминант: $D = 36 - 4(7 - 2\sqrt{10})(7 + 2\sqrt{10}) = 36 - 36 = 0$.

Ответ: 1 корень.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x^3 - y^3 = 335. \end{cases}.$$

Решение:

Разложим на множители второе уравнение: $(x-y)(x^2+y^2+xy) = 5{\cdot}67$. Так как $x-y = 5$, то получаем, что $x^2+y^2+xy = 67$. Выделим полный квадрат и подставим первое соотношение: $(x-y)^2+3xy = 67 \Leftrightarrow xy = 14$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 14. \end{cases}$$

Выражая из первого соотношения $x = y + 5$ и подставляя во второе, получим квадратное уравнение $(y+5)y = 67$ с решениями $y = 2$ и $y = -7$. Соответствующие x равные 7 и -2.

Ответ: $(7; 2)$; $(-2; -7)$.

3. Дана квадратная таблица 10×10 клеток (10 строк, 10 столбцов). В каждой клетке таблицы стоит число. Известно, что при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку, расположенную ниже, число увеличивается на 4, а при переходе из любой клетки в соседнюю с ней клетку справа число уменьшается на 1. Сумма всех чисел в таблице равна 250. Какое число стоит в самой левой клетке нижнего ряда?

Решение:

Пронумеруем строки снизу вверх от 1 до 10. Рассмотрим все числа, записанные в k-й строке. Они образуют арифметическую прогрессию с разностью (-1) (слева направо). Если первое число в строке равно a_k, то последнее число равно $a_k - 9$.

a_{10}	$a_{10} - 1$	...	$a_{10} - 8$	$a_{10} - 9$
a_9	$a_9 - 1$	...	$a_9 - 8$	$a_9 - 9$
...	...	...	...	...
a_k	$a_k - 1$	...	$a_k - 8$	$a_k - 9$
...	...	...	...	...
a_2	$a_2 - 1$	...	$a_2 - 8$	$a_2 - 9$
a_1	$a_1 - 1$	...	$a_1 - 8$	$a_1 - 9$

Легко найти сумму всех чисел в k-й строке:

$$S_k = \frac{a_k + (a_k - 9)}{2} \cdot 10 = 10a_k - 45.$$

Если сложить все суммы строк S_k, то получим сумму всех чисел в таблице:

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_{10} =$$

$$= (10a_1 - 45) + (10a_2 - 45) + ... + (10a_{10} - 45) = 10(a_1 + a_2 + ... + a_{10}) - 450.$$

Заметим, что числа a_1, a_2, ..., a_{10}, записанные в первом столбце, образуют арифметическую прогрессию с разностью (-4) (снизу вверх). Поэтому число в верхней строке: $a_{10} = a_1 - 9 \cdot 4 = a_1 - 36$. А сумму всех чисел в левом столбце можно найти как сумму арифметической прогрессии:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 10(a_1 - 18).$$

Значит, сумма всех чисел таблицы равна $S = 100(a_1 - 18) - 450$. Исходя из условия, что $S = 250$, несложно найти $a_1 = 25$.

Ответ: 25.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{7 + 2^{\log_x 5}} \geqslant 1 + 4^{\log_x \sqrt{5}}.$$

Решение:

Замена $t = \log_x 5$. Выражение справа: $4^{\log_x \sqrt{5}} = 4^{\frac{t}{2}} = 2^t$. При подстановке получим неравенство:

$$\sqrt{7 + 2^t} \geqslant 1 + 2^t.$$

Сделаем еще одну замену: $a = 2^t > 0$. Это приводит к стандартному неравенству с радикалами:

$$\sqrt{7 + a} \geqslant 1 + a.$$

Так как $a > 0$, то правая часть всегда положительна. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$7 + a \geqslant 1 + 2a + a^2 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 \leqslant 0.$$

Данное квадратичное неравенство имеет решение $a \in [-3, 2]$. Вернемся к переменной t:

$$\begin{cases} 2^t \geqslant -3, \\ 2^t \leqslant 2 \end{cases}$$

Первое неравенство всегда верно. Соответственно, данная система эквивалентна неравенству $t \leqslant 1$. Перейдем к переменной x:

$$\log_x 5 \leqslant 1 \Leftrightarrow \log_x 5 \leqslant \log_x x$$

Если $0 < x < 1$, то при снятии логарифмов знак меняется на противоположный: $5 \geqslant x$. Ответом будет интервал $x \in (0, 1)$.

Если же $x > 1$, то при снятии логарифмов знак остается: $5 \leqslant x$. Ответом будет полуинтервал $x \in [5, +\infty)$.

Ответ: $(0; 1) \cup [5; +\infty)$.

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 9\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x.$$

Решение:

Запишем синус двойного угла ($2\sin x\cos x = \sin 2x$):

$$\operatorname{tg} 2x = 9\sin^2 x + 2\sin 2x - 3\cos^2 x.$$

Выразим тангенс ($\sin 2x = \operatorname{tg} 2x\cos 2x$) и сгруппируем выражения:

$$\operatorname{tg} 2x = 9\sin^2 x + 2\operatorname{tg} 2x\cos 2x - 3\cos^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x(1 - 2\cos 2x) = 3(3\sin^2 x - \cos^2 x).$$

С помощью формул понижения выразим правую часть через $\cos 2x$:

$$3\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 1 - 2\cos 2x$$

Разложим на множители:

$$\operatorname{tg} 2x(1 - 2\cos 2x) = 3(1 - 2\cos 2x)$$

$$(\operatorname{tg} 2x - 3)(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Приравняем к нулю первый множитель:

$$\operatorname{tg} 2x = 3 \Leftrightarrow 2x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Приравняем к нулю второй множитель:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD в $\sqrt{\frac{19}{4}}$ раз длиннее стороны BC и $AB = CD = 2$. Продолжения сторон AB (за точку B) и DC (за точку C) пересекаются в точке K, при этом $BK = 1$, $CK = 2$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение:

Обозначим $\angle AKD = \alpha$. Выпишем теорему косинусов для треугольников AKD и BKC:

$$AD^2 = AK^2 + KD^2 - 2 \cdot AK \cdot KD \cdot \cos\alpha = 25 - 24\cos\alpha$$

$$BC^2 = BK^2 + KC^2 - 2 \cdot BK \cdot KC \cdot \cos\alpha = 5 - 4\cos\alpha$$

Подставим в соотношение $\frac{AD^2}{BC^2} = \frac{19}{4}$ полученные выше выражения для AD^2 и BC^2:

$$\frac{25 - 24\cos\alpha}{5 - 4\cos\alpha} = \frac{19}{4} \Leftrightarrow 100 - 96\cos\alpha = 95 - 76\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{4}.$$

Далее по основному тригонометрическому тождество легко найти $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и площадь $ABCD$ как разность площадей треугольников AKD и BKC:

$$S_{ABCD} = S_{AKD} - S_{BKC} = \frac{1}{2}AK \cdot KD \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}BK \cdot KC \cdot \sin\alpha =$$

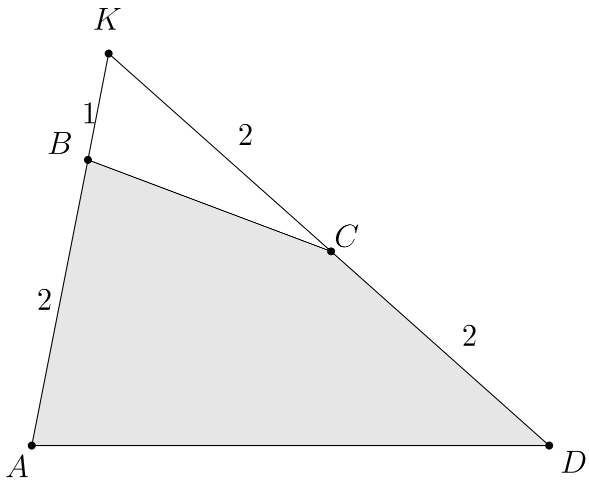


Рис. 13: к задаче №6

$$= \frac{\sin \alpha}{2}(AK \cdot KD - BK \cdot KC) = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{15}}{4}$.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\cos \frac{(10x - 48)\pi}{3x + 5} = 1.$$

Решение:

$$\frac{(10x - 48)\pi}{3x + 5} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Преобразуем уравнение с двумя неизвестными:

$$5x - 24 = n(3x + 5) \Leftrightarrow 3nx + 5n - 5x + 24 = 0.$$

Техника решения уравнений данного типа стандартна: разложим левую часть на два множителя так, чтобы в правой части было некоторое целое число, не зависящее от n и x.

$$n(3x+5)-5x+24=0.$$

Для разложения на множители с целыми коэффициентами, домножим всё уравнение на 3:

$$3n(3x+5)-5\cdot 3x+72=0 \Leftrightarrow 3n(3x+5)-5(3x+5)+97=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3n-5)(3x+5)=-97.$$

Число 97 — простое (делится только на себя и на 1). Поэтому произведение двух целых чисел равно (-97) только в том случае, если это одна из пар чисел $(97,-1)$, $(1,-97)$, $(-1,97)$ или $(-97,1)$. Подставляя каждую из этих пар, получим системы:

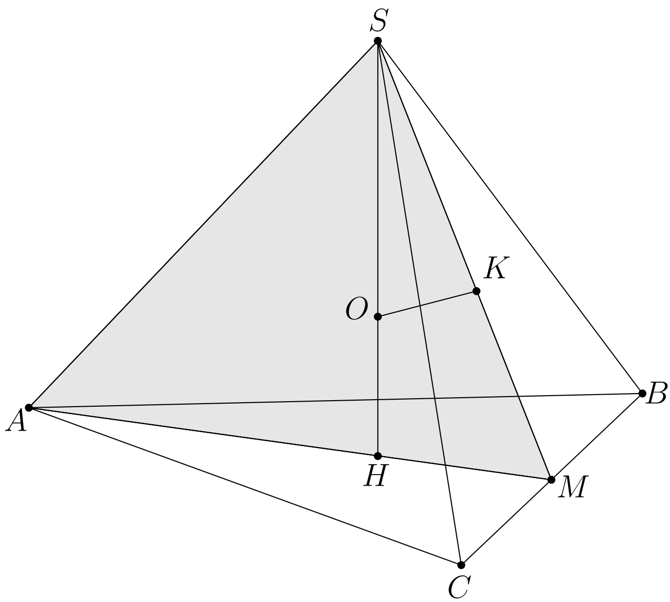
$$\begin{cases} 3n-5=97, \\ 3x+5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=34, \\ x=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3n-5=1, \\ 3x+5=-97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2, \\ x=-34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3n-5=-1, \\ 3x+5=97 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \qquad \begin{cases} 3n-5=-97, \\ 3x+5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Ответ: $-34; -2$.

8. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара в 3 раза короче высоты и равен $7+\sqrt{21}$. Найдите радиус шара, который касается всех ребер пирамиды.

Решение:



Обозначим r и O — радиус и центр шара, касающегося всех граней, R и Q — радиус и центр шара, касающегося всех ребер. Проведем высоту пирамиды SH. В силу симметрии (по условию пирамида — правильная) центры O и Q лежат на SH. Также известно, что $SH = 3r$ и $SO = 2r$.

Выразим все стороны пирамиды через r. Введем обозначения: M — середина стороны BC, K — точка касания вписанного шара с плоскостью SBC. Плоскость ASM перпендикулярна плоскости SBC. Следовательно, K лежит на SM.

Известно, что $\frac{OK}{OS} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$. Значит, угол $\angle OSK = 30^\circ$, $SK = \sqrt{3} \cdot r$. Так как треугольники SOK и SMH — подобны ($\angle K = \angle H = 90^\circ$, $\angle S$ — общий), то верно:

$$HM = \sqrt{3} \cdot r, MS = 2\sqrt{3} \cdot r.$$

Из равностороннего треугольника ABC легко получить:

$$AM = 3\sqrt{3}r, AH = 2\sqrt{3}r, CM = 3r.$$

Из прямоугольного треугольника MSC по теореме Пифагора можно найти $SC = \sqrt{21}r$. Соответственно:

$$SA = SB = SC = \sqrt{21}r.$$

Перейдем к нахождению соотношения между R и r. Обозначим через L — точку касания шара с центром Q и радиуса R ребра AS.

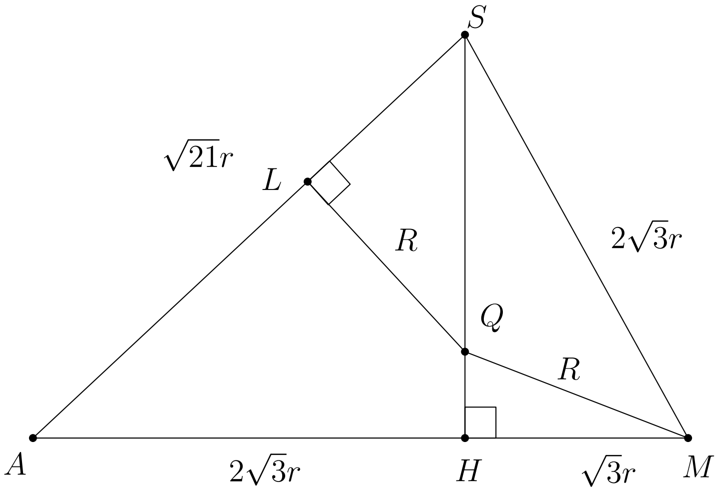


Рис. 14: к задаче №8

Треугольники ASH и QSL подобны:

$$SQ = \frac{LQ}{HA} \cdot SA = \frac{R}{2\sqrt{3} \cdot r}\sqrt{21} \cdot r = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot R.$$

Соответственно:

$$QH = SH - SQ = 3r - \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot R.$$

Чтобы найти явную связь между R и r, выпишем теорему Пифагора для треугольника QHM:

$$R^2 = \left(\sqrt{3}\cdot r\right)^2 + \left(3r - \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot R\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 12r^2 - 3\sqrt{7}\cdot rR + \frac{3}{4}R^2$$

Поделим уравнение на r^2 и обозначим $t = \frac{R}{r}$:

$$3t^2 - 12\sqrt{7}t + 48 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения: $D = 12^2\cdot 7 - 4\cdot 3\cdot 48 = 6^2\cdot 3$. Значит:

$$t = 2(\sqrt{7}\pm\sqrt{3}).$$

Больший корень посторонний, так как из треугольника SHM получаем, что:

$$QM < SM \Leftrightarrow R < 2\sqrt{3}r \Leftrightarrow t < 2\sqrt{3}.$$

Для меньшего корня несложно найти ответ:

$$R = 2(\sqrt{7}-\sqrt{3})r = 2(\sqrt{7}-\sqrt{3})(7+\sqrt{21}) = 8\sqrt{7}.$$

Ответ: $8\sqrt{7}$.

2017 год

1 вариант

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{3} \cdot \sqrt{85}$ и $\frac{14-1{,}7}{3-2{,}3}$.

Решение:

Оценим первое число:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{85} = \sqrt{255} \in (15, 16)$$

Оценим второе число:

$$\frac{14-1{,}7}{3-2{,}3} = \frac{12{,}3}{0{,}7} = \frac{123}{7} = 17\frac{4}{7} \in (17, 18).$$

Ответ: 16; 17.

2. Решите уравнение $|x^2 - 14x + 48| = 14x - 42 - x^2$.

Решение:

Сделаем замену выражения под модулем $t = x^2 - 14x + 48$. Тогда правая часть выражается как $6 - (x^2 - 14x + 48) = 6 - t$:

$$|t| = 6 - t.$$

Раскроем модуль. В случае $t \geqslant 0$:

$$t = 6 - t$$

$$t = 3$$

При возврате к исходной переменной x получаем квадратное уравнение $x^2 - 14x + 45 = 0$. Корни: $x = 5$ и $x = 9$.

В случае $t < 0$:

$$-t = 6 - t$$

$$0 = 6$$

В данном случае решений нет.

Ответ: 5; 9.

3. В 9 коробках с номерами от 1 до 9 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{7}{6}$ раз больше, чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 25%, а в третьей — 50% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

Решение:

Обозначим a_i — количество красных шаров в i-й коробке (арифметическая прогрессия), b_i — количество синих шаров в i-й коробке (геометрическая прогрессия). По условию:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{7}{6}a_1 \\ b_1 = 0.25(a_1 + b_1) \\ b_3 = 0.5(a_3 + b_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a_2 = 7a_1 \\ 3b_1 = a_1 \\ b_3 = a_3 \end{cases}$$

Пусть d — разность арифметической прогрессии (a_i), q — знаменатель геометрической прогрессии (b_i). Подставим $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $b_3 = b_1 q^2$ и выразим все неизвестные через d:

$$\begin{cases} 6(a_1 + d) = 7a_1 \\ 3b_1 = a_1 \\ b_1 \cdot q^2 = a_1 + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6d \\ b_1 = 2d \\ 2d \cdot q^2 = 8d \end{cases}$$

Из последнего уравнения получаем, что либо $d = 0$, либо $q^2 = 4$. В первом случае $a_1 = b_1 = 0$ — означает, что все корзины пустые.

Во втором случае подходит только $q = 2$, так как количество шаров $b_2 = b_1 \cdot q$ не может быть отрицательным.

Найдем общее количество красных шаров (сумма членов арифметической прогрессии):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{6d + 14d}{2} \cdot 9 = 90d$$

Найдем общее количество синих шаров (сумма членов геометрической прогрессии):

$$b_1 + b_2 + \dots + b_9 = \frac{q^9 - 1}{q - 1} \cdot b_1 = 511 \cdot 2d = 1022d$$

Ответ: $\frac{511}{45}$.

4. Решите уравнение

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение:

Раскроем синус суммы:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 2x + \cos 2x - \sqrt{2} \sin x = 1$$

Применим формулы двойного угла для синуса и для косинуса:

$$2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 1$$

$$(2 \cos x - 2 \sin x - \sqrt{2}) \sin x = 0$$

В первом случае:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Во втором случае:

$$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По формуле дополнительного аргумента:

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Отдельно выпишем ответ для каждого знака:

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \frac{y^2}{x}, \\ (\log_3 x^2) \cdot \log_x \left(2x - \frac{3}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

Решение:

Выпишем область допустимых значений: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$, $xy > \frac{3}{2}$.

Рассмотрим второе уравнение. Применим формулу $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$:

$$2\log_3 x \log_x\left(2x - \frac{3}{y}\right) = 4 \Leftrightarrow \log_3\left(2x - \frac{3}{y}\right) = 2 \Leftrightarrow 2x - \frac{3}{y} = 9$$

Прологарифмируем первое уравнение по основанию x:

$$\log_y x = 2\log_x y - 1$$

Сделаем замену $\log_y x = t$:

$$t = \frac{2}{t} - 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 + t - 2}{t} = 0$$

Корни: $t = 1$, $t = -2$. Возвращаясь к переменным x и y, получаем два случая: $\log_y x = 1$ или $\log_y x = -2$.

1) В первом случае $x = y$. Второе уравнение примет вид:

$$2x - \frac{3}{x} = 9 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 9x - 3}{x} = 0$$

Первое решение $x = \frac{9-\sqrt{105}}{4}$ не удовлетворяет условию $x > 0$. Второе решение $x = \frac{9+\sqrt{105}}{4}$ подходит, так как

$$xy = x^2 = \left(\frac{9+\sqrt{105}}{4}\right)^2 > \left(\frac{18}{4}\right)^2 > \frac{3}{2}.$$

2) Во втором случае $x = \frac{1}{y^2}$. Второе уравнение:

$$\frac{2}{y^2} - \frac{3}{y} = 9 \Leftrightarrow \frac{9y^2 + 3y - 2}{y^2} = 0$$

Первое решение $y = -\frac{2}{3}$ отбрасываем ($y > 0$ не выполняется). Второе решение $y = \frac{1}{3}$ дает $x = 9$, что удовлетворяет области допустимых значений.

Ответ: $(9; \frac{1}{3})$, $\left(\frac{9+\sqrt{105}}{4}; \frac{9+\sqrt{105}}{4}\right)$.

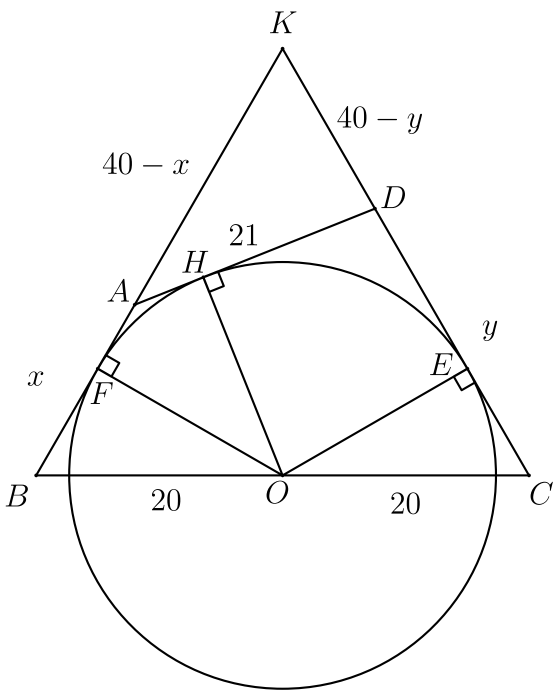
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 60^\circ$, $AD = 21$, $BC = 40$. Окружность с центром на стороне BC касается сторон AB, AD и CD. Найдите длины сторон AB и CD.

Решение:

Первое дополнительное построение: продолжим стороны BA и CD до пересечения в точке K. Так как два угла треугольника BCK равны по 60°, то он будет правильным. Причем длины всех сторон треугольника равны 40.

Обозначим $AB = x$, $CD = y$. Получаем, что $AK = 40 - x$, $DK = 40 - y$. Теорема косинусов для треугольника KCD дает:

$$(40 - x)^2 + (40 - y)^2 - 2(40 - x)(40 - y) \cdot \frac{1}{2} = 21^2.$$



Второе дополнительное построение: проведем размеры OF, OH и OE к точкам касания с BA, AD и DC, соответственно. Треугольники OBF и OCE — равные прямоугольные треугольники ($\angle B = \angle C = 60°$, $OF = OE$ как радиусы). Значит, $BO = OC = 20$. Из этих же прямоугольных треугольников получаем, что $BF = CE = 10$. Следовательно, $AF = x - 10$, $DE = y - 10$.

Заметим, что, по свойству касательных: $AH = AF = x - 10$, $DH = DE = y - 10$. По условию $AD = 21$. Следовательно,

$$(x-10)+(y-10)=21,$$

$$x+y=41.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(40-x)^2+(40-y)^2-2(40-x)(40-y)\cdot\frac{1}{2}=21^2\\ x+y=41\end{cases}$$

Находим, что $40 - y = x - 1$ и подставляем в первое уравнение:

$$(40-x)^2+(x-1)^2-(40-x)(x-1)=21^2,$$

$$3x^2-123x+1200=0,$$

$$x^2-41x+400=0.$$

Получаем, что $x = 16$ или $x = 25$. Значения второй неизвестной: $y = 25$ и $y = 16$, соответственно. Простая проверка показывает, что оба случая возможны.

Ответ: $(25; 16)$ и $(16; 25)$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$13+\sin^2 x > 3a^2 - a + (4a-5)\cos x$$

выполняется для всех x.

Решение:

Обозначим $t = \cos x$. Неравенство перепишем в виде:

$$13 + 1 - t^2 > 3a^2 - a + (4a - 5)t,$$

$$t^2 + (4a - 5)t + (3a^2 - a - 14) < 0.$$

Необходимо найти все значения параметра a, при которых данное неравенство выполняется при всех $t \in [-1; 1]$.

График функции $f(t) = t^2 + (4a - 5)t + (3a^2 - a - 14)$ — парабола с ветвями, направленными вверх и является выпуклой функцией. Для того, чтобы неравенство $f(t) < 0$ выполнялось при всех $t \in [-1, 1]$, необходимо и достаточно потребовать, чтобы $f(-1) < 0$ и $f(1) < 0$. Действительно, если эта пара неравенств выполняется, то $f(t) < 0$ при все $t \in [-1, 1]$ в силу выпуклости функции. Обратное утверждение очевидно. Имеем:

$$\begin{cases} 1 + (4a - 5) + 3a^2 - a - 14 < 0 \\ 1 - (4a - 5) + 3a^2 - a - 14 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 6 < 0 \\ 3a^2 - 5a - 8 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-3; 2) \\ a \in \left(-1; \frac{8}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1; 2).$$

Ответ: $(-1; 2)$.

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как $5:9$. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

Решение:

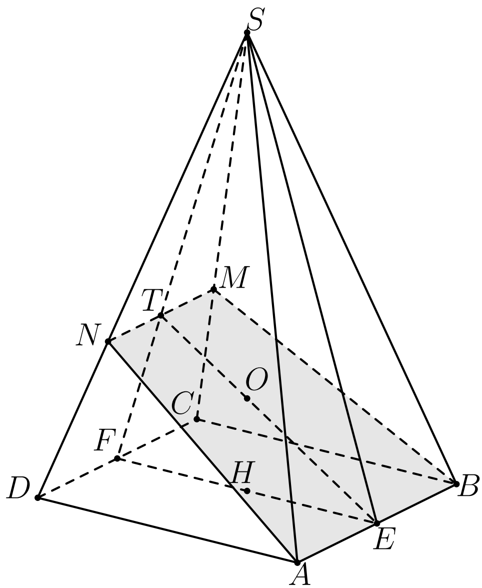


Рис. 15: к задаче №8

Искомый двугранный угол обозначим $\angle SEH = \alpha$. Длину апофемы обозначим $SF = SE = b$. Стороны основания тогда равны $a = 2b\cos\alpha$.

Пусть T, E, F, H — середины сторон NM, AB, CD и EF, соответственно. Четырехугольник $ABMN$ — плоский. Значит, либо прямая AB пересекает MN на прямой CD (общая прямая граней

$MNCD$ и $ABCD$), либо все три прямые параллельны. Первый вариант невозможен, так как прямая AB параллельна CD. Получаем, что $ABMN$ — трапеция. Так как пирамида $SABCD$ — правильная, то все боковые грани являются равнобедренными треугольниками. Значит, $DCMN$ — равнобедренная трапеция. Тогда треугольники AND и BMC равны и, следовательно, трапеция $ABMN$ равнобедренная. Центр шара O будет лежать на прямой TE и будет центром вписанной окружности треугольника SEF.

Объем пирамиды $SABMN$ равен $\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABMN}$, где h — расстояние от вершины S до плоскости $ABMN$. Так как O — центр вписанной в треугольник SFE окружности, то $\angle SET = \frac{\alpha}{2}$. Поэтому $h = SE \cdot \sin \angle SET = SE \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Объем пирамиды $SABCD$ равен $\frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$. Отношение объемов равно:

$$\frac{5}{9} = \frac{S_{ABMN} \cdot SE \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{S_{ABCD} \cdot SH} = \frac{(AB + MN) \cdot TE \cdot SE \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot AB^2 \cdot SH}.$$

Выразим все через a, b.

Ясно, что ET — биссектриса угла SEF. По формуле для биссектрисы:

$$ET = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

Длину MN определим из подобия треугольников SMN и SCD: $\frac{MN}{CD} = \frac{ST}{SF}$. По свойству биссектрисы имеем: $\frac{ST}{TF} = \frac{SE}{EF}$. Это значит, что $\frac{ST}{SF} = \frac{SE}{SE+EF} = \frac{b}{b+a}$. Получаем:

$$MN = \frac{ab}{a+b}.$$

Длину SH найдем из прямоугольного треугольника SHE:

$$SH = b\sin\alpha.$$

Для отношения объемов имеем:

$$\frac{5}{9} = \frac{(a + \frac{ab}{a+b}) \cdot \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b} \cdot b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin\alpha} = \frac{(1 + \frac{b}{a+b}) \cdot \frac{1}{a+b} \cdot b}{2} = \frac{ab + 2b^2}{2(a+b)^2}.$$

Пусть $t = \cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{5}{9} = \frac{2b^2t + 2b^2}{2(2bt + b)^2} = \frac{t+1}{(2t+1)^2},$$

$$20t^2 + 20t + 5 = 9t + 9 \Leftrightarrow 20t^2 + 11t - 4 = 0.$$

Из двух корней $t = -\frac{4}{5}$ и $t = \frac{1}{4}$ подходящим является только положительный, так как двугранный угол при основании пирамиды не может быть тупым.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2018 год

1 вариант

1. Какое целое число задано выражением $\frac{\sqrt{8}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\sqrt{32}}$?

Решение:

Простые вычисления сразу приводят к ответу:

$$\frac{\sqrt{8}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\sqrt{32}}=\frac{\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{5}\right)}{2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{28}{15}}{2\cdot\frac{7}{15}}=2.$$

Ответ: 2.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{10x+6}=5x-9.$$

Решение:

Выражение слева неотрицательно, поэтому выражение справа тоже:

$$5x-9\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant\frac{9}{5}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$10x+6=25x^2-90x+81\Leftrightarrow x^2-4x+3=0.$$

Из двух корней $x=1$, $x=3$ подходит только $x=3$.

Ответ: 3.

3. Решить неравенство:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{x}}\leqslant\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}.$$

Решение:

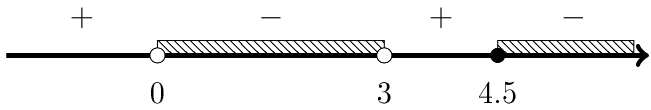
Приведем обе степени к основанию $\frac{3}{2}$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{6}{x}} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3-x}}.$$

Основание $\frac{3}{2} > 1$, поэтому для показателей знак неравенства сохраняется:

$$-\frac{6}{x} \leqslant \frac{2}{3-x} \Leftrightarrow \frac{-6(3-x)-2x}{x(3-x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x-18}{x(3-x)} \leqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



$$x \in (0,3) \cup [4.5; +\infty)$$

Ответ: $x \in (0,3) \cup [4.5; +\infty)$.

4. В геометрической прогрессии 50 членов (все положительные). Если просуммировать логарифмы по основанию 2 от каждого члена прогрессии, то получится 1325. Если вычислить сумму логарифмов по основанию 2 только первых 30 членов, то получится 495. Вычислите сумму первых 10 членов прогрессии.

Решение:

Обозначим члены прогрессии через b_1, b_2, $\ldots$, b_{50}, а через q — знаменатель геометрической прогрессии. С учетом того, что $b_k =$

b_1q^{k-1}, преобразуем сумму логарифмов по основанию 2 первых n членов:

$$\log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \ldots + \log_2 b_n = \log_2 (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) =$$

$$= \log_2 \left(b_1 \cdot b_1 \cdot q \cdot b_1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot b_1 \cdot q^{n-1}\right) = \log_2 \left(b_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}\right) =$$

$$= n \log_2 b_1 + (1+2+3+\ldots+(n-1)) \cdot \log_2 q = n \log_2 b_1 + \frac{n(n-1)}{2} \log_2 q.$$

Теперь перепишем условие задачи в виде следующих уравнений:

$$\begin{cases} 50 \log_2 b_1 + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot \log_2 q = 1325 \\ 30 \log_2 b_1 + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot \log_2 q = 495 \end{cases}$$

После сокращений имеем:

$$\begin{cases} 2 \log_2 b_1 + 49 \log_2 q = 53 \\ 2 \log_2 b_1 + 29 \log_2 q = 33 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $\log_2 q = 1$, то есть $q = 2$. Соответственно, $\log_2 b_1 = 2$, то есть $b_1 = 4$.

Остается найти сумму первых 10 членов геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{10} = \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot b_1 = \left(2^{10} - 1\right) \cdot 4 = 4092.$$

Ответ: 4092.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5 \sin y - 3\sqrt{5} \cos x = 7 - 2 \cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases}$$

Решение:

Решим второе уравнение:

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем $\cos x$ из второго уравнения и основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}.$$

Согласуем знак $\cos x$ с решениями второго уравнения.

1) Если угол x лежит в первой четверти, то $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$5 \sin y - 3 = 7 - 2 \cos^2 y.$$

Замена: $t = \sin y \in [-1, 1]$. Тогда:

$$5t - 3 = 7 - 2(1 - t^2),$$

$$2t^2 - 5t + 8 = 0.$$

Решений нет.

2) Если угол x лежит в третьей четверти, то $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$5 \sin y + 3 = 7 - 2 \cos^2 y.$$

Замена $t = \sin y \in [-1, 1]$. Тогда:

$$5t + 3 = 7 - 2(1 - t^2),$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Из двух решений $t = 2$, $t = \frac{1}{2}$ подходит только второе: $\sin y = \frac{1}{2}$. То есть,

$$y = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k; (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

6. В треугольнике ABC со сторонами: $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$ проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3. Найдите отношение длин отрезков $H_1H_3 : H_2H_3$.

Решение:

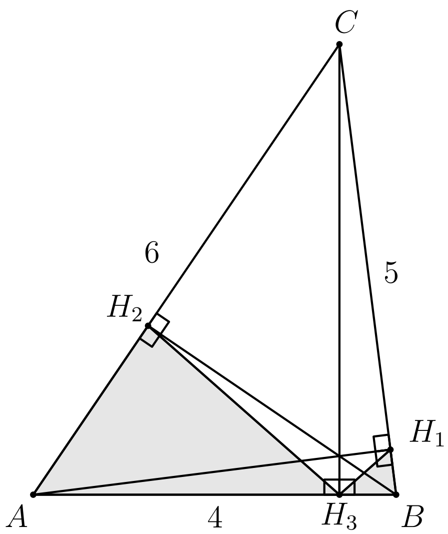


Рис. 16: к задаче №6

Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Определим $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ по теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16} > 0,$$
$$\cos\beta = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8} > 0,$$
$$\cos\gamma = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot CB} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4} > 0.$$

Ясно, что треугольник ABC остроугольный.

Треугольник AH_2H_3 подобен треугольнику ABC, так как угол A — общий, а прилежащие стороны пропорциональны, то есть

$$\frac{AH_2}{AB} = \cos\alpha = \frac{AH_3}{AC}.$$

Следовательно:

$$\frac{H_2H_3}{BC} = \cos\alpha,$$

$$H_2H_3 = BC \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \frac{9}{16} = \frac{45}{16}.$$

Аналогично, треугольник BH_1H_3 подобен треугольнику BAC, так как угол B — общий, а прилежащие стороны пропорциональны (коэффициент подобия равен $\cos\beta$). Следовательно,

$$\frac{H_1H_3}{AC} = \cos\beta,$$

$$H_1H_3 = AC \cdot \cos\beta = 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Находим ответ: $\frac{H_1H_3}{H_2H_3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{45} = \frac{4}{15}$.

Ответ: $4 : 15$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|(2-a)x - a| = (2-a)(x+1)^2 + 2ax - 2x + 2a$$

имеет ровно одно решение.

Решение:

Сделаем замену переменной $t = x + 1$. Имеем:

$$|(2-a)t - 2| = (2-a)t^2 + (2a-2)t + 2.$$

Обозначим $b = 2 - a$. Тогда уравнение примет вид:

$$|bt - 2| = bt^2 + (2 - 2b)t + 2.$$

Легко убедиться, что $t = 0$ является решением при любых значениях параметра b. Достаточно найти такие b, при которых решений отличных от нуля нет.

Если $b = 0$, то уравнение примет вид:

$$2 = 2t + 2,$$

которое как раз имеет только решение $t = 0$. Соответственно, $a = 2$ входит в ответ.

Пусть $b \neq 0$. Замена $z = bt$. Тогда $t = \frac{z}{b}$ и

$$|z - 2| = \frac{z^2}{b} + \frac{(2 - 2b)z}{b} + 2.$$

Или:

$$b|z - 2| = z^2 + (2 - 2b)z + 2b.$$

Определим все значения параметра b такие, при которых уравнение не имеет ненулевых решений z ни в одном из двух случаев, которые образуются при раскрытии модуля:

1) Пусть $z \geqslant 2$. Тогда уравнение выглядит следующим образом:

$$bz - 2b = z^2 + (2 - 2b)z + 2b.$$

Или:

$$z^2 + (2 - 3b)z + 4b = 0.$$

Уравнение не должно иметь решений $z \geqslant 2$. То есть, либо корней нет, либо корни меньше 2. Обозначим $f(z) = z^2 + (2 - 3b)z + 4b$.

В первом случае $D < 0$:

$$(2-3b)^2 - 16b < 0 \Leftrightarrow 9b^2 - 28b + 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$b \in \left(\frac{14-4\sqrt{10}}{9}; \frac{14+4\sqrt{10}}{9}\right).$$

Во втором случае корни существуют, но меньше 2. Это условие запишем в виде системы:

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ z_{\text{в}} < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\infty; \frac{14-4\sqrt{10}}{9}\right] \cup \left[\frac{14+4\sqrt{10}}{9}; +\infty\right) \\ -\frac{2-3b}{2} < 2 \\ 4 + (2-3b) \cdot 2 + 4b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b \in \left(-\infty; \frac{14-4\sqrt{10}}{9}\right] \cup \left[\frac{14+4\sqrt{10}}{9}; +\infty\right) \\ b < 2 \\ b < 4 \end{cases} \Leftrightarrow b \in \left(-\infty; \frac{14-4\sqrt{10}}{9}\right].$$

Вспоминая, что $b \neq 0$, находим:

$$b \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{14-4\sqrt{10}}{9}\right].$$

Значит, корней $z \geqslant 2$ не будет при

$$b \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{14+4\sqrt{10}}{9}\right].$$

2) Пусть $z < 2$. Тогда:

$$2b - bz = z^2 + (2-2b)z + 2b,$$

$$z^2 + (2-b)z = 0.$$

$z = 0$ является решением в любом случае. А решение $z = b - 2$ должно быть посторонним или совпадать с первым решением. В первом случае $b - 2 \geqslant 2$, то есть $b \geqslant 4$. Во втором случае $b = 2$.

Значит, корней $z < 2$ не будет при

$$b \in \{2\} \cup [4; +\infty).$$

То есть, мы можем сделать вывод: уравнение не имеет решений $z \neq 0$ только при $b = 2$ (при $a = 0$).

Ответ: $\{0; 2\}$.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA = MB = MC = \sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC, опущенной из вершины B. Найдите объем пирамиды $SABC$.

Решение:

Равенство всех ребер означает, что пирамида $SABC$ — это правильный тетраэдр. Так как $MA = MB = MC$, то высота из M на плоскость ABC падает в H — центр треугольника ABC. Аналогично, высота из S тоже падает в H. Следовательно, M лежит на прямой SH.

Поскольку прямая AM лежит в плоскости ASH, то она лежит и в плоскости ASN, где N — середина ребра BC. То есть, AM пересекается с высотами SN и BK треугольника SBC. Таким образом, AM проходит через точку пересечения высот L — центр грани SBC, и содержит высоту тетраэдра.

Перейдем к счету. Так как H — центр равностороннего треугольника ABC, то $AH : HN = 2 : 1$. Аналогично, L — центр равностороннего треугольника SBC, поэтому $SL : LN = 2 : 1$. Треугольники NLH и NSA подобны по второму признаку подобия, отсюда $\frac{LH}{SA} = \frac{1}{3}$ и $LH || SA$. Далее треугольники LMH и AMS подобны по первому признаку подобия, следовательно, $\frac{LM}{AM} = \frac{1}{3}$.

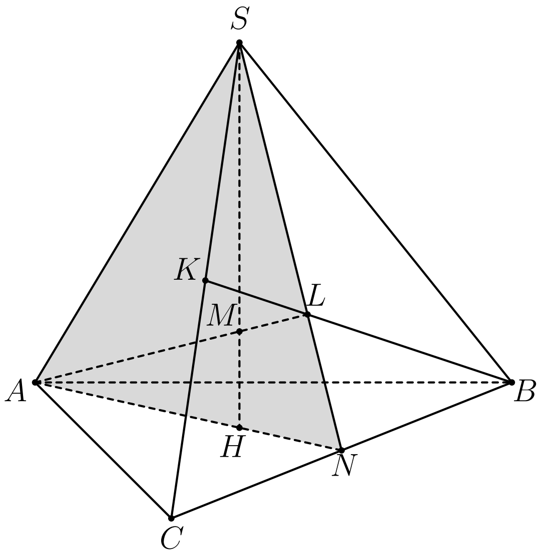


Рис. 17: к задаче №8

Имеем: $ML = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AL = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Так как тетраэдр правильный, то

$$MH = ML = \frac{\sqrt{3}}{3}, SH = AL = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

По теореме Пифагора для треугольника AMH:

$$AH^2 = AM^2 - MH^2 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Используя соотношение $AH : HN = 2 : 1$, получим:

$$AN = \frac{3}{2} \cdot AH = \sqrt{6}.$$

Из равностороннего треугольника ABC легко найти сторону, зная его высоту:

$$BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AN = 2\sqrt{2}.$$

Выпишем объем пирамиды:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot SH \cdot AN \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Ответы

2011 год

1 вариант

1) $\frac{3}{4}$; $\sqrt{7}+2$. **2)** 5,7. **3)** $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **4)** $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$. **5)** -186. **6)** $10; 9-\sqrt{33}; 14; 15+\sqrt{33}$ или $10; 15-\sqrt{33}; 14; 9+\sqrt{33}$. **7)** $(-3; +\infty)$. **8)** $\frac{1}{3}$.

2 вариант

1) $-\frac{2}{3}$; $\sqrt{5}+3$. **2)** 6,2. **3)** $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **4)** $\left(1; \frac{2}{3}\right)$. **5)** -175. **6)** $13; \frac{25-\sqrt{145}}{2}; 17; \frac{35+\sqrt{145}}{2}$ или $13; \frac{25+\sqrt{145}}{2}; 17; \frac{35-\sqrt{145}}{2}$. **7)** $(6; +\infty)$. **8)** $\frac{3}{8}$.

2012 год

1 вариант

1) Все три числа являются целыми: 4, 66, 2. **2)** -1; 1. **3)** $\frac{3\pi}{4}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 0. **4)** 45046. **5)** $(0; 1) \cup [7; 2401]$. **6)** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$. **7)** $\left[1-\frac{2\sqrt{11}}{11}; 1+\frac{2\sqrt{11}}{11}\right]$. **8)** 27 : 5.

2 вариант

1) Все три числа являются целыми: 5, 70, 2. **2)** -2; 2. **3)** $\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 0. **4)** 50197. **5)** $(0; 1) \cup [11; 1331]$. **6)** $\frac{73\sqrt{3}}{2}$. **7)** $\left[\frac{11-2\sqrt{11}}{7}; \frac{11+2\sqrt{11}}{7}\right]$. **8)** 18 : 7.

2013 год

1 вариант

1) 12. **2)** $\left(-3\frac{4}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **3)** $\pm\frac{2\pi}{27}+\frac{4\pi n}{9}$, $n\in\mathbb{Z}$. **4)** 675.
5) $(\log_2 12;\log_2 13)\cup[4;+\infty)$. **6)** 10. **7)** $(116;6)$; $(6;116)$. **8)** 2; $\frac{1}{2}$.

2 вариант

1) 4. **2)** $\left(-5\frac{1}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **3)** $\pm\frac{4\pi}{33}+\frac{4\pi n}{11}$, $n\in\mathbb{Z}$. **4)** 598.
5) $(\log_3 6;\log_3 7)\cup[2;+\infty)$. **6)** 6. **7)** $(5;95)$; $(95;5)$. **8)** 3; $\frac{1}{3}$.

2014 год

1 вариант

1) 13. **2)** -4. **3)** $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$. **4)** $\frac{5}{8}$.
5) $\left[-\frac{8}{9};0\right)\cup(0;1)\cup\left[2;\frac{10+2\sqrt{145}}{15}\right)\cup\left(\frac{10+2\sqrt{145}}{15};2\frac{2}{3}\right]$. **6)** $44\sqrt{3}$.
7) $\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right)$. **8)** 10 см.

2 вариант

1) 15. **2)** -3. **3)** $\pm\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$. **4)** $\frac{511}{198}$.
5) $\left[-7\frac{1}{2};\frac{-13-\sqrt{409}}{8}\right)\cup\left(\frac{-13-\sqrt{409}}{8};-3\right]\cup(-1;0)\cup\left(0;\frac{5}{6}\right]$. **6)** $24\sqrt{3}$.
7) $\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$. **8)** 12 см.

2015 год

1 вариант

1) 4,5. **2)** 2; 6. **3)** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **4)** $(0;0)$; $\left(\frac{1}{2};4\right)$; $\left(\frac{5}{6};-6\frac{2}{3}\right)$.
5) $[6;14)$. **6)** $5\sqrt{3}$. **7)** $-2\frac{3}{13}$; $-1\frac{4}{7}$. **8)** $27\sqrt{3}$.

2 вариант

1) $\sqrt{\frac{20}{7}+\frac{23}{6}}$. **2)** 3; 4. **3)** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **4)** $(0;0)$, $\left(1;2\frac{1}{2}\right)$; $\left(1\frac{1}{2},-3\frac{3}{4}\right)$. **5)** $(-10;-2]$. **6)** $6\sqrt{3}$. **7)** $-2\frac{4}{7}$; $-3\frac{3}{13}$. **8)** $12\sqrt{3}$.

2016 год

1 вариант

1) 1 корень. **2)** $(7;2)$; $(-2;-7)$. **3)** 25. **4)** $(0;1)\cup[5;+\infty)$.
5) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **6)** $\frac{5\sqrt{15}}{4}$. **7)** -34; -2.
8) $8\sqrt{7}$.

2 вариант

1) 1 корень. **2)** $(7;1)$; $(-1;-7)$. **3)** 20. **4)** $(0;1)\cup[3;+\infty)$.
5) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **6)** $\frac{\sqrt{143}}{4}$. **7)** -32; -2.
8) $6\sqrt{3}$.

2017 год

1 вариант

1) 16; 17. **2)** 5; 9. **3)** $\frac{511}{45}$. **4)** πn, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{7\pi}{12}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;
$\frac{\pi}{12}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. **5)** $(9;\frac{1}{3})$, $\left(\frac{9+\sqrt{105}}{4};\frac{9+\sqrt{105}}{4}\right)$. **6)** $(25;16)$ и $(16;25)$.
7) $(-1;2)$. **8)** $\frac{1}{4}$.

2 вариант

1) 14; 15. **2)** 6; 9. **3)** $\frac{1023}{85}$. **4)** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{12}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;
$-\frac{11\pi}{12}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. **5)** $(4;2)$, $\left(\frac{\sqrt{46}+4}{5};\frac{\sqrt{46}-4}{6}\right)$. **6)** $(9;16)$ и $(16;9)$.
7) $(-2;1)$. **8)** $\frac{3}{4}$.

2018 год

1 вариант

1) 2. **2)** 3. **3)** $(0,3)\cup[4.5;+\infty)$. **4)** 4092.
5) $(\operatorname{arctg}2+\pi+2\pi n;(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi k)$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **6)** $4:15$. **7)** 0; 2.
8) $\frac{8}{3}$.

2 вариант

1) 5. **2)** 2. **3)** $(0,2) \cup \left[\frac{18}{7}; +\infty\right)$. **4)** 8184.
5) $(\operatorname{arctg} 3 + \pi + 2\pi n; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **6)** $49 : 125$. **7)** -1; 1.
8) $8\sqrt{3}$.