

Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
6 декабря 2009

1. Пусть $A = -10^6$. Сначала за 4 хода (сложений или удвоений) получаем $(-10A)$. Затем за 3 хода (умножений или возведений в квадрат) получаем A^7 . Наконец, за 4 хода путем умножений (или возведений в квадрат) получаем $(-A^7)$. Осталось сделать последнее действие.
2. Ответ: $\frac{72}{11}$. Нужно решить оптимизационную задачу:

$$\max\{10\alpha + 8\beta + 15\gamma; 9 - (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)\} \rightarrow \min,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1]$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1]$ обозначают доли торта, банки варенья и кастрюли молока, которые съедает малыш.

3. Уравнение касательной:

$$y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}.$$

4. Пусть $h(x) = (f(x))^{2001} \cdot (g(x))^{2009}$. Тогда $h'(x) \geq 0$ на $[0; 1]$.

5. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Заметим, что:

$$\arctg\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \arctg\frac{1}{n} - \arctg\frac{1}{n+1}.$$

6. Достаточно использовать неравенство Бернулли:

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

при $x \geq 0$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

7. Ответ: $-\frac{1}{n}$. Заметим, что $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1})^2 \geq 0$. Откуда легко получить, что:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i, x_j) + (n+1) \geq 0.$$

Пусть искомая величина равна S .

$$2 \frac{n(n+1)}{2} S \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i, x_j) \geq -(n+1).$$

Откуда и получается $S \geq -\frac{1}{n}$.

Докажем методом математической индукции, что существует пример для $s = -\frac{1}{n}$. При $n = 1$ достаточно выбрать вектора $x_1 = (1; 0)$ и $x_2 = (-1; 0)$. Допустим для $n - 1 \geq 1$ построены вектора x_1, x_2, \dots, x_n такие, что $(x_i, x_j) = -\frac{1}{n-1}$ для всех $i < j$ и $(x_i, x_i) = 1$.

Умножим все n векторов на $\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$ и дополним каждый вектор еще одной координатой со значением $-\frac{1}{n}$. Добавим к системе вектор $(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$. Легко убедиться, что скалярное произведение любых двух различных векторов новой системы равно $-\frac{1}{n}$ и все векторы единичной длины.