

Вступительный экзамен по математике — 2017

*Вариант 1*

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{85}$  и  $\frac{14-1,7}{3-2,3}$ .
2. Решите уравнение  $|x^2 - 14x + 48| = 14x - 42 - x^2$ .
3. В 9 коробках с номерами от 1 до 9 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в  $\frac{7}{6}$  раз больше, чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 25%, а в третьей — 50% от числа всех шаров в данной коробке. Найти отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.
4. Решите уравнение

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \frac{y^2}{x}, \\ (\log_3 x^2) \cdot \log_x \left(2x - \frac{3}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ,  $AD = 21$ ,  $BC = 40$ . Окружность с центром на стороне  $BC$  касается сторон  $AB$ ,  $AD$  и  $CD$ . Найдите длины сторон  $AB$  и  $CD$ .
7. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство

$$13 + \sin^2 x > 3a^2 - a + (4a - 5) \cos x$$

выполняется для всех  $x$ .

8. В правильную четырехугольную пирамиду  $SABCD$  ( $S$  — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро  $AB$  проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает четырехугольник  $ABMN$ . Объемы пирамид  $SABMN$  и  $SABCD$  относятся как  $5 : 9$ . Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.