

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
19 декабря 2015

1. (Абдикалыков А.К.) Пусть  $z_n = a_nb_n - x_ny_n$ . Видно, что  $z_n$  можно представить в виде  $z_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$  для некоторых постоянных  $\alpha, \beta, \gamma$ . Но так как  $z_n$  обращается в ноль при трёх различных  $n$ , то  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , и  $z_n$  тождественно равно нулю.

2. Ответ: 12090. Положим  $n$  простым:  $f(n) = f(1) - f(n)$ . То есть

$$f(p) = \frac{1}{2}f(1)$$

для любого простого  $p$ .

Положим  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$  и обозначим

$$k(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s.$$

Несложно показать, что:

$$f(n) = \left(1 - \frac{k(n)}{2}\right) f(1).$$

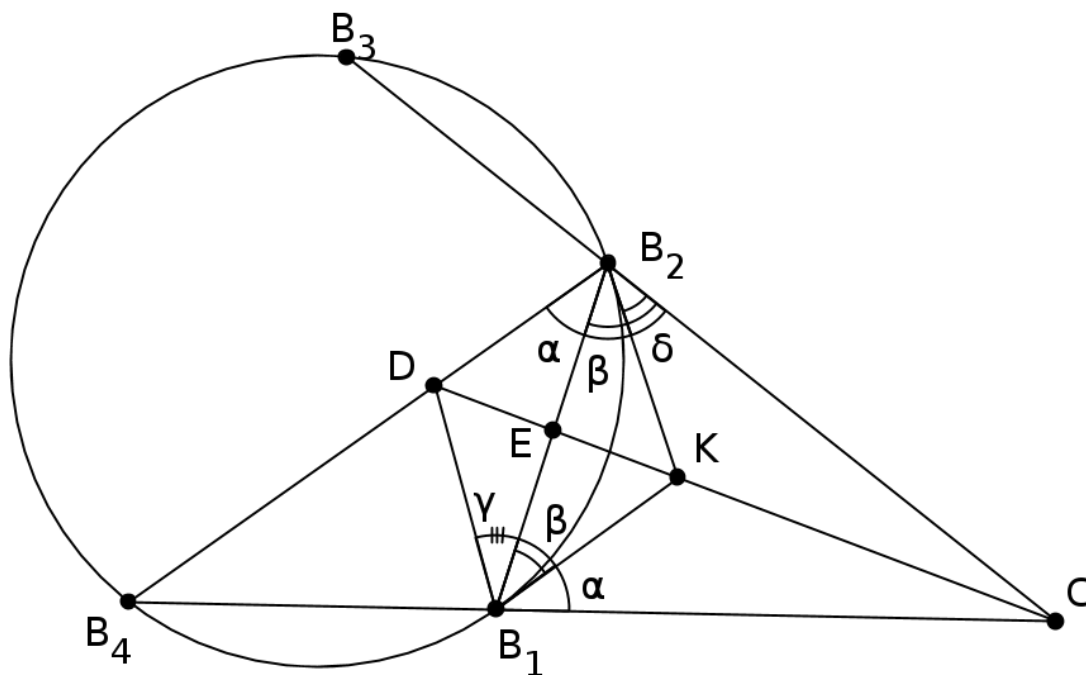
Имеем  $2015 = 5^1 \cdot 13^1 \cdot 31^1$  и  $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ . Соответственно  $k(2015) = 3$ ,  $k(2016) = 8$ .

3. Ответ:  $f(x) \equiv 0$ . Пусть  $n \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $f'(n) = f'(n+1) = 0$ , откуда  $f(n) = f(n+1) = 0$ . Докажем от противного, что  $f(x) = 0$  для всех  $x \in [n, n+1]$ . Пусть  $x_0 \in (n, n+1)$  и  $f(x_0) \neq 0$ , например,  $f(x_0) > 0$ . Т.к.  $f$  дифференцируема, то  $f$  — непрерывна на  $[n, n+1]$ . По теореме Вейерштрасса у нее существует максимум на  $[n, n+1]$ :

$$f(x_1) = \max_{[n, n+1]} f(x) > 0 \text{ и } x_1 \in (n, n+1).$$

По теореме Ферма имеем:  $f'(x_1) = 0$ , откуда  $f(x_1) = 0$  — противоречие.

4. Так как парабола является коническим сечением, то можно осуществить проективное преобразование с точкой в вершине соответствующего конуса, переводящее параболу в окружность. Дан вписанный четырехугольник  $B_1B_2B_3B_4$ . Касательные в  $B_1$  и  $B_2$  пересекаются в точке  $K$ , касательные в  $B_3$  и  $B_4$  в точке  $L$ . Осталось доказать, что  $KL$ ,  $B_1B_3$  и  $B_2B_4$  пересекаются в одной точке.



Пусть  $C$  — точка пересечения  $B_1B_4$  и  $B_2B_3$ .  $E$  и  $K$  — точки пересечения  $CK$  с  $B_1B_2$  и  $B_4B_2$ . Обозначим  $\angle DB_2E = \angle CB_1K = \alpha$ ,  $\angle EB_2K = \angle EB_1K = \beta$ ,  $\angle KB_2C = \delta$  и  $\angle DB_1B_2 = \gamma$ . Выпишем двойные отношения (по теоремам синусов) от вершин  $B_1$  и  $B_2$  соответственно:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} : \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{CK}{KE} : \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \beta} : \frac{\sin(\alpha + \beta + \delta)}{\sin \alpha} = \frac{CK}{KE} : \frac{CD}{DE}$$

Откуда получаем  $\delta = \gamma$ , то есть  $D$  — точка пересечения диагоналей. Аналогично доказывается, что  $D$  лежит на  $CL$ . Итог:  $KL$  проходит через точку пересечения диагоналей.

5. (Абдикалыков А.К.) Ответ:  $-3\pi$ .

Очевидно, что  $x = -3\pi$  является одним из решений. Введём функцию  $f(x) = 2x + \sin x$ . Тогда данное уравнение можно переписать в виде  $f(f(x)) = -12\pi$ . Поскольку функция  $f(x)$  (а значит, и функция  $f(f(x))$  вместе с ней) является возрастающей, то это уравнение не может иметь больше одного корня.

6. Каждому числу  $a_j$  сопоставим ребро, соединяющее вершины графа с номерами  $j$  и  $a_j$ . Полученный мультиграф имеет  $n$  вершин и  $n$  рёбер, и, следовательно, обязан содержать цикл. Номера вершин, входящих в любой из циклов, формируют требуемое подмножество  $P$ .

7. (Абдикалыков А.К.) Ответ: (1) — матрица порядка 1. Если порядок матрицы  $n > 1$ , то из  $\text{rg } A = 1$  следует вырожденность матрицы  $A$ , что, в свою очередь влечёт присутствие собственного значения 0. Так как след равен сумме всех собственных значений, то  $\text{tr } A = 0$  — противоречие. Удовлетворять всем условиям задачи может только матрица первого порядка, единственный элемент которой равен 1.