Введение в численные методы. Итерационные методы решения СЛАУ

Баев А.Ж.

Казахстанский филиал МГУ

15 февраля 2020

План на семестр

1. СЛАУ (точные методы)
2. **СЛАУ (итерационные методы)**
3. решение нелинейных уравнений
4. интерполяция
5. аппроксимация
6. интегрирование
7. дифференцирование

Линейная алгебра

Решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = f$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$.
Дано A, f. Найти x.

Каноническая форма

x_0 — задается произвольным образом.

$$B\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}+Ax_k=f$$

где A — исходная матрица, B — невырожденная матрица, зависящая от метода, τ — итерационный параметр.

x_k сходится к решению.

Каноническая форма

$$Bx_{k+1} = Bx_k - \tau Ax_k + f\tau$$

где A — исходная матрица, B — невырожденная матрица, зависящая от метода, τ — итерационный параметр.

Необходимо выбирать B такую, что её можно обратить быстрее, чем матрицу A.

Определения

A^* — сопряженный к A оператор, если $(Ax, y) = (x, A^* y)$.

A — самосопряженный оператор, если $A = A^*$.
Свойство: все собственные значения самосопряженного оператора вещественны и существует базис из собственных векторов.

A — положительно определённый оператор, если $(Ax, x) > 0$ для всех $x \neq 0$.
Свойство: все собственные значения положительно определённого самосопряжённого оператора вещественны и положительны.

Вспомогательные свойства

Theorem (1)

Для любого самосопряженного положительно определенного оператора A справедлива оценка

$$\gamma_1 \cdot ||x||_2^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant \gamma_2 \cdot ||x||_2^2$$

где γ_1, γ_2 — наименьшее и наибольшее собственные значения оператора.

Доказательство.

Разложим произвольный вектор в базис из собственных векторов:

$$x = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \ldots + c_n\vec{e}_n$$

$$||x||_2 = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2$$

$$(Ax, x) = \lambda c_1^2 + \lambda c_2^2 + \ldots + \lambda c_n^2$$

Вспомогательные свойства

Theorem (2)

Для любого положительно определенного оператора A существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\delta_1 \cdot ||x||_2^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant \delta_2 \cdot ||x||_2^2$$

Доказательство.

Если $A = A^*$, то $\delta = \gamma_1$. В противном случае введём самосопряжённый оператор:

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2} > 0$$

Тогда

$$(Ax, x) = (A^*x, x) = \frac{1}{2}((Ax, x) + (A^*x, x)) = (A_1 x, x)$$

Энергетическая норма

Можно рассматривать энергетическую норму $||x||_A = (Ax, x)$, индуцированную оператором $A > 0$.

Получаем, что для последоветельности векторов z_k верно:

$$||z_k||_A \to 0 \Leftrightarrow ||z_k||_2 \to 0$$

Теорема Самарского

Theorem (Теорема Самарского)

Пусть A — самосопряженная положительно определенная матрица и

$$B > \frac{\tau}{2} A$$

Тогда при любом выборе начального приближения x_0 итерационный процесс, который определяется формулой

$$B \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + A x_k = f$$

сходится к решению системы $Ax = f$.

Теорема Самарского

Доказательство.

Пусть $x_k = x + z_k$, где x — точное решение, z_k — погрешность.

$$B\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = 0$$

$$z_{k+1} = z_k - \tau B^{-1}Az_k = (E - \tau B^{-1}A)z_k$$

Рассмотрим последовательность:

$$c_k = (Az_k, z_k)$$

Покажем, что:

1. $c_k > 0$;
2. $c_{k+1} < c_k$;
3. $c_k \to 0$.

$\square$

Теорема Самарского

.

1) По условию $A > 0$, значит $c_k = (Az_k, z_k) > 0$.
2) Монотонность:

$$c_{k+1} = (Az_{k+1}, z_{k+1}) = (Az_k - \tau AB^{-1}Az_k, z_k - \tau B^{-1}Az_k) =$$

$$= c_k - 2\tau(Az_k, B^{-1}Az_k) + \tau^2(AB^{-1}Az_k, B^{-1}Az_k)$$

Замена $\omega_k = B^{-1}Az_k$, то есть $B\omega_k = Az_k$

$$c_{k+1} = c_k - 2\tau(B\omega_k, \omega_k) + \tau^2(A\omega_k, \omega_k) = c_k - 2\tau\left((B - \frac{\tau}{2}A)\omega_k, \omega_k\right)$$

С учётом того, что $B - \frac{\tau}{2}A > 0$, получим, что $c_{k+1} < c_k$. $\square$

Теорема Самарского

.
3) Сходимость:

$$\left((B - \frac{\tau}{2}A)\omega_k, \omega_k\right) \to 0$$

Из эквивалентности энергетической нормы, индуцированной положительно определённым оператором $G = B - \frac{\tau}{2}A > 0$, и нормы $||\cdot||_2$:

$$(G\omega_k, \omega_k) \to 0 \Leftrightarrow (\omega_k, \omega_k) \to 0$$

получаем $||\omega_k||_2 \to 0$.
Оценим норму оператора

$$||x|| = ||H^{-1}Hx|| \leqslant ||H^{-1}|| \cdot ||Hx|| \Leftrightarrow ||Hx|| \geqslant \frac{||x||}{||H^{-1}||}$$

для $H = B^{-1}A$:

$$||\omega_k||_2 = ||B^{-1}Az_k||_2 \geqslant \frac{||z_k||_2}{||A^{-1}B||_2}$$