

Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
7 декабря 2008

1. С помощью интегрирования по частям докажите, что:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx = \int_0^{\pi} (f'(x + \pi) - f'(x)) \sin x \, dx.$$

2. Ответ: мощность конечна и совпадает с количеством элементов в A . Любая такая функция f будет постоянной. Для доказательства этого факта нужно воспользоваться плотностью $\mathbb{Q} \cap [0; 1]$ в $[0; 1]$ и непрерывностью f на $[0; 1]$, рассматривая

$$\inf \{x : x \in \mathbb{Q} \cap [0; 1] \text{ и } f(x) \neq f(0)\}$$

(в случае, когда это множество не пусто).

3. Обозначим n количество участников. Выберем победителя первого дня (если это n -й участник) или предпоследнего победителя первого дня (иначе). Пусть это k -й участник, где $k < n$. Значит, в первый день были бои (k, i) для всех i от $k + 1$ до n . При этом, $(n - k)$ -й по счету бой второго дня будет между k -м участником и победителем среди $(k + 1), \dots, n$.

4. Ответ: все многочлены степени не выше $(n + 1)$.

Рассмотрим

$$g(x) = f(x) - f(0) - \frac{x}{1!} f'(0) - \frac{x^2}{2!} f''(0) - \dots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

$$\begin{cases} g^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} g(x) \\ g^k(0) = 0, 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Согласно теореме о единственности решения задачи Коши при $x > 0$ и $x < 0$, функция будет совпадать с некоторым многочленом вида Cx^{n+1} . А так как функция $g(x)$ $(n + 1)$ раз дифференцируема в нуле, то C будет одним и тем же при $x > 0$ и $x < 0$.

5. От противного. Пусть $f(b) > f(a)$ (обратный случай аналогичен). Ясно, что $f(a) \geq 0$ и $f(b) \geq 0$, иначе мы можем сузить отрезок $[a; b]$. Существует такое ε , что

$$\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(t) \, dt > \int_a^b f(t) \, dt = \alpha.$$

Но тогда можно взять $a + \varepsilon < c < b + \varepsilon$, что

$$\int_{a+\varepsilon}^c = \alpha.$$

Противоречие.

6. Пусть $\prod_{i \in I} a_i$ имеет ровно $k \leq n - 1$ различных простых делителей p_1, \dots, p_k . Каждому $X \in \{1, 2, \dots, n\}$, включая пустое множество, сопоставим набор из нулей и единиц $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)(X)$, где α_s — остаток при делении на 2 показателя p_s в произведении $\prod_{i \in X} a_i$ (для пустого множества $\prod_{i \in X} a_i = 1$). Количество всевозможных наборов из нулей и единиц длины k есть 2^k , а количество подмножеств $\{1, 2, \dots, n\}$ равно $2^n > 2^k$. По принципу Дирихле найдутся два одинаковых набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ для различных X_1 и X_2 . Тогда положим искомое множество $X = X_1 \Delta X_2$ (симметрическая разность).

7. Используйте теорему Чебышева (постулат Бертрана): для любого $x \geq 2$ найдётся простое число p в интервале $x \leq p < 2x$. Проведите индукцией по k с шагом 2.

8. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 D(x) + x$, где

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

— функция Дирихле.

9. Ответ: не всегда. Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Известно, что $g(0)+h(0) = 1$. Так как функция g сюръективная, то существует x_0 такой, что $g(x_0) = g(0)-1$ (ясно, что $x_0 \neq 0$). Отсюда получаем $h(x_0) = 1 - g(0) = h(0)$ — противоречие с инъективностью $h(x)$.