

Открытая олимпиада по математике

19 декабря 2017

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Привести пример вещественной матрицы A такой, что $A^4 = I$, но при этом $A^2 \neq \pm I$, где I — единичная матрица.
2. Существует ли такая расходящаяся числовая последовательность $\{x_n\}$, что при любом натуральном $k > 1$ её подпоследовательность $\{x_{kn}\}$ сходится?

3. Вычислите

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2k} + 2017}{2018^x + 1} dx,$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

4. Найдите все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x) + f\left(3 - \frac{9}{x}\right) = x - \frac{9}{x}$$

для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

5. К параболе проведены две касательные l_a и l_b в точках A и B . Точка C симметрична точке A относительно l_b , а точка D симметрична точке B относительно l_a . Докажите, что точки A, B, C и D образуют ромб тогда и только тогда, когда AB проходит через фокус параболы.

Можно использовать оптическое свойство параболы без доказательства.

6. Найдите все такие натуральные n , при которых

$$C_n^0 \cdot C_n^1 \cdot \dots \cdot C_n^n$$

является точным квадратом.

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

7. Докажите сходимость последовательности $\{a_n\}$, где

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + \sin a_n, \end{cases}$$

и найдите её предел.

8. Функция $F(n, k)$, определённая для всех целых неотрицательных n и k , удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} F(n, k) = F(n-1, k) + F(n, k-1), & n \geq 1, k \geq 1, \\ F(n, 0) = 1, & n \geq 0, \\ F(0, k) = 2F(0, k-1) + 1, & k \geq 1. \end{cases}$$

Вычислите $F(n, n)$.