XI Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математика»
18 апреля 2019

1. Найдите сумму ряда
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+1}{n(n-1)}.$$

2. Решите уравнение
$$x^y = x + y$$
в положительных рациональных числах.

3. Пусть f — интегрируемая по Риману на отрезке $[0,1]$ функция. Введём обозначение
$$\mathcal{M}(f) = \operatorname*{Arg\,min}_{\lambda\in\mathbb{R}} \int\limits_0^1 |f(x)-\lambda|\,dx.$$
   а) Докажите, что множество $\mathcal{M}(f)$ не пустое.
   б) Приведите пример такой функции f, что множество $\mathcal{M}(f)$ не одноэлементно.
   в) Докажите, что если функция f монотонная, то $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{M}(f)$.
   г) Приведите пример такой функции f, что $f\left(\frac{1}{2}\right) \notin \mathcal{M}(f)$.

   Примечание: $\operatorname*{Arg\,min}_{\lambda\in S} g(\lambda) = \left\{\mu \in S \colon g(\mu) = \inf\limits_{\lambda\in S} g(\lambda)\right\}$.

4. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ такая, что $|A^2 + A + 2019E| = 0$. Докажите, что $A^2 + A + 2019E = O$, где E — единичная матрица 2×2, а O — нулевая матрица 2×2.

5. Дан эллипс с фокусами A и B и точка C вне эллипса. Из точки C провели касательные к эллипсу l_1 и l_2, которые образуют угол α. Точки A_1 и A_2 — точки, симметричные A относительно касательных, B_1 и B_2 — точки, симметричные B относительно касательных. Вычислите
$$\frac{A_1A_2^2 + B_1B_2^2}{CA^2 + CB^2},$$
если
   а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$;
   б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6. Докажите, что система линейных уравнений с целыми коэффицентами разрешима в целых числах тогда и только тогда, когда она разрешима по любому модулю.