Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
10 декабря 2011

1. Ответ: 144. Так как минимальный элемент множества равен мощности множества, то указанное количество равно:
$$\sum_{k=0}^{5} C_{11-k}^{k} = 144.$$

2. Ответ: $(2; 1+\sqrt{2}]$. Пусть α — один из острых углов треугольника. Тогда:
$$\frac{h}{r} = \sin\alpha + \cos\alpha + 1 = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

3. (Абдикалыков А.К.) Ответ: $x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}$, $y_{2012} = \frac{1-3^{2012}}{2\alpha}$.

   Заметим, что из условия следует $x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = x_n + \alpha y_n$. Таким образом, $x_n + \alpha y_n = x_0 + \alpha y_0 = 1$ для всех n. Исключив y_n из первого рекуррентного соотношения, получим $x_{n+1} = 3x_n - 1$. Решив полученное с помощью замены $t_n = x_n - \dfrac{1}{2}$, найдём
$$\begin{cases} x_{2012} = \frac{1+3^{2012}}{2}, \\ y_{2012} = \dfrac{1 - x_{2012}}{\alpha} = \dfrac{1-3^{2012}}{2\alpha}. \end{cases}$$

4. Ответ: нет. Достаточно рассмотреть подпоследовательность $\{x_{60k}\}$.

5. Ответ: $\frac{\pi}{2}$. Обозначим искомый интеграл как I. Сделаем подстановку $x = \dfrac{\pi}{2} - t$:
$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\left(\cos^2 t\right) + \cos^2\left(\sin^2 t\right)\right)\, dx =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2\left(\cos^2 t\right) + 1 - \sin^2\left(\sin^2 t\right)\right)\, dx = \pi - I.$$

6. Ответ: 1.
$$\frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} =$$
$$= \frac{n+2}{n!(1 + n + 1 + (n+1)(n+2))} =$$
$$= \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

7. Ответ: $x + C$ и $-x + C$, где C — постоянная. Заметим, что $|f(1) - f(0)| = 1$ (из условия). Для $t \in (0; 1)$ имеем:
$$1 = |f(1) - f(0)| \leqslant |f(1) - f(t)| + |f(t) - f(0)| \leqslant$$
$$\leqslant (1-t) + t = 1.$$
   Следовательно, либо $f(t) = t + f(1) - 1$ для всех t, либо $f(t) = -t + f(1) + 1$ для всех t (в зависимости от знака $f(1) - f(0)$).

8. (Абдикалыков А.К.) Нетрудно доказать, что уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет ровно один корень на любом из отрезков вида $\left[\pi l - \dfrac{\pi}{2}, \pi l + \dfrac{\pi}{2}\right]$, $l \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $x_n \in \left[\pi n - \dfrac{\pi}{2}, \pi n + \dfrac{\pi}{2}\right]$ и поэтому при $k \to \infty$
$$|\cos x_{n_k}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x_{n_k}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x_{n_k}^2}} =$$
$$= O^*\left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = O^*\left(\frac{1}{n_k}\right),$$
   откуда и следует, что два данных ряда сходятся или расходятся одновременно.

9. (Абдикалыков А.К.) Ответ: $(n-2)\cdot 2^{n-1}$. Переставим строки матрицы A так, чтобы все минус единицы стали на главную диагональ; при этом модуль определителя не изменится. Определитель изменённой матрицы находится с помощью элементарных преобразований и равен $(n-2)\cdot(-2)^{n-1}$.

10. Пусть a_1, ..., a_n — все обратимые элементы S. Тогда $\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{a_ia_1, a_ia_2, ..., a_ia_n\}$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$. Следовательно, $a_iS = S$ для всех i для всех $i \in \{1, ..., n\}$. Отсюда $S^2 = nS$.

    Если $1 \neq -1$, то все обратимые элементы разбиваются на пары противоположных, т.е. $S = 0$. Если $1 = -1$, то $n = 0$ или 1.