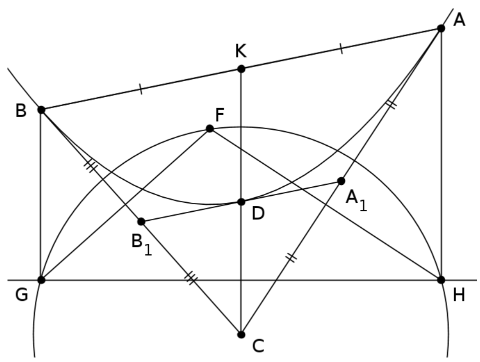
Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
21 декабря 2012

1. (Абдикалыков А.К.) Пусть x — вектор-столбец, все элементы которого равны 1, тогда произвольная целочисленная матрица Q порядка n будет «весёлой» тогда, и только тогда, когда вектор-столбец Qx будет содержать только чётные числа. Возьмём теперь любую целочисленную матрицу A и любую «весёлую» матрицу B, тогда все компоненты вектор-столбца $ABx = A(Bx)$ будут чётными, следовательно, матрица AB — «весёлая».

2. t является корнем $x^2 = 0$ тогда, и только тогда, когда $(t+1)$ является корнем $x^2 = 1$.

3. Обозначим через F фокус параболы, через H и G — проекции точек A и B на директрису параболы.



Свойство 1. C — центр описанной окружности треугольника FGH. Согласно оптическому свойству параболы: AC — биссектриса $\angle FAH$. А согласно определению $AF = AH$. Значит AC — серединный перпендикуляр к FH. Аналогично BC — серединный перпендикуляр к FG.

Свойство 2. прямая KC параллельна оси симметрии параболы и равноудалена от AH и BG. Из свойства 1, KC — серединный перпендикуляр к GH. А точка K равноудалена от прямых AH и BG, поэтому KC параллельна оси симметрии.

Обозначим D — точку пересечения KC и параболы, A_1 и B_1 — пересечение касательной к параболе в точке D с прямыми CA и CB.

Свойство 3. A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC. Согласно свойству 2, A_1 равноудалена от прямых KC и AH, а B_1 равноудалена от KC и BG. Значит, $AA_1 = A_1C$ и $BB_1 = B_1C$.

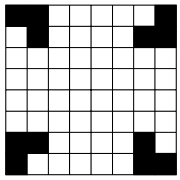
4. (Абдикалыков А.К.) Ответ: 4, 5, 6, 7. Перепишем это равенство в виде $\sum\limits_{k=2}^{n} \left[\sqrt[k]{n}\,\right] = n$. В левой части полученного соотношение находится сумма $n-1$ натурального числа, расположенного в порядке невозрастания, следовательно, $[\sqrt{n}\,] = 2$, $[\sqrt[3]{n}\,] = 1$. Выводим $n \in \{4,5,6,7\}$; все эти значения удовлетворяют исходному равенству.

5. Ответ: 981. Подходящие числа записываются в троичной системе счисления только цифрами 0 и 1. Таким образом, запись искомого числа в троичной системе счисления совпадает с двоичной записью числа 100:
$$100 = 64 + 32 + 4 = 1100100_2.$$
Ответ на задачу:
$$3^6 + 3^5 + 3^2 = 729 + 243 + 9 = 981.$$

6. Умножив обе части данного равенства на A^n слева, получим $a_0 = 0$ и исключим единичную матрицу из равенства. Умножим теперь то же равенство на A^{n-1}, получим $a_1 = 0$ и исключим уже A в первой степени. Продолжая этот процесс, получим требуемое. Доказательство утверждения в обратную сторону тривиально.

7. Ответ: $\frac{4}{3}(\pi^2 - 9)$. Достаточно воспользоваться тождеством:
$$\frac{1}{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3} = 4\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2.$$

8. Никакие две из указанных 12 клеток не могут быть заняты или быть побиты одним конем.



9. Воспользуемся неравенством:

$$\int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 \, dx \geqslant 0,$$

которое верно для любых $a, b \in \mathbb{R}$. a и b выбираются соответствующим образом.