

## Открытая олимпиада по математике

20 декабря 2013

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Можно ли разрезать квадрат  $7 \times 7$  на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить 3 квадрата попарно различных целых площадей?
2. Известно, что  $a$ ,  $b$  и  $c$  — корни уравнения  $x^3 + px + q = 0$ . Вычислите определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

3. На плоскости дана парабола. Найдите множество точек плоскости, из которых парабола видна под прямым углом (т.е. касательные, проведённые из этой точки, перпендикулярны друг другу).
4. Бинарная операция  $*$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет соотношению  $(a * b) * c = a + b + c$  для любых вещественных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Докажите, что  $a * b = a + b$  для любых вещественных  $a$  и  $b$ .
5. Назовем перестановку чисел от 1 до  $N$  «интересной», если никакое число не стоит на своем месте ( $a_i \neq i$ ). Обозначим  $S(N)$  количество «интересных» перестановок чисел от 1 до  $N$ . Вычислите:
  - а)  $S(N)$ ;
  - б)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N!}$ .
6. Определите все вещественные числа  $k$ , для которых справедливо соотношение:

$$\int_1^2 (1 + k \ln x) x^{x^k + k - 1} dx = 15.$$

7. Докажите, что:
  - а) существует бесконечно много целых чисел, не представимых в виде суммы кубов трёх целых чисел (среди которых могут быть равные);
  - б) любое целое число представимо в виде суммы кубов пяти целых чисел (среди которых могут быть равные).
8. Пусть  $n$  — натуральное число, кратное 4. Посчитайте количество различных биекций  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  таких, что  $f(j) + f^{-1}(j) = n + 1$  для всех  $j = 1, \dots, n$ .  
Пример: для биекции  $f: (1, 2, 3, 4) \rightarrow (2, 4, 1, 3)$  обратной будет  $f^{-1}: (1, 2, 3, 4) \rightarrow (3, 1, 4, 2)$ .
9. Известно, что  $P(x)$  — многочлен степени  $n$  такой, что для всех  $t \in \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n\}$  верно  $P(t) = \frac{1}{t}$ . Найдите  $P(0)$ .
10. В графе  $G$  все вершины степени  $k$ . При этом в  $G$  нет треугольников и для любых двух вершин, у которых нет общего ребра, найдутся ровно две вершины, с которыми есть общие рёбра у каждой из этих двух вершин. Чему равно количество вершин  $G$ ?