Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
10 декабря 2011

1. Назовем конечное числовое множество своеобразным, если оно содержит число, равное количеству его элементов, но никакое его собственное подмножество этим свойством не обладает. Определите количество своеобразных подмножеств множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 12\}$.

2. Определите множество значений функции, сопоставляющей каждому прямоугольному треугольнику отношение $\dfrac{h}{r}$, где h — высота, проведенная к гипотенузе, а r — радиус вписанной в треугольник окружности.

3. Две последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям:
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - \alpha y_n, \\ y_{n+1} = 2y_n - \dfrac{1}{\alpha} x_n \end{cases}$$
при всех $n \geqslant 0$, где $\alpha \neq 0$ — постоянная величина, а $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Найдите x_{2012} и y_{2012}.

4. Существует ли такая последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для неё справедливы соотношения:
$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{12k} = 20, \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{20k} = 12? \end{cases}$$

5. Найдите $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\sin^2 x) + \cos^2(\cos^2 x)\right)\, dx$.

6. Найдите $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}$.

7. Найдите все функции $f\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенству
$$(x-y)^2 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$$
для любых $x, y \in [0,\ 1]$.

8. Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ — все положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$, выписанные в порядке возрастания, $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что ряды $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\cos x_{n_k}|$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходятся или расходятся одновременно.

9. Квадратная матрица A порядка n состоит из чисел $+1$ и -1. При этом, в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы находится ровно одно число -1. Найдите $|\det A|$.

10. Пусть S — сумма всех обратимых элементов конечного ассоциативного кольца с единицей. Докажите, что $S^2 = 0$ или $S^2 = S$.