Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
10 декабря 2016

1. Пусть I — искомый интеграл. Сделав замену $t = 2\pi - x$, получим $I = -I$; следовательно, $I = 0$.

2. Так как $P(1) = 2$ и $P(2) = 1$, то многочлен $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x)+3-x$ для некоторого многочлена $Q(x)$. Осталось подобрать многочлен $Q(x)$ так, чтобы для любого рационального x (кроме, быть может, 1 и 2) $Q(x)$ было иррациональным. Например, подойдёт $Q(x) = \sqrt{2}$. Нетрудно показать, что полученный многочлен $P(x) = \sqrt{2}(x-1)(x-2)+3-x$ удовлетворяет всем указанным требованиям.

3. Заметим, что $f(x) > 0$, для всех $x \in \mathbb{R}$ и $f(-x) = f(x)$, т.е. $f(x)$ — четная. Следовательно,
$$f(x) = \sqrt{f(x)f(-x)} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i^x + a_i^{-x} + 2)},$$
при этом все множители в произведении положительны и нестрого возрастают при $x > 0$.

4. Обозначим вершины A_1, A_2, A_3, A_4, а косинус двугранного угла при ребре A_iA_j через c_{ij}. Суммарная площадь проекций трёх граней на четвёртую равна площади этой грани:
$$c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = 1,$$
для всех 4 возможных троек (i, j, k). Решая систему из 4 уравнений с 6 неизвестными получим: $c_{12} = c_{34}$, $c_{13} = c_{24}$ и $c_{23} = c_{14}$. Также известно, что высоты тетраэдра на все 4 грани равны (например, из A_3 и A_4). Значит, равны высоты в гранях (например, из A_3 на A_1A_2 и из A_1 на A_3A_4). Это приводит к тому, что противоположные ребра равны.

5. Введём функцию
$$f(x) = c_0x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}.$$
Очевидно, $f(0) = 0$; из условия следует $f(1) = 0$. Тогда по теореме Ролля найдётся хотя бы одно такое число $\xi \in [0, 1]$, что $f'(\xi) = 0$, а данное уравнение как раз можно переписать в виде $f'(x) = 0$.

6. Пусть $c \in D$ и $v \in A$. Тогда $cv \in D$ и $vc \in D$. От противного. Пусть $cvw = 1$ для некоторого $w \in A$. Тогда $c = c^2vw = 0$.

   Пусть $a \in D$ и $x \notin D$. Тогда $axax = 0$, откуда $axa = 0 \cdot x^{-1} = 0$.

   Пусть $c, d \in D$. Тогда $(c+d)^4 = (cd+dc)^2 = 0$. Следовательно, $c + d \in D$, откуда $cd = -dc$.

   Если $a \in D$ и $x \in D$, то $axa = a \cdot (-ax) = -a^2x = 0$.

7. (Баев А.Ж.)

   (a) При n от 3 до 8, вторая строка является полусуммой первой и третьей, следовательно, определитель 0.

   (b) При $n \geqslant 11$ первая и одиннадцатая строка совпадают.

   (c) Вычтем из i-й строки $(i-1)$-ю для всех i с n строки до 2. Далее еще раз вычтем из i-й строки $(i-1)$-ю для всех i с n строки до 3. Получится матрица с блоком размера 7×7, где на побочной диагонали стоят числа -10, а остальные элементы нули.

8. В полученном двойном ряде можно поменять местами знаки суммирования:
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^i} \cdot \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} \cdot \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{10^i} \right) = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \cdot 10^{j-1}}.$$

Искомая сумма равна $\dfrac{10}{9}S\left(\dfrac{1}{10}\right)$, где $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. Из равномерной сходимости на множестве $[0,1/2]$ функционального ряда $S(x)$ и ряда, полученного из него почленным дифференцированием, следует

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Так как $S(0) = 0$, то $S(x) = -\ln(1-x)$. Таким образом,

$$\frac{H_1}{10} + \frac{H_2}{100} + \frac{H_3}{1000} + \ldots = \frac{10}{9}\ln\frac{10}{9}.$$