

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
19 декабря 2017

1. Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Пример

$$x_n = \begin{cases} 1, & n - \text{простое,} \\ 0, & n - \text{непростое.} \end{cases}$$

3. Обозначим интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^{2k} + 2017}{2018^x + 1} dx,$$

и сделаем замену  $t = -x$ .

$$I = \int_{-1}^1 \frac{t^{2k} + 2017}{2018^t + 1} \cdot 2018^t dt,$$

После сложения данных интегралов

$$2I = \int_{-1}^1 (x^{2k} + 2017) dx = \frac{2}{2k+1} + 2 \cdot 2017.$$

4. Заметим, что для функции  $g(x) = 3 - \frac{9}{x}$  верно, что  $g(g(g(x))) = x$ . Откуда получаем систему из трех неизвестных:

$$\begin{cases} f(x) + f\left(3 - \frac{9}{x}\right) = x - \frac{9}{x} \\ f\left(3 - \frac{9}{x}\right) + f\left(-\frac{9}{x-3}\right) = 3 - \frac{9}{x} - \frac{9}{3 - \frac{9}{x}} \\ f\left(-\frac{9}{x-3}\right) + f(x) = -\frac{9}{x-3} - \frac{9}{-\frac{9}{x-3}} \end{cases}$$

для всех  $x \neq 0, x \neq 3$ . Откуда находим решение  $f(x) = x - \frac{3}{2}$  для всех  $x \neq 0, x \neq 3$ . С учетом непрерывности, получаем, что функция доопределяется на всех числовой прямой в таком же виде.

5. Достаточно использовать 2 факта:

- 1) все лучи исходящие из фокуса параболы после отражения идут параллельно оси симметрии параболы;
- 2) биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых перпендикулярны.

6. Все нечетные  $n$  подходят. Для этого достаточно вспомнить, что биномиальные коэффициенты обладают свойством симметрии  $C_n^k = C_n^{n-k}$ . В случае четного  $n$ , согласно постулату Бертрона среди чисел от  $n/2$  до  $n$  существует простое. Причем степень данного простого числа будет нечетна, чего не может быть.

7. Замена  $b_n = \pi - a_n$  дает последовательность:

$$\begin{cases} b_0 = \pi - 1, \\ b_{n+1} = b_n - \sin b_n. \end{cases}$$

Правая часть  $b_n - \sin b_n$  положительна и ограничена на  $(0; \pi - 1)$ . Несложно показать, что последовательность будет убывающей. Следовательно, она сходится. Предел легко найти из предельного перехода:  $b = \pi n$ . Так как предел должен лежать в  $[0; \pi - 1]$ , то это 0. Ответ:  $\pi$ .

8. Заметим, что  $f(n, k) + f(k, n) = 2^{n+k+1}$ . Это можно доказать по индукции. Ответ:  $f(n, n) = 4^n$ .