

## Открытая олимпиада по математике

19 декабря 2015

*Время работы: 180 минут*

*Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1.  $a_n, b_n, x_n, y_n$  — четыре арифметические прогрессии. Известно, что  $a_nb_n = x_ny_n$  для трёх различных натуральных  $n$ . Доказать, что  $a_nb_n = x_ny_n$  для всех натуральных  $n$ .
2. Пусть  $f(n)$  — вещественнозначная функция, определённая на множестве натуральных чисел и удовлетворяющая следующему условию: для любого  $n > 1$  существует такой его простой делитель  $p$ , что  $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$ . Известно, что  $f(2015) = 2015$ . Найдите  $f(2016)$ .
3. Найдите все дифференцируемые функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие следующим двум условиям:
  - а)  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in \mathbb{Z}$ ;
  - б) если для некоторого  $x_0 \in \mathbb{R}$  справедливо равенство  $f'(x_0) = 0$ , то для него справедливо также равенство  $f(x_0) = 0$ .
4. На параболе выбраны 4 точки:  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$ . Через эти точки к параболе проведены 4 касательные  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$  соответственно.  $l_1$  пересекает  $l_2$  в точке  $M$ .  $l_3$  пересекает  $l_4$  в точке  $N$ . Докажите, что  $MN, A_1A_3$  и  $A_2A_4$  пересекаются в одной точке.
5. Решить в вещественных числах уравнение

$$4x + 2 \sin x + \sin(2x + \sin x) + 12\pi = 0.$$

6. Дано  $n$  натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , при этом все они не превосходят  $n$ . Доказать, что существует непустое подмножество  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  такое, что множества  $P$  и  $\{a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_n}\}$  совпадают.
7. Найдите все матрицы  $A$ , которые обладают следующими свойствами:
  - а) имеет всего одно собственное значение (без учёта кратности);
  - б) ранг равен 1;
  - в) след равен 1.