

Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
19 декабря 2015

1. a_n, b_n, x_n, y_n — четыре арифметические прогрессии. Известно, что $a_nb_n = x_ny_n$ для трёх различных натуральных n . Доказать, что $a_nb_n = x_ny_n$ для всех натуральных n .
2. Пусть $f(n)$ — вещественнозначная функция, определённая на множестве натуральных чисел и удовлетворяющая следующему условию: для любого $n > 1$ существует такой его простой делитель p , что $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$. Известно, что $f(2015) = 2015$. Найдите $f(2016)$.
3. Найдите все дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:
 - а) $f'(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{Z}$;
 - б) если для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f'(x_0) = 0$, то для него справедливо также равенство $f(x_0) = 0$.
4. На параболе выбраны 4 точки: A_1, A_2, A_3 и A_4 . Через эти точки к параболе проведены 4 касательные l_1, l_2, l_3 и l_4 соответственно. l_1 пересекает l_2 в точке M . l_3 пересекает l_4 в точке N . Докажите, что MN, A_1A_3 и A_2A_4 пересекаются в одной точке.
5. Решить в вещественных числах уравнение

$$4x + 2\sin x + \sin(2x + \sin x) + 12\pi = 0.$$

6. Дано n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n , при этом все они не превосходят n . Доказать, что существует непустое подмножество $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ такое, что множества P и $\{a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_n}\}$ совпадают.
7. Найдите все матрицы A , которые обладают следующими свойствами:
 - а) имеет всего одно собственное значение (без учёта кратности);
 - б) ранг равен 1;
 - в) след равен 1.