Введение в численные методы. Дифференцирование и задача Коши

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

18 апреля 2020

План на семестр

1. СЛАУ (точные методы)
2. СЛАУ (итерационные методы)
3. решение нелинейных уравнений
4. интерполяция
5. аппроксимация
6. интегрирование
7. **дифференцирование**

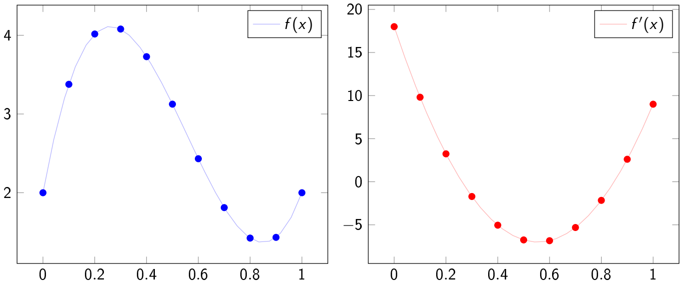
Дифференцирования

Дана дифференцируемая на отрезке $(a; b)$ функция $f(x)$.
Необходимо вычислить значение производной:

$$f'(x).$$

в точках равномерно сетки $x_i = a + ih$, где $h = \frac{b-a}{n}$.
Основная идея: формула Тейлора.

Первая производная



Первая производная (вперёд)

Определим значение производную в точке x_i через значения f_i и f_{i+1}.

$$f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

Оценим погрешность с помощью формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\xi)$$

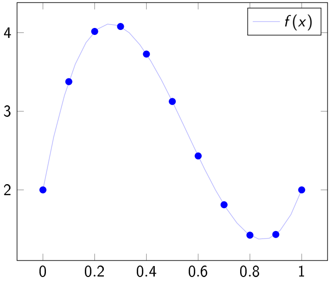
Подставим вместо $x = x_{i+1}$

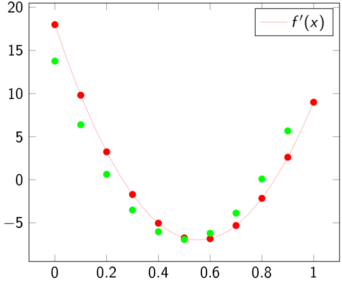
$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

Погрешность:

$$f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f''(\xi) - f_i}{h} = f'(x_i) + O(h)$$

Первая производная (вперёд)





Первая производная (назад)

Определим значение производную в точке x_i через значения f_{i-1} и f_i.

$$f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

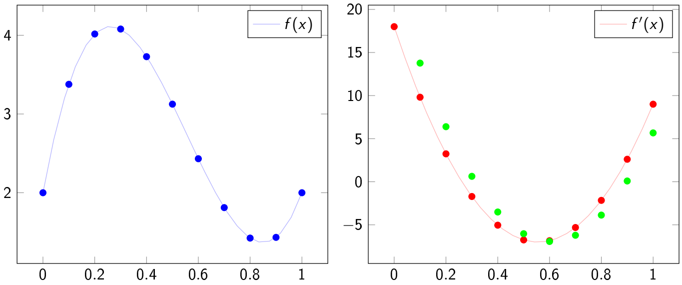
Из формулы Тейлора в точке x_i:

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

Погрешность:

$$f_{\overline{x},i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{f_i - f_i + hf_i' - \frac{h^2}{2} f''(\xi)}{h} = f'(x_i) + O(h)$$

Первая производная (назад)



Первая производная (центральная)

Определим значение производную в точке x_i через значения f_{i-1} и f_{i+1}.

$$f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

Из формулы Тейлора в точке x_i:

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f''(\xi_1)$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f''(\xi_2)$$

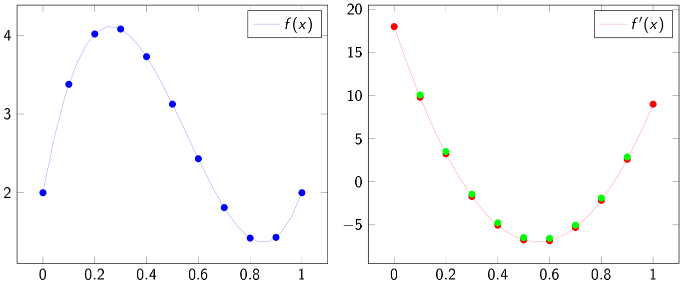
Погрешность:

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{f_i + hf_i' + \frac{1}{2}h^2 f_i'' + \frac{1}{6}h^3 f''(\xi_1) - f_i + hf_i' - \frac{1}{2}h^2 f_i'' + \frac{1}{6}h^3 f''(\xi_2)}{2h} =$$

$$= \frac{2hf_i' + \frac{1}{6}h^3(f''(\xi_1) + f''(\xi_2))}{2h} = f'(x_i) + \frac{h^2}{6} f''(\xi)$$

$$f_{\hat{x},i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = f'(x_i) + O(h^2)$$

Первая производная (центральная)



Первая производная (несимметричная второго порядка)

Определим значение производную в точке x_i через значения f_i, f_{i+1} и f_{i+2}.
Из формулы Тейлора в точке x_i получим

$$f_{i+2} = f_i + (2h)f_i' + \frac{1}{2}(2h)^2 f_i'' + \frac{1}{6}(2h)^3 f''(\xi_1)$$

Пояснение:

$$\frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} =$$

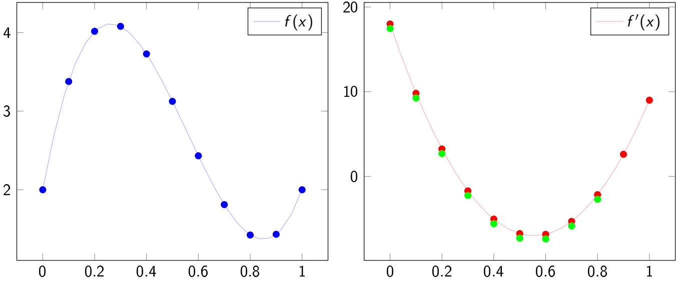
$$= \frac{-3f_i + 4(f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2)) - (f_i + (2h)f_i' + \frac{(2h)^2}{2}f_i'' + \frac{(2h)^3}{6}f''(\xi_1)}{2h}$$

$$= \frac{2hf_i' + \frac{2}{3}h^3 f'''(\xi_2) - \frac{4}{3}h^3 f'''(\xi_1)}{2h} =$$

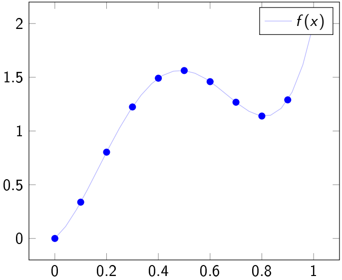
$$= f_i' + \frac{1}{3}h^2(f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1)) - \frac{2}{3}h^2 f'''(\xi_1)$$

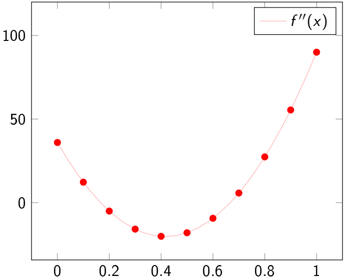
$$f_{\tilde{x},i} = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} = f'(x_i) + O(h^2)$$

Первая производная (несимметричная второго порядка)



Вторая производная





Вторая производная

Оператор дифференцирования вперед и назад

$$f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$f_{\overline{x},i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

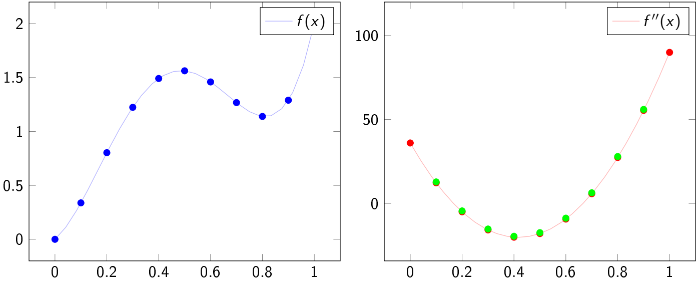
Вторая производная

$$f_{x\overline{x},i} = (f_{x,i})_{\overline{x}} = \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h}\right)_{\overline{x}} = \frac{\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}{h} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

Из ряда Тейлора

$$f_{x\overline{x},i} = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} = f''(x_i) + O(h^2)$$

Вторая производная



Некорректность дифференцирования

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f_{x,i}$$

Допустим данные f_i и f_{i+1} уже содержат погрешность по сравнению с $f(x_{i+1})$ и $f(x_i)$ (ошибка представления вещественных чисел).

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{f(x_{i+1}) + \delta_{i+1} - f(x_i) - \delta_i}{h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h}$$

Считаем, что $\delta_i < \delta, \delta_{i+1} < \delta$.

$$|f'(x_i) - f_{x,i}| < M_2 \frac{h}{2} + \frac{2\delta}{h}$$

Минимум достигается при $h = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}$

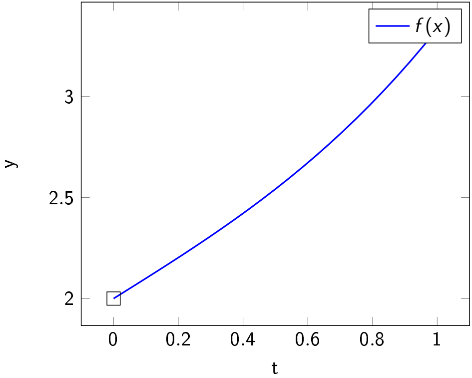
Задача Коши для дифференциального уравнения

Дано $f(t, u)$ и a. Определить $u(t)$ при $t < T$.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = a \end{cases}$$

Задача Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 + 1 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$



Решение $u(t) = \frac{t^3}{3} + t + 2$

Задача Коши для дифференциального уравнения

Введём равномерную сетку с шагом τ: $t_i = i \cdot \tau$. Значения в узлах сетки f_i и y_i. Проинтегрируем уравнение по t на интервалах $t \in [t_i, t_{i+i}]$

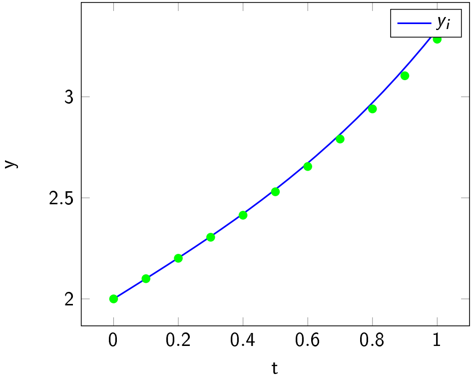
$$u(t_{i+1}) - u(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt$$

В зависимости от аппроксимации интеграла получим различные методы.

Явный метод Эйлера

Левые прямоугольники

$$\begin{cases} y_{i+1} - y_i = \tau \cdot f(t_i, y_i) \\ y_0 = a \end{cases}$$



Неявные методы

Правые прямоугольники

$$\begin{cases} y_{i+1} - y_i = \tau \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) \\ y_0 = a \end{cases}$$

Метод трапеций

$$\begin{cases} y_{i+1} - y_i = \frac{\tau}{2} \cdot (f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_i, y_i)) \\ y_0 = a \end{cases}$$

Методы Рунге Кутты

$$y_{n+1} - y_n = \tau \sum_{i=1}^{m} b_i k_i$$

где $\sum_{i=1}^{m} b_i = 1$ (веса), k_i — некоторое значение функции f на интервале $[t_n; t_{n+1}]$.

$$k_i = f(t_n + c_i \tau, y_n + \tau \sum_{j=1}^{m} a_{ij} k_j)$$

где $\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = c_i$ (веса)

Методы Рунге Кутты

Таблица Бутчера

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{1,1} & a_{1,1} & \dots & a_{1,1} \\
c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
c_n & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \\
\hline
1 & b_1 & b_2 & \dots & b_n
\end{array}
$$

Методы Рунге Кутты

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
0.5 & 0.5 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Вспомогательные значения

$$
\begin{cases}
k_1 = f(t_n, y_n) \\
k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2} k_1)
\end{cases}
$$

Метод

$$
y_{n+1} - y_n = \tau k_2
$$

Методы Рунге Кутты

Порядок аппроксимации

Первый:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 1$$

Второй:

$$2\sum_{i=1}^{m} b_i c_i = 1$$

Третий:

$$3\sum_{i=1}^{m} b_i c_i^2 = 1$$

$$6\sum_{i=1}^{m} b_i \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} c_j = 1$$