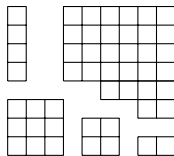


Открытая олимпиада по математике

20 декабря 2013

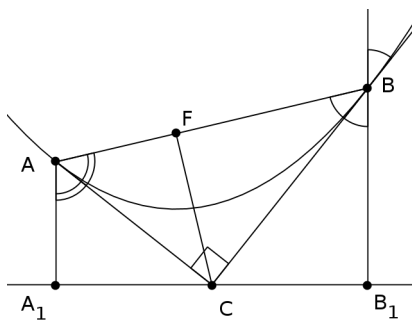
Указания

1. Ответ: можно. Одно из возможных решений:



2. Ответ: 0. Прибавив к первой строке все остальные, получим нулевую строку, так как по теореме Виета сумма корней равна нулю.
3. Докажем, что касательные к параболе, проведенные из любой точки на директрисе параболы, — взаимно перпендикулярны.

F — фокус, d — директриса, AB — хорда параболы, проходящая через фокус F , A_1 , B_1 — проекции A , B на d .



Свойство 1. Касательные к параболе, проведенные в концах хорды AB , взаимно перпендикулярны. Утверждение легко получить с учетом того, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны, а AC и BC — биссектрисы углов $\angle ABB_1$ и $\angle BAA_1$ (согласно оптическому свойству).

Свойство 2. C — точка пересечения касательных — лежит на директрисе. В силу равенства треугольников $\triangle AA_1C$ и $\triangle AFC$, $\triangle BB_1C$ и $\triangle BFC$, получаем $\angle A_1CB_1 = \pi$.

4. Последовательно полагайте в исходном соотношении:

- (a) $a = x$, $b = 0$, $c = 0$;
- (b) $a = x * 0$, $b = 0$, $c = y$;
- (c) $a = 0$, $b = x$, $c = 0$;
- (d) $a = 0 * x$, $b = 0$, $c = y$.

5. а) Количество интересных перестановок порядка N вычисляется с помощью формулы включения-исключения:

$$S(N) = N! - \frac{N!}{1!} + \frac{N!}{2!} - \frac{N!}{3!} + \dots + (-1)^N \frac{N!}{N!} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{N!}{k!}$$

- б) e^{-1} .

6. Ответ: $k = 2$. Замена: $t = \ln x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^2 (1 + k \ln x) x^{x^k+k-1} dx &= \int_0^{\ln 2} (e^{te^{kt}})' dt = \\ &= e^{te^{kt}} \Big|_0^{\ln 2} = 2^{2^k} - 1. \end{aligned}$$

7. а) Для любого целого n куб n может давать при делении на 9 только следующие остатки: 0, 1 или 8. Следовательно, числа вида $9k \pm 4$ не могут быть представлены в виде суммы трех кубов.

б) Используйте тождество:

$$6x = (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3.$$

8. Ответ: $\frac{(n/2)!}{(n/4)!}$. Из условия следует, что для любого k от 1 до n верно $f(f(k)) = n+1-k$, то есть определить $f(f(k))$ можно однозначно. Также очевидно, что $f^4(k) = k$. Из четности n понятно, что $f^2(k) \neq k$. Следовательно, $f(k) \neq k$ и $f^3(k) \neq k$.

В качестве $f(1)$ можно выбрать любое значение из $n-2$ (кроме 1 и n). Сразу однозначно определяются значения $f(1)$, $f(f(1))$ и $f(f(f(1)))$. Далее для s (любых из $n-4$ еще неопределенных значений) можно выбрать любое из $n-6$ допустимых значений (кроме уже определенных 4 значений, s и $n+1-s$). Итог ($n = 4m$):

$$(n-2) \cdot (n-6) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 2 = \frac{(2m)!}{m!}.$$

9. Ответ: $2 - \frac{1}{2^n}$.

Ясно, что многочлен $xP(x) - 1$ имеет степень $n+1$. Его корнями при этом будет $n+1$ число: 2^k при k от 0 до n . Значит, этот многочлен представляется в виде

$$xP(x) - 1 = A(x-1)(x-2)\dots(x-2^n).$$

Коэффициент A можно найти, приравняв свободный член: $A = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{1+2+\dots+n}}$. Свободный член $P(x)$ равен коэффициенту при x^1 в правой части:

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right).$$

10. Ответ: $\frac{k^2+k+2}{2}$. Выберем некоторую вершину A : на расстоянии 1 от неё расположено k вершин (обозначим это множество вершин B), а на расстоянии 2 — $(n-1-k)$ вершин (обозначим это множество вершин C). Посчитаем количество различных четырехугольников.

Способ первый: вершины, противоположные A в соответствующем четырехугольнике, обязательно содержатся в C . Каждая такая вершина определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе $\frac{n(n-k-1)}{4}$.

Способ второй: соседи вершины A обязательно содержатся в B . Каждая такая пара определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе $\frac{nk(k-1)}{8}$.

Приравниваем данные соотношения и получаем:

$$n = \frac{k^2 + k + 2}{2}.$$