

## Открытая олимпиада по математике

12 декабря 2010

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  — непрерывные и сюръективные отображения из  $[0, 1]$  в  $[0, 1]$ . Докажите, что найдётся точка  $x_0$  из отрезка  $[0, 1]$  такая, что  $f(g(x_0)) = g(f(x_0))$ .

2. Пусть  $r \in \mathbb{N}$ . Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n k^r \cos \frac{k}{n}.$$

3. Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ . Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + \dots) = S.$$

4. Пусть  $f$  есть (не обязательно дифференцируемая) функция, удовлетворяющая для любой пары  $x_1 < x_2$  неравенству

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Доказать, что тогда верно неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

5. У числа  $a$  есть  $p$  делителей,  $p$  — простое число. Докажите, что  $a(a^k - 1)$  делится на  $p$  для любого натурального  $k$ .

6. Существуют ли квадратные матрицы  $A$ ,  $B$  такие, что  $AB - BA = E$ , где  $E$  — единичная матрица?

7. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ . Разобьем  $N$ -ю частичную сумму этого ряда на два слагаемых:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{\cos n}{n} = S_N^+ + S_N^-,$$

где  $S_N^+$  и  $S_N^-$  — суммы соответственно положительных и отрицательных членов. Докажите, что существует предел  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N^+}{S_N^-}$  и найдите его.

8. Дано конечное множество точек  $\Delta = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  на плоскости и положительное число  $\rho > 0$ . Для произвольной точки  $X$  плоскости построим последовательность точек  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  по следующему правилу:  $X_1 = X$ ,  $X_{k+1}$  — это центр тяжести точек из  $\Delta$ , содержащихся в круге радиуса  $\rho$  с центром в точке  $X_k$ , если такие точки существуют, и  $X_{k+1} = X_k$  иначе. Докажите, что при любом выборе начальной точки  $X$  данная последовательность будет постоянной, начиная с некоторого номера.