

Тренировочная студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
15 марта 2014

1. Вычислить произведение двух чисел с помощью операций сложения, вычитания, возведения в квадрат и взятия обратного числа. Возможностью обращения знаменателя в 0 пренебречь.
2. Пусть α, β, γ — три различных корня уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Вычислите:

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

3. Найти максимальное значение определителя третьего порядка, у которого 2 элемента равны 4, а остальные 1 или -1.
4. Решите в комплексных числах систему:

$$\begin{cases} \sqrt{3}z^{11} - z^{10} - 1 = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}.$$

6. Из точки P к параболе с фокусом F провели две касательные PX и PY . Докажите, что:

$$FP^2 = FX \cdot FY.$$

7. Обозначим $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет решений. Докажите, что последовательность $a_n = \min_{n} \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_n$ — возрастающая.

8. Даны натуральные числа m, n такие, что $m^2 - 2n^2 = 1$, и даны функции:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(x), \\ f_2(x) &= \operatorname{ctg}(x), \\ f_3(x) &= \operatorname{arctg}(x). \end{aligned}$$

Докажите, что существует композиция $H(x)$ из указанных функций (некоторые функции могут быть использованы несколько раз, а некоторые ни разу) такая, что $H(1) = \frac{m}{n}$.

9. Пусть $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n$ — возрастающая последовательность всех простых чисел, не превосходящих 2^{100} . Докажите, что:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 10.$$