Открытая олимпиада по математике

19 декабря 2015

Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. a_n, b_n, x_n, y_n — четыре арифметические прогрессии. Известно, что $a_nb_n = x_ny_n$ для трёх различных натуральных n. Доказать, что $a_nb_n = x_ny_n$ для всех натуральных n.

2. Пусть $f(n)$ — вещественнозначная функция, определённая на множестве натуральных чисел и удовлетворяющая следующему условию: для любого $n > 1$ существует такой его простой делитель p, что $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$. Известно, что $f(2015) = 2015$. Найдите $f(2016)$.

3. Найдите все дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:
а) $f'(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{Z}$;
б) если для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f'(x_0) = 0$, то для него справедливо также равенство $f(x_0) = 0$.

4. На параболе выбраны 4 точки: A_1, A_2, A_3 и A_4. Через эти точки к параболе проведены 4 касательные l_1, l_2, l_3 и l_4 соответственно. l_1 пересекает l_2 в точке M. l_3 пересекает l_4 в точке N. Докажите, что MN, A_1A_3 и A_2A_4 пересекаются в одной точке.

5. Решить в вещественных числах уравнение
$$4x + 2\sin x + \sin(2x + \sin x) + 12\pi = 0.$$

6. Дано n натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n, при этом все они не превосходят n. Доказать, что существует непустое подмножество $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что множества P и $\{a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_n}\}$ совпадают.

7. Найдите все матрицы A, которые обладают следующими свойствами:
а) имеет всего одно собственное значение (без учёта кратности);
б) ранг равен 1;
в) след равен 1.