

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
12 декабря 2010

1. Композиция непрерывных функций является непрерывной функцией. Композиция сюръективных функций — сюръективной. Значит,  $h_1(x) = f(g(x))$  и  $h_2(x) = g(f(x))$  — непрерывные сюръективные функции. Из сюръективности  $h_1(x)$  и  $h_2(x)$  следует, что существуют такая точка  $x_1$ , что  $h_1(x_1) = 1$ , и существует такая точка  $x_2$ , что  $h_2(x_2) = 1$ . Значит для функции  $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$  верно, что  $h(x_1) \geq 0$  и  $h(x_2) \leq 0$ . По теореме Вейерштрасса, существует такая точка, что  $h(x_0) = 0$ , что и требовалось.

2. Ответ:

$$\begin{aligned} & \sin(1) + \sin(1) \sum_{k=1}^{\infty} \left( (-1)^k \prod_{s=0}^{2k-1} (r-s) \right) + \\ & + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \left( (-1)^k \prod_{s=0}^{2k} (r-s) \right) - r \pmod{2}. \end{aligned}$$

Сумма под пределом является суммой Дарбу для функции  $x^r \cos x$  на отрезке  $[0; 1]$  при равномерном разбиении:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^r \cos \frac{k}{n} = \int_0^1 x^r \cos(x) dx = I_r,$$

где  $I_r$  находятся стандартным интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} I_r &= \int_0^1 x^r \cos x dx = \int_0^1 x^r d(\sin x) = \\ &= \sin(1) + r \int_0^1 x^{r-1} d(\cos x) = \\ &= \sin(1) + r \cos(1) - r(r-1)I_{r-2}. \end{aligned}$$

После замены  $J_r = \frac{I_r}{r!}$  получается простое рекуррентное соотношение:

$$J_r = \frac{1}{r!} \sin(1) + \frac{1}{(r-1)!} \cos(1) - J_{r-2},$$

которое позволяет выписать в явном виде  $I_r$  при четном и нечетном  $r$ .

3. Рассмотрим степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ . Поскольку он сходится в точке  $x = 1$ , то, по второй теореме Абеля, он сходится равномерно на  $[0, 1]$ . Следовательно, предельная функция непрерывна на  $[0; 1]$ . Отсюда следует утверждение задачи.
4. Сначала докажем, что если неравенство верно для  $n$ , то оно верно и для  $2n$ . Для этого достаточно применить неравенство для  $n$  точек:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \dots, \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}.$$

Методом математической индукции получается неравенство для всех  $n = 2^k$ .

Далее докажем, что если неравенство верно для  $n$ , то оно верно и для  $n-1$ . Для этого достаточно применить неравенство для  $n$  точек:

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

С учетом первой части, получаем, что неравенство верно для всех  $n$ .

5. Натуральное число  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  имеет в точности  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$  делителей. По условию задачи это число простое. Значит, без ограничения общности,  $\alpha_1 = p-1$ , а все остальные  $\alpha_i = 0$ . То есть  $a = q^{p-1}$ . Если  $q = p$ , то  $a(a^k - 1)$  делится на  $p$  явно. Если  $q \neq p$ , то  $(p, q) = 1$  и можно применить малую теорему Ферма:  $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Значит,  $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ .

6. Легко заметить, что следы произведений матриц  $AB$  и  $BA$  всегда совпадают:

$$\mathbf{tr}AB = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij}b_{ji} = \sum_j (BA)_{jj} = \mathbf{tr}BA.$$

Матриц, удовлетворяющих условию, не существует, так как след матрицы слева равен 0, а след матрицы справа равен размерности матрицы.

7. Ответ:  $-1$ . Данный ряд сходится условно. Значит, последовательность  $S_N^+ + S_N^-$  сходится к некоторой константе, а  $S_N^+ - S_N^-$  к  $+\infty$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N^+ + S_N^-) = C$$

Так как,  $S_N^-$  стремится к  $-\infty$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N^+}{S_N^-} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C - S_N^-}{S_N^-} = -1.$$

8. Предлагаем решить эту задачу самостоятельно. И не забудьте прислать решение авторам пособия.