

# Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математика»

13 апреля 2017

*Время работы: 180 минут  
Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Пусть  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  — последовательность натуральных чисел, заданная рекуррентно:  $T_1 = T_2 = T_3 = 1$  и  $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$  при  $n \geq 1$ . Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$

если известно, что данный ряд сходится.

2. Найдите все простые  $p$ , запись которых в  $k$ -ичной системе счисления при некотором натуральном  $k > 1$  содержит ровно  $k$  различных цифр (старшая цифра не может быть нулём).
3. Докажите, что в любой группе квадрат произведения двух элементов порядка два и куб произведения двух элементов порядка три всегда являются коммутаторами.
4. Точка  $P$  лежит внутри выпуклой области, ограниченной параболой  $y = x^2$ , но не лежит на оси  $OY$ . Обозначим через  $S(P)$  множество всех точек, полученных отражением  $P$  относительно всех касательных к параболе.

а) Докажите, что значение суммы

$$\max_{(x,y) \in S(P)} y + \min_{(x,y) \in S(P)} y$$

не зависит от выбора точки  $P$ .

б) Найдите геометрическое место точек  $P$  таких, что  $\max_{(x,y) \in S(P)} y = 0$ .

5. Для каждой функции  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим через  $s_n(f)$  и  $S_n(f)$  нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции  $f$ , соответствующие равномерному разбиению  $[0, 1]$  на  $n$  частей. Существует ли такая интегрируемая функция  $f$ , что  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(f)$  сходится, а  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n(f)$  расходится?

6. Некоторые участники математической олимпиады списали решения некоторых задач у своих товарищей. Докажите, что можно с позором выгнать часть участников так, чтобы получилось, что более четверти от общего числа списанных решений было списано выгнанными участниками у не выгнанных.