Тренировочная студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

13 марта 2018

1. Последовательно для i от n до 2 из i-й строки вычитаем $(i-1)$-ю:

$$\det\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & C_1^0 & C_2^1 & \dots & C_{n-1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_n^2 & \dots & C_{2n-3}^{n-2} \end{pmatrix} = ... = 1$$

2. Идея.

$$\frac{3n^2-1}{(n^3-n)^2} = \frac{6n^2-2}{2n^2(n-1)^2(n+1)^2} =$$
$$= \frac{(n^2+n)^2+(n^2-n)^2-2(n^2-1)^2}{n^2(n-1)^2(n+1)^2} =$$
$$= \frac{1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Все слагаемые $\frac{1}{n^2}$, начиная с $n=4$ встречаются в трех подряд идущих начальных слагаемых и в сумме сокращаются. Остаются лишь два слагаемых при $n=2$ и одно при $n=3$ общей суммой: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

3. $f(x)=2-f(x^2)=f(x^4)$. Так как функция четная, рассмотрим только положительные x.

Во–первых, $f(x^{4n})=f(x)$. Пусть $0\leqslant x<1$. В силу непрерывности:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{4n})=f(0).$$

Во–вторых, $f(x^{\frac{1}{4n}})=f(x)$. Пусть $x>1$. В силу непрерывности:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{4n}})=f(1).$$

В силу непрерывности и $f(1-\varepsilon)=f(0)$, получаем, что $f(1)=f(0)$. Значит, $f(x)=const$. Из условия получаем, что $f(x)=1$.

4. Пусть некоторый угол n-угольника содержит несколько углов m-угольников. Угол правильного m-угольника равен $180\frac{m-2}{m}$. Если $m\geqslant 4$, то угол будет не менее $90°$. Значит, $m=3$, $n=6$.

Пусть углы n-угольника и m-угольников равны: $n=m$. Так как сами многоугольники не совпадают, значит, есть точка на границе n-угольника в которой сходятся все несколько правильных m-угольников. То есть $180°$ делится на $180°\frac{n-2}{n}$, что равносильно условию n делится на $n-2$, или 2 делится на $n-2$. Получаем: $n=4$ или $n=3$.

Ответ: $(n,m)\in\{(6;3),(3;3),(4,4)\}$.

5. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-x$: $g(x)$ выпукла вниз, $g'(c)=0$, $g(c)<0$. Из выпуклости следует, что существует такая точка $a<c$, что $g(a)=g(b)=0$. Существуют точки $a<c<b$ такие, что $f(a)=a$, $f(b)=b$.

Графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ в квадрате $[a;b]\times[a;b]$ симметричны относительно прямой $y=x$. То есть область, ограниченная кривыми $y=x$ и $y=f(x)$, симметрична области, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=f^{-1}(x)$:

$$\int_a^b (f(x)+f^{-1}(x))dx =$$

$$= -\int_a^b (x - f(x))dx + \int_a^b (f^{-1}(x) - x)dx + 2\int_a^b xdx = b^2 - a^2$$