Открытая студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

19 декабря 2017

1. Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Пример

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ — простое,} \\ 0, & n \text{ — непростое.} \end{cases}$$

3. Обозначим интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^{2k} + 2017}{2018^x + 1}\, dx,$$

и сделаем замену $t = -x$.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{t^{2k} + 2017}{2018^t + 1} \cdot 2018^t\, dt,$$

После сложения данных интегралов

$$2I = \int\limits_{-1}^{1} (x^{2k} + 2017)\, dx = \frac{2}{2k+1} + 2 \cdot 2017.$$

4. Заметим, что для функции $g(x) = 3 - \frac{9}{x}$ верно, что $g(g(g(x))) = x$. Откуда получаем систему из трех неизвестных:

$$\begin{cases} f(x) + f\left(3 - \frac{9}{x}\right) = x - \frac{9}{x} \\ f\left(3 - \frac{9}{x}\right) + f\left(-\frac{9}{x-3}\right) = 3 - \frac{9}{x} - \frac{9}{3 - \frac{9}{x}} \\ f\left(-\frac{9}{x-3}\right) + f\left(x\right) = -\frac{9}{x-3} - \frac{9}{-\frac{9}{x-3}} \end{cases}$$

для всех $x \neq 0$, $x \neq 3$. Откуда находим решение $f(x) = x - \frac{3}{2}$ для всех $x \neq 0$, $x \neq 3$. С учетом непрерывности, получаем, что функция доопределяется на всех числовой прямой в таком же виде.

5. Достаточно использовать 2 факта:

   1) все лучи исходящие из фокуса параболы после отражения идут параллельно оси симметрии параболы;

   2) биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых перпендикулярны.

6. Все нечетные n подходят. Для этого достаточно вспомнить, что биномиальные коффициенты обладают свойством симметрии $C_n^k = C_n^{n-k}$. В случае четного n, согласно постулату Бертрана среди чисел от $n/2$ до n существует простое. Причем степень данного простого числа будет нечетна, чего не может быть.

7. Замена $b_n = \pi - a_n$ дает последовательность:

$$\begin{cases} b_0 = \pi - 1, \\ b_{n+1} = b_n - \sin b_n. \end{cases}.$$

Правая часть $b_n - \sin b_n$ положительна и ограничена на $(0; \pi - 1)$. Несложно показать, что последовательность будет убывающей. Следовательно, она сходится. Предел легко найти из предельного перехода: $b = \pi n$. Так как предел должен лежать в $[0; \pi - 1]$, то это 0. Ответ: π.

8. Заметим, что $f(n,k) + f(k,n) = 2^{n+k+1}$. Это можно доказать по индукции. Ответ: $f(n,n) = 4^n$.