Открытая студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

7 декабря 2008

1. Функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, причем $f''(x) > 0$ при $x \in [0, 2\pi]$. Докажите, что
$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx > 0.$$

2. Пусть A — конечное множество действительных чисел. Определите мощность множества определённых на $[0,1]$ и непрерывных на этом отрезке функций, принимающих на множестве рациональных чисел значения из множества A.

3. Бой подушками на бревне проводится на вылет. Всем участникам присваиваются порядковые номера. Очередность боев определяется по возрастанию номеров: первый бьётся со вторым, победитель этой пары — с третьим, следующий победитель — с четвёртым и т.д. В другой день эти же бойцы решили повторить матч по тем же правилам, но очерёдность боев установили по убыванию номеров. Докажите, что найдётся пара бойцов, встречавшаяся друг против друга на бревне дважды.

4. Найти все дифференцируемые $(n+1)$ раз на числовой прямой функции, для которых при любом вещественном x выполняется соотношение
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x).$$

5. Функция $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ всюду непрерывна. Известно, что
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$
Пусть α — произвольное вещественное число из интервала $(0,1)$, а $[a,b]$ — отрезок минимальной длины, для которого
$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha.$$
Докажите, что $f(a) = f(b)$.

6. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество натуральных чисел такое, что $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ имеет менее n различных простых делителей. Докажите, что существует непустое подмножество I множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $\sqrt{\prod\limits_{i\in I} a_i}$ — целое число.

7. Обозначим k-е по счету простое число через p_k. Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно разбить на 2 таких подмножества A и B, что
$$1 \leqslant \frac{\prod\limits_{i\in A} p_i}{\prod\limits_{j\in B} p_j} \leqslant 2.$$

8. Построить функцию $f(x)$, всюду разрывную, кроме 0, но дифференцируемую в нуле, причем $f'(0) = 1$.

9. Можно ли произвольную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ разложить в сумму сюръективной функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и инъективной функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?