Открытая олимпиада по программированию
Зимний тур 2013
11 декабря 2013

A. A

Предложил: *Баев А.Ж.*

Ограничение на длину входной строки позволяют написать наивное решение.
Асимптотика: $O(n)$.

B. Beautiful tree

Предложил: *Баев А.Ж.*

Запустив обход в глубину из вершины 1, построим компоненту связности. Если в компоненте будет менее n вершин или $m \neq n-1$, то граф не является деревом. В противном случае, выведем все вершины степени 1 за исключением корня (в случае, если это тоже вершина степени 1).
Асимптотика: $O(n^2)$.

C. Cube

Автор: *Баев А.Ж.*

Если $a^3 = k = b^2$, то k — это шестая степень некоторого числа. Обозначим n_2, n_3 и n_6 —количество квадратов, кубов и шестых степеней на отрезке $[1; n]$ соответственно, которые можно найти перебором за $O(\sqrt{n})$. Имеется $(n - n_2) \cdot (n - n_3)$ различных пар чисел, которые могут загадать ребята. При этом $(n - n_6)$ — количество подходящих пар. Вероятность того, что ребята загадают одну и ту же пару равно:

$$\frac{n - n_6}{(n - n_2)(n - n_3)}.$$

Асимптотика: $O(\sqrt{n})$.

D. Difficult geometry

Автор: *Баев А.Ж.*

Обозначим вершины исходного треугольника A, B, C. Тогда, траектория будет представлять собой подобный ему треугольник A_1, B_1, C_1. Центр вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности равноудален от сторон треугольника ABC, поэтому является центром гомотетии этих треугольников. Радиус вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности меньше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности на величину R. То есть радиус вписанной в ABC окружности равен $r = \frac{S}{p}$, а радиус вписанной в $A_1B_1C_1$ окружности равен $r_1 = r - R$. Если $r_1 < 0$, то решения нет, иначе ответ $(a + b + c)\frac{r-R}{r}$.
Асимптотика: $O(1)$.

E. Easy number

Предложил: *Баев А.Ж.*

Посчитаем количество решений уравнения $xy = n$, где $x = a-b$, $y = a+b$. Пусть $n = 2^s p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, где $s \geqslant 0$, $k_i > 0$. Данное разложение можно сделать стандартным перебором минимальных делителей за $O(\sqrt{n})$. Каждый из делителей p_1, ... p_k может быть либо множителем x, либо множителем y. Общее количество вариантов $(k_1 + 1) \ldots (k_m + 1)$. Так как $a - b$ и $a + b$ должны быть одной четности, то в разложении x и y на простые должно содержать как минимум по одной двойке (или не быть вообще двоек). Оставшиеся двойки раскладываются $s-1$ способом. С учетом знаков x и y (могут быть оба отрицательными или оба положительными), ответ:

$$\begin{cases} 2(s-1)(k_1+1)...(k_m+1), \text{ если } s \geqslant 1 \\ 2(k_1+1)...(k_m+1), \text{ если } s < 1 \end{cases}$$

Асимптотика: $O(\sqrt{n})$.

F. Friends

Предложил: Баев А.Ж.

Количество магнитов должно делиться на все числа от 1 до n, то есть ответом должен быть наибольший общий делитель 1, 2, ..., n, который можно найти вычислить алгоритмом Евклида, примененный $n-1$ раз.

Асимптотика: $O(n \log n)$.

G. Game

Предложил: Баев А.Ж.

Пусть $d[i] = 1$ — выигрышная позиция (то есть при правильной игре из i брусков выигрывает начинающий) и $d[i] = 0$ — проигрышная позиция (то есть при правильной игре выигрывает продолжающий). Определим $d[i]$ рекуррентно. Если среди $d[i-1]$, $d[i-2]$ и $d[i/2]$, есть хотя бы одна проигрышная позиция, то $d[i]$ — выигрышная позиция. Если среди $d[i-1]$, $d[i-2]$ и $d[i/2]$ все позиции выигрышные, то $d[i]$ — проигрышная позиция. Начальные позиции: $d[1]$ — выигрышная, $d[2]$ — проигрышная.

Асимптотика: $O(n)$.

H. Hypnoses

Автор: Баев А.Ж.

Напишем уравнения траекторий движения для всех машин: $x_i + v_i t$. Пусть k — номер машины, за которой сейчас следит Надира, а d — текущее время. Найдем времена t_{ik} и точки пересечения k-й траектории со всеми остальными траекториями i: $x_k + v_k t_{ik} = x_i + v_i t_{ik}$. Из всех t_{ik} выберем минимальное, которое больше d, но меньше t. Если такое значение есть, то соответствующий номер машины возьмем в качестве следующего k, иначе выведем ответ $x_k + v_k t$. Отдельно стоит найти первую траекторию. Стоит отметить, что каждая траектория будет встречаться не более 1 раза.

Асимптотика: $O(n^2)$.