

# Открытая олимпиада по математике

10 декабря 2016

*Время работы: 180 минут  
Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Докажите, что для любого натурального  $n$  верно равенство:

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0.$$

2. Существует ли такой многочлен  $P(x)$ , что  $P(1) = 2$ ,  $P(2) = 1$  и  $P(x)$  принимает иррациональные значения для всех рациональных  $x$ , кроме 1 и 2?
3. Для положительных чисел  $a_i$  известно, что

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1.$$

Докажите, что функция

$$f(x) = (1 + a_1^x)(1 + a_2^x) \dots (1 + a_n^x)$$

неубывающая при  $x > 0$ .

4. Дан тетраэдр, грани которого имеют одинаковую площадь. Докажите, что все его грани равны.
5. Для набора вещественных чисел  $c_0, c_1, \dots, c_n$  известно, что

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Докажите, что уравнение  $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$  имеет хотя бы один вещественный корень.

6.  $A$  — ассоциативное кольцо с единицей (не гарантируется, что умножение коммутативно).  $D$  — множество всех необратимых элементов  $A$ . Известно, что  $a^2 = 0$  для всех элементов  $a \in D$ . Докажите, что  $axa = 0$  для всех  $a \in D$ ,  $x \in A$ .
7. Дана матрица  $A$  размером  $n \times n$ , где элементы матрицы  $a_{ij}$  равны последней цифре числа  $(i + j - 2)$ .
- Вычислите определитель матрицы при  $n \leq 8$ ;
  - Вычислите определитель матрицы при  $n \geq 11$ ;
  - Докажите, что определитель матрицы делится на  $10^7$  при  $n = 9$  и  $n = 10$ .
8. Обозначим частичную сумму гармонического ряда через

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Найти сумму следующего ряда:

$$\frac{H_1}{10} + \frac{H_2}{100} + \frac{H_3}{1000} + \dots$$