

# Открытая олимпиада по математике

21 декабря 2012

*Время работы: 180 минут*

*Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Будем называть целочисленную квадратную матрицу порядка  $n$  «весёлой», если сумма элементов каждой её строки чётна. Докажите, что для любой целочисленной матрицы  $A$  и для любой «весёлой» матрицы  $B$  произведение  $AB$  тоже является «весёлой» матрицей.
2. Пусть  $(A, +, *)$  — конечное кольцо с единицей, в котором  $1 + 1 = 0$ . Докажите, что уравнения  $x^2 = 0$  и  $x^2 = 1$  имеют одинаковое количество корней в кольце.
3. Прямые  $l_1$  и  $l_2$  касаются параболы в точках  $A$  и  $B$ , соответственно, и пересекаются в точке  $C$ . Точка  $K$  — середина отрезка  $AB$ . Докажите, что середина отрезка  $KC$  лежит на параболе.
4. При каких натуральных  $n$  выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^n [\sqrt[k]{n}] = 2n?$$

5. Последовательность  $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$  состоит из всех натуральных чисел, являющихся степенью 3 или представимых в виде суммы различных степеней 3. Найдите 100-й член этой последовательности.
6. Квадратная матрица  $A$  порядка  $m$  такова, что  $A^{n+1} = 0$ , а  $A^n$  не равна нулевой. Докажите, что

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E = 0$$

тогда, и только тогда, когда вещественные коэффициенты  $a_i = 0$  при любом  $i = 0, 1, \dots, n$ . Здесь  $E$  — единичная матрица.

7. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^3 + 2^3 + \dots + k^3}.$$

Примечание: соотношение  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  считать известным.

8. Докажите, что 11 коней не могут побить все оставшиеся 53 поля шахматной доски.
9. Пусть  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, для которой  $\int_0^1 x f(x) dx = 0$ . Докажите, что

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4 \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$