Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
12 декабря 2010

1. Композиция непрерывных функций является непрерывной функцией. Композиция сюръективных функций — сюръективной. Значит, $h_1(x) = f(g(x))$ и $h_2(x) = g(f(x))$ — непрерывные сюръективные функции.

   Из сюръективности $h_1(x)$ и $h_2(x)$ следует, что существуют такая точка x_1, что $h_1(x_1) = 1$, и существует такая точка x_2, что $h_2(x_2) = 1$. Значит для функции $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ верно, что $h(x_1) \geqslant 0$ и $h(x_2) \leqslant 0$. По теореме Вейерштрасса, существует такая точка, что $h(x_0) = 0$, что и требовалось.

2. Ответ:

$$\sin(1) + \sin(1)\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k \prod_{s=0}^{2k-1}(r-s)\right) +$$

$$+\cos(1)\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \prod_{s=0}^{2k}(r-s)\right) - r \bmod 2.$$

   Сумма под пределом является суммой Дарбу для функции $x^r \cos x$ на отрезке $[0;1]$ при равномерном разбиении:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r \cos\frac{k}{n} = \int_0^1 x^r\cos(x)dx = I_r,$$

   где I_r находятся стандартным интегрированием по частям:

$$I_r = \int_0^1 x^r \cos x dx = \int_0^1 x^r d(\sin x) =$$

$$= \sin(1) + r\int_0^1 x^{r-1} d(\cos x) =$$

$$= \sin(1) + r\cos(1) - r(r-1)I_{r-2}.$$

   После замены $J_r = \frac{I_r}{r!}$ получается простое рекуррентное соотношение:

$$J_r = \frac{1}{r!}\sin(1) + \frac{1}{(r-1)!}\cos(1) - J_{r-2},$$

   которое позволяет выписать в явном виде I_r при четном и нечетном r.

3. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$. Поскольку он сходится в точке $x = 1$, то, по второй теореме Абеля, он сходится равномерно на $[0,1]$. Следовательно, предельная функция непрерывна на $[0;1]$. Отсюда следует утверждение задачи.

4. Сначала докажем, что если неравенство верно для n, то оно верно и для $2n$. Для этого достаточно применить неравенство для n точек:

$$\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \ldots, \frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}.$$

   Методом математической индукции получается неравенство для всех $n = 2^k$.

   Далее докажем, что если неравенство верно для n, то оно верно и для $n-1$. Для этого достаточно применить неравенство для n точек:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}.$$

   С учетом первой части, получаем, что неравенство верно для всех n.

5. Натуральное число $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ имеет в точности $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ делителей. По условию задачи это число простое. Значит, без ограничения общности, $\alpha_1 = p-1$, а все остальные $\alpha_i = 0$. То есть $a = q^{p-1}$. Если $q = p$, то $a(a^k - 1)$ делится на p явно. Если $q \neq p$, то $(p,q) = 1$ и можно применить малую теорему Ферма: $q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Значит, $a^k \equiv 1 \pmod p$.

6. Легко заметить, что следы произведений матриц AB и BA всегда совпадают:

$$\mathbf{tr}AB = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j (BA)_{jj} = \mathbf{tr}BA.$$

   Матриц, удовлетворяющих условию, не существует, так как след матрицы слева равен 0, а след матрицы справа равен размерности матрицы.

7. Ответ: -1. Данный ряд сходится условно. Значит, последовательность $S_N^+ + S_N^-$ сходится к некоторой константе, а $S_N^+ - S_N^-$ к $+\infty$.

$$\lim_{N\to\infty} (S_N^+ + S_N^-) = C$$

   Так как, S_N^- стремится к $-\infty$, то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N^+}{S_N^-} = \lim_{N\to\infty} \frac{C - S_N^-}{S_N^-} = -1.$$

8. Предлагаем решить эту задачу самостоятельно. И не забудьте прислать решение авторам пособия.