## Тренировочная студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ 13~mapma~2018

1. Последовательно для i от n до 2 из i-й строки вычитаем (i-1)-ю:

$$\det\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & C_1^0 & C_2^1 & \dots & C_{n-2}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_n^2 & \dots & C_{2n-3}^{n-2} \end{pmatrix} = \dots = 1$$

2. Идея.

$$\frac{3n^2 - 1}{(n^3 - n)^2} = \frac{6n^2 - 2}{2n^2(n - 1)^2(n + 1)^2} =$$

$$= \frac{(n^2 + n)^2 + (n^2 - n)^2 - 2(n^2 - 1)^2}{n^2(n - 1)^2(n + 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2(n - 1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2(n + 1)^2}$$

Все слагаемые  $\frac{1}{n^2}$ , начиная с n=4 встречаются в трех подряд идущих начальных слагаемых и в сумме сокращаются. Остаются лишь два слагаемых при n=2 и одно при n=3 общей суммой:  $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ 

3.  $f(x) = 2 - f(x^2) = f(x^4)$ . Так как функция четная, рассмотрим только положительные x.

Во-первых,  $f(x^{4n}) = f(x)$ . Пусть  $0 \le x < 1$ . В силу непрерывности:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x^{4n}) = f(0).$$

Во-вторых,  $f(x^{\frac{1}{4n}}) = f(x)$ . Пусть x > 1. В силу непрерывности:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x^{\frac{1}{4n}}) = f(1).$$

В силу непрерывности и  $f(1-\varepsilon)=f(0)$ , получаем, что f(1)=f(0). Значит, f(x)=const. Из условия получаем, что f(x)=1.

4. Пусть некоторый угол n-угольника содержит несколько углов m-угольников. Угол правильного m-угольника равен  $180\frac{m-2}{m}$ . Если  $m\geqslant 4$ , то угол будет не менее  $90^\circ$ . Значит,  $m=3,\ n=6$ .

Пусть углы n-угольника и m-угольников равны: n=m. Так как сами многоугольники не совпадают, значит, есть точка на границе n-угольника в которой сходятся все несколько правильных m-угольников. То есть  $180^{\circ}$  делится на  $180^{\circ}\frac{n-2}{n}$ , что равносильно условию n делится на n-2, или 2 делится на n-2. Получаем: n=4 или n=3.

Other:  $(n, m) \in \{(6; 3), (3; 3), (4, 4)\}.$ 

5. Рассмотрим функцию g(x) = f(x) - x: g(x) выпукла вниз, g'(c) = 0, g(c) < 0. Из выпуклости следует, что существует такая точка a < c, что g(a) = g(b) = 0. Существуют точки a < c < b такие, что f(a) = a, f(b) = b.

Графики функций f(x) и  $f^{-1}(x)$  в квадрате  $[a;b] \times [a;b]$  симметричны относительно прямой y=x. То есть область, ограниченная кривыми y=x и y=f(x), симметрична области, ограниченной кривыми y=x и  $y=f^{-1}(x)$ :

$$\int_{a}^{b} (f(x) + f^{-1}(x))dx =$$

$$= -\int_{a}^{b} (x - f(x))dx + \int_{a}^{b} (f^{-1}(x) - x)dx + 2\int_{a}^{b} xdx = b^{2} - a^{2}$$