## Открытая олимпиада по математике

20 декабря 2013

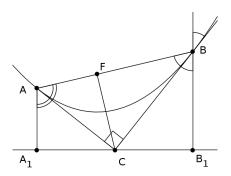
## Указания

1. Ответ: можно. Одно из возможных решений:



- 2. Ответ: 0. Прибавив к первой строке все остальные, получим нулевую строку, так как по теореме Виета сумма корней равна нулю.
- 3. Докажем, что касательные к параболе, проведенные из любой точки на директрисе параболы, взаимно перпендикулярны.

F — фокус, d — директриса, AB — хорда параболы, проходящая через фокус F,  $A_1$ ,  $B_1$  — проекции A, B на d.



Свойство 1. Касательные к параболе, проведенные в концах хорды AB, взаимно перпендикулярны. Утверждение легко получить с учетом того, что прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  параллельны, а AC и BC — биссектрисы углов  $\angle ABB_1$  и  $\angle BAA_1$  (согласно оптическому свойству).

Свойство 2. C — точка пересечения касательных — лежит на директрисе. В силу равенства треугольников  $\Delta AA_1C$  и  $\Delta AFC$ ,  $\Delta BB_1C$  и  $\Delta BFC$ , получаем  $\angle A_1CB_1=\pi$ .

- 4. Последовательно полагайте в исходном соотношении:
  - (a) a = x, b = 0, c = 0;
  - (b) a = x \* 0, b = 0, c = y;
  - (c) a = 0, b = x, c = 0;
  - (d) a = 0 \* x, b = 0, c = y.
- 5. а) Количество интересных перестановок порядка N вычисляется с помощью формулы включения исключения:

$$S(N) = N! - \frac{N!}{1!} + \frac{N!}{2!} - \frac{N!}{3!} + \dots + (-1)^N \frac{N!}{N!} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{N!}{k!}$$

б) 
$$e^{-1}$$
.

6. Ответ: k = 2. Замена:  $t = \ln x$ . Тогда

$$\int_{1}^{2} (1+k\ln x) x^{x^{k}+k-1} dx = \int_{0}^{\ln 2} \left(e^{te^{kt}}\right)' dt =$$

$$= e^{te^{kt}} \Big|_{0}^{\ln 2} = 2^{2^{k}} - 1.$$

- 7. а) Для любого целого n куб n может давать при делении на 9 только следующие остатки: 0, 1 или 8. Следовательно, числа вида  $9k \pm 4$  не могут быть представлены в виде суммы трех кубов.
  - б) Используйте тождество:

$$6x = (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3.$$

8. Ответ:  $\frac{(n/2)!}{(n/4)!}$ . Из условия следует, что для любого k от 1 до n верно f(f(k)) = n+1-k, то есть определить f(f(k)) можно однозначно. Также очевидно, что  $f^4(k) = k$ . Из четности n понятно, что  $f^2(k) \neq k$ . Следовательно,  $f(k) \neq k$  и  $f^3(k) \neq k$ .

В качестве f(1) можно выбрать любое значение из n-2 (кроме 1 и n). Сразу однозначно определяются значения f(1), f(f(1)) и f(f(f(1))). Далее для s (любых из n-4 еще неопределенных значений) можно выбрать любое из n-6 допустимых значений (кроме уже определенных 4 значений, s и n+1-s). Итог (n=4m):

$$(n-2) \cdot (n-6) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 2 = \frac{(2m)!}{m!}.$$

9. Other:  $2 - \frac{1}{2^n}$ .

Ясно, что многочлен xP(x)-1 имеет степень n+1. Его корнями при этом будет n+1 число:  $2^k$  при k от 0 до n. Значит, этот многочлен представляется в виде

$$xP(x) - 1 = A(x-1)(x-2)...(x-2^n).$$

Коэффициент A можно найти, приравнивая свободный член:  $A = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{1+2+\ldots+n}}$ . Свободный член P(x) равен коэффициенту при  $x^1$  в правой части:

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$$

10. Ответ:  $\frac{k^2+k+2}{2}$ . Выберем некоторую вершину A: на расстоянии 1 от неё расположено k вершин (обозначим это множество вершин B), а на расстоянии 2-(n-1-k) вершин (обозначим это множество вершин C). Посчитаем количество различных четырехугольников.

Способ первый: вершины, противоположные A в соответствующем четырехугольнике, обязательно содержатся в C. Каждая такая вершина определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе  $\frac{n(n-k-1)}{4}$ .

Способ второй: соседи вершины A обязательно содержатся в B. Каждая такая пара определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе  $\frac{nk(k-1)}{8}$ .

Приравниваем данные соотношения и получаем:

$$n = \frac{k^2 + k + 2}{2}.$$