

Открытая олимпиада по математике

10 декабря 2011

*Время работы: 180 минут**Каждая задача оценивается в 10 баллов.*

1. Назовем конечное числовое множество своеобразным, если оно содержит число, равное количеству его элементов, но никакое его собственное подмножество этим свойством не обладает. Определите количество своеобразных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 12\}$.
2. Определите множество значений функции, сопоставляющей каждому прямоугольному треугольнику отношение $\frac{h}{r}$, где h — высота, проведенная к гипотенузе, а r — радиус вписанной в треугольник окружности.
3. Две последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - \alpha y_n, \\ y_{n+1} = 2y_n - \frac{1}{\alpha} x_n \end{cases}$$

при всех $n \geq 0$, где $\alpha \neq 0$ — постоянная величина, а $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Найдите x_{2012} и y_{2012} .

4. Существует ли такая последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для неё справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{12k} = 20, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{20k} = 12? \end{cases}$$

5. Найдите $\int_0^{\pi/2} (\sin^2(\sin^2 x) + \cos^2(\cos^2 x)) dx$.

6. Найдите $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}$.

7. Найдите все функции $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенству $(x-y)^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x-y|$ для любых $x, y \in [0, 1]$.

8. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — все положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$, выписанные в порядке возрастания, $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел.

Докажите, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |\cos x_{n_k}|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходятся или расходятся одновременно.

9. Квадратная матрица A порядка n состоит из чисел $+1$ и -1 . При этом, в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы находится ровно одно число -1 . Найдите $|\det A|$.

10. Пусть S — сумма всех обратимых элементов конечного ассоциативного кольца с единицей. Докажите, что $S^2 = 0$ или $S^2 = S$.