Тренировочная студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
13 марта 2018

1. Последовательно для i от n до 2 из i-й строки вычитаем $(i-1)$-ю:

$$\det\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & C_1^0 & C_2^1 & \dots & C_{n-1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_n^2 & \dots & C_{2n-3}^{n-2} \end{pmatrix} = ... = 1$$

2. Идея.

$$\frac{3n^2-1}{(n^3-n)^2} = \frac{6n^2-2}{2n^2(n-1)^2(n+1)^2} =$$
$$= \frac{(n^2+n)^2+(n^2-n)^2-2(n^2-1)^2}{n^2(n-1)^2(n+1)^2} =$$
$$= \frac{1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Все слагаемые $\frac{1}{n^2}$, начиная с $n=4$ встречаются в трех подряд идущих начальных слагаемых и в сумме сокращаются. Остаются лишь два слагаемых при $n=2$ и одно при $n=3$ общей суммой: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

3. $f(x) = 2 - f(x^2) = f(x^4)$. Так как функция четная, рассмотрим только положительные x.

Во–первых, $f(x^{4n}) = f(x)$. Пусть $0 \leqslant x < 1$. В силу непрерывности:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{4n}) = f(0).$$

Во–вторых, $f(x^{\frac{1}{4n}}) = f(x)$. Пусть $x > 1$. В силу непрерывности:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{4n}}) = f(1).$$

В силу непрерывности и $f(1-\varepsilon) = f(0)$, получаем, что $f(1) = f(0)$. Значит, $f(x) = const$. Из условия получаем, что $f(x) = 1$.

4. Пусть некоторый угол n-угольника содержит несколько углов m-угольников. Угол правильного m-угольника равен $180\frac{m-2}{m}$. Если $m \geqslant 4$, то угол будет не менее 90°. Значит, $m = 3$, $n = 6$.

Пусть углы n-угольника и m-угольников равны: $n = m$. Так как сами многоугольники не совпадают, значит, есть точка на границе n-угольника в которой сходятся все несколько правильных m-угольников. То есть 180° делится на $180^\circ\frac{n-2}{n}$, что равносильно условию n делится на $n-2$, или 2 делится на $n-2$. Получаем: $n = 4$ или $n = 3$.

Ответ: $(n, m) \in \{(6;3), (3;3), (4,4)\}$.

5. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$: $g(x)$ выпукла вниз, $g'(c) = 0$, $g(c) < 0$. Из выпуклости следует, что существует такая точка $a < c$, что $g(a) = g(b) = 0$. Существуют точки $a < c < b$ такие, что $f(a) = a$, $f(b) = b$.

Графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ в квадрате $[a;b]\times[a;b]$ симметричны относительно прямой $y = x$. То есть область, ограниченная кривыми $y = x$ и $y = f(x)$, симметрична области, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = f^{-1}(x)$:

$$\int_a^b (f(x) + f^{-1}(x))dx =$$
$$= -\int_a^b (x - f(x))dx + \int_a^b (f^{-1}(x) - x)dx + 2\int_a^b xdx = b^2 - a^2$$