Открытая олимпиада по математике

6 декабря 2009

Время работы: 180 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. На доске написано число -1000000 (минус миллион). За ход разрешается выбрать какие-нибудь два (или одно) числа и написать их сумму или произведение. Если выбрано одно число, то надо писать или его квадрат, или его удвоенное. Как за 12 таких ходов написать число ноль?

2. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 8 минут и выпить кастрюлю молока — за 15 минут, а Карлсон может сделать это за 2, 3 и 4 минуты соответственно. За какое наименьшее время они могут вместе покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли молока?

3. Касательная к гиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ в точке M отсекает от угла $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ прямоугольный треугольник. Докажите, что:
а) точка M — середина гипотенузы этого треугольника;
б) его площадь не зависит от выбора точки M.

4. Дифференцируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[0,1]$ таким образом, что:
а) $f(0) = f(1) = 1$;
б) $2001 \cdot f'(x)g(x) + 2009 \cdot f(x)g'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0,1]$.
Докажите, что $g(1) \geqslant g(0)$.

5. Найдите сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

6. Пусть $\{q_k\}_{k=1}^{n}$ — конечная последовательность чисел. Известно, что $q_k \geqslant 1$ для всех k. Докажите неравенство:
$$\sqrt[q_1]{1+\sqrt[q_2]{1+\ldots+\sqrt[q_n]{1}}} \leqslant 1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{1}{q_1 \cdots q_n}.$$

7. Найдите минимум величины $\max\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_i, x_j)$ по всем наборам единичных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$.