Открытая студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

21 декабря 2012

1. Будем называть целочисленную квадратную матрицу порядка n «весёлой», если сумма элементов каждой её строки чётна. Докажите, что для любой целочисленной матрицы A и для любой «весёлой» матрицы B произведение AB тоже является «весёлой» матрицей.

2. Пусть $(A, +, *)$ — конечное кольцо с единицей, в котором $1+1=0$. Докажите, что уравнения $x^2=0$ и $x^2=1$ имеют одинаковое количество корней в кольце.

3. Прямые l_1 и l_2 касаются параболы в точках A и B, соответственно, и пересекаются в точке C. Точка K — середина отрезка AB. Докажите,что середина отрезка KC лежит на параболе.

4. При каких натуральных n выполняется равенство
$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt[k]{n}\right] = 2n?$$

5. Последовательность 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... состоит из всех натуральных чисел, являющихся степенью 3 или представимых в виде суммы различных степеней 3. Найдите 100-й член этой последовательности.

6. Квадратная матрица A порядка m такова, что $A^{n+1}=0$, а A^n не равна нулевой. Докажите, что
$$a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0E = 0$$
тогда, и только тогда, когда вещественные коэффициенты $a_i = 0$ при любом $i = 0, 1, \ldots, n$. Здесь E — единичная матрица.

7. Вычислите сумму ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^3+2^3+\ldots+k^3}.$$
Примечание: соотношение $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ считать известным.

8. Докажите, что 11 коней не могут побить все оставшиеся 53 поля шахматной доски.

9. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx = 0$. Докажите, что
$$\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant 4\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$