

Открытая олимпиада по математике

13 марта 2018

*Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Найдите определитель матрицы A порядка n , где

$$a_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$$

для всех $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq n$.

2. Найдите сумму ряда

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{(n^3 - n)^2}.$$

3. Найдите все непрерывные функции $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x^2) + f(x) = 2.$$

4. При каких m, n правильный m -угольник можно разрезать на несколько (два и более) равных правильных n -угольников?

5. Дана обратимая выпуклая вниз функция $f(x) \in C(R)$. Известно, что существует такая точка c , что $f(c) < c$ и $f'(c) = 1$. Докажите, что существуют такие различные точки a и b , что

$$\int_a^b (f(x) + f^{-1}(x)) dx = b^2 - a^2.$$