

## Открытая олимпиада по математике

10 декабря 2016

## Указания

1. Пусть  $I$  — искомый интеграл. Сделав замену  $t = 2\pi - x$ , получим  $I = -I$ ; следовательно,  $I = 0$ .
2. Так как  $P(1) = 2$  и  $P(2) = 1$ , то многочлен  $P(x)$  можно представить в виде  $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 3 - x$  для некоторого многочлена  $Q(x)$ . Осталось подобрать многочлен  $Q(x)$  так, чтобы для любого рационального  $x$  (кроме, быть может, 1 и 2)  $Q(x)$  было иррациональным. Например, подойдёт  $Q(x) = \sqrt{2}$ . Нетрудно показать, что полученный многочлен  $P(x) = \sqrt{2}(x-1)(x-2) + 3 - x$  удовлетворяет всем указанным требованиям.
3. Заметим, что  $f(x) > 0$ , для всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $f(-x) = f(x)$ , т.е.  $f(x)$  — четная. Следовательно,

$$f(x) = \sqrt{f(x)f(-x)} = \sqrt{\prod_{i=1}^n (a_i^x + a_i^{-x} + 2)},$$

при этом все множители в произведении положительны и нестрого возрастают при  $x > 0$ .

4. Обозначим вершины  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , а косинус двугранного угла при ребре  $A_i A_j$  через  $c_{ij}$ . Суммарная площадь проекций трёх граней на четвёртую равна площади этой грани:

$$c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = 1,$$

для всех 4 возможных троек  $(i, j, k)$ . Решая систему из 4 уравнений с 6 неизвестными получим:  $c_{12} = c_{34}$ ,  $c_{13} = c_{24}$  и  $c_{23} = c_{14}$ . Также известно, что высоты тетраэдра на все 4 грани равны (например, из  $A_3$  и  $A_4$ ). Значит, равны высоты в гранях (например, из  $A_3$  на  $A_1 A_2$  и из  $A_1$  на  $A_3 A_4$ ). Это приводит к тому, что противоположные ребра равны.

5. Введём функцию

$$f(x) = c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{3} x^3 + \dots + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Очевидно,  $f(0) = 0$ ; из условия следует  $f(1) = 0$ . Тогда по теореме Ролля найдётся хотя бы одно такое число  $\xi \in [0, 1]$ , что  $f'(\xi) = 0$ , а данное уравнение как раз можно переписать в виде  $f'(x) = 0$ .

6. Пусть  $c \in D$  и  $v \in A$ . Тогда  $cv \in D$  и  $vc \in D$ . От противного. Пусть  $cvw = 1$  для некоторого  $w \in A$ . Тогда  $c = c^2 vw = 0$ .

Пусть  $a \in D$  и  $x \notin D$ . Тогда  $axax = 0$ , откуда  $axa = 0 \cdot x^{-1} = 0$ .

Пусть  $c, d \in D$ . Тогда  $(c+d)^4 = (cd+dc)^2 = 0$ . Следовательно,  $c+d \in D$ , откуда  $cd = -dc$ .

Если  $a \in D$  и  $x \in D$ , то  $axa = a \cdot (-ax) = -a^2 x = 0$ .

7. (Баев А.Ж.)

- (a) При  $n$  от 3 до 8, вторая строка является полусуммой первой и третьей, следовательно, определитель 0.
- (b) При  $n \geq 11$  первая и одиннадцатая строка совпадают.
- (c) Вычтем из  $i$ -й строки  $(i-1)$ -ю для всех  $i$  с  $n$  строки до 2. Далее еще раз вычтем из  $i$ -й строки  $(i-1)$ -ю для всех  $i$  с  $n$  строки до 3. Получится матрица с блоком размера  $7 \times 7$ , где на побочной диагонали стоят числа  $-10$ , а остальные элементы нули.

8. В полученном двойном ряде можно поменять местами знаки суммирования:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_i}{10^i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{10^i} \cdot \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j} \cdot \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{10^i} \right) = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \cdot 10^{j-1}}.\end{aligned}$$

Искомая сумма равна  $\frac{10}{9} S\left(\frac{1}{10}\right)$ , где  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . Из равномерной сходимости на множестве  $[0, 1/2]$  функционального ряда  $S(x)$  и ряда, полученного из него почленным дифференцированием, следует

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Так как  $S(0) = 0$ , то  $S(x) = -\ln(1-x)$ . Таким образом,

$$\frac{H_1}{10} + \frac{H_2}{100} + \frac{H_3}{1000} + \dots = \frac{10}{9} \ln \frac{10}{9}.$$