

Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
10 декабря 2011

1. Ответ: 144. Так как минимальный элемент множества равен мощности множества, то указанное количество равно:

$$\sum_{k=0}^5 C_{11-k}^k = 144.$$

2. Ответ: $(2; 1 + \sqrt{2}]$. Пусть α — один из острых углов треугольника. Тогда:

$$\frac{h}{r} = \sin \alpha + \cos \alpha + 1 = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + 1.$$

3. (Абдикалыков А.К.) Ответ: $x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}$, $y_{2012} = \frac{1-3^{2012}}{2\alpha}$.

Заметим, что из условия следует $x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = x_n + \alpha y_n$. Таким образом, $x_n + \alpha y_n = x_0 + \alpha y_0 = 1$ для всех n . Исключив y_n из первого рекуррентного соотношения, получим $x_{n+1} = 3x_n - 1$. Решив полученное с помощью замены $t_n = x_n - \frac{1}{2}$, найдём

$$\begin{cases} x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}, \\ y_{2012} = \frac{1-x_{2012}}{\alpha} = \frac{1-3^{2012}}{2\alpha}. \end{cases}$$

4. Ответ: нет. Достаточно рассмотреть подпоследовательность $\{x_{60k}\}$.

5. Ответ: $\frac{\pi}{2}$. Обозначим искомый интеграл как I . Сделаем подстановку $x = \frac{\pi}{2} - t$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2(\cos^2 t) + \cos^2(\sin^2 t)) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(\cos^2 t) + 1 - \sin^2(\sin^2 t)) dx = \pi - I. \end{aligned}$$

6. Ответ: 1.

$$\begin{aligned} &\frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} = \\ &= \frac{n+2}{n!(1+n+1+(n+1)(n+2))} = \\ &= \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

7. Ответ: $x + C$ и $-x + C$, где C — постоянная. Заметим, что $|f(1) - f(0)| = 1$ (из условия). Для $t \in (0; 1)$ имеем:

$$\begin{aligned} 1 = |f(1) - f(0)| &\leq |f(1) - f(t)| + |f(t) - f(0)| \leq \\ &\leq (1-t) + t = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, либо $f(t) = t + f(1) - 1$ для всех t , либо $f(t) = -t + f(1) + 1$ для всех t (в зависимости от знака $f(1) - f(0)$).

8. (Абдикалыков А.К.) Нетрудно доказать, что уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет ровно один корень на любом из отрезков вида $\left[\pi l - \frac{\pi}{2}, \pi l + \frac{\pi}{2}\right]$, $l \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $x_n \in \left[\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n + \frac{\pi}{2}\right]$ и поэтому при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |\cos x_{n_k}| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x_{n_k}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x_{n_k}^2}} = \\ &= O^*\left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = O^*\left(\frac{1}{n_k}\right), \end{aligned}$$

откуда и следует, что два данных ряда сходятся или расходятся одновременно.

9. (Абдикалыков А.К.) Ответ: $(n-2) \cdot 2^{n-1}$. Переставим строки матрицы A так, чтобы все минус единицы стали на главную диагональ; при этом модуль определителя не изменится. Определитель изменённой матрицы находится с помощью элементарных преобразований и равен $(n-2) \cdot (-2)^{n-1}$.
10. Пусть a_1, \dots, a_n — все обратимые элементы S . Тогда $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_i a_1, a_i a_2, \dots, a_i a_n\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно, $a_i S = S$ для всех i для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда $S^2 = nS$.
Если $1 \neq -1$, то все обратимые элементы разбиваются на пары противоположных, т.е. $S = 0$.
Если $1 = -1$, то $n = 0$ или 1 .