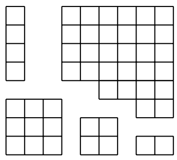
Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ

20 декабря 2013

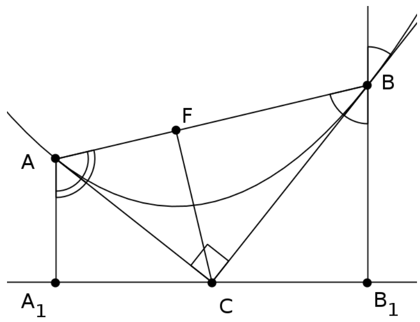
1. Ответ: можно. Одно из возможных решений:



2. Ответ: 0. Прибавив к первой строке все остальные, получим нулевую строку, так как по теореме Виета сумма корней равна нулю.

3. Докажем, что касательные к параболе, проведенные из любой точки на директрисе параболы, — взаимно перпендикулярны.

   F — фокус, d — директриса, AB — хорда параболы, проходящая через фокус F, A_1, B_1 — проекции A, B на d.



   Свойство 1. Касательные к параболе, проведенные в концах хорды AB, взаимно перпендикулярны. Утверждение легко получить с учетом того, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны, а AC и BC — биссектрисы углов $\angle ABB_1$ и $\angle BAA_1$ (согласно оптическому свойству).

   Свойство 2. C — точка пересечения касательных — лежит на директрисе. В силу равенства треугольников ΔAA_1C и ΔAFC, ΔBB_1C и ΔBFC, получаем $\angle A_1CB_1 = \pi$.

4. Последовательно полагайте в исходном соотношении:

   (a) $a = x$, $b = 0$, $c = 0$;

   (b) $a = x * 0$, $b = 0$, $c = y$;

   (c) $a = 0$, $b = x$, $c = 0$;

   (d) $a = 0 * x$, $b = 0$, $c = y$.

5. а) Количество интересных перестановок порядка N вычисляется с помощью формулы включения-исключения:

$$S(N) = N! - \frac{N!}{1!} + \frac{N!}{2!} - \frac{N!}{3!} + \dots + (-1)^N \frac{N!}{N!} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{N!}{k!}$$

   б) e^{-1}.

6. Ответ: $k = 2$. Замена: $t = \ln x$. Тогда

$$\int\limits_1^2 (1 + k\ln x)\, x^{x^k+k-1} dx = \int\limits_0^{\ln 2} \left(e^{te^{kt}}\right)' dt =$$

$$= e^{te^{kt}}\Big|_0^{\ln 2} = 2^{2^k} - 1.$$

7. а) Для любого целого n куб n может давать при делении на 9 только следующие остатки: 0, 1 или 8. Следовательно, числа вида $9k \pm 4$ не могут быть представлены в виде суммы трех кубов.

   б) Используйте тождество:
$$6x = (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3.$$

8. Ответ: $\frac{(n/2)!}{(n/4)!}$. Из условия следует, что для любого k от 1 до n верно $f(f(k)) = n+1-k$, то есть определить $f(f(k))$ можно однозначно. Также очевидно, что $f^4(k) = k$. Из четности n понятно, что $f^2(k) \neq k$. Следовательно, $f(k) \neq k$ и $f^3(k) \neq k$.

   В качестве $f(1)$ можно выбрать любое значение из $n-2$ (кроме 1 и n). Сразу однозначно определяются значения $f(1)$, $f(f(1))$ и $f(f(f(1)))$. Далее для s (любых из $n-4$ еще неопределенных значений) можно выбрать любое из $n-6$ допустимых значений (кроме уже определенных 4 значений, s и $n+1-s$). Итог ($n = 4m$):
$$(n-2)\cdot(n-6)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 2 = \frac{(2m)!}{m!}.$$

9. Ответ: $2 - \frac{1}{2^n}$.

   Ясно, что многочлен $xP(x) - 1$ имеет степень $n+1$. Его корнями при этом будет $n+1$ число: 2^k при k от 0 до n. Значит, этот многочлен представляется в виде
$$xP(x) - 1 = A(x-1)(x-2)\ldots(x-2^n).$$

   Коэффициент A можно найти, приравнивая свободный член: $A = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{1+2+\ldots+n}}$. Свободный член $P(x)$ равен коэффициенту при x^1 в правой части:
$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

10. Ответ: $\frac{k^2+k+2}{2}$. Выберем некоторую вершину A: на расстоянии 1 от неё расположено k вершин (обозначим это множество вершин B), а на расстоянии 2 — $(n-1-k)$ вершин (обозначим это множество вершин C). Посчитаем количество различных четырехугольников.

    Способ первый: вершины, противоположные A в соответствующем четырехугольнике, обязательно содержатся в C. Каждая такая вершина определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе $\frac{n(n-k-1)}{4}$.

    Способ второй: соседи вершины A обязательно содержатся в B. Каждая такая пара определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе $\frac{nk(k-1)}{8}$.

    Приравниваем данные соотношения и получаем:
$$n = \frac{k^2+k+2}{2}.$$