Вступительный экзамен по математике — 2017

Вариант 2

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{5} \cdot \sqrt{39}$ и $\frac{15-2{,}6}{2-1{,}2}$.

2. Решите уравнение $|x^2 - 15x + 56| = 15x - 52 - x^2$.

3. В 10 коробках с номерами от 1 до 10 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{5}{4}$ раз больше, чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 20%, а в третьей — 40% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

4. Решите уравнение
$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} \cdot x^{\log_y x} = x, \\ \left(\log_2 x^3\right) \cdot \log_x (5x - 6y) = 9 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AD = 24$, $BC = 13$. Окружность с центром на стороне AD касается сторон AB, BC и CD. Найдите длины сторон AB и CD.

7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство
$$11 + \cos^2 x > 3a^2 + 5a - (4a - 1)\sin x$$
выполняется для всех x.

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как $7 : 25$. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.