

Открытая студенческая олимпиада по математике  
Казахстанского филиала МГУ  
6 декабря 2009

1. Пусть  $A = -10^6$ . Сначала за 4 хода (сложений или удвоений) получаем  $(-10A)$ . Затем за 3 хода (умножений или возведений в квадрат) получаем  $A^7$ . Наконец, за 4 хода путем умножений (или возведений в квадрат) получаем  $(-A^7)$ . Осталось сделать последнее действие.

2. Ответ:  $\frac{72}{11}$ . Нужно решить оптимизационную задачу:

$$\max\{10\alpha + 8\beta + 15\gamma; 9 - (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)\} \rightarrow \min,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1]$ . Здесь  $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1]$  обозначают доли торта, банки варенья и кастрюли молока, которые съедает малыш.

3. Уравнение касательной:

$$y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}.$$

4. Пусть  $h(x) = (f(x))^{2001} \cdot (g(x))^{2009}$ . Тогда  $h'(x) \geq 0$  на  $[0; 1]$ .

5. Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ . Заметим, что:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

6. Достаточно использовать неравенство Бернулли:

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

при  $x \geq 0$  и  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

7. Ответ:  $-\frac{1}{n}$ . Заметим, что  $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1})^2 \geq 0$ . Откуда легко получить, что:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i, x_j) + (n+1) \geq 0.$$

Пусть искомая величина равна  $S$ .

$$2 \frac{n(n+1)}{2} S \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i, x_j) \geq -(n+1).$$

Откуда и получается  $S \geq -\frac{1}{n}$ .

Докажем методом математической индукции, что существует пример для  $s = -\frac{1}{n}$ . При  $n = 1$  достаточно выбрать вектора  $x_1 = (1; 0)$  и  $x_2 = (-1; 0)$ . Допустим для  $n - 1 \geq 1$  построены вектора  $x_1, x_2, \dots, x_n$  такие, что  $(x_i, x_j) = -\frac{1}{n-1}$  для всех  $i < j$  и  $(x_i, x_i) = 1$ .

Умножим все  $n$  векторов на  $\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$  и дополним каждый вектор еще одной координатой со значением  $-\frac{1}{n}$ . Добавим к системе вектор  $(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ . Легко убедиться, что скалярное произведение любых двух различных векторов новой системы равно  $-\frac{1}{n}$  и все векторы единичной длины.