

## Открытая олимпиада по математике

13 марта 2018

## Указания

1. Последовательно для  $i$  от  $n$  до 2 из  $i$ -й строки вычитаем  $(i-1)$ -ю:

$$\det \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_n^1 & \cdots & C_{2n-3}^{n-2} \end{pmatrix} = \dots = 1$$

2. Идея.

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 - 1}{(n^3 - n)^2} &= \frac{6n^2 - 2}{2n^2(n-1)^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{(n^2 + n)^2 + (n^2 - n)^2 - 2(n^2 - 1)^2}{n^2(n-1)^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Все слагаемые  $\frac{1}{n^2}$ , начиная с  $n = 4$  встречаются в трех подряд идущих начальных слагаемых и в сумме сокращаются. Остаются лишь два слагаемых при  $n = 2$  и одно при  $n = 3$  общей суммой:  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

3.  $f(x) = 2 - f(x^2) = f(x^4)$ . Так как функция четная, рассмотрим только положительные  $x$ .

Во-первых,  $f(x^{4n}) = f(x)$ . Пусть  $0 \leq x < 1$ . В силу непрерывности:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{4n}) = f(0).$$

Во-вторых,  $f(x^{\frac{1}{4n}}) = f(x)$ . Пусть  $x > 1$ . В силу непрерывности:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\frac{1}{4n}}) = f(1).$$

В силу непрерывности и  $f(1 - \varepsilon) = f(0)$ , получаем, что  $f(1) = f(0)$ . Значит,  $f(x) = \text{const}$ . Из условия получаем, что  $f(x) = 1$ .

4. Пусть некоторый угол  $n$ -угольника содержит несколько углов  $m$ -угольников. Угол правильного  $m$ -угольника равен  $180 \frac{m-2}{m}$ . Если  $m \geq 4$ , то угол будет не менее  $90^\circ$ . Значит,  $m = 3$ ,  $n = 6$ .

Пусть углы  $n$ -угольника и  $m$ -угольников равны:  $n = m$ . Так как сами многоугольники не совпадают, значит, есть точка на границе  $n$ -угольника в которой сходятся все несколько правильных  $m$ -угольников. То есть  $180^\circ$  делится на  $180^\circ \frac{n-2}{n}$ , что равносильно условию  $n$  делится на  $n-2$ , или 2 делится на  $n-2$ . Получаем:  $n = 4$  или  $n = 3$ .

Ответ:  $(n, m) \in \{(6; 3), (3; 3), (4, 4)\}$ .

5. Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) - x$ :  $g(x)$  выпукла вниз,  $g'(c) = 0$ ,  $g(c) < 0$ . Из выпуклости следует, что существует такая точка  $a < c$ , что  $g(a) = g(b) = 0$ . Существуют точки  $a < c < b$  такие, что  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$ .

Графики функций  $f(x)$  и  $f^{-1}(x)$  в квадрате  $[a; b] \times [a; b]$  симметричны относительно прямой  $y = x$ . То есть область, ограниченная кривыми  $y = x$  и  $y = f(x)$ , симметрична области, ограниченной кривыми  $y = x$  и  $y = f^{-1}(x)$ :

$$\begin{aligned} &\int_a^b (f(x) + f^{-1}(x)) dx = \\ &= - \int_a^b (x - f(x)) dx + \int_a^b (f^{-1}(x) - x) dx + 2 \int_a^b x dx = b^2 - a^2 \end{aligned}$$