

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
19 декабря 2017

1. Привести пример вещественной матрицы  $A$  такой, что  $A^4 = I$ , но при этом  $A^2 \neq \pm I$ , где  $I$  — единичная матрица.
2. Существует ли такая расходящаяся числовая последовательность  $\{x_n\}$ , что при любом натуральном  $k > 1$  её подпоследовательность  $\{x_{kn}\}$  сходится?

3. Вычислите

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2k} + 2017}{2018^x + 1} dx,$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ .

4. Найдите все непрерывные функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что

$$f(x) + f\left(3 - \frac{9}{x}\right) = x - \frac{9}{x}$$

для всех  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ .

5. К параболе проведены две касательные  $l_a$  и  $l_b$  в точках  $A$  и  $B$ . Точка  $C$  симметрична точке  $A$  относительно  $l_b$ , а точка  $D$  симметрична точке  $B$  относительно  $l_a$ . Докажите, что точки  $A, B, C$  и  $D$  образуют ромб тогда и только тогда, когда  $AB$  проходит через фокус параболы.

*Можно использовать оптическое свойство параболы без доказательства.*

6. Найдите все такие натуральные  $n$ , при которых

$$C_n^0 \cdot C_n^1 \cdot \dots \cdot C_n^n$$

является точным квадратом.

Здесь  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  — биномиальный коэффициент.

7. Докажите сходимость последовательности  $\{a_n\}$ , где

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + \sin a_n, \end{cases}$$

и найдите её предел.

8. Функция  $F(n, k)$ , определённая для всех целых неотрицательных  $n$  и  $k$ , удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} F(n, k) = F(n-1, k) + F(n, k-1), & n \geq 1, k \geq 1, \\ F(n, 0) = 1, & n \geq 0, \\ F(0, k) = 2F(0, k-1) + 1, & k \geq 1. \end{cases}$$

Вычислите  $F(n, n)$ .