

# Практикум на ЭВМ. Преобразование Фурье.

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

22 февраля 2019

- 1 Непрерывное преобразование Фурье
- 2 Дискретное преобразование Фурье
- 3 Обработка звука
- 4 WAV-файлы

# Непрерывное преобразование Фурье

Дана комплекснозначная функция от вещественного аргумента (времени) при  $t \in [0, 1]$

$$f(t)$$

Разложим его по базису из комплекснозначных функций  $\{\varphi_i = e^{2\pi kti}\}$

$$f(t) = c_0 \cdot 1 + c_1 e^{2\pi ti} + c_2 e^{4\pi ti} + c_3 e^{6\pi ti} + \dots$$

# Непрерывное преобразование Фурье

Базисных функций бесконечно много, как и значений функций.  
Если взять  $n$  (конечное число) значений функции, то можно взять конечное число базисных функций!

# Дискретное преобразование Фурье

Дан вектор комплексных чисел

$$\vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$$

Разложим его по базису из комплексных векторов  $\{\varphi_i\}$

$$\vec{f} = c_0\vec{\varphi}_0 + c_1\vec{\varphi}_1 + c_2\vec{\varphi}_2 + \dots + c_{n-1}\vec{\varphi}_{n-1}$$

Если  $\{\varphi_i\}$  — ортогональный базис, то легко найти коэффициенты:

$$c_i = \frac{(f_i, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$$

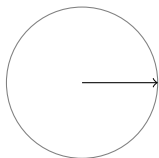
# Дискретное преобразование Фурье

Выберем в качестве базисного вектора  $\vec{\varphi}_k$  — значения сеточной функции

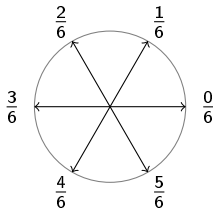
$$e^{2\pi kxi}$$

для значений  $x$  на равномерной сетке  $[0, 1)$  с шагом  $\frac{1}{n}$ .

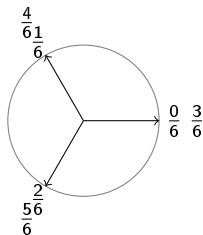
Например, при  $n = 6$ . Рассмотрим значения при  $x = 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$



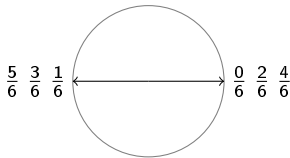
$$\varphi_0(x) = 1$$



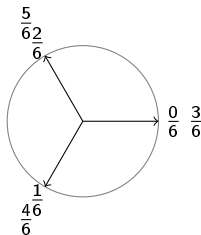
$$\varphi_1(x) = e^{2\pi x}$$



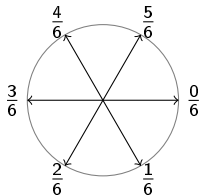
$$\varphi_2(x) = e^{4\pi x}$$



$$\varphi_3(x) = e^{6\pi x}$$



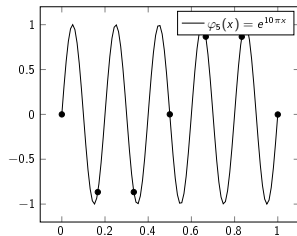
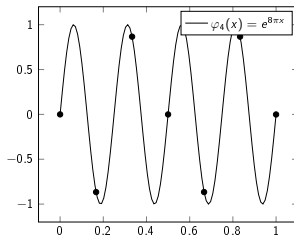
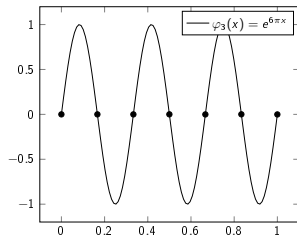
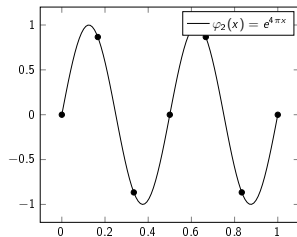
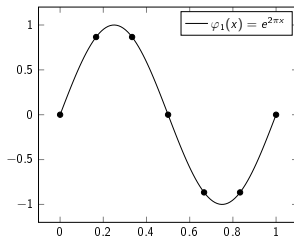
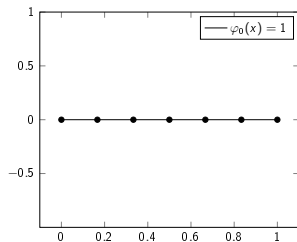
$$\varphi_4(x) = e^{8\pi x}$$



$$\varphi_5(x) = e^{10\pi x}$$

# Дискретное преобразование Фурье

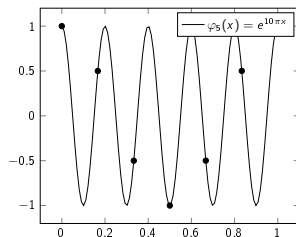
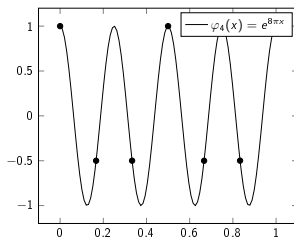
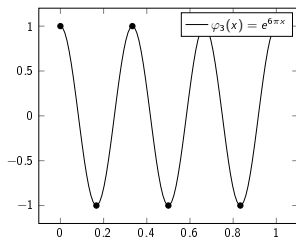
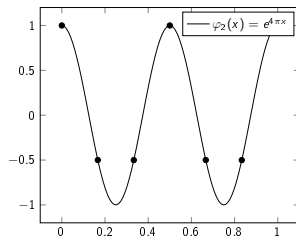
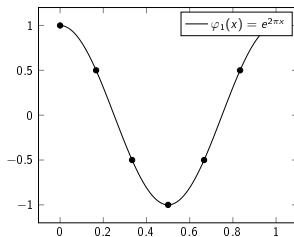
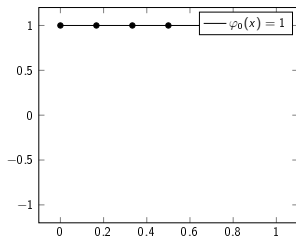
## Мнимая часть





# Дискретное преобразование Фурье

## Вещественная часть



# Дискретное преобразование Фурье

Обозначим через

$$\lambda = e^{\frac{2\pi}{n}i}$$

Тогда

$$\varphi_k\left(\frac{j}{n}\right) = e^{\frac{2\pi k}{n}i} = \lambda^{kj}$$

Здесь  $j$  соответствует шкале времени,  $k$  соответствует частоте функции.

# Обратное преобразование Фурье

Разложение по базису:

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^{kj} = c_0 + c_1 \lambda^j + c_2 \lambda^{2j} + \dots + c_{n-1} \lambda^{(n-1)j}$$

# Прямое преобразование Фурье

Коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \lambda^{-kj} = \frac{1}{n} \left( f_0 + f_1 \lambda^{-k} + f_2 \lambda^{-2k} + \dots + f_{n-1} \lambda^{-(n-1)k} \right)$$

Опишем класс комплексных чисел:

```
class Complex {
    double _re, _im;
public:
    Complex();
    Complex(double re, double im = 0);
    double amp() const;
    double phase() const;
    Complex operator+=(const Complex &z) const;
    Complex operator+(const Complex &z) const;
    Complex operator*(double x) const;
    Complex operator/(double x) const;
    Complex operator^(double alpha) const;
};
```

Значения: амплитуды `amp()` и фазы `phase()`.

Операторы: сложения с комплексным числом, умножения на вещественное, деления на вещественное и поворот на  $\alpha$  радиан (то есть умножение на  $e^{2\pi i \alpha} = \cos 2\pi \alpha + i \sin 2\pi \alpha$ ).

## Пример сигнала (код)

Создадим вектор из чисел, которые описывают значения исходной функции (сигнала).

```
std::vector<Complex> function({1, 6, 2, 5, 3, 4});
```

# Пример сигнала

Сигнал:

$$f_0 = 1$$

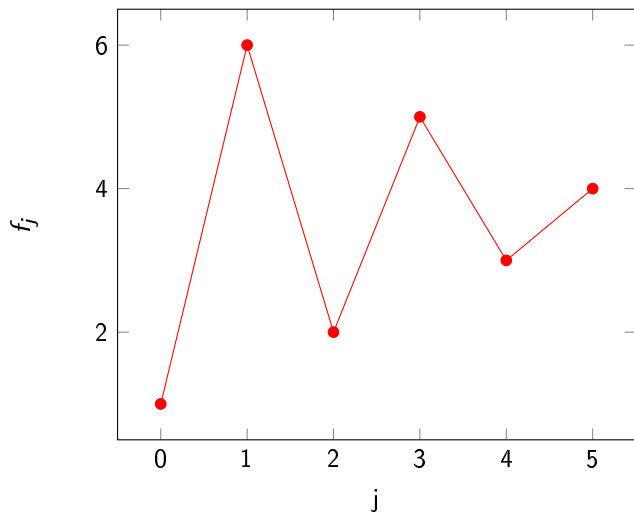
$$f_1 = 6$$

$$f_2 = 2$$

$$f_3 = 5$$

$$f_4 = 3$$

$$f_5 = 4$$



## Пример спектра (код)

Создадим вектор из чисел, которые описывают спектр исходной функции.

```
std::vector<Complex> f2s(const std::vector<Complex> &f)
{
    std::vector<Complex> c;
    int n = f.size();
    c.resize(n);
    for (int k = 0; k < n; ++k) {
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            c[k] += f[j] ^ ((- 2 * M_PI * k * j) / n);
        c[k] = c[k] / n;
    }
    return c;
}

...
std::vector<Complex> spectr = f2s(function);
```



# Пример спектра

Спектр:

$$c_0 = 3.5$$

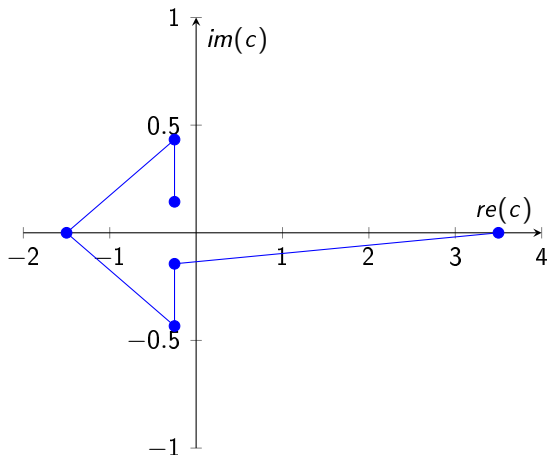
$$c_1 = -0.25 - 0.144i$$

$$c_2 = -0.25 - 0.433i$$

$$c_3 = -1.5$$

$$c_4 = -0.25 + 0.433i$$

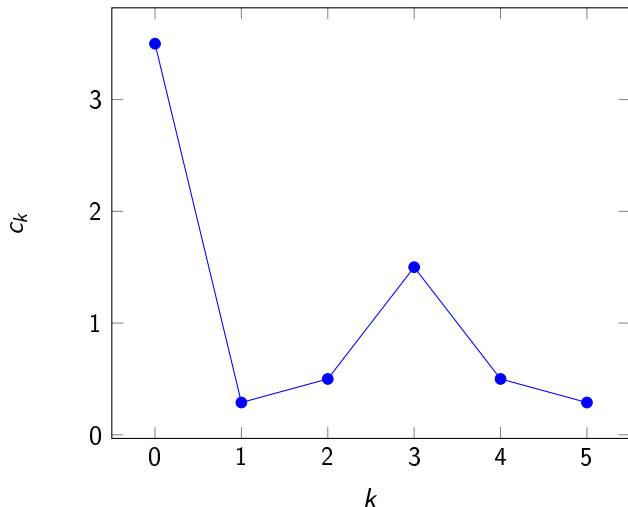
$$c_5 = -0.25 + 0.144i$$



# Пример спектра

Амплитуды спек-  
тра:

$$\begin{aligned}|c_0| &= 3.5 \\ |c_1| &= 0.289 \\ |c_2| &= 0.5 \\ |c_3| &= 1.5 \\ |c_4| &= 0.5 \\ |c_5| &= 0.289\end{aligned}$$



## Пример восстановленной функции (код)

Создадим вектор из чисел, которые описывают спектр исходной функции.

```
std::vector<Complex> s2f(const std::vector<Complex> &c)
{
    std::vector<Complex> f;
    int n = c.size();
    f.resize(n);
    for (int j = 0; j < n; ++j)
        for (int k = 0; k < n; ++k)
            f[j] += c[k] ^ ((2 * M_PI * k * j) / n);
    return f;
}

...
std::vector<Complex> function_answer = s2f(spectr );
```

# Скачиваем WAV файл

BBC выложил более 16 000 звуковых эффектов в бесплатный доступ для образовательных целей:

<http://bbcsfx.acropolis.org.uk/>

Для примера выберем в категории Telephones «Touch tone phone - quick dial 7 digits.» на 7 секунд.

<http://bbcsfx.acropolis.org.uk/assets/07070057.wav>

# Скачиваем WAV файл

Для начала посмотрим свойства файла в терминале:

```
file 07070057.wav
```

Получим:

```
07070057.wav: RIFF (little-endian) data, WAVE audio,  
Microsoft PCM, 16 bit, stereo 44100 Hz
```

Здесь есть полезная информация: битность 16 и частота дискретизации 44100.

# Работа с бинарными файлами на C++.

Данные в файле записаны в бинарном виде. Считаем всё побайтово.  
Конструктор итератора с потоком

```
std::istreambuf_iterator<char>(input)
```

создает указатель на начало данных в потоке.  
Конструктор по умолчанию

```
std::istreambuf_iterator<char>()
```

создает указатель на «конец файла».

```
std::ifstream input("07070057.wav", std::ios::binary);  
std::istreambuf_iterator<char> start(input);  
std::istreambuf_iterator<char> end;  
std::vector<char> buf(start, end);
```

# Извлекаем данные из WAV файла

Подробнее про формат

<https://audiocoding.ru/article/2008/05/22/wav-file-structure.html>

Первая секция находится на 36 байте. Каждая секция состоит из 4-символьного имени (4 байта), размера  $n$  для данных (4 байта) и самих данных ( $n$  байт).

```
std::string chunk_name(buf.begin() + chunk_start,
                       buf.begin() + chunk_start + 4);
chunk_start += 4;

int chunk_size = *(int*)(buf.data() + chunk_start);
chunk_start += 4;
```

# Извлекаем данные из WAV файла

Если имя секции отлично от «data», то пропустим эту секцию (сдвинемся на  $(8 + \text{chunk\_size})$ ).

```
while (chunk_name != "data") {  
    chunk_start += chunk_size;  
    chunk_name = std::string(buf.begin() + chunk_start,  
                             buf.begin() + chunk_start + 4);  
    chunk_start += 4;  
    chunk_size = *(int*)(buf.data() + chunk_start);  
    chunk_start += 4;  
}
```

Например, в приведённом файле 07070057.wav целых 3 секции с метаданными (то есть не относятся к звуку):

name	start	size
sav1	44	42
bext	94	642
pad	744	16
data	768	1159536



# Извлекаем данные из WAV файла

Битность файла 16. Поэтому каждая амплитуда кодируется 2 байтами (тип short):

```
*(short *) (buf.data() + i)
```

Так как файл 07070057.wav стерео, то есть смысл работать с каждым каналом отдельно. Поэтому заберем только четные амплитуды сигнала.

```
std::vector<Complex> function;  
for (int i = 0; i < chunk_size; i+=4) {  
    short value = *(short *) (buf.data() + i);  
    function.push_back(value);  
}
```

Всего получилось 289 884 амплитуды. Учитывая дискретизацию в 44 100 Гц, можно получить длительность записи: 6.573 секунды.

# Смотрим на звук из WAV файла

Поскольку звук начинается не сразу, то все начальные значения амплитуд почти не отличаются от 0. Выведем 4410 амплитуд начиная с 5000-й:

```
std::vector<Complex> function = parse(buf);  
int shift = 5000, size = 4410;  
std::vector<Complex> function_part(  
    function.begin() + shift,  
    function.begin() + shift + size  
);
```

Результат отправим в файл

```
std::ofstream file_function;  
file_function.open("f.txt");  
for (int i = 0; i < size; i++)  
    file_function << i + shift << '␣'  
                << function_part[i].re() << '\n';  
file_function.close();
```

# Смотрим на звук из WAV файла

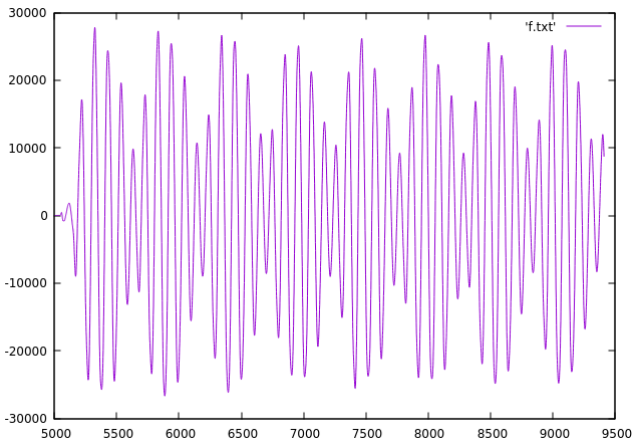
Посмотрим на график из них

```
gnuplot -p -e "plot 'f.txt' with lines"
```

Суффикс `-p` разрешает создание отдельного окна, `-e` выполняет команды `gnuplot` из строки. Команда `plot` строит данные из файла. Параметры `with lines` задают соединение точек.

# Смотрим на звук из WAV файла

Частота дискретизации 44100 означает, что на 1 секунду приходится 44100 амплитуд. То есть данная картинка показывает звук длительностью чуть более 0.1 секунды.



# Смотрим на звук из WAV файла

Вычислим спектр и для такого отрезка.

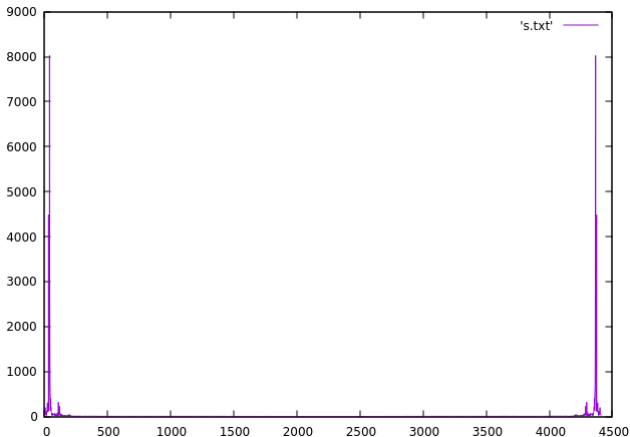
```
std::vector<Complex>   spectr = f2s(function_part);

std::ofstream file_spectr;
file_spectr.open ("s.txt");
for (int i = 0; i < size; i++)
    file_spectr << i << ' ' << spectr[i].amp() << '\n';
file_spectr.close();
```

Обратите внимание, что выводятся модули комплексных чисел!!!

# Смотрим на звук из WAV файла

Явно выбивается одна частота

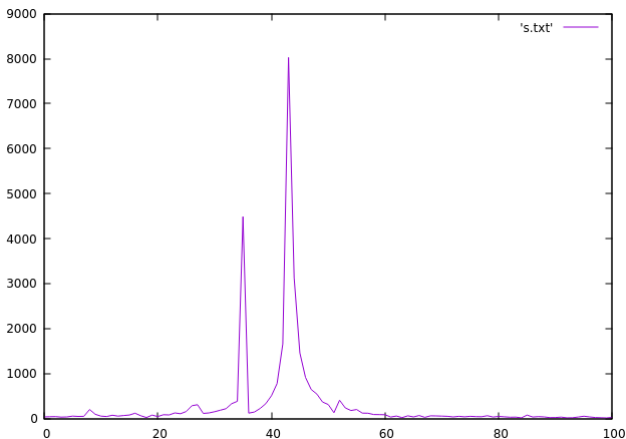


Рассмотрим поближе

```
gnuplot -p -e "plot[0:100] 's.txt' with lines"
```

# Смотрим на звук из WAV файла

Примерно 41-й коэффициенты Фурье из 1000.



На 1000 коэффициентов приходится диапазон в 44100 Гц. Значит, шаг дискретизации по частотам —  $44100/44100 = 10$  Гц. То есть в данном сегменте явно превалирует звук частота звука 440 Гц.

# Смотрим на звук из WAV файла

Подпишем корректно ось времени

```
for (int i = 0; i < size; i++) {  
    double time = (i + shift) / 44100.0;  
    file_function << time << '␣'  
                << function_part[i].re() << '\n';  
}
```

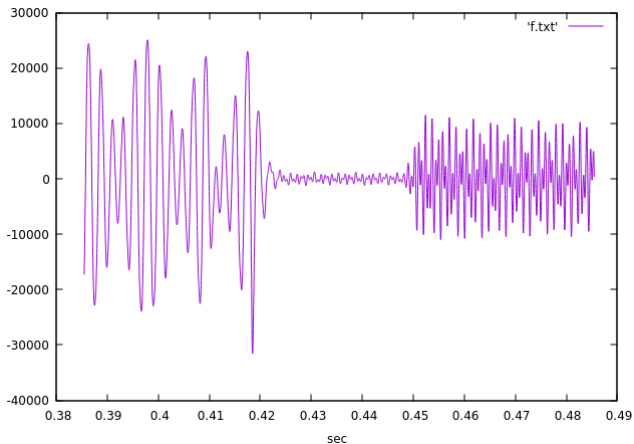
Подпишем корректно ось частот

```
for (int i = 0; i < size; i++) {  
    double frequency = 44100.0 / size * i ;  
    file_spectr << frequency << '␣'  
                << spectr[i].amp() << '\n';  
}
```



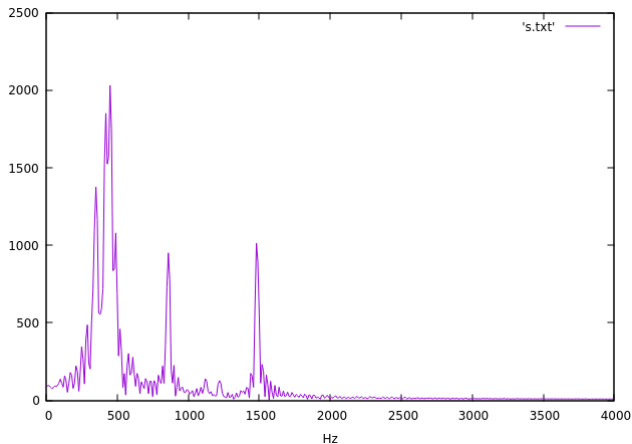
# Смотрим на звук из WAV файла

Аналогичные картинки для старта на 1700-й амплитуде и длительностью 4410 амплитуд



Переключается звук.

# Смотрим на звук из WAV файла



Смешивается частота 410 Гц и 1500 Гц.