Открытая студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

12 декабря 2010

1. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ — непрерывные и сюръективные отображения из $[0,1]$ в $[0,1]$. Докажите, что найдётся точка x_0 из отрезка $[0,1]$ такая, что $f(g(x_0)) = g(f(x_0))$.

2. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Найти предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^{n} k^r \cos\frac{k}{n}.$$

3. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Доказать, что
$$\lim_{x\to 1-0} \left(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots\right) = S.$$

4. Пусть f есть (не обязательно дифференцируемая) функция, удовлетворяющая для любой пары $x_1 < x_2$ неравенству
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$
Доказать, что тогда верно неравенство
$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

5. У числа a есть p делителей, p — простое число. Докажите, что $a(a^k-1)$ делится на p для любого натурального k.

6. Существуют ли квадратные матрицы A, B такие, что $AB - BA = E$, где E — единичная матрица?

7. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$. Разобьем N-ю частичную сумму этого ряда на два слагаемых:
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos n}{n} = S_N^+ + S_N^-,$$
где S_N^+ и S_N^- — суммы соответственно положительных и отрицательных членов. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{S_N^+}{S_N^-}$ и найдите его.

8. Дано конечное множество точек $\Delta = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ на плоскости и положительное число $\rho > 0$. Для произвольной точки X плоскости построим последовательность точек $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ по следующему правилу: $X_1 = X$, X_{k+1} — это центр тяжести точек из Δ, содержащихся в круге радиуса ρ с центром в точке X_k, если такие точки существуют, и $X_{k+1} = X_k$ иначе. Докажите, что при любом выборе начальной точки X данная последовательность будет постоянной, начиная с некоторого номера.