Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
для непрофильных специальностей
8 декабря 2018

1.
$$\begin{vmatrix} 2019 & 2018 & 2018 \\ 2018 & 2019 & 2018 \\ 2018 & 2018 & 2019 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2019 & 2018 & 2018 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6055 & 2018 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6055$$

2. Пусть $y = z = 1$. Тогда получим числа вида $x + 2$. То есть любое число n начиная с 3 можно представить в таком виде, кроме $x = n - 2, y = 1, z = 1$. Числа 1 и 2 представить нельзя, так как $x^y \geqslant 1$, $y^z \geqslant 1$ $z^x \geqslant 1$.

   Ответ: $n \geqslant 3$.

3. Сумма бесконечной геометрической прогрессии
$$\sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \ldots}}}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots} = 5$$

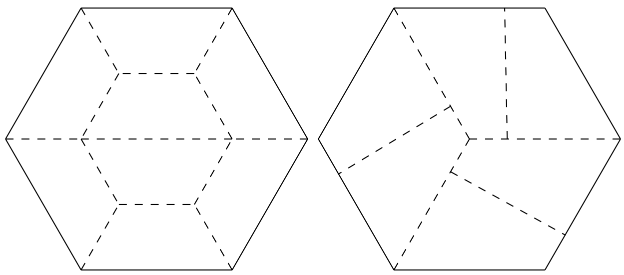
4. Заметим, что функция $f(x) = e^{\sin x} - e^{-\sin x}$ является нечетной, то есть
$$f(-x) = e^{\sin -x} - e^{-\sin -x} = e^{-\sin x} - e^{\sin x} = -f(x)$$

   А функция $g(x) = e^{\cos x} - e^{-\cos x}$ является четной, то есть
$$g(-x) = e^{\cos -x} - e^{-\cos -x} = e^{\cos x} - e^{-\cos x} = g(x)$$

   Их произведение $f(x)g(x)$ является нечетной функцией. Значит интеграл по симметричному интервалу $[-2018; 2018]$ равен нулю.

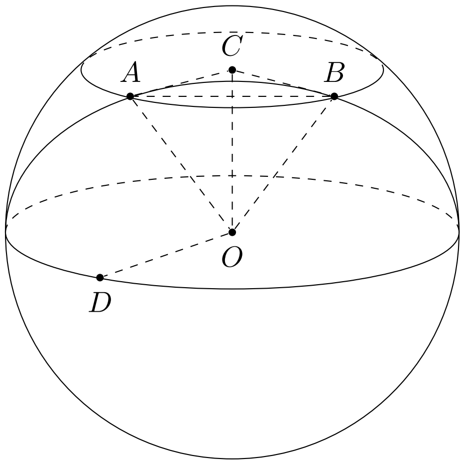
   Ответ: 0.

5. Примеры



6. Во–первых, так как расстояние между A и B по общей параллели равно четверти длины этой параллели, то $\angle ACB = \angle ACO = \angle BCO = 90°$.

   Во–вторых, так как кратчайшее расстояние между A и B по общей параллели равно $frac16$ длины экватора, то $\angle AOB = 60°$. Таким образом, AOB — равносторонний треугольник.



Из полученных утверждений имеем, что $CA = CB = CO$. Значит, $\angle AOC = \frac{\pi}{4} = \angle AOD$. То есть расстояние от параллели до экватора ровно $\frac{1}{8}$ длины экватора.

7.
$$k(r)\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-rt} dt = 1$$

Интегрируем по частям:

$$\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-rt} dt = -\frac{1}{r}\int_0^{+\infty} t \cdot de^{-rt} = -\left.\frac{t \cdot e^{-rt}}{r}\right|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{r}\int_0^{+\infty} e^{-rt} \cdot dt =$$

$$= -\left.\frac{t \cdot e^{-rt}}{r}\right|_{t=0}^{t=+\infty} - \left.\frac{e^{-rt}}{r^2}\right|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{r^2}$$

Значит $k(r) = r^2$. График — парабола.