

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
7 декабря 2008

1. С помощью интегрирования по частям докажите, что:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx = \int_0^{\pi} (f'(x + \pi) - f'(x)) \sin x \, dx.$$

2. Ответ: мощность конечна и совпадает с количеством элементов в  $A$ . Любая такая функция  $f$  будет постоянной. Для доказательства этого факта нужно воспользоваться плотностью  $\mathbb{Q} \cap [0; 1]$  в  $[0; 1]$  и непрерывностью  $f$  на  $[0; 1]$ , рассматривая

$$\inf \{x : x \in \mathbb{Q} \cap [0; 1] \text{ и } f(x) \neq f(0)\}$$

(в случае, когда это множество не пусто).

3. Обозначим  $n$  количество участников. Выберем победителя первого дня (если это  $n$ -й участник) или предпоследнего победителя первого дня (иначе). Пусть это  $k$ -й участник, где  $k < n$ . Значит, в первый день были бои  $(k, i)$  для всех  $i$  от  $k + 1$  до  $n$ . При этом,  $(n - k)$ -й по счету бой второго дня будет между  $k$ -м участником и победителем среди  $(k + 1), \dots, n$ .

4. Ответ: все многочлены степени не выше  $(n + 1)$ .

Рассмотрим

$$g(x) = f(x) - f(0) - \frac{x}{1!} f'(0) - \frac{x^2}{2!} f''(0) - \dots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

$$\begin{cases} g^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} g(x) \\ g^k(0) = 0, 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Согласно теореме о единственности решения задачи Коши при  $x > 0$  и  $x < 0$ , функция будет совпадать с некоторым многочленом вида  $Cx^{n+1}$ . А так как функция  $g(x)$   $(n + 1)$  раз дифференцируема в нуле, то  $C$  будет одним и тем же при  $x > 0$  и  $x < 0$ .

5. От противного. Пусть  $f(b) > f(a)$  (обратный случай аналогичен). Ясно, что  $f(a) \geq 0$  и  $f(b) \geq 0$ , иначе мы можем сузить отрезок  $[a; b]$ . Существует такое  $\varepsilon$ , что

$$\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(t) \, dt > \int_a^b f(t) \, dt = \alpha.$$

Но тогда можно взять  $a + \varepsilon < c < b + \varepsilon$ , что

$$\int_{a+\varepsilon}^c = \alpha.$$

Противоречие.

6. Пусть  $\prod_{i \in I} a_i$  имеет ровно  $k \leq n - 1$  различных простых делителей  $p_1, \dots, p_k$ . Каждому  $X \in \{1, 2, \dots, n\}$ , включая пустое множество, сопоставим набор из нулей и единиц  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)(X)$ , где  $\alpha_s$  — остаток при делении на  $2$  показателя  $p_s$  в произведении  $\prod_{i \in X} a_i$  (для пустого множества  $\prod_{i \in X} a_i = 1$ ). Количество всевозможных наборов из нулей и единиц длины  $k$  есть  $2^k$ , а количество подмножеств  $\{1, 2, \dots, n\}$  равно  $2^n > 2^k$ . По принципу Дирихле найдутся два одинаковых набора  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  для различных  $X_1$  и  $X_2$ . Тогда положим искомое множество  $X = X_1 \Delta X_2$  (симметрическая разность).

7. Используйте теорему Чебышева (постулат Бертрана): для любого  $x \geq 2$  найдётся простое число  $p$  в интервале  $x \leq p < 2x$ . Проведите индукцией по  $k$  с шагом 2.

8. Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 D(x) + x$ , где

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

— функция Дирихле.

9. Ответ: не всегда. Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Известно, что  $g(0)+h(0) = 1$ . Так как функция  $g$  сюръективная, то существует  $x_0$  такой, что  $g(x_0) = g(0)-1$  (ясно, что  $x_0 \neq 0$ ). Отсюда получаем  $h(x_0) = 1 - g(0) = h(0)$  — противоречие с инъективностью  $h(x)$ .