Открытая студенческая олимпиада по математике Казахстанского филиала МГУ

6 декабря 2009

1. Пусть $A = -10^6$. Сначала за 4 хода (сложений или удвоений) получаем $(-10A)$. Затем за 3 хода (умножений или возведений в квадрат) получаем A^7. Наконец, за 4 хода путем умножений (или возведений в квадрат) получаем $(-A^7)$. Осталось сделать последнее действие.

2. Ответ: $\frac{72}{11}$. Нужно решить оптимизационную задачу:
$$\max\{10\alpha + 8\beta + 15\gamma; 9 - (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)\} \to \min,$$
где α, β, $\gamma \in [0;1]$. Здесь α, β, $\gamma \in [0;1]$ обозначают доли торта, банки варенья и кастрюли молока, которые съедает малыш.

3. Уравнение касательной:
$$y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}.$$

4. Пусть $h(x) = (f(x))^{2001} \cdot (g(x))^{2009}$. Тогда $h'(x) \geqslant 0$ на $[0;1]$.

5. Ответ: $\frac{\pi}{4}$. Заметим, что:
$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

6. Достаточно использовать неравенство Бернулли:
$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$$
при $x \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

7. Ответ: $-\frac{1}{n}$. Заметим, что $(x_1 + x_2 + ... + x_{n+1})^2 \geqslant 0$. Откуда легко получить, что:
$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_i, x_j) + (n+1) \geqslant 0.$$
Пусть искомая величина равна S.
$$2\frac{n(n+1)}{2}S \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_i, x_j) \geqslant -(n+1).$$
Откуда и получается $S \geqslant -\frac{1}{n}$.

   Докажем методом математической индукции, что существует пример для $s = -\frac{1}{n}$. При $n = 1$ достаточно выбрать вектора $x_1 = (1;0)$ и $x_2 = (-1;0)$. Допустим для $n-1 \geqslant 1$ построены вектора x_1, x_2, ..., x_n такие, что $(x_i, x_j) = -\frac{1}{n-1}$ для всех $i < j$ и $(x_i, x_i) = 1$.

   Умножим все n векторов на $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ и дополним каждый вектор еще одной координатой со значением $-\frac{1}{n}$. Добавим к системе вектор $(0,0,0,...,0,1)$. Легко убедиться, что скалярное произведение любых двух различных векторов новой системы равно $-\frac{1}{n}$ и все векторы единичной длины.