

# Открытая олимпиада по математике

10 декабря 2014

## Указания

1. Ответ:  $f(x) = x - \frac{3}{2}$ . Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Она непрерывна и удовлетворяет соотношению

$$g(2x + 1) = \frac{1}{3}g(x),$$

для любого  $x \in \mathbb{R}$ . После замены  $t = 2x + 1$ :

$$g(t) = \frac{1}{3}g\left(\frac{t-1}{2}\right).$$

Отсюда  $g(-1) = 0$ . Далее, для каждого  $y \in \mathbb{R}$  рассмотрим последовательность, заданную рекуррентным способом:

$$\begin{cases} y_1 = y, \\ y_{n+1} = \frac{y_n - 1}{2}. \end{cases}$$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -1$  и  $g(y_n) = \frac{1}{3^n}g(y_1)$  для всех  $y \in \mathbb{R}$ . Значит,

$$g(y) = \frac{1}{3^n}g(y_n).$$

В силу непрерывности имеем  $g(y) = 0$ .

2. Ответ:  $-\frac{\pi^2}{18}$ .

Во-первых:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du &= \{u = v^2\} = 2 \int_0^1 \frac{\ln(1-v^2)}{v} dv = \\ &= 2 \left( \int_0^1 \frac{\ln(1-v)}{v} dv + \int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v} dv \right), \end{aligned}$$

то есть

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v} dv.$$

Во-вторых:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \{z = v^3\} = 3 \int_0^1 \frac{\ln(1-z^3)}{z} dz$$

3. Ответ: нет. Для некоторого  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon_n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \frac{H}{N!} + r_N,$$

где  $H \in \mathbb{Z}$  и

$$|r_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{N+2} + \dots\right) <$$

$$< \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(N+1)!} < \frac{1}{N!}.$$

При этом  $r_N \neq 0$ , так как  $r_N = \frac{1}{(N+1)!} \varepsilon_{N+1} + r_{N+1}$  и  $|r_{N+1}| < \frac{1}{(N+1)!}$ .

4. (Абдикалыков А.К.) Пусть  $f(\lambda) = |B - \lambda I|$  — характеристический многочлен матрицы  $B$ . Заметим, что требуется доказать то, что  $f(1) \neq 0$ ; другими словами, то, что число 1 не является собственным значением матрицы  $B$ . А поскольку из  $AB = A + 2014B$  следует  $(A - 2014I)(B - I) = 2014I$ , то матрица  $B - I$  обязана быть невырожденной.

5. Ответ: при четном  $n$  выигрывает начинающий, а при нечетном — его соперник. Легко заметить, что если текущее число нечетное, то игрок изменит число на четное; а если четное, то игрок всегда может уменьшить число на 1.

6. Пусть  $x$  таково, что  $x^3 - x - 1 = 0$ . Но тогда

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1) = 0.$$

7. Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ . Из тождества

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

можно получить соотношение

$$\operatorname{arctg} F_{2n+1} = \operatorname{arctg} F_{2n} - \operatorname{arctg} F_{2n+2}.$$

Искомая сумма, таким образом, будет равна

$$\operatorname{arctg} F_2 = \pi/4.$$

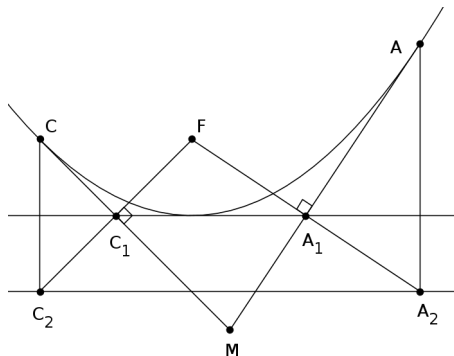
8. Все перестановки, обратные сами себе, можно представить в виде композиции непересекающихся циклов длины 2. Число перестановок  $\alpha$  порядка  $n+1$  таких, что  $\alpha = \alpha^{-1}$  и  $\alpha_{n+1} = n+1$ , очевидно, равно  $a_n$ ; число же перестановок  $\alpha$  порядка  $n+1$  таких, что  $\alpha = \alpha^{-1}$  и  $\alpha_{n+1} = k \neq n+1$  для некоторого фиксированного  $k$ , равно  $a_{n-1}$ . Общее число инволюций порядка  $n+1$  равно  $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$ .

9. (Баев А.Ж.) Ответ: 24. Пусть столбцов не меньше, чем строк. Если столбцов не менее 5, то строк менее 5. Доказательство от противного (в первой строке как минимум 3 клетки одного цвета, значит, в остальных строках обязательно найдется прямоугольник с клетками противоположного цвета). Если строк 3 или 4, то столбцов менее 7 (доказательство аналогично предыдущему).

Так как столбцов не более 6, строк не более 4, то ответ 24. Пример:

A	A	A	B	B	B
A	B	B	B	A	A
B	A	B	A	B	A
B	B	A	A	A	B

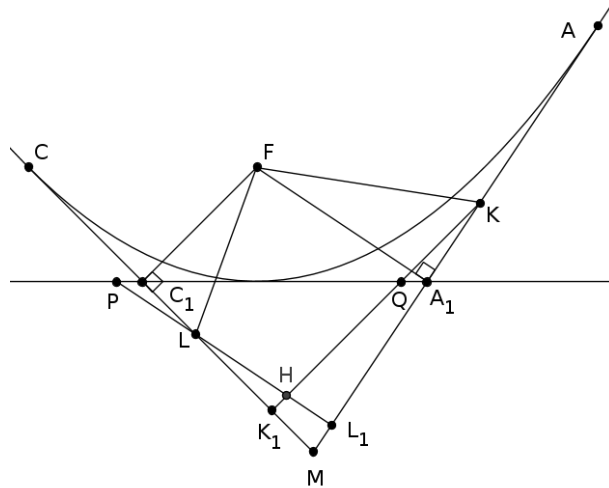
10. Обозначим:  $KLM$  — исходный треугольник,  $A, B, C$  — точки касания параболы и прямых  $MK, KL, LM$ .  $A_2, B_2, C_2$  — проекции  $A, B, C$  на директрису.  $F$  — фокус параболы.  $A_1, B_1, C_1$  — середины  $A_2F, B_2F, C_2F$ .



Свойство 1. Прямая, содержащая  $A_1B_1C_1$ , является касательной к параболы и параллельна директрисе. Данный факт легко получить из оптического свойства параболы и определения параболы (треугольник  $FAA_2$  — равнобедренный).

Свойство 2. Треугольники  $FA_1K$  и  $FC_1L$  подобны. Данный факт получается из вписанных четырехугольников  $FKA_1B_1$  и  $FB_1LC_1$ .

Обозначим:  $L_1$  — основание высоты из  $L$  на  $KM$ ,  $K_1$  — основание высоты из  $K$  на  $LM$ .  $P$  и  $Q$  — точки пересечения  $LL_1$  и  $KK_1$  с  $A_1C_1$ .



Свойство 3.  $A_1Q = PC_1$ . По соответствующим теоремам синусов для треугольников  $PC_1L$ ,  $KA_1Q$  и  $C_1FA_1$  можно получить, что

$$\frac{PC_1}{A_1Q} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{\sin Q}{\sin P} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin A_1} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{A_1F}{C_1F} = 1$$

Последнее верно из свойства 2.

Свойство 3.  $H$  лежит на директрисе. Для этого достаточно заметить, что треугольники  $PHQ$  и  $A_1FC_1$  равны. Значит, расстояние от  $H$  и  $F$  до прямой  $A_1C_1$  одинаково.