Открытая олимпиада по программированию
Весенний тур 2016
30 апреля 2016

A. Alexandra's subtractions

Автор: Абдикалыков А.К.

Вторая максимальная разность равна: $d_2 = \max(a_n - a_2, a_{n-1} - a_1)$.
Асимптотика: $O(n)$.
Замечание: прямой перебор $O(n^2)$ не проходит по ограничениям времени.

B. Book of all the words

Автор: Абдикалыков А.К.

Перевести число $(k-1)$ в n-ричную систему счисления.
Асимптотика: $O(m)$.
Замечание: прямой перебор $O(n^m)$ не проходит по ограничениям времени.

C. Change the word

Автор: Баев А.Ж.

Если запретить операцию изменения букв строки на симметричные, то ответ будет:

$$f(s_1, s_2) = len(s_1) + len(s_2) - 2 * len(lcs(s_1, s_2)),$$

где $len(a)$ — длина строки a, $lcs(a, b)$ — наибольшая общая подстрока строк a и b (считается динамическим программированием за $O(len(a) * len(b))$.

Если вернуть операцию изменения строк, то ясно, что она применяется не более одного раза. Тогда ответ на задачу:

$$\max\left(f(s_1, s_2), f(s_1, \overline{s}_2) + 1\right),$$

где $\overline{s}$ — строка, полученная из строки s заменой всех букв на симметричные.
Асимптотика: $O(len(s_1)len(s_2))$.

D. Doubtful numbers

Автор: Абдикалыков А.К.

Легко понять, что подходят только числа вида pq, где p и q — различные простые числа. Обозначим через $z(n)$ — количество чисел такого вида среди чисел от 1 до n (тогда ответ вычисляется как $z(b) - z(a-1)$). Фиксируем простое p. Подходящих чисел вида pq, где $p < q$ и $pq \leq n$ будет: $\pi\left(\left[\frac{n}{p}\right]\right) - \pi(p)$. Заметим, что перебирать данные p достаточно до $\sqrt{n}$:

$$z(n) = \sum_{p \leq \sqrt{n}}^{n} \pi\left(\left[\frac{n}{p}\right]\right) - \pi(p)$$

.

Решение состоит из 3 частей: построение всех простых от 1 до n ($O(n \log\log n)$ — решето Эратосфена), просчет $\pi(k)$ за $O(n)$ действий и вычисление $z(n)$ за $O(\sqrt{n})$.

Вместо вычисления функции $pi(n)$ можно вычислить данную сумму с помощью 2 указателей (p — первый указатель, двигающийся от 1 до n, q — второй указатель, двигающийся от n до 1).
Асимптотика: $O(n \log\log n)$.

Замечание 1: решения с асимптотикой $O(n\sqrt{n})$ и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: решения с неэффективным построением решета (например 2 целочисленных массива размера n) не проходят по ограничениям памяти.

Замечание 3: данную задачу можно решить с асимптотикой $O(\sqrt{n})$, используя подход Генри Лемера для метода Мейсселя.

E. Experiment with tea

Автор: Баев А.Ж.

Зафиксируем некоторый уровень воды h. Построим компоненту связности, начиная с нулевой по высоте клетки, на таблице со следующим условия связности: из клетки (i_1, j_1) можно попасть в (i_2, j_2), если эти клетки соседние по стороне и $a_{i_2 j_2} < h$. Обход можно произвести с помощью алгоритма поиска в ширину или в глубину. При этом, если мы выходим на граничные клетки, то считаем, что обход завершился переполнением. Задача сводится к поиску максимального h, при котором обход не завершается переполнением, что легко решается бинарным поиском по h.

Асимптотика: $O(n^2 \log(h))$.

Замечание: решения с асимптотикой $O(n^2 h)$ и хуже не проходят по ограничениям времени.

F. Five words

Автор: Абдикалыков А.К., Баев А.Ж.

Подсказка 1: «Коровы понимают каждое сказанное человеком слово, правда, только частично».

Подсказка 2: первые буквы каждой строки (КФМГУ).

Ответом является подстрока длины 3 строки:
moscowstateuniversitykazakhstanbranch

G. Glowing letters

Автор: Абдикалыков А.К.

Для строки длины m без букв 'a' количество подстрок равно

$$\frac{m(m+1)}{2},$$

а количество подпоследовательностей

$$2^m - 1.$$

Пусть буквы 'a' делят исходную строку на подстроки без букв 'a' с длинами m_1, m_2, ..., m_k. Тогда количество подстрок равно

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i(m_i+1)}{2},$$

а количество подпоследовательностей

$$2^{\sum_{i=1}^{k} m_i} - 1.$$

Асимптотика: $O(n)$.

Замечание 1: решения с асимптотикой $O(n^2)$ и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: решения с неаккуратным взятием ответа по модулю не проходят некоторые тесты. Например следующий код дает неверный ответ:

$$ans := (ans + m[i] * m[i+1]) \mod 1000000007.$$

H. Harmonic permutations

Автор: Абдикалыков А.К.

Решим эту задачу в общем виде, а именно найдём число $d(s,t)$ перестановок длины $s+t$ таких, что:

1. $a_1 < a_2 < \cdots < a_s$;

2. $a_{s+1} < a_{s+2} < \cdots < a_{s+t}$;

3. $a_i < a_{s+i}, \forall i = 1, 2, ..., min(s,t)$.

Тогда ответом будет число $d(n,n)$.

Чтобы найти $d(s,t)$, определим положение числа $s+t$. Если $s \leq t$, то возможен только один вариант: $a_{s+t} = s+t$. Если $s > t$, то появляется второй вариант $a_s = s+t$. Таким образом определяется рекуррентная формула:

$$d(s,t) = \begin{cases} d(s,t-1) + d(s-1,t), & s > t, \\ d(s,t-1), & s \leq t. \end{cases}$$

Асимптотика: $O(n^2)$.

Замечание 1: решения с асимптотикой $O(n^3)$ и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: если заметить соответствие строящейся перестановки с правильными скобочными структурами, то можно понять, что ответом будут числа Каталана, соответственно существует решение за $O(n)$.

I. Infinity problem

Автор: Абдикалыков А.К.

Числа с суммой цифр равной 3 представляются в виде: $10^b + 10^c + 10^d$. Сгенерируем все остатки $10^i \mod n$; их будет не более n штук (для данных ограничений, можно убедиться, что их не более 2000): $rem[t] = 1$, если остаток t был сгенерирован, и $rem[t] = 0$ иначе. Далее достаточно перебрать все возможные остатки t_1 и t_2, которые сгенерированы и проверить наличие остатка $n - t_1 - t_2$.

Асимптотика: $O(n^2)$.

Замечание 1: решения с асимптотикой $O(n^3)$ и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: заметим, что при n взаимно простым с 10 число $10^b + 10^c + 10^d$ делится на n только если $10^{b-d} + 10^{c-d} + 1$. Соответственно существует решение за $O(n)$.

J. Jelly cake

Автор: Баев А.Ж.

Легко доказывается, что вершины треугольника с минимальной площадью будут соседними. Поэтому сортируем все точки по их углам φ_i, перебираем все тройки соседних точек и выбираем минимальную. Площадь каждого такого треугольника можно найти по формуле:

$$2R^2 sin(\alpha) sin(\beta) sin(\gamma),$$

где $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$, $\beta = \frac{1}{2}(\varphi_{i+2} - \varphi_{i+1})$, $\gamma = \frac{1}{2}(\varphi_{i+2} - \varphi_i)$ и углы φ_i зациклены (то есть $\varphi_{n+k} = \varphi_k$).

Асимптотика: $O(n \log n)$.

Замечание 1: решения с асимптотикой $O(n^2)$ и хуже не проходят по ограничениям времени.

Замечание 2: решение на типе $float$ на языке C получает неверный ответ из-за ошибок округления.