Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
19 декабря 2015

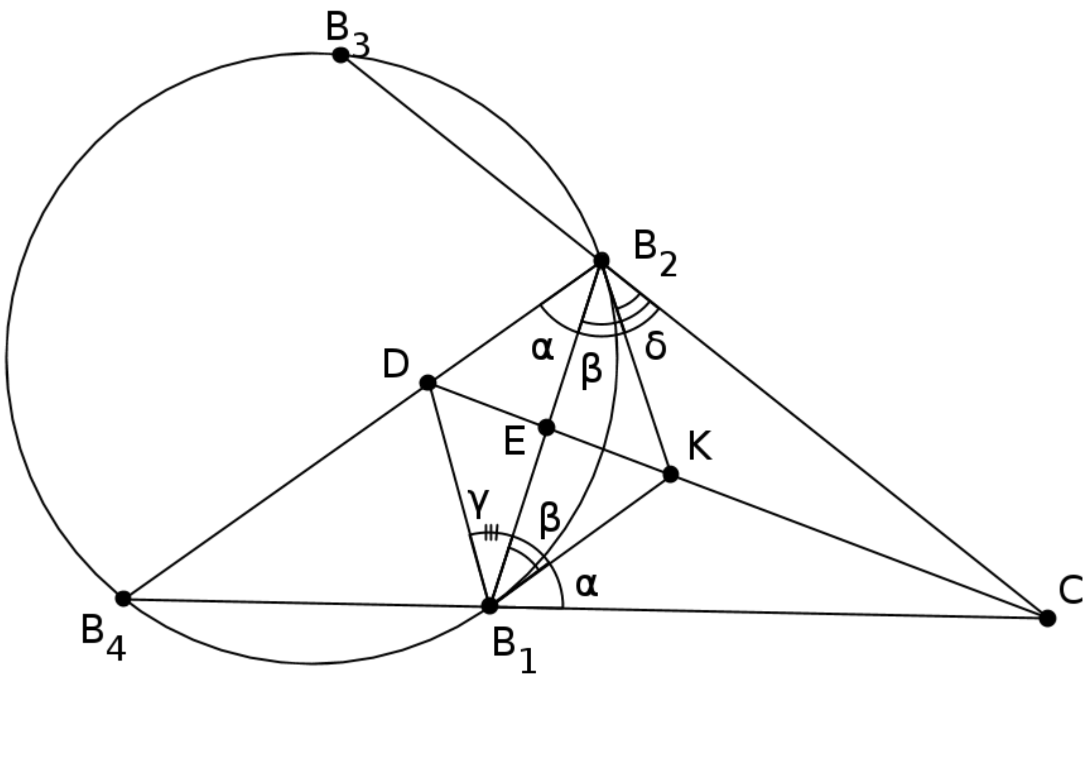
1. (Абдикалыков А.К.) Пусть $z_n = a_n b_n - x_n y_n$. Видно, что z_n можно представить в виде $z_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ для некоторых постоянных α, β, γ. Но так как z_n обращается в ноль при трёх различных n, то $\alpha = \beta = \gamma = 0$, и z_n тождественно равно нулю.

2. Ответ: 12090. Положим n простым: $f(n) = f(1) - f(n)$. То есть
$$f(p) = \frac{1}{2} f(1)$$
для любого простого p.

   Положим $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$ и обозначим
$$k(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_s.$$
   Несложно показать, что:
$$f(n) = \left(1 - \frac{k(n)}{2}\right) f(1).$$
   Имеем $2015 = 5^1 \cdot 13^1 \cdot 31^1$ и $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$. Соответственно $k(2015) = 3$, $k(2016) = 8$.

3. Ответ: $f(x) \equiv 0$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $f'(n) = f'(n+1) = 0$, откуда $f(n) = f(n+1) = 0$. Докажем от противного, что $f(x) = 0$ для всех $x \in [n, n+1]$. Пусть $x_0 \in (n, n+1)$ и $f(x_0) \neq 0$, например, $f(x_0) > 0$. Т.к. f дифференцируема, то f — непрерывна на $[n, n+1]$. По теореме Вейерштрасса у нее существует максимум на $[n, n+1]$:
$$f(x_1) = \max_{[n,n+1]} f(x) > 0 \text{ и } x_1 \in (n, n+1).$$
   По теореме Ферма имеем: $f'(x_1) = 0$, откуда $f(x_1) = 0$ — противоречие.

4. Так как парабола является коническим сечением, то можно осуществить проективное преобразование с точкой в вершине соответствующего конуса, переводящее параболу в окружность. Дан вписанный четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$. Касательные в B_1 и B_2 пересекаются в точке K, касательные в B_3 и B_4 в точке L. Осталось доказать, что KL, B_1B_3 и B_2B_4 пересекаются в одной точке.



Пусть C — точка пересечения B_1B_4 и B_2B_3. E и K — точки пересечения CK с B_1B_2 и B_4B_2. Обозначим $\angle DB_2E = \angle CB_1K = \alpha$, $\angle EB_2K = \angle EB_1K = \beta$, $\angle KB_2C = \delta$ и $\angle DB_1B_2 = \gamma$. Выпишем двойные отношения (по теоремам синусов) от вершин B_1 и B_2 соответственно:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{CK}{KE} : \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{\sin\delta}{\sin\beta} : \frac{\sin(\alpha+\beta+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{CK}{KE} : \frac{CD}{DE}$$

Откуда получаем $\delta = \gamma$, то есть D — точка пересечения диагоналей. Аналогично доказывается, что D лежит на CL. Итог: KL проходит через точку пересечения диагоналей.

5. (Абдикалыков А.К.) Ответ: -3π.

   Очевидно, что $x = -3\pi$ является одним из решений. Введём функцию $f(x) = 2x + \sin x$. Тогда данное уравнение можно переписать в виде $f(f(x)) = -12\pi$. Поскольку функция $f(x)$ (а значит, и функция $f(f(x))$ вместе с ней) является возрастающей, то это уравнение не может иметь больше одного корня.

6. Каждому числу a_j сопоставим ребро, соединяющее вершины графа с номерами j и a_j. Полученный мультиграф имеет n вершин и n рёбер, и, следовательно, обязан содержать цикл. Номера вершин, входящих в любой из циклов, формируют требуемое подмножество P.

7. (Абдикалыков А.К.) Ответ: (1) — матрица порядка 1. Если порядок матрицы $n > 1$, то из $\operatorname{rg} A = 1$ следует вырожденность матрицы A, что, в свою очередь влечёт присутствие собственного значения 0. Так как след равен сумме всех собственных значений, то $\operatorname{tr} A = 0$ — противоречие. Удовлетворять всем условиям задачи может только матрица первого порядка, единственный элемент которой равен 1.