Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Студенческие олимпиады по математике Казахстанского филиала МГУ. Задачи и указания. 2008–2018 гг.

Астана
2018

УДК
ББК
Л

ISBN

В настоящем сборнике представлены более 100 задач студенческих олимпиад по математике Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова за период с 2008 по 2018 год.

Сборник адресован всем интересующимся олимпиадным движением.

Составители:
Абдикалыков А.К., Баев А.Ж., Васильев А.Н.

TeX–верстка:
Баев А.Ж.

Предисловие

В Казахстанском филиале МГУ имени М.В. Ломоносова ежегодно проводятся студенческие олимпиады по математике. На базе Казахстанского филиала проводится также Республиканский этап студенческой предметной олимпиады по математике (2016 и 2017 гг.). Проведение олимпиады в Филиале (уже во второй раз) является результатом побед наших студентов на данной олимпиаде в предыдущие годы.

Ежегодно в декабре студенты Казахстанского филиала проходят отбор внутри университета для участия на Республиканском этапе. В связи со спецификой обучения в Филиале, на олимпиаде участвуют студенты первого и второго курсов механико–математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики (студенты третьего и четвертого курса продолжают обучение в Москве). На олимпиаде обычно предлагается от 7 до 10 заданий по математическому анализу, алгебре, геометрии, теории чисел, дискретной математике и по крайней мере одна задача из коллекции школьных олимпиад по математике. Такой вариант позволяет первокурсникам свободно конкурировать со студентами второго курса. Победители справляются, как правило, с 4 или 5 заданиями.

В данном сборнике представлены тексты около 100 задач олимпиад последних десяти лет, к которым даны указания, составленные преподавателями Казахстанского филиала. При подготовке олимпиад использованы материалы из различных сборников студенческих и школьных олимпиад, а также авторские задачи. Авторами задач являются преподаватели филиала Абдикалыков А.К., Баев А.Ж., Васильев А.Н., которые активно участвуют в олимпиадном движении Казахстана.

Составители выражают благодарность профессору Нурсултанову Е.Д. и доценту Бекмаганбетову К.А. за оказание содействия при подготовке сборника.

Директор Казахстанского филиала
А.В.Сидорович

Содержание

1 Условия задач олимпиад Казахстанского филиала 7
1.1 2008–2009 . . . 7
1.2 2009–2010 . . . 9
1.3 2010–2011 . . . 11
1.4 2011–2012 . . . 13
1.5 2012–2013 . . . 15
1.6 2013–2014 . . . 17
1.7 2013–2014 (дополнительный тур) . . . 19
1.8 2014–2015 . . . 21
1.9 2015–2016 . . . 23
1.10 2016–2017 . . . 25
1.11 2017–2018 . . . 27
1.12 2017–2018 (дополнительный тур) . . . 29
1.13 Республиканская олимпиада по математике 2016 30
1.14 Республиканская олимпиада по МКМ 2016 . . . 32
1.15 Республиканская олимпиада по математике 2017 36

2 Указания 39
2.1 2008–2009 . . . 39
2.2 2009–2010 . . . 42
2.3 2010–2011 . . . 44
2.4 2011–2012 . . . 47
2.5 2012–2013 . . . 50
2.6 2013–2014 . . . 53
2.7 2013–2014 (дополнительный тур) . . . 57
2.8 2014–2015 . . . 61
2.9 2015–2016 . . . 67
2.10 2016–2017 . . . 70
2.11 2017–2018 . . . 73
2.12 2017–2018 (дополнительный тур) . . . 75

2.13 Республиканская олимпиада по математике 2016 77
2.14 Республиканская олимпиада по МКМ 2016 84
2.15 Республиканская олимпиада по математике 2017 91

3 Результаты **97**
3.1 2012–2013 97
3.2 2013–2014 98
3.3 2013–2014 (дополнительный тур) 99
3.4 2014–2015 100
3.5 2015–2016 101
3.6 2016–2017 102
3.7 2017–2018 103
3.8 2017–2018 (дополнительный тур) 104
3.9 Республиканская олимпиада по математике 2016 105
3.10 Республиканская олимпиада по МКМ 2016 106
3.11 Республиканская олимпиада по математике 2017 107

Условия задач олимпиад Казахстанского филиала

2008–2009

7 декабря 2008

1. Функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, причем $f''(x) > 0$ при $x \in [0, 2\pi]$. Докажите, что
$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx > 0.$$

2. Пусть A — конечное множество действительных чисел. Определите мощность множества определённых на $[0, 1]$ и непрерывных на этом отрезке функций, принимающих на множестве рациональных чисел значения из множества A.

3. Бой подушками на бревне проводится на вылет. Всем участникам присваиваются порядковые номера. Очередность боев определяется по возрастанию номеров: первый бьётся со вторым, победитель этой пары — с третьим, следующий победитель — с четвёртым и т.д. В другой день эти же бойцы решили повторить матч по тем же правилам, но очерёдность боев установили по убыванию номеров. Докажите, что найдётся пара бойцов, встречавшаяся друг против друга на бревне дважды.

4. Найти все дифференцируемые $(n + 1)$ раз на числовой прямой функции, для которых при любом вещественном x выполняется соотношение
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^n}{n!}\, f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x).$$

5. Функция $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ всюду непрерывна. Известно, что
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$
Пусть α — произвольное вещественное число из интервала $(0,1)$, а $[a,b]$ — отрезок минимальной длины, для которого
$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \alpha.$$
Докажите, что $f(a) = f(b)$.

6. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество натуральных чисел такое, что $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ имеет менее n различных простых делителей. Докажите, что существует непустое подмножество I множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $\sqrt{\prod\limits_{i\in I} a_i}$ — целое число.

7. Обозначим k-е по счету простое число через p_k. Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно разбить на 2 таких подмножества A и B, что
$$1 \leqslant \frac{\prod\limits_{i\in A} p_i}{\prod\limits_{j\in B} p_j} \leqslant 2.$$

8. Построить функцию $f(x)$, всюду разрывную, кроме 0, но дифференцируемую в нуле, причем $f'(0) = 1$.

9. Можно ли произвольную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ разложить в сумму сюръективной функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и инъективной функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

2009–2010

6 декабря 2009

1. На доске написано число -1000000 (минус миллион). За ход разрешается выбрать какие-нибудь два (или одно) числа и написать их сумму или произведение. Если выбрано одно число, то надо писать или его квадрат, или его удвоенное. Как за 12 таких ходов написать число ноль?

2. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 8 минут и выпить кастрюлю молока — за 15 минут, а Карлсон может сделать это за 2, 3 и 4 минуты соответственно. За какое наименьшее время они могут вместе покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли молока?

3. Касательная к гиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ в точке M отсекает от угла $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ прямоугольный треугольник. Докажите, что:
   а) точка M — середина гипотенузы этого треугольника;
   б) его площадь не зависит от выбора точки M.

4. Дифференцируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[0,1]$ таким образом, что:
   а) $f(0) = f(1) = 1$;
   б) $2001 \cdot f'(x)g(x) + 2009 \cdot f(x)g'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0,1]$.
   Докажите, что $g(1) \geqslant g(0)$.

5. Найдите сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

6. Пусть $\{q_k\}_{k=1}^n$ — конечная последовательность чисел. Известно, что $q_k \geqslant 1$ для всех k. Докажите неравенство:

$$\sqrt[q_1]{1+\sqrt[q_2]{1+\ldots+\sqrt[q_n]{1}}} \leqslant 1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1 q_2}+\ldots+\frac{1}{q_1\ldots q_n}.$$

7. Найдите минимум величины $\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_i, x_j)$ по всем наборам единичных векторов x_1, x_2, ..., $x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$.

2010–2011

12 декабря 2010

1. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ — непрерывные и сюръективные отображения из $[0,1]$ в $[0,1]$. Докажите, что найдётся точка x_0 из отрезка $[0,1]$ такая, что $f(g(x_0)) = g(f(x_0))$.

2. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Найти предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^{n} k^r \cos\frac{k}{n}.$$

3. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Доказать, что
$$\lim_{x\to 1-0} \left(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots\right) = S.$$

4. Пусть f есть (не обязательно дифференцируемая) функция, удовлетворяющая для любой пары $x_1 < x_2$ неравенству
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$
Доказать, что тогда верно неравенство
$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

5. У числа a есть p делителей, p — простое число. Докажите, что $a(a^k - 1)$ делится на p для любого натурального k.

6. Существуют ли квадратные матрицы A, B такие, что $AB - BA = E$, где E — единичная матрица?

7. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$. Разобьем N-ю частичную сумму этого ряда на два слагаемых:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos n}{n} = S_N^+ + S_N^-,$$

где S_N^+ и S_N^- — суммы соответственно положительных и отрицательных членов. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{S_N^+}{S_N^-}$ и найдите его.

8. Дано конечное множество точек $\Delta = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ на плоскости и положительное число $\rho > 0$. Для произвольной точки X плоскости построим последовательность точек $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ по следующему правилу: $X_1 = X$, X_{k+1} — это центр тяжести точек из Δ, содержащихся в круге радиуса ρ с центром в точке X_k, если такие точки существуют, и $X_{k+1} = X_k$ иначе. Докажите, что при любом выборе начальной точки X данная последовательность будет постоянной, начиная с некоторого номера.

2011–2012

10 декабря 2011

1. Назовем конечное числовое множество своеобразным, если оно содержит число, равное количеству его элементов, но никакое его собственное подмножество этим свойством не обладает. Определите количество своеобразных подмножеств множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 12\}$.

2. Определите множество значений функции, сопоставляющей каждому прямоугольному треугольнику отношение $\dfrac{h}{r}$, где h — высота, проведенная к гипотенузе, а r — радиус вписанной в треугольник окружности.

3. Две последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - \alpha y_n, \\ y_{n+1} = 2y_n - \dfrac{1}{\alpha} x_n \end{cases}$$

при всех $n \geqslant 0$, где $\alpha \neq 0$ — постоянная величина, а $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Найдите x_{2012} и y_{2012}.

4. Существует ли такая последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для неё справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{12k} = 20, \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{20k} = 12? \end{cases}$$

5. Найдите $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\sin^2 x) + \cos^2(\cos^2 x)\right)\, dx.$

6. Найдите $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}$.

7. Найдите все функции $f\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенству $(x-y)^2 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$ для любых $x, y \in [0,\ 1]$.

8. Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ — все положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$, выписанные в порядке возрастания, $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что ряды $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\cos x_{n_k}|$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходятся или расходятся одновременно.

9. Квадратная матрица A порядка n состоит из чисел $+1$ и -1. При этом, в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы находится ровно одно число -1. Найдите $|\det A|$.

10. Пусть S — сумма всех обратимых элементов конечного ассоциативного кольца с единицей. Докажите, что $S^2 = 0$ или $S^2 = S$.

2012–2013

21 декабря 2012

1. Будем называть целочисленную квадратную матрицу порядка n «весёлой», если сумма элементов каждой её строки чётна. Докажите, что для любой целочисленной матрицы A и для любой «весёлой» матрицы B произведение AB тоже является «весёлой» матрицей.

2. Пусть $(A, +, *)$ — конечное кольцо с единицей, в котором $1+1=0$. Докажите, что уравнения $x^2=0$ и $x^2=1$ имеют одинаковое количество корней в кольце.

3. Прямые l_1 и l_2 касаются параболы в точках A и B, соответственно, и пересекаются в точке C. Точка K — середина отрезка AB. Докажите,что середина отрезка KC лежит на параболе.

4. При каких натуральных n выполняется равенство
$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt[k]{n}\,\right] = 2n?$$

5. Последовательность 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... состоит из всех натуральных чисел, являющихся степенью 3 или представимых в виде суммы различных степеней 3. Найдите 100-й член этой последовательности.

6. Квадратная матрица A порядка m такова, что $A^{n+1}=0$, а A^n не равна нулевой. Докажите, что
$$a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0E = 0$$
тогда, и только тогда, когда вещественные коэффициенты $a_i=0$ при любом $i=0,1,\ldots,n$. Здесь E — единичная матрица.

7. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}.$$

Примечание: соотношение $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ считать известным.

8. Докажите, что 11 коней не могут побить все оставшиеся 53 поля шахматной доски.

9. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $\int\limits_0^1 x f(x)\,dx = 0$. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant 4 \left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx \right)^2 .$$

2013–2014

20 декабря 2013

1. Можно ли разрезать квадрат 7×7 на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить 3 квадрата попарно различных целых площадей?

2. Известно, что a, b и c — корни уравнения $x^3+px+q=0$. Вычислите определитель матрицы:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

3. На плоскости дана парабола. Найдите множество точек плоскости, из которых парабола видна под прямым углом (т.е. касательные, проведённые из этой точки, перпендикулярны друг другу).

4. Бинарная операция $*\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению $(a*b)*c=a+b+c$ для любых вещественных чисел a, b и c. Докажите, что $a*b=a+b$ для любых вещественных a и b.

5. Назовем перестановку чисел от 1 до N «интересной», если никакое число не стоит на своем месте ($a_i\neq i$). Обозначим $S(N)$ количество «интересных» перестановок чисел от 1 до N. Вычислите:
а) $S(N)$;
б) $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{S(N)}{N!}$.

6. Определите все вещественные числа k, для которых справедливо соотношение:
$$\int\limits_1^2 (1+k\ln x)\, x^{x^k+k-1}dx = 15.$$

7. Докажите, что:

   а) существует бесконечно много целых чисел, не представимых в виде суммы кубов трёх целых чисел (среди которых могут быть равные);

   б) любое целое число представимо в виде суммы кубов пяти целых чисел (среди которых могут быть равные).

8. Пусть n — натуральное число, кратное 4. Посчитайте количество различных биекций $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ таких, что $f(j) + f^{-1}(j) = n + 1$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

   Пример: для биекции $f : (1, 2, 3, 4) \to (2, 4, 1, 3)$ обратной будет $f^{-1} : (1, 2, 3, 4) \to (3, 1, 4, 2)$.

9. Известно, что $P(x)$ — многочлен степени n такой, что для всех $t \in \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^n\}$ верно $P(t) = \frac{1}{t}$. Найдите $P(0)$.

10. В графе G все вершины степени k. При этом в G нет треугольников и для любых двух вершин, у которых нет общего ребра, найдутся ровно две вершины, с которыми есть общие рёбра у каждой из этих двух вершин. Чему равно количество вершин G?

2013–2014 (дополнительный тур)

15 марта 2014

1. Вычислить произведение двух чисел с помощью операций сложения, вычитания, возведения в квадрат и взятия обратного числа. Возможностью обращения знаменателя в 0 пренебречь.

2. Пусть α, β, γ — три различных корня уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Вычислите:
$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

3. Найти максимальное значение определителя третьего порядка, у которого 2 элемента равны 4, а остальные 1 или -1.

4. Решите в комплексных числах систему:

$$\begin{cases} \sqrt{3}z^{11} - z^{10} - 1 = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

5. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}.$$

6. Из точки P к параболе с фокусом F провели две касательные PX и PY. Докажите, что:

$$FP^2 = FX \cdot FY.$$

7. Обозначим $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет решений. Докажите, что последовательность $a_n = \min \underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(x)\cdots))$ — возрастающая.

8. Даны натуральные числа m, n такие, что $m^2 - 2n^2 = 1$, и даны функции:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(x), \\ f_2(x) &= \operatorname{ctg}(x), \\ f_3(x) &= \operatorname{arctg}(x). \end{aligned}$$

Докажите, что существует композиция $H(x)$ из указанных функций (некоторые функции могут быть использованы несколько раз, а некоторые ни разу) такая, что $H(1) = \frac{m}{n}$.

9. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., p_n — возрастающая последовательность всех простых чисел, не превосходящих 2^{100}. Докажите, что:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} < 10.$$

2014–2015

10 декабря 2014

1. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

2. Известно, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

Вычислите

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,dx.$$

3. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, состоящая из чисел 1 и -1. Может ли число

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$$

быть рациональным?

4. Для квадратных матриц одного порядка A и B верно $AB = A + 2014B$. Докажите, что сумма коэффициентов характеристического многочлена матрицы B не равна нулю.

5. Двое играют в игру. На доске написано число n. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Если при этом получается нуль, игрок проиграл. Ходы делаются поочерёдно. Какой из двух игроков выиграет, если они оба играют оптимально?

6. Дано вещественное число x такое, что $x^3 = x + 1$. Доказать, что $x^5 = x^4 + 1$.

7. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} F_{2n+1},$$

где F_n — числа Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для $n \in \mathbb{N}$).

8. Пусть a_n — число обратных самих себе перестановок порядка n. Доказать $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$.

9. Прямоугольник размером $N \times M$ ($N > 2$, $M > 2$) разбит равномерной сеткой на NM квадратов 1×1. Назовем его красивым, если все клетки 1×1 можно покрасить в один из двух цветов так, чтобы никакие 4 клетки, образующие прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника, не были покрашены в один цвет. Найдите красивый прямоугольник максимальной площади.

10. Докажите, что ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на её директрисе.

2015–2016

19 декабря 2015

1. a_n, b_n, x_n, y_n — четыре арифметические прогрессии. Известно, что $a_n b_n = x_n y_n$ для трёх различных натуральных n. Доказать, что $a_n b_n = x_n y_n$ для всех натуральных n.

2. Пусть $f(n)$ — вещественнозначная функция, определённая на множестве натуральных чисел и удовлетворяющая следующему условию: для любого $n > 1$ существует такой его простой делитель p, что $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$. Известно, что $f(2015) = 2015$. Найдите $f(2016)$.

3. Найдите все дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:
а) $f'(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{Z}$;
б) если для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f'(x_0) = 0$, то для него справедливо также равенство $f(x_0) = 0$.

4. На параболе выбраны 4 точки: A_1, A_2, A_3 и A_4. Через эти точки к параболе проведены 4 касательные l_1, l_2, l_3 и l_4 соответственно. l_1 пересекает l_2 в точке M. l_3 пересекает l_4 в точке N. Докажите, что MN, A_1A_3 и A_2A_4 пересекаются в одной точке.

5. Решить в вещественных числах уравнение
$$4x + 2\sin x + \sin(2x + \sin x) + 12\pi = 0.$$

6. Дано n натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n, при этом все они не превосходят n. Доказать, что существует непустое подмножество $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что множества P и $\{a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_n}\}$ совпадают.

7. Найдите все матрицы A, которые обладают следующими свойствами:
   а) имеет всего одно собственное значение (без учёта кратности);
   б) ранг равен 1;
   в) след равен 1.

2016–2017

10 декабря 2016

1. Докажите, что для любого натурального n верно равенство:
$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)\; dx = 0.$$

2. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что $P(1) = 2$, $P(2) = 1$ и $P(x)$ принимает иррациональные значения для всех рациональных x, кроме 1 и 2?

3. Для положительных чисел a_i известно, что
$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1.$$
Докажите, что функция
$$f(x) = (1 + a_1^x)(1 + a_2^x) \ldots (1 + a_n^x)$$
неубывающая при $x > 0$.

4. Дан тетраэдр, грани которого имеют одинаковую площадь. Докажите, что все его грани равны.

5. Для набора вещественных чисел $c_0, c_1, \ldots, c_n$ известно, что
$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \ldots + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$
Докажите, что уравнение $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n = 0$ имеет хотя бы один вещественный корень.

6. A — ассоциативное кольцо с единицей (не гарантируется, что умножение коммутативно). D — множество всех необратимых элементов A. Известно, что $a^2 = 0$ для всех элементов $a \in D$. Докажите, что $axa = 0$ для всех $a \in D$, $x \in A$.

7. Дана матрица A размером $n \times n$, где элементы матрицы a_{ij} равны последней цифре числа $(i + j - 2)$.

   (a) Вычислите определитель матрицы при $n \leqslant 8$;

   (b) Вычислите определитель матрицы при $n \geqslant 11$;

   (c) Докажите, что определитель матрицы делится на 10^7 при $n = 9$ и $n = 10$.

8. Обозначим частичную сумму гармонического ряда через

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Найти сумму следующего ряда:

$$\frac{H_1}{10} + \frac{H_2}{100} + \frac{H_3}{1000} + \ldots$$

2017–2018

9 декабря 2017

1. Привести пример вещественной матрицы A такой, что $A^4 = I$, но при этом $A^2 \neq \pm I$, где I — единичная матрица.

2. Существует ли такая расходящаяся числовая последовательность $\{x_n\}$, что при любом натуральном $k > 1$ её подпоследовательность $\{x_{kn}\}$ сходится?

3. Вычислите
$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^{2k} + 2017}{2018^x + 1}\, dx,$$
где $k \in \mathbb{Z}$.

4. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что
$$f(x) + f\left(3 - \frac{9}{x}\right) = x - \frac{9}{x}$$
для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

5. К параболе проведены две касательные l_a и l_b в точках A и B. Точка C симметрична точке A относительно l_b, а точка D симметрична точке B относительно l_a. Докажите, что точки A, B, C и D образуют ромб тогда и только тогда, когда AB проходит через фокус параболы.

   Можно использовать оптическое свойство параболы без доказательства.

6. Найдите все такие натуральные n, при которых
$$C_n^0 \cdot C_n^1 \cdot \ldots \cdot C_n^n$$

является точным квадратом.

Здесь $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *— биномиальный коэффициент.*

7. Докажите сходимость последовательности $\{a_n\}$, где

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + \sin a_n, \end{cases}$$

и найдите её предел.

8. Функция $F(n, k)$, определённая для всех целых неотрицательных n и k, удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} F(n,k) = F(n-1,k) + F(n,k-1), & n \geqslant 1, k \geqslant 1, \\ F(n,0) = 1, & n \geqslant 0, \\ F(0,k) = 2F(0,k-1) + 1, & k \geqslant 1. \end{cases}$$

Вычислите $F(n, n)$.

2017–2018 (дополнительный тур)

13 марта 2018

1. Найдите определитель матрицы A порядка n, где
$$a_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$$
для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant n$.

2. Найдите сумму ряда
$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{3n^2-1}{(n^3-n)^2}.$$

3. Найдите все непрерывные функции $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что
$$f(x^2) + f(x) = 2.$$

4. При каких m, n правильный m-угольник можно разрезать на несколько (два и более) равных правильных n-угольников?

5. Дана обратимая выпуклая вниз функция $f(x) \in C(R)$. Известно, что существует такая точка c, что $f(c) < c$ и $f'(c) = 1$. Докажите, что существуют такие различные точки a и b, что
$$\int\limits_a^b \left(f(x) + f^{-1}(x)\right) dx = b^2 - a^2.$$

Республиканская олимпиада по математике 2016

01 апреля 2016

1. Какие натуральные числа представимы в виде
$$x^2 - y^2 + 2x + 2y$$
для некоторых целых x и y?

2. Пусть $\alpha(x)$ — первая цифра после запятой в десятичной записи числа 2^x.
а) Докажите, что функция $\alpha(x)$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$.
б) Докажите, что $3.5 < \int\limits_0^1 \alpha(x)dx < 4.5$.

3. В конечном поле произведение всех ненулевых элементов не равно единице. Докажите, что сумма всех элементов поля равна нулю.

4. В эллипсе с фокусами F_1 и F_2 проведена хорда MN, которая проходит через фокус F_2. На прямой F_1F_2 выбраны две точки S и T такие, что прямые SM и TN являются касательными к эллипсу. Точка D симметрична F_2 относительно прямой SM, точка E симметрична F_2 относительно NT. Прямые DS, TE и MN при пересечении образуют треугольник ABC (точка C не лежит на MN). Докажите, что:

   а) CF_2 — медиана треугольника ABC;

   б) CF_1 — биссектриса треугольника ABC.

5. Максималист и минималист по очереди вписывают по одному числу в таблицу размера $n \times n$ (последовательно,

строчка за строчкой, слева направо и сверху вниз). Каким окажется ранг получившейся матрицы, если максималист изо всех сил старается его максимизировать, а минималист — минимизировать? (Ответ может зависеть от n и от того, кто делает первый ход.)

6. Функция $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на всей области определения. Известно, что

$$f'(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) + f(x)$$

для всех $x > 1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{e^x} = 2$. Докажите, что $f(2) < 20{,}16$.

Республиканская олимпиада по МКМ 2016

01 апреля 2016

Стоимость задач:
10 баллов каждая задача.

1. Введём функцию

$$f(n) = \left[\sqrt{1}\,\right] + \left[\sqrt{2}\,\right] + \left[\sqrt{3}\,\right] + \ldots + \left[\sqrt{n^2-1}\,\right] + \left[\sqrt{n^2}\,\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превышающее x. Опишите функцию, которая вычисляет $f(n)$ для данного натурального n, не используя при этом операцию извлечения корня и вещественную арифметику.

2. На декартовой координатной плоскости нарисованы две полупараболы: график функции $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$ и его копия, повёрнутая на прямой угол по часовой стрелке. Эти две кривые отсекают от прямой, параллельной оси ординат, отрезок длины L. Обозначим через $S(L)$ — площадь отсечённой фигуры.

   а) Докажите, что $S(L) > 1$ при $L > 2$;

   б) Напишите функцию, которая вычисляет $S(L)$ для данного положительного вещественного числа L.

3. Найдите все дифференцируемые функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению

$$f(x-y) + f(x+y) = f'(x^2+y^2)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Дана функция $f\colon [0, 2n] \to \mathbb{R}$. Пусть $f_i = f(i)$ — значения функции во всех целых i от 0 до $2n$. Дана переменная S

вещественного типа с начальным значением 0. За один ход робот может выбрать целое i от 1 до $2n-1$, затем добавить к переменной S или вычесть из нее среднее арифметическое значений функции $f(x)$ в узлах $i-1$, i, $i+1$:

$$S := S \pm \frac{f_{i-1} + f_i + f_{i+1}}{3}.$$

Может ли робот за конечное число ходов получить в переменной S значение

$$I = \frac{1}{3}\left(f_0 + 4\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n}\right),$$

которое является приближением интеграла $\int\limits_0^{2n} f(x)\,dx$, если

а) $f(0) = f(2n) = 0$;
б) $f(0) \neq 0$, $f(2n) \neq 0$?

5. Дана некоторая условная машина, состоящая из памяти в n бит и указателя, который в каждый отдельный момент находится над какой-то из этих n ячеек. Перед запуском программы в память записывается некоторое натуральное число m в двоичной системе счисления, а указатель устанавливается над крайним правым (младшим) битом числа. Язык программирования для этой машины состоит из следующих команд:

L	left	сместить указатель налево на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
R	right	сместить указатель направо на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
C	change	изменить значение бита в текущей ячейке на противоположное
A	again	перейти к выполнению первой команды
S	skip	пропустить две следующие команды, если в текущей ячейке 0
F	finish	завершить выполнение программы

Команды записываются в одну строку и выполняются в последовательном порядке, слева направо. При этом запись программы обязана оканчиваться командой **A** или **F**. Напишите для этой абстрактной машины следующие программы:

а) заменить данное число на $(m - 1)$;

б) заменить данное число на $(2^n - m - 1)$;

в) изменить на противоположный его старший (крайний слева) бит.

Примеры:

а) программа, обнуляющая все ячейки: **SSCLA**;

б) программа, которая изменяет второй справа бит, если крайний справа бит нулевой: **SFFLCF**.

6. Из квадратной однородной пластины со стороной 1 случайным образом вырезается квадрат со сторонами, равными $2a$ и параллельными сторонам исходного квадрата. При этом центр квадрата — это случайная величина,

равномерно распределённая по всем допустимым положениям (квадрат со стороной $(1-2a)$).

а) Найдите вероятность $p(a)$ того, что центр тяжести полученной фигуры лежит в вырезанной области.

б) Опишите функцию $p(a)$, которая вычисляет указанную вероятность приблизительно, считая при этом, что нам не известен метод нахождения центра тяжести произвольной фигуры, однако мы можем найти центр тяжести конечного множества точек одинаковой массы.

Республиканская олимпиада по математике 2017

13 апреля 2017

1. Пусть $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, заданная рекуррентно: $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ и $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ при $n \geqslant 1$. Вычислите сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$
если известно, что данный ряд сходится.

2. Найдите все простые p, запись которых в k-ичной системе счисления при некотором натуральном $k > 1$ содержит ровно k различных цифр (старшая цифра не может быть нулём).

3. Докажите, что в любой группе квадрат произведения двух элементов порядка два и куб произведения двух элементов порядка три всегда являются коммутаторами.

4. Точка P лежит внутри выпуклой области, ограниченной параболой $y = x^2$, но не лежит на оси OY. Обозначим через $S(P)$ множество всех точек, полученных отражением P относительно всех касательных к параболе.

   а) Докажите, что значение суммы
   $$\max_{(x,y)\in S(P)} y + \min_{(x,y)\in S(P)} y$$
   не зависит от выбора точки P.

   б) Найдите геометрическое место точек P таких, что $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = 0$.

5. Для каждой функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ обозначим через $s_n(f)$ и $S_n(f)$ нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции f, соответствующие равномерному разбиению $[0,1]$ на n частей. Существует ли такая интегрируемая функция f, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(f)$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(f)$ расходится?

6. Некоторые участники математической олимпиады списали решения некоторых задач у своих товарищей. Докажите, что можно с позором выгнать часть участников так, чтобы получилось, что более четверти от общего числа списанных решений было списано выгнанными участниками у не выгнанных.

Указания

2008–2009

7 декабря 2008

1. С помощью интегрирования по частям докажите, что:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int\limits_0^{\pi} (f'(x+\pi) - f'(x))\sin x\,dx.$$

2. Ответ: мощность конечна и совпадает с количеством элементов в A. Любая такая функция f будет постоянной. Для доказательства этого факта нужно воспользоваться плотностью $\mathbb{Q}\cap[0;1]$ в $[0;1]$ и непрерывностью f на $[0;1]$, рассматривая

$$\inf\{x : x \in \mathbb{Q}\cap[0;1] \text{ и } f(x) \neq f(0)\}$$

(в случае, когда это множество не пусто).

3. Обозначим n количество участников. Выберем победителя первого дня (если это n-й участник) или предпоследнего победителя первого дня (иначе). Пусть это k-й участник, где $k < n$. Значит, в первый день были бои (k, i) для всех i от $k+1$ до n. При этом, $(n-k)$-й по счету бой второго дня будет между k-м участником и победителем среди $(k+1), \ldots, n$.

4. Ответ: все многочлены степени не выше $(n+1)$.

   Рассмотрим

$$g(x) = f(x) - f(0) - \frac{x}{1!}f'(0) - \frac{x^2}{2!}f''(0) - \ldots\ldots - \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

$$\begin{cases} g^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} g(x) \\ g^k(0) = 0, 0 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Согласно теореме о единственности решения задачи Коши при $x > 0$ и $x < 0$, функция будет совпадать с некоторым многочленом вида Cx^{n+1}. А так как функция $g(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в нуле, то C будет одним и тем же при $x > 0$ и $x < 0$.

5. От противного. Пусть $f(b) > f(a)$ (обратный случай аналогичен). Ясно, что $f(a) \geqslant 0$ и $f(b) \geqslant 0$, иначе мы можем сузить отрезок $[a; b]$. Существует такое ε, что

$$\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(t)\,dt > \int_a^b f(t)\,dt = \alpha.$$

Но тогда можно взять $a + \varepsilon < c < b + \varepsilon$, что

$$\int_{a+\varepsilon}^{c} = \alpha.$$

Противоречие.

6. Пусть $\prod\limits_{i \in I} a_i$ имеет ровно $k \leqslant n - 1$ различных простых делителей p_1, ..., p_k. Каждому $X \in \{1, 2, ..., n\}$, включая пустое множество, сопоставим набор из нулей и единиц $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)(X)$, где α_s — остаток при делении на 2 показателя p_s в произведении $\prod\limits_{i \in X} a_i$ (для пустого множества $\prod\limits_{i \in X} a_i = 1$). Количество всевозможных наборов из нулей и единиц длины k есть 2^k, а количество подмножеств $\{1, 2, ..., n\}$ равно $2^n > 2^k$. По принципу Дирихле найдутся два одинаковых набора $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ для различных X_1 и X_2. Тогда положим искомое множество $X = X_1 \Delta X_2$ (симметрическая разность).

7. Используйте теорему Чебышева (постулат Бертрана): для любого $x \geq 2$ найдётся простое число p в интервале $x \leqslant p < 2x$. Проведите индукцией по k с шагом 2.

8. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 D(x) + x$, где

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

— функция Дирихле.

9. Ответ: не всегда. Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Известно, что $g(0)+h(0) = 1$. Так как функция g сюръективная, то существует x_0 такой, что $g(x_0) = g(0)-1$ (ясно, что $x_0 \neq 0$). Отсюда получаем $h(x_0) = 1 - g(0) = h(0)$ — противоречие с инъективностью $h(x)$.

2009–2010

6 декабря 2009

1. Пусть $A = -10^6$. Сначала за 4 хода (сложений или удвоений) получаем $(-10A)$. Затем за 3 хода (умножений или возведений в квадрат) получаем A^7. Наконец, за 4 хода путем умножений (или возведений в квадрат) получаем $(-A^7)$. Осталось сделать последнее действие.

2. Ответ: $\frac{72}{11}$. Нужно решить оптимизационную задачу:

$$\max\{10\alpha + 8\beta + 15\gamma; 9 - (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)\} \to \min,$$

где α, β, $\gamma \in [0; 1]$. Здесь α, β, $\gamma \in [0; 1]$ обозначают доли торта, банки варенья и кастрюли молока, которые съедает малыш.

3. Уравнение касательной:

$$y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}.$$

4. Пусть $h(x) = (f(x))^{2001} \cdot (g(x))^{2009}$. Тогда $h'(x) \geqslant 0$ на $[0; 1]$.

5. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Заметим, что:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

6. Достаточно использовать неравенство Бернулли:

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$$

при $x \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

7. Ответ: $-\frac{1}{n}$. Заметим, что $(x_1+x_2+...+x_{n+1})^2 \geqslant 0$. Откуда легко получить, что:

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_i,x_j)+(n+1)\geqslant 0.$$

Пусть искомая величина равна S.

$$2\frac{n(n+1)}{2}S\geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_i,x_j)\geqslant -(n+1).$$

Откуда и получается $S\geqslant -\frac{1}{n}$.

Докажем методом математической индукции, что существует пример для $s=-\frac{1}{n}$. При $n=1$ достаточно выбрать вектора $x_1=(1;0)$ и $x_2=(-1;0)$. Допустим для $n-1\geqslant 1$ построены вектора x_1, x_2, ..., x_n такие, что $(x_i,x_j)=-\frac{1}{n-1}$ для всех $i<j$ и $(x_i,x_i)=1$.

Умножим все n векторов на $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ и дополним каждый вектор еще одной координатой со значением $-\frac{1}{n}$. Добавим к системе вектор $(0,0,0,...,0,1)$. Легко убедиться, что скалярное произведение любых двух различных векторов новой системы равно $-\frac{1}{n}$ и все векторы единичной длины.

2010–2011

12 декабря 2010

1. Композиция непрерывных функций является непрерывной функцией. Композиция сюръективных функций — сюръективной. Значит, $h_1(x) = f(g(x))$ и $h_2(x) = g(f(x))$ — непрерывные сюръективные функции.

   Из сюръективности $h_1(x)$ и $h_2(x)$ следует, что существуют такая точка x_1, что $h_1(x_1) = 1$, и существует такая точка x_2, что $h_2(x_2) = 1$. Значит для функции $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ верно, что $h(x_1) \geqslant 0$ и $h(x_2) \leqslant 0$. По теореме Вейерштрасса, существует такая точка, что $h(x_0) = 0$, что и требовалось.

2. Ответ:

$$\sin(1) + \sin(1)\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k \prod_{s=0}^{2k-1}(r-s)\right) +$$

$$+\cos(1)\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \prod_{s=0}^{2k}(r-s)\right) - r \bmod 2.$$

   Сумма под пределом является суммой Дарбу для функции $x^r \cos x$ на отрезке $[0;1]$ при равномерном разбиении:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r \cos\frac{k}{n} = \int_0^1 x^r \cos(x)dx = I_r,$$

   где I_r находятся стандартным интегрированием по частям:

$$I_r = \int_0^1 x^r \cos x dx = \int_0^1 x^r d(\sin x) =$$

$$= \sin(1) + r\int_0^1 x^{r-1}d(\cos x) =$$
$$= \sin(1) + r\cos(1) - r(r-1)I_{r-2}.$$

После замены $J_r = \frac{I_r}{r!}$ получается простое рекуррентное соотношение:

$$J_r = \frac{1}{r!}\sin(1) + \frac{1}{(r-1)!}\cos(1) - J_{r-2},$$

которое позволяет выписать в явном виде I_r при четном и нечетном r.

3. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$. Поскольку он сходится в точке $x = 1$, то, по второй теореме Абеля, он сходится равномерно на $[0, 1]$. Следовательно, предельная функция непрерывна на $[0; 1]$. Отсюда следует утверждение задачи.

4. Сначала докажем, что если неравенство верно для n, то оно верно и для $2n$. Для этого достаточно применить неравенство для n точек:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \ldots, \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}.$$

Методом математической индукции получается неравенство для всех $n = 2^k$.

Далее докажем, что если неравенство верно для n, то оно верно и для $n - 1$. Для этого достаточно применить неравенство для n точек:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}.$$

С учетом первой части, получаем, что неравенство верно для всех n.

5. Натуральное число $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ имеет в точности $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$ делителей. По условию задачи это число простое. Значит, без ограничения общности, $\alpha_1 = p - 1$, а все остальные $\alpha_i = 0$. То есть $a = q^{p-1}$. Если $q = p$, то $a(a^k - 1)$ делится на p явно. Если $q \neq p$, то $(p, q) = 1$ и можно применить малую теорему Ферма: $q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Значит, $a^k \equiv 1 \pmod p$.

6. Легко заметить, что следы произведений матриц AB и BA всегда совпадают:

$$\mathbf{tr}AB = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j (BA)_{jj} = \mathbf{tr}BA.$$

Матриц, удовлетворяющих условию, не существует, так как след матрицы слева равен 0, а след матрицы справа равен размерности матрицы.

7. Ответ: -1. Данный ряд сходится условно. Значит, последовательность $S_N^+ + S_N^-$ сходится к некоторой константе, а $S_N^+ - S_N^-$ к $+\infty$.

$$\lim_{N \to \infty} (S_N^+ + S_N^-) = C$$

Так как, S_N^- стремится к $-\infty$, то

$$\lim_{N \to \infty} \frac{S_N^+}{S_N^-} = \lim_{N \to \infty} \frac{C - S_N^-}{S_N^-} = -1.$$

8. Предлагаем решить эту задачу самостоятельно. И не забудьте прислать решение авторам пособия.

2011–2012

10 декабря 2011

1. Ответ: 144. Так как минимальный элемент множества равен мощности множества, то указанное количество равно:

$$\sum_{k=0}^{5} C_{11-k}^{k} = 144.$$

2. Ответ: $(2; 1+\sqrt{2}]$. Пусть α — один из острых углов треугольника. Тогда:

$$\frac{h}{r} = \sin\alpha + \cos\alpha + 1 = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

3. (Абдикалыков А.К.) Ответ: $x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}$, $y_{2012} = \frac{1-3^{2012}}{2\alpha}$. Заметим, что из условия следует $x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = x_n + \alpha y_n$. Таким образом, $x_n + \alpha y_n = x_0 + \alpha y_0 = 1$ для всех n. Исключив y_n из первого рекуррентного соотношения, получим $x_{n+1} = 3x_n - 1$. Решив полученное с помощью замены $t_n = x_n - \dfrac{1}{2}$, найдём

$$\begin{cases} x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}, \\ y_{2012} = \dfrac{1 - x_{2012}}{\alpha} = \dfrac{1-3^{2012}}{2\alpha}. \end{cases}$$

4. Ответ: нет. Достаточно рассмотреть подпоследовательность $\{x_{60k}\}$.

5. Ответ: $\frac{\pi}{2}$. Обозначим искомый интеграл как I. Сделаем

подстановку $x = \dfrac{\pi}{2} - t$:

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2\left(\cos^2 t\right) + \cos^2\left(\sin^2 t\right)\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2\left(\cos^2 t\right) + 1 - \sin^2\left(\sin^2 t\right)\right)\, dx = \pi - I.$$

6. Ответ: 1.

$$\frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} =$$

$$= \frac{n+2}{n!(1 + n + 1 + (n+1)(n+2))} =$$

$$= \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

7. Ответ: $x + C$ и $-x + C$, где C — постоянная. Заметим, что $|f(1) - f(0)| = 1$ (из условия). Для $t \in (0;1)$ имеем:

$$1 = |f(1) - f(0)| \leqslant |f(1) - f(t)| + |f(t) - f(0)| \leqslant$$

$$\leqslant (1 - t) + t = 1.$$

Следовательно, либо $f(t) = t + f(1) - 1$ для всех t, либо $f(t) = -t + f(1) + 1$ для всех t (в зависимости от знака $f(1) - f(0)$).

8. (Абдикалыков А.К.) Нетрудно доказать, что уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет ровно один корень на любом из отрезков вида $\left[\pi l - \dfrac{\pi}{2}, \pi l + \dfrac{\pi}{2}\right]$, $l \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $x_n \in \left[\pi n - \dfrac{\pi}{2}, \pi n + \dfrac{\pi}{2}\right]$ и поэтому при $k \to \infty$

$$|\cos x_{n_k}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x_{n_k}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x_{n_k}^2}} =$$

$$= O^*\left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = O^*\left(\frac{1}{n_k}\right),$$

откуда и следует, что два данных ряда сходятся или расходятся одновременно.

9. (Абдикалыков А.К.) Ответ: $(n-2)\cdot 2^{n-1}$. Переставим строки матрицы A так, чтобы все минус единицы стали на главную диагональ; при этом модуль определителя не изменится. Определитель изменённой матрицы находится с помощью элементарных преобразований и равен $(n-2)\cdot(-2)^{n-1}$.

10. Пусть a_1, ..., a_n — все обратимые элементы S. Тогда $\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{a_i a_1, a_i a_2, ..., a_i a_n\}$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$. Следовательно, $a_i S = S$ для всех i для всех $i \in \{1, ..., n\}$. Отсюда $S^2 = nS$.

    Если $1 \neq -1$, то все обратимые элементы разбиваются на пары противоположных, т.е. $S = 0$. Если $1 = -1$, то $n = 0$ или 1.

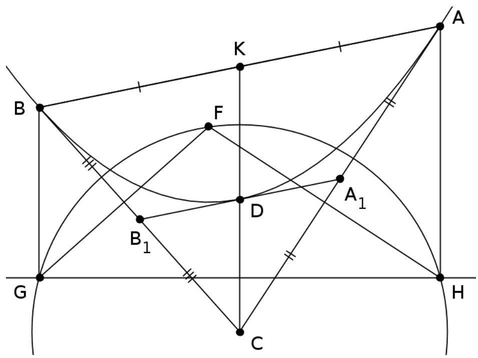
2012–2013

21 декабря 2012

1. (Абдикалыков А.К.) Пусть x — вектор-столбец, все элементы которого равны 1, тогда произвольная целочисленная матрица Q порядка n будет «весёлой» тогда, и только тогда, когда вектор-столбец Qx будет содержать только чётные числа. Возьмём теперь любую целочисленную матрицу A и любую «весёлую» матрицу B, тогда все компоненты вектор-столбца $ABx = A(Bx)$ будут чётными, следовательно, матрица AB — «весёлая».

2. t является корнем $x^2 = 0$ тогда, и только тогда, когда $(t + 1)$ является корнем $x^2 = 1$.

3. Обозначим через F фокус параболы, через H и G — проекции точек A и B на директрису параболы.



Свойство 1. C — центр описанной окружности треугольника FGH. Согласно оптическому свойству параболы: AC — биссектриса $\angle FAH$. А согласно определению $AF = AH$. Значит AC — серединный перпендикуляр

к FH. Аналогично BC — серединный перпендикуляр к FG.

Свойство 2. прямая KC параллельна оси симметрии параболы и равноудалена от AH и BG. Из свойства 1, KC — серединный перпендикуляр к GH. А точка K равноудалена от прямых AH и BG, поэтому KC параллельна оси симметрии.

Обозначим D — точку пересечения KC и параболы, A_1 и B_1 — пересечение касательной к параболе в точке D с прямыми CA и CB.

Свойство 3. A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC. Согласно свойству 2, A_1 равноудалена от прямых KC и AH, а B_1 равноудалена от KC и BG. Значит, $AA_1 = A_1C$ и $BB_1 = B_1C$.

4. (Абдикалыков А.К.) Ответ: 4, 5, 6, 7. Перепишем это равенство в виде $\sum\limits_{k=2}^{n} \left[\sqrt[k]{n}\,\right] = n$. В левой части полученного соотношение находится сумма $n-1$ натурального числа, расположенного в порядке невозрастания, следовательно, $[\sqrt{n}\,] = 2$, $[\sqrt[3]{n}\,] = 1$. Выводим $n \in \{4, 5, 6, 7\}$; все эти значения удовлетворяют исходному равенству.

5. Ответ: 981. Подходящие числа записываются в троичной системе счисления только цифрами 0 и 1. Таким образом, запись искомого числа в троичной системе счисления совпадает с двоичной записью числа 100:

$$100 = 64 + 32 + 4 = 1100100_2.$$

Ответ на задачу:

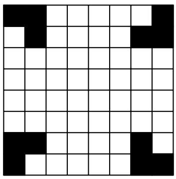
$$3^6 + 3^5 + 3^2 = 729 + 243 + 9 = 981.$$

6. Умножив обе части данного равенства на A^n слева, получим $a_0 = 0$ и исключим единичную матрицу из равенства. Умножим теперь то же равенство на A^{n-1}, получим $a_1 = 0$ и исключим уже A в первой степени. Продолжая этот процесс, получим требуемое. Доказательство утверждения в обратную сторону тривиально.

7. Ответ: $\frac{4}{3}(\pi^2 - 9)$. Достаточно воспользоваться тождеством:

$$\frac{1}{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3} = 4\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2.$$

8. Никакие две из указанных 12 клеток не могут быть заняты или быть побиты одним конем.



9. Воспользуемся неравенством:

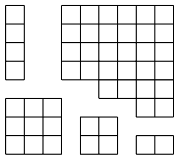
$$\int\limits_0^1 (f(x) - ax - b)^2 \, dx \geqslant 0,$$

которое верно для любых $a, b \in \mathbb{R}$. a и b выбираются соответствующим образом.

2013–2014

20 декабря 2013

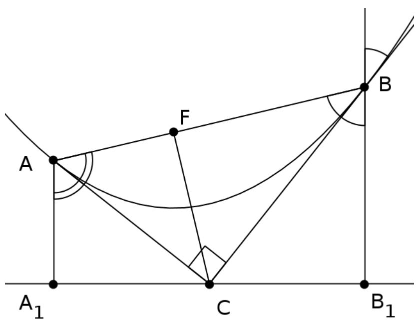
1. Ответ: можно. Одно из возможных решений:



2. Ответ: 0. Прибавив к первой строке все остальные, получим нулевую строку, так как по теореме Виета сумма корней равна нулю.

3. Докажем, что касательные к параболе, проведенные из любой точки на директрисе параболы, — взаимно перпендикулярны.

   F — фокус, d — директриса, AB — хорда параболы, проходящая через фокус F, A_1, B_1 — проекции A, B на d.



Свойство 1. Касательные к параболе, проведенные в концах хорды AB, взаимно перпендикулярны. Утверждение

легко получить с учетом того, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны, а AC и BC — биссектрисы углов $\angle ABB_1$ и $\angle BAA_1$ (согласно оптическому свойству).

Свойство 2. C — точка пересечения касательных — лежит на директрисе. В силу равенства треугольников ΔAA_1C и ΔAFC, ΔBB_1C и ΔBFC, получаем $\angle A_1CB_1 = \pi$.

4. Последовательно полагайте в исходном соотношении:

   (a) $a = x$, $b = 0$, $c = 0$;

   (b) $a = x * 0$, $b = 0$, $c = y$;

   (c) $a = 0$, $b = x$, $c = 0$;

   (d) $a = 0 * x$, $b = 0$, $c = y$.

5. а) Количество интересных перестановок порядка N вычисляется с помощью формулы включения-исключения:

$$S(N) = N! - \frac{N!}{1!} + \frac{N!}{2!} - \frac{N!}{3!} + \dots + (-1)^N \frac{N!}{N!} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{N!}{k!}$$

   б) e^{-1}.

6. Ответ: $k = 2$. Замена: $t = \ln x$. Тогда

$$\int\limits_1^2 (1 + k\ln x)\, x^{x^k + k - 1} dx = \int\limits_0^{\ln 2} \left(e^{te^{kt}}\right)' dt =$$

$$= e^{te^{kt}} \Big|_0^{\ln 2} = 2^{2^k} - 1.$$

7. а) Для любого целого n куб n может давать при делении на 9 только следующие остатки: 0, 1 или 8. Следовательно, числа вида $9k \pm 4$ не могут быть представлены в виде суммы трех кубов.

б) Используйте тождество:

$$6x = (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3.$$

8. Ответ: $\frac{(n/2)!}{(n/4)!}$. Из условия следует, что для любого k от 1 до n верно $f(f(k)) = n+1-k$, то есть определить $f(f(k))$ можно однозначно. Также очевидно, что $f^4(k) = k$. Из четности n понятно, что $f^2(k) \neq k$. Следовательно, $f(k) \neq k$ и $f^3(k) \neq k$.

   В качестве $f(1)$ можно выбрать любое значение из $n-2$ (кроме 1 и n). Сразу однозначно определяются значения $f(1)$, $f(f(1))$ и $f(f(f(1)))$. Далее для s (любых из $n-4$ еще неопределенных значений) можно выбрать любое из $n-6$ допустимых значений (кроме уже определенных 4 значений, s и $n+1-s$). Итог ($n = 4m$):

$$(n-2) \cdot (n-6) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 2 = \frac{(2m)!}{m!}.$$

9. Ответ: $2 - \frac{1}{2^n}$.

   Ясно, что многочлен $xP(x) - 1$ имеет степень $n+1$. Его корнями при этом будет $n+1$ число: 2^k при k от 0 до n. Значит, этот многочлен представляется в виде

$$xP(x) - 1 = A(x-1)(x-2)\ldots(x-2^n).$$

   Коэффициент A можно найти, приравнивая свободный член: $A = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{1+2+\ldots+n}}$. Свободный член $P(x)$ равен коэффициенту при x^1 в правой части:

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

10. Ответ: $\frac{k^2+k+2}{2}$. Выберем некоторую вершину A: на расстоянии 1 от неё расположено k вершин (обозначим это множество вершин B), а на расстоянии 2 — $(n-1-k)$ вершин (обозначим это множество вершин C). Посчитаем количество различных четырехугольников.

Способ первый: вершины, противоположные A в соответствующем четырехугольнике, обязательно содержатся в C. Каждая такая вершина определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе $\frac{n(n-k-1)}{4}$.

Способ второй: соседи вершины A обязательно содержатся в B. Каждая такая пара определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе $\frac{nk(k-1)}{8}$.

Приравниваем данные соотношения и получаем:

$$n = \frac{k^2+k+2}{2}.$$

2013–2014 (дополнительный тур)

15 марта 2014

1. Операцию деления пополам можно получить следующим образом:
$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}$$
А операцию умножения так:
$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

2. Ответ: 1. По теореме Виета: $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Используя уравнения, заменим
$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha}{\alpha^3}.$$
Осталось заметить, что:
$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma) = 1.$$

3. Ответ: 25. Пример:
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
Первый случай: если 4-ки стоят на позициях, в которых сумма индексов разной четности, то определитель равен:
$$\Delta = 4 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 + 4 \cdot s_3 + 4 \cdot s_4 + s_5 + s_6,$$
где $s_i = \pm 1$. Легко понять, что он не больше 18.

Второй случай: если 4-ки стоят на позициях, в которых сумма индексов одинаковой четности, то определитель равен:

$$\Delta = 4 \cdot 4 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 + 4 \cdot s_3 + s_4 + s_5 + s_6.$$

Ясно, что этот определитель не превосходит 27 и является нечетным. Достаточно показать, что все s_i одновременно не могут быть 1.

4. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \frac{i}{2}$. После замены $t = \frac{1}{z}$ система примет вид:

$$\begin{cases} |t| = 1 \\ t + t^{11} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Откуда легко получить, что $|t - \sqrt{3}| = 1$. Значит, решения могут находиться только среди точек пересечения единичных окружностей в центрами в $(0; 0)$ и $(\sqrt{3}; 0)$.

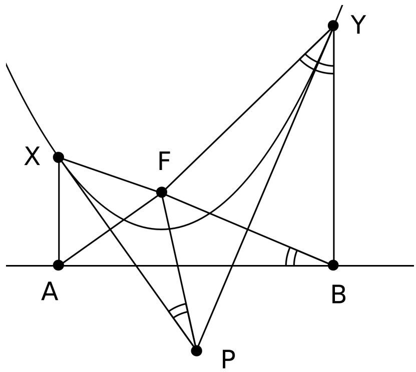
5. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Разобьем интеграл по области интегрирования на два и сделаем замену $x = -t$ в первом:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Известно, что P — центр описанной окружности треугольника AFB (см. задачу 3 из олимпиады 2012–2013). Значит, $\angle FPX = \angle FBA = \angle FYP$. То есть треугольники FYP и FPX подобны.



7. (Баев А.Ж.) Утверждение: $f^{2014}(x) = x$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f(x) = x$ имеет решение. Легко доказывается от противного для произвольного уравнения $f^k(x) = x$ при $k > 1$.

   Пусть $f(x) \neq x$. Легко показать, что $f(x_v) > x_v$, где x_v — вершина параболы. Это значит, что множество значений $f(x)$ вложено в область возрастания $f(x)$. То есть $f(x) \geqslant f(x_{min}) > x_{min}$. Значит, минимальное значение $f^{k+1}(x)$ будет больше, чем минимальное значение $f^k(x)$.

8. (Баев А.Ж.) Композицией мы можем получить функции:

$$s(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{x};$$

$$h(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(\cos(\operatorname{arctg}(x)))) = \sqrt{x^2+1}.$$

   Применив k раз функцию $h(x)$, можно получить:

$$g_k(x) = h(h(...h(x)...)) = \sqrt{x^2+k}.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}, n > 1$ существует такое $k = n^2 - 1$, что $g_k(1) = n$. То есть, для любого натурального существует композиция такая, что $R(1) = n$.

Рассмотрим

$$g_2(s(x)) = \sqrt{\frac{1+2x^2}{x^2}}.$$

Если в качестве x положить n (из условия $m^2 - 2n^2 = 1$), то получим $g_2(s(n)) = \frac{m}{n}$.

9. Индукцией по l доказывается, что

$$H_{2^l} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^l} \leqslant l + 1.$$

Далее, с учетом того, что $p_i < 2^{100}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}\right)^k < k! \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n \leqslant n} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}} \leqslant$$

$$\leqslant k!(H_{2^{100k}} - 1) \leqslant (100k)k!,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} < \big((100k) \cdot k!\big)^{\frac{1}{k}}.$$

Здесь k — любое натуральное. Положим $k = 4$.

2014–2015

10 декабря 2014

1. Ответ: $f(x) = x - \frac{3}{2}$. Рассмотрим функцию
$$g(x) = f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right).$$
Она непрерывна и удовлетворяет соотношению
$$g(2x+1) = \frac{1}{3}g(x),$$
для любого $x \in \mathbb{R}$. После замены $t = 2x + 1$:
$$g(t) = \frac{1}{3}g\left(\frac{t-1}{2}\right).$$
Отсюда $g(-1) = 0$. Далее, для каждого $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим последовательность, заданную рекуррентным способом:
$$\begin{cases} y_1 = y, \\ y_{n+1} = \frac{y_n - 1}{2}. \end{cases}$$
Тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = -1$ и $g(y_n) = \frac{1}{3}g(y_{n+1})$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Значит,
$$g(y) = \frac{1}{3^n}g(y_n).$$
В силу непрерывности имеем $g(y) = 0$.

2. Ответ: $-\frac{\pi^2}{18}$.

Во-первых:
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = \{u = v^2\} = 2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-v^2)}{v}\,dv =$$

$$= 2\left(\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-v)}{v}\,dv + \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v}\,dv\right),$$

то есть

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = -2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v}\,dv.$$

Во-вторых:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = \{z = v^3\} = 3\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-z^3)}{z}\,dz$$

3. Ответ: нет. Для некоторого $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \frac{H}{N!} + r_N,$$

где $H \in \mathbb{Z}$ и

$$|r_N| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{N+2} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(N+1)!} < \frac{1}{N!}.$$

При этом $r_N \neq 0$, так как $r_N = \frac{1}{(N+1)!}\varepsilon_{N+1} + r_{N+1}$ и $|r_{N+1}| < \frac{1}{(N+1)!}$.

4. (Абдикалыков А.К.) Пусть $f(\lambda) = |B - \lambda I|$ — характеристический многочлен матрицы B. Заметим, что требуется доказать то, что $f(1) \neq 0$; другими словами, то,

что число 1 не является собственным значением матрицы B. А поскольку из $AB = A + 2014B$ следует $(A - 2014I)(B - I) = 2014I$, то матрица $B - I$ обязана быть невырожденной.

5. Ответ: при четном n выиграет начинающий, а при нечетном — его соперник. Легко заметить, что если текущее число нечетное, то игрок изменит число на четное; а если четное, то игрок всегда может уменьшить число на 1.

6. Пусть x таково, что $x^3 - x - 1 = 0$. Но тогда
$$x^5 - x^4 - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1) = 0.$$

7. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Из тождества
$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$
можно получить соотношение
$$\operatorname{arcctg} F_{2n+1} = \operatorname{arcctg} F_{2n} - \operatorname{arcctg} F_{2n+2}.$$
Искомая сумма, таким образом, будет равна
$$\operatorname{arcctg} F_2 = \pi/4.$$

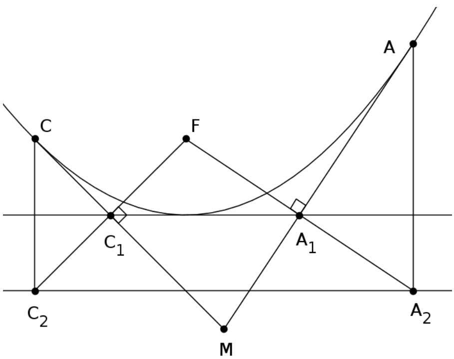
8. Все перестановки, обратные сами себе, можно представить в виде композиции непересекающихся циклов длины 2. Число перестановок α порядка $n+1$ таких, что $\alpha = \alpha^{-1}$ и $\alpha_{n+1} = n+1$, очевидно, равно a_n; число же перестановок α порядка $n+1$ таких, что $\alpha = \alpha^{-1}$ и $\alpha_{n+1} = k \neq n+1$ для некоторого фиксированного k, равно a_{n-1}. Общее число инволюций порядка $n + 1$ равно $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$.

9. (Баев А.Ж.) Ответ: 24. Пусть столбцов не меньше, чем строк. Если столбцов не менее 5, то строк менее 5. Доказательство от противного (в первой строке как минимум 3 клетки одного цвета, значит, в остальных строках обязательно найдется прямоугольник с клетками противоположного цвета). Если строк 3 или 4, то столбцов менее 7 (доказательство аналогично предыдущему).

   Так как столбцов не более 6, строк не более 4, то ответ 24. Пример:

A	A	A	B	B	B
A	B	B	B	A	A
B	A	B	A	B	A
B	B	A	A	A	B

10. Обозначим: KLM — исходный треугольник, A, B, C — точки касания параболы и прямых MK, KL, LM. A_2, B_2, C_2 — проекции A, B, C на директрису. F — фокус параболы. A_1, B_1, C_1 — середины A_2F, B_2F, C_2F.

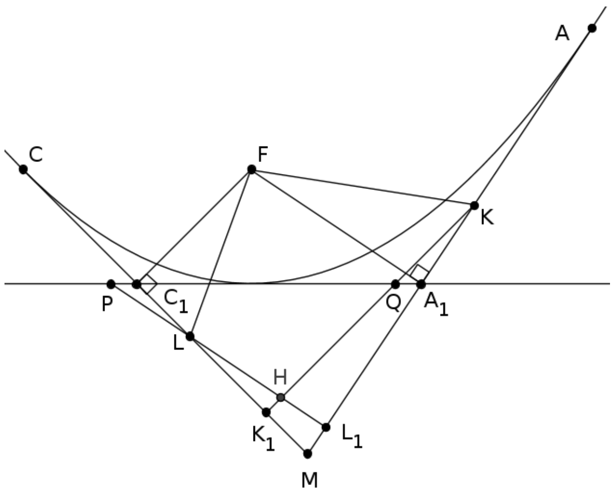


Свойство 1. Прямая, содержащая $A_1B_1C_1$, является касательной к параболе и параллельна директрисе. Данный

факт легко получить из оптического свойства параболы и определения параболы (треугольник FAA_2 — равнобедренный).

Свойство 2. Треугольники FA_1K и FC_1L подобны. Данный факт получается из вписанных четырехугольников FKA_1B_1 и FB_1LC_1.

Обозначим: L_1 — основание высоты из L на KM, K_1 — основание высоты из K на LM. P и Q — точки пересечения LL_1 и KK_1 с A_1C_1.



Свойство 3. $A_1Q = PC_1$. По соответствующим теоремам синусов для треугольников PC_1L, KA_1Q и C_1FA_1 можно получить, что

$$\frac{PC_1}{A_1Q} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{\sin Q}{\sin P} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin A_1} = \frac{C_1L}{A_1K} \cdot \frac{A_1F}{C_1F} = 1$$

Последнее верно из свойства 2.

Свойство 3. H лежит на директрисе. Для этого достаточно заметить, что треугольники PHQ и A_1FC_1 равны. Значит, расстояние от H и F до прямой A_1C_1 одинаково.

2015–2016

19 декабря 2015

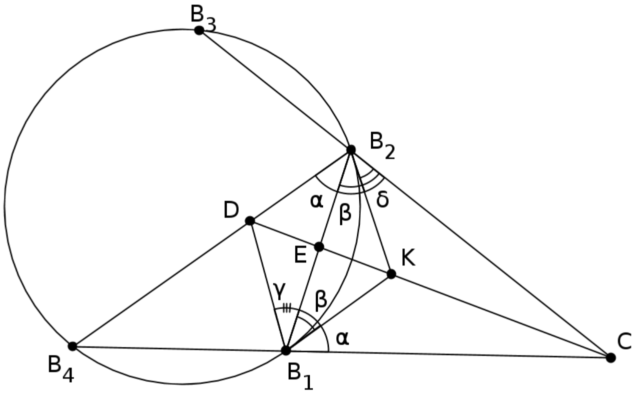
1. (Абдикалыков А.К.) Пусть $z_n = a_n b_n - x_n y_n$. Видно, что z_n можно представить в виде $z_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ для некоторых постоянных α, β, γ. Но так как z_n обращается в ноль при трёх различных n, то $\alpha = \beta = \gamma = 0$, и z_n тождественно равно нулю.

2. Ответ: 12090. Положим n простым: $f(n) = f(1) - f(n)$. То есть
$$f(p) = \frac{1}{2} f(1)$$
для любого простого p.

   Положим $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ и обозначим
$$k(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s.$$
   Несложно показать, что:
$$f(n) = \left(1 - \frac{k(n)}{2}\right) f(1).$$
   Имеем $2015 = 5^1 \cdot 13^1 \cdot 31^1$ и $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$. Соответственно $k(2015) = 3$, $k(2016) = 8$.

3. Ответ: $f(x) \equiv 0$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $f'(n) = f'(n+1) = 0$, откуда $f(n) = f(n+1) = 0$. Докажем от противного, что $f(x) = 0$ для всех $x \in [n, n+1]$. Пусть $x_0 \in (n, n+1)$ и $f(x_0) \neq 0$, например, $f(x_0) > 0$. Т.к. f дифференцируема, то f — непрерывна на $[n, n+1]$. По теореме Вейерштрасса у нее существует максимум на $[n, n+1]$:
$$f(x_1) = \max_{[n,n+1]} f(x) > 0 \text{ и } x_1 \in (n, n+1).$$
   По теореме Ферма имеем: $f'(x_1) = 0$, откуда $f(x_1) = 0$ — противоречие.

4. Так как парабола является коническим сечением, то можно осуществить проективное преобразование с точкой в вершине соответствующего конуса, переводящее параболу в окружность. Дан вписанный четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$. Касательные в B_1 и B_2 пересекаются в точке K, касательные в B_3 и B_4 в точке L. Осталось доказать, что KL, B_1B_3 и B_2B_4 пересекаются в одной точке.



Пусть C — точка пересечения B_1B_4 и B_2B_3. E и K — точки пересечения CK с B_1B_2 и B_4B_2. Обозначим $\angle DB_2E = \angle CB_1K = \alpha$, $\angle EB_2K = \angle EB_1K = \beta$, $\angle KB_2C = \delta$ и $\angle DB_1B_2 = \gamma$. Выпишем двойные отношения (по теоремам синусов) от вершин B_1 и B_2 соответственно:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{CK}{KE} : \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{\sin\delta}{\sin\beta} : \frac{\sin(\alpha+\beta+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{CK}{KE} : \frac{CD}{DE}$$

Откуда получаем $\delta = \gamma$, то есть D — точка пересечения диагоналей. Аналогично доказывается, что D лежит на CL. Итог: KL проходит через точку пересечения диагоналей.

5. (Абдикалыков А.К.) Ответ: -3π.

   Очевидно, что $x = -3\pi$ является одним из решений. Введём функцию $f(x) = 2x + \sin x$. Тогда данное уравнение можно переписать в виде $f(f(x)) = -12\pi$. Поскольку функция $f(x)$ (а значит, и функция $f(f(x))$ вместе с ней) является возрастающей, то это уравнение не может иметь больше одного корня.

6. Каждому числу a_j сопоставим ребро, соединяющее вершины графа с номерами j и a_j. Полученный мультиграф имеет n вершин и n рёбер, и, следовательно, обязан содержать цикл. Номера вершин, входящих в любой из циклов, формируют требуемое подмножество P.

7. (Абдикалыков А.К.) Ответ: (1) — матрица порядка 1. Если порядок матрицы $n > 1$, то из $\operatorname{rg} A = 1$ следует вырожденность матрицы A, что, в свою очередь влечёт присутствие собственного значения 0. Так как след равен сумме всех собственных значений, то $\operatorname{tr} A = 0$ — противоречие. Удовлетворять всем условиям задачи может только матрица первого порядка, единственный элемент которой равен 1.

2016–2017

10 декабря 2016

1. Пусть I — искомый интеграл. Сделав замену $t = 2\pi - x$, получим $I = -I$; следовательно, $I = 0$.

2. Так как $P(1) = 2$ и $P(2) = 1$, то многочлен $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 3 - x$ для некоторого многочлена $Q(x)$. Осталось подобрать многочлен $Q(x)$ так, чтобы для любого рационального x (кроме, быть может, 1 и 2) $Q(x)$ было иррациональным. Например, подойдёт $Q(x) = \sqrt{2}$. Нетрудно показать, что полученный многочлен $P(x) = \sqrt{2}(x-1)(x-2) + 3 - x$ удовлетворяет всем указанным требованиям.

3. Заметим, что $f(x) > 0$, для всех $x \in \mathbb{R}$ и $f(-x) = f(x)$, т.е. $f(x)$ — четная. Следовательно,
$$f(x) = \sqrt{f(x)f(-x)} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i^x + a_i^{-x} + 2)},$$
при этом все множители в произведении положительны и нестрого возрастают при $x > 0$.

4. Обозначим вершины A_1, A_2, A_3, A_4, а косинус двугранного угла при ребре A_iA_j через c_{ij}. Суммарная площадь проекций трёх граней на четвёртую равна площади этой грани:
$$c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = 1,$$
для всех 4 возможных троек (i, j, k). Решая систему из 4 уравнений с 6 неизвестными получим: $c_{12} = c_{34}$, $c_{13} = c_{24}$ и $c_{23} = c_{14}$. Также известно, что высоты тетраэдра на все 4 грани равны (например, из A_3 и A_4). Значит, равны

высоты в гранях (например, из A_3 на A_1A_2 и из A_1 на A_3A_4). Это приводит к тому, что противоположные ребра равны.

5. Введём функцию
$$f(x) = c_0x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}.$$
Очевидно, $f(0) = 0$; из условия следует $f(1) = 0$. Тогда по теореме Ролля найдётся хотя бы одно такое число $\xi \in [0,1]$, что $f'(\xi) = 0$, а данное уравнение как раз можно переписать в виде $f'(x) = 0$.

6. Пусть $c \in D$ и $v \in A$. Тогда $cv \in D$ и $vc \in D$. От противного. Пусть $cvw = 1$ для некоторого $w \in A$. Тогда $c = c^2vw = 0$.

   Пусть $a \in D$ и $x \notin D$. Тогда $axax = 0$, откуда $axa = 0 \cdot x^{-1} = 0$.

   Пусть $c, d \in D$. Тогда $(c+d)^4 = (cd+dc)^2 = 0$. Следовательно, $c + d \in D$, откуда $cd = -dc$.

   Если $a \in D$ и $x \in D$, то $axa = a \cdot (-ax) = -a^2x = 0$.

7. (Баев А.Ж.)

   (a) При n от 3 до 8, вторая строка является полусуммой первой и третьей, следовательно, определитель 0.

   (b) При $n \geqslant 11$ первая и одиннадцатая строка совпадают.

   (c) Вычтем из i-й строки $(i-1)$-ю для всех i с n строки до 2. Далее еще раз вычтем из i-й строки $(i-1)$-ю для всех i с n строки до 3. Получится матрица с блоком размера 7×7, где на побочной диагонали стоят числа -10, а остальные элементы нули.

8. В полученном двойном ряде можно поменять местами знаки суммирования:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^i} \cdot \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} \cdot \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{10^i} \right) = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \cdot 10^{j-1}}.$$

Искомая сумма равна $\dfrac{10}{9} S\left(\dfrac{1}{10}\right)$, где $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$. Из равномерной сходимости на множестве $[0, 1/2]$ функционального ряда $S(x)$ и ряда, полученного из него почленным дифференцированием, следует

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Так как $S(0) = 0$, то $S(x) = -\ln(1-x)$. Таким образом,

$$\frac{H_1}{10} + \frac{H_2}{100} + \frac{H_3}{1000} + \ldots = \frac{10}{9} \ln \frac{10}{9}.$$

2017–2018

9 декабря 2017

1. Пример
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

2. Пример
$$x_n = \begin{cases}1, & n \text{ — простое},\\ 0, & n \text{ — непростое}.\end{cases}$$

3. Обозначим интеграл
$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^{2k}+2017}{2018^x+1}\,dx,$$
и сделаем замену $t=-x$.
$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{t^{2k}+2017}{2018^t+1}\cdot 2018^t\,dt,$$
После сложения данных интегралов
$$2I = \int\limits_{-1}^{1} (x^{2k}+2017)\,dx = \frac{2}{2k+1} + 2\cdot 2017.$$

4. Заметим, что для функции $g(x) = 3-\frac{9}{x}$ верно, что $g(g(g(x))) = x$. Откуда получаем систему из трех неизвестных:
$$\begin{cases} f(x) + f\left(3-\frac{9}{x}\right) = x - \frac{9}{x}\\ f\left(3-\frac{9}{x}\right) + f\left(-\frac{9}{x-3}\right) = 3-\frac{9}{x} - \frac{9}{3-\frac{9}{x}}\\ f\left(-\frac{9}{x-3}\right) + f\left(x\right) = -\frac{9}{x-3} - \frac{9}{-\frac{9}{x-3}}\end{cases}$$

для всех $x \neq 0$, $x \neq 3$. Откуда находим решение $f(x) = x - \frac{3}{2}$ для всех $x \neq 0$, $x \neq 3$. С учетом непрерывности, получаем, что функция доопределяется на всех числовой прямой в таком же виде.

5. Достаточно использовать 2 факта:

   1) все лучи исходящие из фокуса параболы после отражения идут параллельно оси симметрии параболы;

   2) биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых перпендикулярны.

6. Все нечетные n подходят. Для этого достаточно вспомнить, что биномиальные коффициенты обладают свойством симметрии $C_n^k = C_n^{n-k}$. В случае четного n, согласно постулату Бертрана среди чисел от $n/2$ до n существует простое. Причем степень данного простого числа будет нечетна, чего не может быть.

7. Замена $b_n = \pi - a_n$ дает последовательность:

$$\begin{cases} b_0 = \pi - 1, \\ b_{n+1} = b_n - \sin b_n. \end{cases}.$$

   Правая часть $b_n - \sin b_n$ положительна и ограничена на $(0; \pi - 1)$. Несложно показать, что последовательность будет убывающей. Следовательно, она сходится. Предел легко найти из предельного перехода: $b = \pi n$. Так как предел должен лежать в $[0; \pi - 1]$, то это 0. Ответ: π.

8. Заметим, что $f(n, k) + f(k, n) = 2^{n+k+1}$. Это можно доказать по индукции. Ответ: $f(n, n) = 4^n$.

2017–2018 (дополнительный тур)

13 марта 2018

1. Последовательно для i от n до 2 из i-й строки вычитаем $(i-1)$-ю:

$$\det\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & C_1^0 & C_2^1 & \dots & C_{n-1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_n^2 & \dots & C_{2n-3}^{n-2} \end{pmatrix} = ... = 1$$

2. Идея.

$$\frac{3n^2-1}{(n^3-n)^2} = \frac{6n^2-2}{2n^2(n-1)^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{(n^2+n)^2+(n^2-n)^2-2(n^2-1)^2}{n^2(n-1)^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Все слагаемые $\frac{1}{n^2}$, начиная с $n=4$ встречаются в трех подряд идущих начальных слагаемых и в сумме сокращаются. Остаются лишь два слагаемых при $n=2$ и одно при $n=3$ общей суммой: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

3. $f(x)=2-f(x^2)=f(x^4)$. Так как функция четная, рассмотрим только положительные x.

Во–первых, $f(x^{4n})=f(x)$. Пусть $0\leqslant x<1$. В силу непрерывности:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{4n})=f(0).$$

Во–вторых, $f(x^{\frac{1}{4n}})=f(x)$. Пусть $x>1$. В силу непрерывности:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{4n}})=f(1).$$

В силу непрерывности и $f(1-\varepsilon) = f(0)$, получаем, что $f(1) = f(0)$. Значит, $f(x) = const$. Из условия получаем, что $f(x) = 1$.

4. Пусть некоторый угол n-угольника содержит несколько углов m-угольников. Угол правильного m-угольника равен $180\frac{m-2}{m}$. Если $m \geqslant 4$, то угол будет не менее $90°$. Значит, $m = 3$, $n = 6$.

   Пусть углы n-угольника и m-угольников равны: $n = m$. Так как сами многоугольники не совпадают, значит, есть точка на границе n-угольника в которой сходятся все несколько правильных m-угольников. То есть $180°$ делится на $180°\frac{n-2}{n}$, что равносильно условию n делится на $n-2$, или 2 делится на $n-2$. Получаем: $n = 4$ или $n = 3$.

   Ответ: $(n, m) \in \{(6; 3), (3; 3), (4, 4)\}$.

5. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$: $g(x)$ выпукла вниз, $g'(c) = 0$, $g(c) < 0$. Из выпуклости следует, что существует такая точка $a < c$, что $g(a) = g(b) = 0$. Существуют точки $a < c < b$ такие, что $f(a) = a$, $f(b) = b$.

   Графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ в квадрате $[a; b] \times [a; b]$ симметричны относительно прямой $y = x$. То есть область, ограниченная кривыми $y = x$ и $y = f(x)$, симметрична области, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = f^{-1}(x)$:

$$\int_a^b (f(x) + f^{-1}(x))dx =$$

$$= -\int_a^b (x - f(x))dx + \int_a^b (f^{-1}(x) - x)dx + 2\int_a^b x dx = b^2 - a^2$$

Республиканская олимпиада по математике 2016

01 апреля 2016

1. (Васильев А.Н.)

   Заметим, что справедливо разложение
   $$x^2 - y^2 + 2x + 2y = (x + y)(x - y + 2).$$
   Поэтому натуральное число представимо в этом виде тогда, и только тогда, когда раскладывается на произведение двух множителей одной четности. Ясно, что это все числа, которые дают остаток отличный от 2 при делении на 4.

   Пример для нечетного n: $x = \frac{n-1}{2}$, $y = \frac{3-n}{2}$.

   Пример для n, кратного 4: $x = y = \frac{n}{4}$.

2. (Васильев А.Н.)

   а) Легко понять, что функция кусочно–постоянная. Причем количество промежутков постоянства конечно и равно 10. Значит, функция интегрируема по Риману.
   б) Найдем промежуток, на котором первая цифра числа 2^x равна k:
   $$1 + \frac{k}{10} \leq 2^x < 1 + \frac{k+1}{10},$$
   $$\log_2\left(1 + \frac{k}{10}\right) \leq x < \log_2\left(1 + \frac{k+1}{10}\right).$$

Тогда наш интеграл можно записать в виде суммы:

$$\int\limits_0^1 \alpha(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{9} k \left(\log_2 \left(1 + \frac{k+1}{10} \right) - \log_2 \left(1 + \frac{k}{10} \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{9} k \left(\log_2(k+11) - \log_2(k+10) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{9} k \log_2(k+11) - \sum_{k=0}^{8} (k+1) \log_2(k+11) =$$

$$= 9 \log_2 20 - \sum_{k=0}^{8} \log_2(k+11) = \log_2 \frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 19}$$

Требуется доказать, что

$$2^7 < \left(\frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 19} \right)^2 < 2^9.$$

Докажем левую часть неравенства. Заметим, что по неравенству Коши

$$(10+k) * (20-k) < \left(\frac{10+k+20-k}{2} \right)^2 = 15^2.$$

Отсюда получается оценка слева:

$$\left(\frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 19} \right)^2 > \left(\frac{20^9}{15^9} \right)^2 = \frac{2^{36}}{3^{18}}.$$

Остается доказать, что $2^{29} > 3^{18}$. Заметим, что $2^8 > 3^5$ и $2^5 > 3^3$. Перемножив три раза первое неравенство и один раз второе, получим требуемое.

Докажем правую часть неравенства. Заметим, что верно следующее неравенство:

$$(10+k)(20-k) = 200 + k(10-k) > 200.$$

Значит, оценку справа можно получить так:

$$\left(\frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 19}\right)^2 < \left(\frac{400^4 \cdot 20}{200^4 \cdot 15}\right)^2 = 2^8 \left(\frac{4}{3}\right)^2 < 2^9.$$

3. (Фольклор) Первое решение («наивное»). Можно доказать более общее утверждение:

В любом конечном поле $F \neq Z_2$ сумма всех элементов равна нулю.

Пусть F — конечное поле и a_1, a_2, ..., a_n — все его элементы. Если $F \neq Z_2$, то существует элемент a, отличный от нуля и единицы. Тогда aa_1, aa_2, ..., aa_n попарно различны, следовательно

$$F = \{a_1, ..., a_n\} = \{aa_1, ..., aa_n\}.$$

Отсюда $S = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n aa_i = aS$, откуда следует, что $S = 0$.

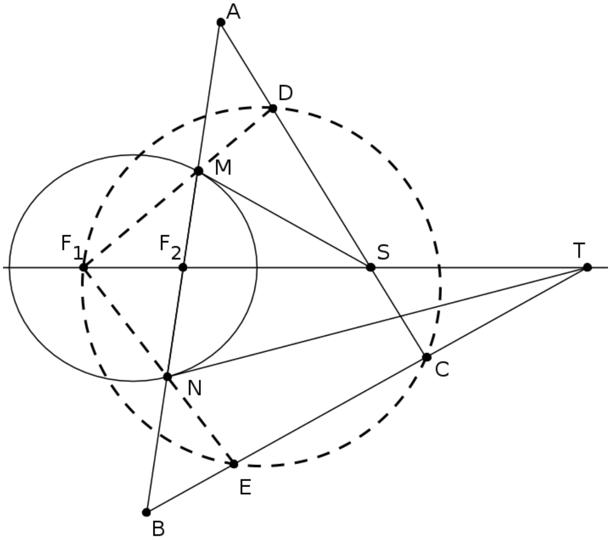
Второе решение(существенно использующее структуру конечного поля). Утверждение из предыдущего решения можно доказать и по-другому. Ненулевые элементы поля образуют группу по умножению, а порядок элемента группы делит порядок группы (по теореме Лагранжа). Следовательно, любой элемент поля F является корнем многочлена $x^n - x = 0$, где n — количество элементов поля. С другой стороны, по другой теореме Лагранжа, у этого многочлена не более n корней. Иными словами, указанный многочлен имеет своими корнями все элементы поля. Применяя теорему Виета, получаем требуемое.

Третье решение (еще одно). У каждого ненулевого элемента x есть обратный x^{-1}, причем $x \neq x^{-1}$ при $x \neq \pm 1$. Следовательно, все ненулевые элементы, кроме ± 1, разбиваются на пары с произведением 1. Поэтому произведение всех элементов поля равно -1. Из условия задачи следует, что $-1 \neq 1$. Следовательно, характеристика поля отлична от 2. Тогда любой ненулевой элемент отличается от своего противоположного, то есть все ненулевые элементы разбиваются на пары с нулевой суммой. Что означает, что сумма всех ненулевых элементов поля равна нулю. Добавление нуля сумму не изменяет. Утверждение доказано.

4. (Баев А.Ж.)

Факт 1 (оптическое свойство эллипса): луч, направленный из одного фокуса после отражения от внутренней стороны эллипса проходит через другой фокус. То есть $\angle(F_1M, SM) = \angle(SM, F_2M)$, где $\angle(l_1, l_2)$ обозначает ориентированный угол между прямыми. Как следствие, получаем, что $\angle F_1MS + \angle F_2MS = \pi$. По условию, $\angle F_2MS = \angle DMS$. Откуда получаем, что F_1, M, D лежат на одной прямой. Аналогично, F_2, N, E лежат на одной прямой.

Факт 2 (определение эллипса). Сумма расстояний от фокусов до точек на эллипсе постоянна. Как следствие $F_1M + MF_2 = F_1N + NF_2$. Так как треугольники F_2MS и DMS симметричны относительно прямой MS, то и треугольники F_1MF_2 и AMD тоже симметричны и, соответственно, равны. Аналогично, симметричны и равны треугольники F_1NF_2 и BNE.



а)

$$AF_2 = AM + MF_2 = F_1M + MF_2 =$$
$$= F_1N + NF_2 = BN + NF_2 = BF_2.$$

Значит, CF_2 — медиана треугольника ABC.

б) Четырехугольник F_1DCE вписан в окружность, так как $\angle F_1DC + \angle F_1EC = \angle MF_2S + \angle NF_2S = \pi$. Так как в этом четырехугольнике две смежные стороны равны ($F_1D = F_1E$), то CF_1 — биссектриса треугольника ABC.

5. (Клячко А.А.)

1) Рассмотрим случай четного n. Тогда каждый из игроков полностью контролирует $\frac{n}{2}$ столбцов (при этом не имеет значения, кто делает первый ход). Ясно, что Максималист может сделать свои столбцы линейно независимыми и обеспечить ранг матрицы минимум $\frac{n}{2}$. Также ясно, что Минималист может сделать все свои столбцы нулевыми, ограничив ранг матрицы $\frac{n}{2}$.

Ответ для четного n: $\frac{n}{2}$.

2) Пусть n нечетно. Тогда, если мы раскрасим клетки таблицы в черный и белый цвета в шахматном порядке, каждый из игроков будет контролировать клетки одного цвета.

а) Пусть Максималист делает первый ход. Тогда он сможет сделать ранг матрицы максимальным, то есть равным n. Опишем его стратегию. Она состоит в том, что, заполняя очередную диагональную клетку, он следит за тем, чтобы соответствующий главный (угловой) минор был отличен от нуля. Это всегда можно обеспечить, поскольку этот минор разлагается по своей последней строке, а алгебраическое дополнение последнего элемента не равно нулю. Ответ для нечетного n, когда Максималист делает первый ход: n.

б) Пусть Минималист делает первый ход. Тогда он сможет обеспечить равенство нулю определителя всей матрицы: заполняя очередную диагональную клетку (кроме последней), он следит за тем, чтобы соответствующий угловой минор был отличен от нуля, а в конце обнуляет определитель всей матрицы. Значит, он сможет гарантировать ранг меньше n. С другой стороны, Максималист сможет обеспечить, чтобы минор, полученный вычеркиванием последней строки и первого столбца, был отличен от нуля (аналогично пункту 2 а)). Тем самым, ранг матрицы будет равен по крайней мере $n-1$.

Ответ для нечетного n, когда Минималист делает первый ход: $n-1$.

6. (Баев А.Ж.)

1 шаг. Подставим в соотношение $x = \frac{t}{t-1}$, где $t > 1$. По-

лучим
$$f'\left(\frac{t}{t-1}\right) = f(t) + f\left(\frac{t}{t-1}\right).$$

Получим свойство:
$$f'\left(\frac{t}{t-1}\right) = f'(t).$$

2 шаг. Продифференцируем исходное соотношение по x.
$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} f'\left(\frac{x}{x-1}\right) + f'(x).$$

После замены из свойства, получаем:
$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Уравнение интегрируется по частям:
$$f'(x) = Ce^{x+\frac{1}{x-1}}.$$

Добавим условие на бесконечности и найдем $C = 1$:
$$f'(x) = 2e^{x+\frac{1}{x-1}}.$$

3 шаг. Заметим, что если в исходное дифференциальное уравнение мы подставим $x = 2$, то получим $f(2) = \frac{1}{2} f'(2)$. Значит:
$$f(2) = e^3.$$

Осталось доказать, что $e^3 < 20.16$. Заметим, что для проверки этого неравенства грубых оценок типа $e < 3$ или $e < 2.8$ недостаточно, требуется более точная: $e < 2.72$.

Республиканская олимпиада по МКМ 2016

01 апреля 2016

1. (Абдикалыков А.К.)

   Максимальный балл давался за алгоритм с асимптотической сложностью $O(1)$ (явную формулу), промежуточные баллы — за сложность $O(n)$ и $O(n^2)$.

$$\sum_{j=1}^{n^2}[\sqrt{j}\,] = \sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\sum_{\substack{[\sqrt{j}\,]=k\\ 1\leqslant j\leqslant n^2}}1\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(k\cdot\sum_{\substack{[\sqrt{j}\,]=k\\ 1\leqslant j\leqslant n^2}}1\right)+n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(k\cdot\sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1}1\right)+n = \sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)+n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)+n = 2\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+n =$$

$$= \frac{(n-1)n(4n+1)}{6}+n = \frac{n(4n^2-3n+5)}{6}$$

2. (Абдикалыков А.К.)

   а) Две полупараболы из условия задачи — это графики функций $y = x^2$ и $y = -\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$. Поэтому искомая функция

$$S(L) = \int\limits_0^{f^{-1}(L)} f(x)\,dx,$$

где $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. (В силу монотонности функции $f(x)$ корректно вводить $f^{-1}(L)$.) Так как, кроме прочего, подынтегральная функция в определении $S(L)$ положительная, то и сама функция $S(L)$ — возрастающая.

Поскольку $S(2) = 1$ (это можно показать разными способами: как графически, составив квадрат, например, так и аналитически, посчитав явно интеграл), то $S(L) > 1$ при $L > 2$.

б) Найдём сначала $x_0 = f^{-1}(L)$ с помощью бинарного поиска, затем вычислим

$$S(L) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x_0} = \frac{x_0^3 + 2x_0^{\frac{3}{2}}}{3} =$$

$$= \frac{x_0(2x_0^2 + 2\sqrt{x_0} - x_0^2)}{3} = \frac{x_0(2L - x_0^2)}{3}.$$

3. (Баев А.Ж.)

Продифференцируем по x и y:

$$f'(x-y) + f'(x+y) = 2xf''(x^2+y^2),$$

$$-f'(x-y) + f'(x+y) = 2yf''(x^2+y^2).$$

Пусть $x \neq 0$, $y \neq 0$. Приравняем $f''(x^2+y^2)$:

$$(y+x)f'(x-y) = (x-y)f'(x+y).$$

Пусть $|x| \neq |y|$.

$$\frac{f'(x+y)}{x+y} = \frac{f'(x-y)}{x-y}.$$

Зафиксируем величину $x - y = A$, отличную от нуля. Тогда выражение справа не зависит от y и равно некоторой константе $2C$.

$$\frac{f'(2y+A)}{2y+A} = \frac{f'(A)}{A} = 2C.$$

Заметим, что $t = 2y + A$ может принимать любые ненулевые значения. Значит, при $t \neq 0$:

$$f'(t) = 2Ct.$$

$$f(t) = Ct^2 + C_1.$$

При подстановке в исходное уравнение, получим: $C_1 = 0$. При $t = 0$ доопределяется из непрерывности $f'(t)$ (по соотношению в условии). Ответ: $f(t) = Ct^2$.

4. (Баев А.Ж., Абдикалыков А.К.)

Пусть конечное значение $S = \sum\limits_{j=1}^{2n-1} c_j \cdot \frac{f_{j-1}+f_j+f_{j+1}}{3}$. Тогда пункт б) эквивалентен решению нижеуказанной системы линейных уравнений, причём в целых числах. Видно, что система состоит из $(2n+1)$ уравнения относительно $(2n-1)$ неизвестной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{2n-3} \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ \cdots \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассматривая только первые $(2n-1)$ уравнения, мы получим систему с нижнетреугольной матрицей и определителем, равным единице, а значит, всеми уравнениями, кроме последних двух, все неизвестные определяются однозначно, принимая при этом целые значения. Таким образом, задача сводится к нахождению таких n, чтобы система из этих $(2n-1)$ уравнения имела решение, совместимое с дополнительными условиями $c_{2n-2}+c_{2n-1}=4$, $c_{2n-1}=1$. Решая эту систему методом Гаусса, получаем

$$\begin{array}{ccc} c_1 = 1, & c_2 = 3, & c_3 = -2, \\ c_4 = 3, & c_5 = 1, & c_6 = 0, \\ c_7 = 1, & c_8 = 3, & c_9 = -2, \\ c_{10} = 3, & c_{11} = 1, & c_{12} = 0, \\ & \ldots & \end{array}$$

Таким образом, равенства $c_{2n-2}=3$, $c_{2n-1}=1$ выполняются только в том случае, если

$$2n-1 = 5 \pmod 6,$$

или, что то же самое, n кратно 3.

Пункт а) эквивалентен решению той же системы в целых числах, но уже без первого и последнего уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{2n-3} \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ \cdots \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Фиксируя $c_1 = c$ и используя все уравнения, кроме последнего $(c_{2n-2}+c_{2n-1}=4)$, находим

$$\begin{array}{ccc} c_1 = c, & c_2 = 4-c, & c_3 = -2, \\ c_4 = 2+c, & c_5 = 2-c, & c_6 = 0, \\ c_7 = c, & c_8 = 4-c, & c_9 = -2, \\ c_{10} = 2+c, & c_{11} = 2-c, & c_{12} = 0, \end{array}$$

$$\ldots$$

Значит,

$$c_{2n-2} + c_{2n-1} = \begin{cases} c, & 2n-2 = 0 \pmod 6, \\ -2-c, & 2n-2 = 2 \pmod 6, \\ 4, & 2n-2 = 4 \pmod 6. \end{cases}$$

Видно, что в любом случае можно подобрать такое c, чтобы выполнялось равенство

$$c_{2n-2} + c_{2n-1} = 4,$$

из чего следует, что система совместна при любом n.

5. (Абдикалыков А.К.)

   а) Уменьшить двоичное число на единицу: **CSLAF**.

   б) Поменять все биты: **CLA**.

   в) Поменять только старший бит: **CLRCLA**.

6. (Баев А.Ж.)

   а) Пусть исходный квадрат — это квадрат $[0,1] \times [0,1]$ на плоскости, а центр вырезанного квадрата расположен в точке (x_0, y_0). Квадрат целиком поместится, если $(x_0; y_0) \in [a, 1-a] \times [a, 1-a]$.

   1 шаг. Найдем центр тяжести. Запишем функцию плотности массы пластины по оси OX:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < x_0 - a \\ 1 - 2a, x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ 1, x < x_0 + a \end{cases}$$

   Найдем проекцию центра тяжести m на ось OX:

$$m = \frac{\int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{1 - 8a^2 x_0}{2(1 - 4a^2)}.$$

2 шаг. Найдем вероятность попадания центра тяжести в вырезанную часть.

$$P = P(m \in [x_0 - a; x_0 + a]) =$$

$$= P\left(\frac{1 - 8a^2 x_0}{2(1-4a^2)} < x_0 + a\right) - P\left(\frac{1 - 8a^2 x_0}{2(1-4a^2)} < x_0 - a\right) =$$

$$= P\left(x_0 + a > \frac{1}{2} + 4a^3\right) - P\left(x_0 - a > \frac{1}{2} - 4a^3\right).$$

Обознаим полученную разность $P_1 - P_2$.

Вычислим P_1. Заметим, что $x_0 + a$ равномерно распределено на $[2a, 1]$. Поэтому важно понять, попадает ли $\frac{1}{2} + 4a^3$ в интервал $[2a, 1]$. $\frac{1}{2} + 4a^3 < 1$ ввиду того, что $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Проверим левую границу:

$$\frac{1}{2} + 4a^3 > 2a$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)(a - \varphi)(a - \overline{\varphi}) > 0$$

где $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Значит, $\frac{1}{2} + 4a^3$ попадает в интервал $[2a, 1]$ при $a < \varphi$.

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1-8a^3}{2(1-2a)}, & a < \varphi \\ 1, & a > \varphi. \end{cases}$$

Аналогично вычислим P_2. $x_0 - a$ равномерно распределено на $[0, 1 - 2a]$. Поэтому важно понять, попадает ли $\frac{1}{2} - 4a^3$ в интервал $[0, 1 - 2a]$. $\frac{1}{2} - 4a^3 > 0$ ввиду того, что $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Значит:

$$P_2 = \begin{cases} \frac{1-4a+8a^3}{2(1-2a)}, & a < \varphi \\ 0, & a > \varphi. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания центра тяжести в вырезанную часть:

$$(P_1 - P_2)^2 = \begin{cases} 4a^2(1+2a)^2, & a \in [0, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}] \\ 1, & a \in \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

б) Промоделируем методом Монте–Карло и подсчет центра тяжести, и подсчет ответа. Генерируем N подходящих квадратов. У каждого из них генерируем M случайных точек. Если центр тяжести данных точек находится внутри квадрата, то засчитываем этот квадрат. Иначе — нет. Отметим, что порядок аппроксимации данного метода $O\left(\frac{1}{\sqrt{NM}}\right)$.

Республиканская олимпиада по математике 2017

13 апреля 2017

1. (Абдикалыков А.)

Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+1}}{2^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \left(S - \frac{T_1}{2^1}\right) = 2S - 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+2}}{2^n} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+2}}{2^{n+2}} = 4 \cdot \left(S - \frac{T_1}{2^1} - \frac{T_2}{2^2}\right) = 4S - 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+3}}{2^n} = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{n+3}}{2^{n+3}} =$$
$$= 8 \cdot \left(S - \frac{T_1}{2^1} - \frac{T_2}{2^2} - \frac{T_3}{2^3}\right) = 8S - 7.$$

Так как по условию $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, то

$$8S - 7 = 4S - 3 + 2S - 1 + S,$$

откуда следует $S = 3$.

2. (Абдикалыков А.)

Пусть k-ичная запись простого числа p для некоторого $k > 1$ выглядит как $\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}}$, где $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ — некоторая перестановка цифр $(0, 1, \ldots, k-1)$. Тогда

$$p = a_0 \cdot k^{k-1} + a_1 \cdot k^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot k^0 \equiv$$
$$\equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1} \pmod{(k-1)}.$$

Поскольку сумма всех цифр равна $k(k-1)/2$, то можно сделать вывод, что число p делится на $(k-1)/2$, если k нечётно и на $k-1$, если k чётно. Учитывая, что $p \geqslant k^{k-1} > k-1$ — простое число, заключаем, что k должно удовлетворять совокупности соотношений

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{k-1}{2} = 1, & k = 2l+1, \\ k-1 = 1, & k = 2l. \end{array}\right.$$

Таким образом, $k = 2$ или $k = 3$, а значит, достаточно перебрать числа 10_2, 102_3, 120_3, 201_3, 210_3. Простыми среди них являются только $2 = 10_2$, $11 = 102_3$ и $19 = 201_3$.

3. (Клячко А.)

а) Для любого элемента x порядка 2 верно $x = x^{-1}$, поэтому

$$(ab)^2 = abab = aba^{-1}b^{-1},$$

если $a^2 = b^2 = e$.

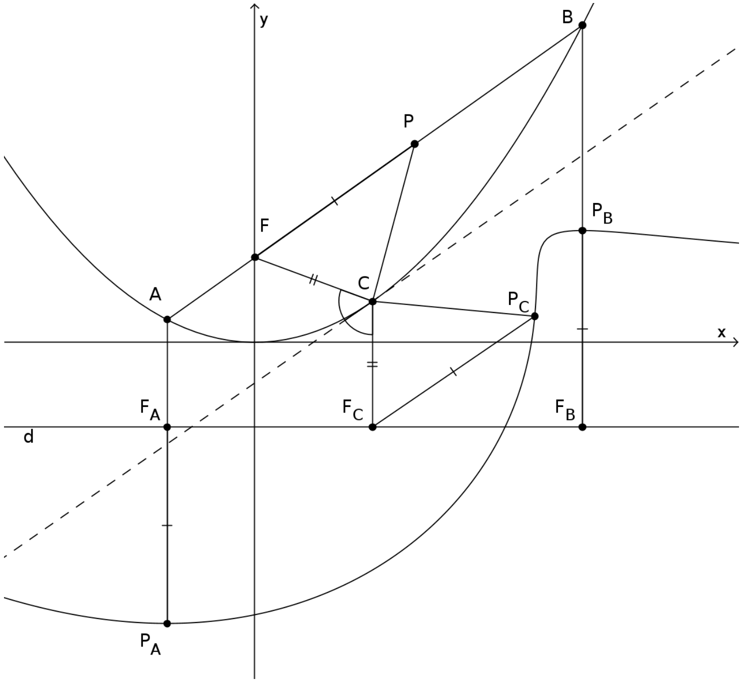
б) Аналогично, для любого элемента x порядка 3 верно $x^2 = x^{-1}$, поэтому

$$(ab)^3 = ababab = ab^4aba^4b = (ab^2)(b^2a)(ba^2)(a^2b) = \\ (ab^2)(b^2a)(ab^2)^{-1}(b^2a)^{-1},$$

если $a^3 = b^3 = e$.

4. (Баев А.)

Обозначим через F фокус параболы, через d директрису параболы. Рассмотрим произвольную касательную к параболе l в произвольной точке C.



Свойство 1: точка F_C, симметричная F относительно l, лежит на директрисе d.

Из определения параболы: $FC = F_CC$. Из оптического свойства параболы $\angle(FC; l) = \angle(l; F_CC)$. Получаем, что l — ось симметрии для отрезков FC и F_CC.

Свойство 2:

$$-\frac{1}{4} - FP \leqslant y(P_C) \leqslant -\frac{1}{4} + FP,$$

где $y(P_C)$ — ордината точки P_C.

Известна директриса данной параболы $y = -\frac{1}{4}$. Ордината точки F_C равна $-\frac{1}{4}$. А точка P_C находится на расстояния не более, чем F_CP_C от директрисы. Осталось заметить, что с учетом свойства 1 треугольники FCP и F_CCP_C равны, то есть $F_CP_C = FP$.

Свойство 3: $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = -\dfrac{1}{4} + FP$ и $\min\limits_{(x,y)\in S(P)} y = -\dfrac{1}{4} - FP$.

Максимум или минимум $y(P_C)$ в свойстве 2 достигается в том случае, если P_CF_C перпендикулярно директрисе. Причем для максимума необходимо, чтобы P_C и C лежали по одну сторону от директрисы, а для минимума — по разные стороны. То есть угол CF_CP_C равен либо 0, либо π (соответственно, угол CFP равен либо 0, либо π). В качестве таких точек C достаточно выбрать точки пересечения FP с параболой A и B. Значит, оба равенства в свойстве 2 достигаются.

Свойство 4: геометрическим местом точек в пункте б) является окружность с центром в F и радиусом $\frac{1}{4}$. Из свойства 3 следует, что $FP = F_BP_B = \frac{1}{4}$.

5. (Васильев А.)

Ответ: да, существует.

Можно привести множество примеров, но мы укажем самый простой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

Обозначив $\frac{i}{n}$ через x_i, имеем: $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$ и

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \begin{cases} 0, i = \overline{1, n-1} \\ 1, i = n \end{cases}$$

Следовательно, $s_n(f) = 0$ и $S_n(f) = \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. При этом f интегрируема на $[0, 1]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

6. (Высоканов Б., Клячко А.)

Обозначим через n количество участников олимпиады и присвоим им номера от 1 до n. Пусть a_{ij} — количество решений, списанных i-ым участником у j-го, при этом полагаем $a_{ii} = 0$. Рассмотрим два случая:

1) $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Если $k = 1$, то доказательство тривиально. Пусть $k \leqslant 2$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что, выгоняя любые k человек из $2k$, мы никогда не достигнем требуемого. Тогда для любого $S' \subset S$, где $|S'| = k$ и $S = \{1, 2, ..., 2k\}$, имеем:

$$\sum_{\substack{i \in S' \\ j \in S \setminus S'}} \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i,j \in S} a_{ij}.$$

Просуммируем эти неравенства по всем S':

$$\sum_{S'} \sum_{\substack{i \in S' \\ j \in S \setminus S'}} a_{ij} \leqslant \frac{1}{4} \sum_{S'} \sum_{i,j \in S} a_{ij}.$$

Заметим, что каждое a_{ij} при $i \neq j$ в сумме слева встретится ровно C_{2k-2}^{k-1} раз, а в сумме справа — ровно C_{2k}^{k} раз. Разделив обе части неравенства на $\sum_{i,j \in S} a_{ij} > 0$, находим:

$$C_{2k-2}^{k-1} \leqslant \frac{1}{4} C_{2k}^{k},$$

что неверно, так как

$$\frac{C_{2k}^{k}}{C_{2k-2}^{k-1}} = 2\left(2 - \frac{1}{k}\right) < 4.$$

2) $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. При $k = 1$ доказательство тривиально. При $k \geqslant 2$ рассуждаем аналогично 1), рассматривая все $S' \in S$ с условием $|S'| = k$ (при этом $S = \{1, 2, ..., 2k + 1\}$).

Результаты

2012–2013

21 декабря 2012

№	Участник	ВУЗ	Спец	Курс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ	Диплом
1	Тубалыков Кайрат	КФ МГУ	ММ	1	10	10	10	0	10	10	10	0	0	60	1
2	Керимкулов Бекжан	КФ МГУ	ММ	2	10	0	10	4	10	2	9	0	0	45	2
3	Нурсултанов Медет	КФ МГУ	ММ	5	10	0	0	10	9	6	0	10	0	45	2
4	Киздарбеков Санджар	КФ МГУ	ВМК	2	10	0	0	8	10	10	0	0	0	38	3
5	Оскембеков Сакен	КФ МГУ	ММ	5	10	8	3	10	5	0	0	0	0	36	3
6	Токтаганов Адиль	ЕНУ		1	10	0	0	1	10	0	6	0	0	27	
7	Жадиков Дамир	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	3	8	10	6	0	0	27	
8	Макашев Ануар	КФ МГУ	ММ	2	10	0	0	0	10	2	4	0	0	26	
9	Мусабаева Аягоз	КФ МГУ	ММ	1	9	0	10	0	6	0	0	0	0	25	
10	Аслалеев Абай	КФ МГУ	ММ	1	10	0	5	1	8	0	0	0	0	24	
11	Байгабулов Едильхан	КФ МГУ	Экон	1	10	0	3	1	0	10	0	0	0	24	
12	Пахомов Владимир	КФ МГУ	ВМК	4	10	0	0	0	0	10	1	0	1	22	
13	Зейнекешева Индира	КФ МГУ	ММ	1	10	0	10	1	0	0	0	0	0	21	
14	Калиев Нурлан	КФ МГУ	ВМК	2	8	0	10	1	1	0	0	0	0	20	
15	Сагиолданова Жаннат	КФ МГУ	ВМК	2	0	0	10	0	10	0	0	0	0	20	
16	Тлеубаев Адиль	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	0	0	10	0	4	5	0	19	
17	Замолотов Василий	КФ МГУ	ВМК	2	10	0	6	0	1	1	0	0	0	18	
18	Ибрагимов Мадиар	КФ МГУ	ММ	2	10	0	0	0	8	0	0	0	0	18	
19	Солтанова Дана	КФ МГУ	ВМК	1	0	1	0	0	7	7	0	0	0	15	
20	Журавлев Вадим	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	2	2	7	0	0	0	0	11	
21	Жаксыкелды Акжол	КФ МГУ	ММ	2	10	0	0	0	0	0	0	0	0	10	
22	Максимец Илья	КФ МГУ	ВМК	4	0	0	0	0	10	0	0	0	0	10	
23	Султанов Ерлан	ЕНУ	ММ	1	0	0	0	0	10	0	0	0	0	10	

2013–2014

20 декабря 2013

№	Участник	Спец	Курс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Диплом
1	Тубалыков Кайрат	ММ	2	10	10	0	0	7	0	10	1	0	0	38	1
2	Амир Мирас	ВМ	1	2	10	9	10	2	3	0	0	0	0	36	2
3	Шокетаева Надира	ММ	1	0	10	10	6	2	0	1	1	0	0	30	2
4	Тлеубаев Адиль	ВМ	2	10	10	5	0	2	0	0	0	0	0	27	3
5	Шагадатов Нурлан	ММ	1	0	10	10	0	0	0	0	0	0	0	20	3
6	Таранов Денис	ВМ	1	10	7	0	0	0	0	0	0	0	0	17	3
7	Ламонов Иван	ВМ	2	0	10	0	0	4	0	0	0	0	0	14	
8	Нургалиев Мохаммедали	ВМ	2	2	10	0	0	1	0	0	0	0	0	13	
9-12	Сальменов Нурсултан	ММ	1	2	10	0	0	0	0	0	0	0	0	12	
9-12	Васильев Андрей	ВМ	1	0	10	0	0	2	0	0	0	0	0	12	
9-12	Матвеева Виктория	ВМ	1	0	10	0	0	2	0	0	0	0	0	12	
9-12	Журавлев Вадим	ВМ	2	2	0	0	0	0	10	0	0	0	0	12	
13	Адилова Алтынай	ВМ	1	0	10	0	0	1	0	0	0	0	0	11	
14-18	Шабхатов Асылжан	ВМ	1	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	10	
14-18	Тилеубердиев Асембек	ВМ	1	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	
14-18	Таскынов Ануар	ВМ	1	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	10	
14-18	Байгабулов Едильхан	Экон	2	0	9	0	0	1	0	0	0	0	0	10	
14-18	Кубаев Биржан	ВМ	2	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	10	
19-20	Джусупекова Зинель	ВМ	1	2	5	0	0	1	0	0	0	0	0	8	
19-20	Гусейнов Азим	ММ	1	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	
21	Советхан Амина	ВМ	1	0	5	0	0	0	2	0	0	0	0	7	
22	Свистунов Дмитрий	ЕНУ		0	3	0	2	0	0	1	0	0	0	6	
23	Калинина Ангелина	ВМ	1	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
24	Ибраева Айдана	ВМ	1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	
25-26	Жуман Айгерим	ВМ	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
25-26	Сливкина Анна	ВМ	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
27	Вержбицкий Владислав	ВМ	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	

2013–2014 (дополнительный тур)

15 марта 2014

№	Участник	Факультет	Курс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
1-2	Амир Мирас	ВМК	1	9	10		9			10				38
1-2	Шокетаева Надира	ММ	1	9	10	10	9							38
3	Таскынов Ануар	ВМК	1	10	10				10					30
4	Байгабулов Едильхан	Эконом	2	9	10	10								29
5	Тлеубаев Адиль	ВМК	2	9	10									19
6	Нургалиев Мохаммедали	ВМК	2		10		8							18
7	Журавлев Вадим	ВМК	2		8	9								17
8	Тубалыков Кайрат	ММ	2	9										9

2014–2015

10 декабря 2014

№	Участник	Спец	Курс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Диплом
1	Амир Мирас	ВМК	2	0	10	0	9	10	10	0	0	0	0	39	1
2	Журавская Александра	ВМК	1	0	0	0	0	10	10	10	0	8	0	38	1
3	Булгаков Анатолий	ВМК	2	2	2	0	0	10	9	0	0	0	0	23	3
4	Шокетаева Надира	ММ	2	3	0	0	0	5	10	0	0	0	0	18	3
5	Абайулы Ерулан	ВМК	1	0	0	0	0	10	7	0	0	0	0	17	3
6-8	Таскынов Ануар	ВМК	2	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	10	
6-8	Токтаганов Адильхан	ММ	1	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	10	
6-8	Таранов Денис	ВМ	2	0	0	0	0	9	0	0	1	0	0	10	
9	Батырбеков Аскар	ММ	1	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	
10	Кенесова Аида	ВМ	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	
11	Даку Ансар	ВМ	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	

2015–2016

19 декабря 2015

№	Участник	Спец	Курс	1	2	3	4	5	6	7	Σ	Диплом
1	Журавская Александра	ВМК	2	10	7	1	10	10	10	5	53	1
2	Камалбеков Тимур	ВМК	2	10	10	0	0	0	10	0	30	2
3	Омаров Темирхан	ВМК	2	10	7	0	0	10	0	1	28	2
4	Жусупов Али	ММ	2	0	4	0	4	0	10	1	19	3
5	Абайулы Ерулан	ВМК	2	5	7	0	0	2	3	1	18	3
6	Болотников Димитрий	ММ	1	0	2	0	0	2	10	0	14	3
7-8	Мырзабеков Руслан	ВМК	1	10	0	0	0	0	0	0	10	
7-8	Сеилов Айтмухамед	ММ	1	0	5	0	5	0	0	0	10	
9-10	Кинжикеева Дина	ВМК	2	0	3	0	0	0	2	1	6	
9-10	Токтаганов Адиль	ММ	2	0	4	0	1	1	0	0	6	
11	Алибеков Ануар	ВМК	2	0	2	0	0	0	0	0	2	

2016–2017

10 декабря 2016

№	Участник	ВУЗ	Спец	Курс	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Диплом
1	Бекмаганбетов Бекарыс	КФ МГУ	ММ	1	10	10	10	0	0	0	10	0	40	1
2	Полищук Руслан	НУ		2	10	0	0	1	10	1	10	5	37	1
3	Аскергали Ануар	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	10	0	10	0	10	0	30	2
4	Максат Куанышбай	НУ		1	0	0	8	8	10	0	0	0	26	2
5	Жусупов Али	ЕНУ		2	10	0	1	0	0	0	10	0	21	3
6	Болотников Димитрий	КФ МГУ	ММ	2	10	0	0	0	1	0	8	0	19	3
7	Ергалиев Иса	КФ МГУ	ВМК	1	0	1	0	0	0	0	10	0	11	грамота
8	Кожемяк Виталий	КФ МГУ	ВМК	2	5	0	0	0	0	0	5	0	10	грамота
9	Макатова Батима	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	0	0	0	9	0	9	грамота
10	Кунакбаев Рамазан	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	0	0	0	7	0	7	
11-12	Токтасынов Елдар	НУ		3	0	0	0	0	0	0	1	5	6	
12-12	Шарипов Азат	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	0	0	0	0	6	0	6	
13	Ильясов Жан	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	0	0	0	2	2	0	4	
14-15	Бексугуров Азамат	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	2	0	0	0	1	0	3	
14-15	Мырзабеков Руслан	КФ МГУ	ВМК	2	0	0	0	0	0	0	3	0	3	
16-21	Куанышев Нурдаулет	ЕНУ		2	0	0	0	0	1	0	0	0	1	
16-21	Кабдуали Бек	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
16-21	Дауренова Жансая	НУ		1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
16-21	Таскали Ержайсан	ЕНУ		2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
16-21	Кайратжан Талант	ЕНУ		2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
16-21	Торемуратова Гульбаршын	ЕНУ		2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	

2017–2018

9 декабря 2017

№	Участник	ВУЗ	Спец	Курс	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Диплом
1	Бекмаганбетов Бекарыс	КФ МГУ	ММ	2	10	10	10	10	0	10	10	0	60	1
2	Дайрабай Жумажениc	НУ		2	1	0	10	9	0	10	3	0	33	2
3-5	Аскергали Ануар	КФ МГУ	ВМК	2	0	10	0	9	0	4	0	2	25	3
3-5	Жанахметов Султан	НУ		4	0	0	0	2	10	10	0	3	25	3
3-5	Полищук Руслан	НУ		3	0	0	0	7	0	10	6	2	25	3
6	Ержанов Жалгас	КФ МГУ	ВМК	2	10	10	0	0	0	4	0	0	24	3
7	Куанышбай Максат	НУ		2	10	0	0	9	0	0	1	2	22	3
8-9	Жунис Касым	НУ		3	0	4	0	7	5	4	0	1	21	3
8-9	Сандыбай Сакен	НУ		2	0	0	0	7	0	4	0	10	21	3
10	Бозжигитов Абылайхан	НУ		2	1	0	1	5	0	10	0	0	17	грамота
11	Дукенбай Аслан	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	9	0	4	1	0	14	грамота
12-13	Макатова Батима	КФ МГУ	ММ	2	0	0	0	2	0	10	0	1	13	грамота
12-13	Шарипов Азат	КФ МГУ	ВМК	2	0	0	0	0	0	9	0	4	13	грамота
14-15	Есбай Еркын	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	0	10	1	0	0	11	грамота
14-15	Кайырбеков Нурсултан	НУ		3	0	0	0	0	0	10	0	1	11	грамота
16-17	Есмурзин Ескендір	ЕНУ		2	0	0	0	9	0	0	0	1	10	грамота
16-17	Вагнер Алан	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	0	2	0	5	0	3	10	грамота
18	Азатов Таир	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	0	1	0	5	1	1	8	
19	Азамат Азат	НУ		2	1	0	0	0	0	4	0	2	7	
20-22	Марданов Нурлыбек	ЕНУ		1	0	0	0	1	0	4	0	0	5	
20-22	Джексембаев Руслан	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	0	1	4	0	0	5	
20-22	Кенесбеков Алишер	КФ МГУ	ММ	1	2	0	0	1	0	0	0	2	5	
23	Далел Махамбет	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	0	0	0	4	0	0	4	
24	Шароварова Анастасия	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	0	0	0	0	3	3	
25	Алимгазиев Сержан	КФ МГУ	ВМК	1	0	0	0	0	0	0	1	1	2	
26	Мешитбай Асия	КФ МГУ	ММ	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

2017–2018 (дополнительный тур)

13 марта 2018

№	Участник	Факультет	Курс	1	2	3	4	5	Σ
1	Бекмаганбетов Бекарыс	ММ	2	10	10	10	0	10	40
2	Аскергали Ануар	ВМК	2	0	0	10	9	0	19
3	Дукенбай Аслан	ММ	1	10	0	0	0	0	10
4	Ергалиев Иса	ВМК	2	10	0	0	0	0	10
5	Сурукпаев Аслан	ММ	2	0	10	0	0	0	10
6	Макатова Батима	ММ	2	9	0	0	0	0	9
7	Вагнер Алан	ВМК	1	0	0	0	9	0	9
8	Джексембаев Руслан	ММ	1	9	0	0	0	0	9
9	Ержанов Жалгас	ВМК	2	0	0	0	0	0	0
10	Кунакбаев Рамазан	ММ	2	0	0	0	0	0	0

Республиканская олимпиада по математике 2016

01 апреля 2016

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	6	Σ	Диплом
1	Журавская Александра	КФ МГУ	2	10	9	0	0	9	0	28	1 степени
2	Аманкелды Акежан	НУ	3	3	9	2	0	1	7	22	2 степени
3	Турганбаев Сатбек	КФ МГУ	2	10	7	3	0	0	1	21	2 степени
4	Полищук Руслан	НУ	1	10	7	0	0	0	3	20	3 степени
5	Жанахметов Султан	НУ	2	10	5	0	0	1	3	19	3 степени
6	Токтаганов Адиль	КФ МГУ	2	8	0	0	10	1	0	19	3 степени

Республиканская олимпиада по МКМ 2016

01 апреля 2016

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	6	Σ	Диплом
1	Батырхан Орынкул	НУ	3	10	10	1	5	9	6	41	1 степени
2	Абайулы Ерулан	КФ МГУ	2	5	10	2	2	10	0	29	2 степени
3	Камалбеков Тимур	КФ МГУ	2	8	7	1	0	9	2	27	2 степени
4	Омаров Темирхан	КФ МГУ	2	4	10	0	2	10	0	22	3 степени
5	Сайланбаев Алибек	НУ	3	7	5	3	1	6	0	22	3 степени
6	Иманмалик Ержан	НУ	2	9	3	3	5	1	0	21	3 степени

Республиканская олимпиада по математике 2017

13 апреля 2017

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	6	Σ	Диплом
1	Жанбырбаев Есеналы	КБТУ	2	10	10	10	3	0	10	43	1 степени
2	Бекмаганбетов Бекарыс	КФ МГУ	1	10	10	10	2	10	0	42	2 степени
3	Сайланбаев Алибек	НУ	4	10	10	10	2	0	8	40	2 степени
4	Аманкелды Акежан	НУ	4	9	9	10	5	0	0	33	3 степени
5	Жанахметов Султан	НУ	3	10	10	10	2	0	0	32	3 степени
6	Шакиев Александр	МУИТ	2	10	9	10	0	0	0	29	3 степени