

Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математика»

1 апреля 2016

*Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Какие натуральные числа представимы в виде

$$x^2 - y^2 + 2x + 2y$$

для некоторых целых x и y ?

2. Пусть $\alpha(x)$ — первая цифра после запятой в десятичной записи числа 2^x .

а) Докажите, что функция $\alpha(x)$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$.

б) Докажите, что $3.5 < \int_0^1 \alpha(x) dx < 4.5$.

3. В конечном поле произведение всех ненулевых элементов не равно единице. Докажите, что сумма всех элементов поля равна нулю.

4. В эллипсе с фокусами F_1 и F_2 проведена хорда MN , которая проходит через фокус F_2 . На прямой F_1F_2 выбраны две точки S и T такие, что прямые SM и TN являются касательными к эллипсу. Точка D симметрична F_2 относительно прямой SM , точка E симметрична F_2 относительно NT . Прямые DS , TE и MN при пересечении образуют треугольник ABC (точка C не лежит на MN). Докажите, что

а) CF_2 — медиана треугольника ABC ;

б) CF_1 — биссектриса треугольника ABC .

Примечание: оптическое свойство эллипса можно использовать без доказательства.

5. Максималист и минималист по очереди вписывают по одному числу в таблицу размера $n \times n$ (последовательно, строчка за строчкой, слева направо и сверху вниз). Каким окажется ранг получившейся матрицы, если максималист изо всех сил старается его максимизировать, а минималист — минимизировать? (Ответ может зависеть от n и от того, кто делает первый ход.)

6. Функция $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на всей области определения. Известно, что

$$f'(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) + f(x)$$

для всех $x > 1$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 2$. Докажите, что $f(2) < 20,16$.