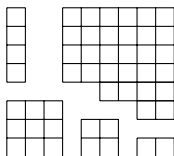


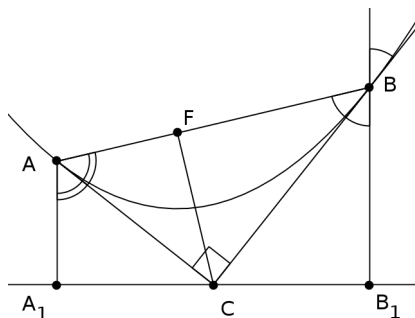
Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
20 декабря 2013

1. Ответ: можно. Одно из возможных решений:



2. Ответ: 0. Прибавив к первой строке все остальные, получим нулевую строку, так как по теореме Виета сумма корней равна нулю.
3. Докажем, что касательные к параболе, проведенные из любой точки на директрисе параболы, — взаимно перпендикулярны.

$F$  — фокус,  $d$  — директриса,  $AB$  — хорда параболы, проходящая через фокус  $F$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  — проекции  $A$ ,  $B$  на  $d$ .



Свойство 1. Касательные к параболе, проведенные в концах хорды  $AB$ , взаимно перпендикулярны. Утверждение легко получить с учетом того, что прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  параллельны, а  $AC$  и  $BC$  — биссектрисы углов  $\angle ABB_1$  и  $\angle BAA_1$  (согласно оптическому свойству).

Свойство 2.  $C$  — точка пересечения касательных — лежит на директрисе. В силу равенства треугольников  $\triangle AA_1C$  и  $\triangle AFC$ ,  $\triangle BB_1C$  и  $\triangle BFC$ , получаем  $\angle A_1CB_1 = \pi$ .

4. Последовательно полагайте в исходном соотношении:

- (a)  $a = x, b = 0, c = 0$ ;
- (b)  $a = x * 0, b = 0, c = y$ ;
- (c)  $a = 0, b = x, c = 0$ ;
- (d)  $a = 0 * x, b = 0, c = y$ .

5. а) Количество интересных перестановок порядка  $N$  вычисляется с помощью формулы включения-исключения:

$$S(N) = N! - \frac{N!}{1!} + \frac{N!}{2!} - \frac{N!}{3!} + \dots + (-1)^N \frac{N!}{N!} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{N!}{k!}$$

б)  $e^{-1}$ .

6. Ответ:  $k = 2$ . Замена:  $t = \ln x$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^2 (1 + k \ln x) x^{x^k + k - 1} dx &= \int_0^{\ln 2} (e^{te^{kt}})' dt = \\ &= e^{te^{kt}} \Big|_0^{\ln 2} = 2^{2^k} - 1. \end{aligned}$$

7. а) Для любого целого  $n$  куб  $n$  может давать при делении на 9 только следующие остатки: 0, 1 или 8. Следовательно, числа вида  $9k \pm 4$  не могут быть представлены в виде суммы трех кубов.

б) Используйте тождество:

$$6x = (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3.$$

8. Ответ:  $\frac{(n/2)!}{(n/4)!}$ . Из условия следует, что для любого  $k$  от 1 до  $n$  верно  $f(f(k)) = n+1-k$ , то есть определить  $f(f(k))$  можно однозначно. Также очевидно, что  $f^4(k) = k$ . Из четности  $n$  понятно, что  $f^2(k) \neq k$ . Следовательно,  $f(k) \neq k$  и  $f^3(k) \neq k$ .

В качестве  $f(1)$  можно выбрать любое значение из  $n-2$  (кроме 1 и  $n$ ). Сразу однозначно определяются значения  $f(1)$ ,  $f(f(1))$  и  $f(f(f(1)))$ . Далее для  $s$  (любых из  $n-4$  еще неопределенных значений) можно выбрать любое из  $n-6$  допустимых значений (кроме уже определенных 4 значений,  $s$  и  $n+1-s$ ). Итог ( $n=4m$ ):

$$(n-2) \cdot (n-6) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 2 = \frac{(2m)!}{m!}.$$

9. Ответ:  $2 - \frac{1}{2^n}$ .

Ясно, что многочлен  $xP(x) - 1$  имеет степень  $n+1$ . Его корнями при этом будет  $n+1$  число:  $2^k$  при  $k$  от 0 до  $n$ . Значит, этот многочлен представляется в виде

$$xP(x) - 1 = A(x-1)(x-2)\dots(x-2^n).$$

Коэффициент  $A$  можно найти, приравнявая свободный член:  $A = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{1+2+\dots+n}}$ . Свободный член  $P(x)$  равен коэффициенту при  $x^1$  в правой части:

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right).$$

10. Ответ:  $\frac{k^2+k+2}{2}$ . Выберем некоторую вершину  $A$ : на расстоянии 1 от неё расположено  $k$  вершин (обозначим это множество вершин  $B$ ), а на расстоянии 2 —  $(n-1-k)$  вершин (обозначим это множество вершин  $C$ ). Посчитаем количество различных четырехугольников.

Способ первый: вершины, противоположные  $A$  в соответствующем четырехугольнике, обязательно содержатся в  $C$ . Каждая такая вершина определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе  $\frac{n(n-k-1)}{4}$ .

Способ второй: соседи вершины  $A$  обязательно содержатся в  $B$ . Каждая такая пара определяет четырехугольник однозначно. Значит, общее количество четырехугольников в графе  $\frac{nk(k-1)}{8}$ .

Приравниваем данные соотношения и получаем:

$$n = \frac{k^2 + k + 2}{2}.$$