Открытая студенческая олимпиада по математике
Казахстанского филиала МГУ
7 декабря 2008

1. С помощью интегрирования по частям докажите, что:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int\limits_0^{\pi} (f'(x+\pi) - f'(x))\sin x\,dx.$$

2. Ответ: мощность конечна и совпадает с количеством элементов в A. Любая такая функция f будет постоянной. Для доказательства этого факта нужно воспользоваться плотностью $\mathbb{Q} \cap [0;1]$ в $[0;1]$ и непрерывностью f на $[0;1]$, рассматривая

$$\inf\{x : x \in \mathbb{Q} \cap [0;1] \text{ и } f(x) \neq f(0)\}$$

(в случае, когда это множество не пусто).

3. Обозначим n количество участников. Выберем победителя первого дня (если это n-й участник) или предпоследнего победителя первого дня (иначе). Пусть это k-й участник, где $k < n$. Значит, в первый день были бои (k, i) для всех i от $k+1$ до n. При этом, $(n-k)$-й по счету бой второго дня будет между k-м участником и победителем среди $(k+1), \dots, n$.

4. Ответ: все многочлены степени не выше $(n+1)$.

   Рассмотрим

$$g(x) = f(x) - f(0) - \frac{x}{1!}f'(0) - \frac{x^2}{2!}f''(0) - \dots\dots - \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

$$\begin{cases} g^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}g(x) \\ g^k(0) = 0, 0 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

   Согласно теореме о единственности решения задачи Коши при $x > 0$ и $x < 0$, функция будет совпадать с некоторым многочленом вида Cx^{n+1}. А так как функция $g(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в нуле, то C будет одним и тем же при $x > 0$ и $x < 0$.

5. От противного. Пусть $f(b) > f(a)$ (обратный случай аналогичен). Ясно, что $f(a) \geqslant 0$ и $f(b) \geqslant 0$, иначе мы можем сузить отрезок $[a;b]$. Существует такое ε, что

$$\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(t)\,dt > \int_a^b f(t)\,dt = \alpha.$$

   Но тогда можно взять $a+\varepsilon < c < b+\varepsilon$, что

$$\int_{a+\varepsilon}^{c} = \alpha.$$

   Противоречие.

6. Пусть $\prod\limits_{i\in I} a_i$ имеет ровно $k \leqslant n-1$ различных простых делителей p_1, ..., p_k. Каждому $X \in \{1, 2, ..., n\}$, включая пустое множество, сопоставим набор из нулей и единиц $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)(X)$, где α_s — остаток при делении на 2 показателя p_s в произведении $\prod\limits_{i\in X} a_i$ (для пустого множества $\prod\limits_{i\in X} a_i = 1$). Количество всевозможных наборов из нулей и единиц длины k есть 2^k, а количество подмножеств $\{1, 2, ..., n\}$ равно $2^n > 2^k$. По принципу Дирихле найдутся два одинаковых набора $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ для различных X_1 и X_2. Тогда положим искомое множество $X = X_1 \Delta X_2$ (симметрическая разность).

7. Используйте теорему Чебышева (постулат Бертрана): для любого $x \geq 2$ найдётся простое число p в интервале $x \leqslant p < 2x$. Проведите индукцией по k с шагом 2.

8. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 D(x) + x$, где

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

— функция Дирихле.

9. Ответ: не всегда. Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Известно, что $g(0)+h(0) = 1$. Так как функция g сюръективная, то существует x_0 такой, что $g(x_0) = g(0)-1$ (ясно, что $x_0 \neq 0$). Отсюда получаем $h(x_0) = 1 - g(0) = h(0)$ — противоречие с инъективностью $h(x)$.