

Открытая студенческая олимпиада по  
математике

Казахстанского филиала МГУ

*10 декабря 2011*

1. Назовем конечное числовое множество своеобразным, если оно содержит число, равное количеству его элементов, но никакое его собственное подмножество этим свойством не обладает. Определите количество своеобразных подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, 12\}$ .
2. Определите множество значений функции, сопоставляющей каждому прямоугольному треугольнику отношение  $\frac{h}{r}$ , где  $h$  — высота, проведенная к гипотенузе, а  $r$  — радиус вписанной в треугольник окружности.
3. Две последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - \alpha y_n, \\ y_{n+1} = 2y_n - \frac{1}{\alpha} x_n \end{cases}$$

при всех  $n \geq 0$ , где  $\alpha \neq 0$  — постоянная величина, а  $x_0 = 1$  и  $y_0 = 0$ . Найдите  $x_{2012}$  и  $y_{2012}$ .

4. Существует ли такая последовательность вещественных чисел  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что для неё справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{12k} = 20, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{20k} = 12? \end{cases}$$

5. Найдите  $\int_0^{\pi/2} (\sin^2(\sin^2 x) + \cos^2(\cos^2 x)) \, dx$ .

6. Найдите  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}$ .

7. Найдите все функции  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие неравенству

$$(x - y)^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

для любых  $x, y \in [0, 1]$ .

8. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  — все положительные корни уравнения  $\operatorname{tg} x = x$ , выписанные в порядке возрастания,  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} |\cos x_{n_k}|$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$  сходятся или расходятся одновременно.

9. Квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  состоит из чисел  $+1$  и  $-1$ . При этом, в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы находится ровно одно число  $-1$ . Найдите  $|\det A|$ .

10. Пусть  $S$  — сумма всех обратимых элементов конечного ассоциативного кольца с единицей. Докажите, что  $S^2 = 0$  или  $S^2 = S$ .