

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
10 декабря 2011

1. Ответ: 144. Так как минимальный элемент множества равен мощности множества, то указанное количество равно:

$$\sum_{k=0}^5 C_{11-k}^k = 144.$$

2. Ответ:  $(2; 1 + \sqrt{2}]$ . Пусть  $\alpha$  — один из острых углов треугольника. Тогда:

$$\frac{h}{r} = \sin \alpha + \cos \alpha + 1 = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) + 1.$$

3. (Абдикалыков А.К.) Ответ:  $x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}$ ,  $y_{2012} = \frac{1-3^{2012}}{2\alpha}$ .

Заметим, что из условия следует  $x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = x_n + \alpha y_n$ . Таким образом,  $x_n + \alpha y_n = x_0 + \alpha y_0 = 1$  для всех  $n$ . Исключив  $y_n$  из первого рекуррентного соотношения, получим  $x_{n+1} = 3x_n - 1$ . Решив полученное с помощью замены  $t_n = x_n - \frac{1}{2}$ , найдём

$$\begin{cases} x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}, \\ y_{2012} = \frac{1-x_{2012}}{\alpha} = \frac{1-3^{2012}}{2\alpha}. \end{cases}$$

4. Ответ: нет. Достаточно рассмотреть подпоследовательность  $\{x_{60k}\}$ .

5. Ответ:  $\frac{\pi}{2}$ . Обозначим искомый интеграл как  $I$ . Сделаем подстановку  $x = \frac{\pi}{2} - t$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2(\cos^2 t) + \cos^2(\sin^2 t)) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(\cos^2 t) + 1 - \sin^2(\sin^2 t)) dx = \pi - I. \end{aligned}$$

6. Ответ: 1.

$$\begin{aligned} &\frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} = \\ &= \frac{n+2}{n!(1+n+1+(n+1)(n+2))} = \\ &= \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

7. Ответ:  $x + C$  и  $-x + C$ , где  $C$  — постоянная. Заметим, что  $|f(1) - f(0)| = 1$  (из условия). Для  $t \in (0; 1)$  имеем:

$$\begin{aligned} 1 = |f(1) - f(0)| &\leq |f(1) - f(t)| + |f(t) - f(0)| \leq \\ &\leq (1-t) + t = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, либо  $f(t) = t + f(1) - 1$  для всех  $t$ , либо  $f(t) = -t + f(1) + 1$  для всех  $t$  (в зависимости от знака  $f(1) - f(0)$ ).

8. (Абдикалыков А.К.) Нетрудно доказать, что уравнение  $\operatorname{tg} x = x$  имеет ровно один корень на любом из отрезков вида  $\left[ \pi l - \frac{\pi}{2}, \pi l + \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Таким образом,  $x_n \in \left[ \pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n + \frac{\pi}{2} \right]$  и поэтому при  $k \rightarrow \infty$

$$|\cos x_{n_k}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x_{n_k}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x_{n_k}^2}} =$$

$$= O^* \left( \frac{1}{x_{n_k}} \right) = O^* \left( \frac{1}{n_k} \right),$$

откуда и следует, что два данных ряда сходятся или расходятся одновременно.

9. (Абдикалыков А.К.) Ответ:  $(n-2) \cdot 2^{n-1}$ . Переставим строки матрицы  $A$  так, чтобы все минус единицы стали на главную диагональ; при этом модуль определителя не изменится. Определитель изменённой матрицы находится с помощью элементарных преобразований и равен  $(n-2) \cdot (-2)^{n-1}$ .
10. Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — все обратимые элементы  $S$ . Тогда  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_i a_1, a_i a_2, \dots, a_i a_n\}$  для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Следовательно,  $a_i S = S$  для всех  $i$  для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Отсюда  $S^2 = nS$ .  
Если  $1 \neq -1$ , то все обратимые элементы разбиваются на пары противоположных, т.е.  $S = 0$ . Если  $1 = -1$ , то  $n = 0$  или  $1$ .