Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
10 декабря 2014

1. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению
$$3f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

2. Известно, что
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}.$$
Вычислите
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,dx.$$

3. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, состоящая из чисел 1 и -1. Может ли число
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$$
быть рациональным?

4. Для квадратных матриц одного порядка A и B верно $AB = A + 2014B$. Докажите, что сумма коэффициентов характеристического многочлена матрицы B не равна нулю.

5. Двое играют в игру. На доске написано число n. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Если при этом получается нуль, игрок проиграл. Ходы делаются поочерёдно. Какой из двух игроков выиграет, если они оба играют оптимально?

6. Дано вещественное число x такое, что $x^3 = x + 1$. Доказать, что $x^5 = x^4 + 1$.

7. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} F_{2n+1},$$
где F_n — числа Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для $n \in \mathbb{N}$).

8. Пусть a_n — число обратных самих себе перестановок порядка n. Доказать $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$.

9. Прямоугольник размером $N \times M$ ($N > 2$, $M > 2$) разбит равномерной сеткой на NM квадратов 1×1. Назовем его красивым, если все клетки 1×1 можно покрасить в один из двух цветов так, чтобы никакие 4 клетки, образующие прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника, не были покрашены в один цвет. Найдите красивый прямоугольник максимальной площади.

10. Докажите, что ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на её директрисе.