

Открытая олимпиада по программированию
Весенний тур 2015
18 марта 2015

A. Adamant digit

Автор: Абдикалыков А.К.

Число будет состоять из m одинаковых цифр $(n - 1) \bmod 9 + 1$, где $m = \left\lceil \frac{n-1}{9} \right\rceil + 1$.
Асимптотика: $O(n)$.

B. Binary palindromes

Автор: Баев А.Ж.

Обозначим $f(k)$ — число, полученное перевернутой битовой записью числа k .

Пусть двоичная запись числа n состоит из $2d$ бит. Отразим первую половину битов (число $k = \left\lfloor \frac{n}{2^d} \right\rfloor$) на вторую зеркально:

$$g_1(n) = 2^d k + f(k)$$

Если $g_1(n) \leq n$, то $g_1(n)$ является ответом. Иначе уменьшим на единицу первую битовую половину числа n и также отразим на вторую зеркально:

$$g_2(n) = 2^d(k - 1) + f(k - 1)$$

Если двоичная запись числа n состоит из $2d + 1$ бит, то поступаем аналогично:

$$g_1(n) = 2^d k + f\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right)$$

$$g_2(n) = 2^d(k - 1) + f\left(\left\lfloor \frac{k - 1}{2} \right\rfloor\right)$$

Асимптотика: $O(\log n)$.

C. Composition of matrices

Автор: Баев А.Ж.

Вектор не изменит свою длину, если перед операцией проектирования на ось, он параллелен этой оси. Переберем все возможные целочисленные углы поворота α от 0 до 179 (градусов). Перед каждым оператором проектирования, начиная со второго, проверим величину текущего угла по модулю 180. Если перед проектированием на OX угол отличен от 0, то α не подходит. Если перед проектированием на OY угол отличен от 90, то α не подходит.

Асимптотика: $O(n)$.

D. Deep tree

Автор: Абдикалыков А.К.

Заметим, что переходы по дереву соответствуют нахождению наибольшего общего делителя чисел. Причем, если наибольший общий делитель (p, q) отличен от 1, то решения нет. Значит, ответом будет количество итераций в алгоритме Евклида. Если $\gcd(a, b)$ — количество действий для получения чисел (a, b) , то

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b) + a/b.$$

Асимптотика: $O(\log \max(a, b))$.

Указание: алгоритм Евклида с вычитанием не проходил из-за ограничений по времени.

E. Empty cornet

Автор: Баяев А.Ж.

Если хотя бы у одной из трех точек координата $z_i < 0$, то решения нет. В противном случае, достаточно найти объем тетраэдра

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Так как уровень должен быть параллелен плоскости XOY , то необходимо произвести нормировку векторов (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) так, чтобы их z -координата была равна $h = \min z_1, z_2, z_3$ — минимальной из трех. Таким образом, объем равен:

$$\tilde{V} = V \cdot \frac{h^3}{z_1 z_2 z_3}.$$

Асимптотика: $O(1)$.

F. Fantastic system

Автор: Абдикалыков А.К.

Пусть $d[i]$ — количество способов записать i в фантастической системе счисления.

Если $i = 2k + 1$, то разряд единиц может быть только 1, а остальные разряды являются разрядами числа k .

Если $i = 2k$, то разряд единиц может быть либо 0, либо 2. Если это 0, то остальные разряды соответствуют разрядам числа k . Если это 2, то остальные разряды соответствуют числу $k - 1$.

Итог:

$$\begin{cases} d[2k + 1] = d[k] \\ d[2k] = d[k] + d[k - 1] \end{cases}$$

Начальные значения: $d[0] = 1$, $d[1] = 1$.

G. Great graph

Автор: Абдикалыков А.К., Баяев А.Ж.

Строим решето Эратосфена для первых 10000 чисел. Фиксируем n . Числа будем искать обходом в глубину или ширину, где переход между числами проверяется по решету Эратосфена. Ясно, что если задача имеет решение при некотором n , то она имеет решение и при больших n . Аналогично, если она не выполнима при n , то и не выполнима при меньших. Значит ответ можно найти бинарным поиском по n из диапазона от 0 до 10 000.

Стоит отметить, что число ребер не превышает n^2 .

Асимптотика: $O(m \log m + n^2 \log m)$

H. H

Автор: Абдикалыков А.К., Баяев А.Ж.

Ответом на задачу было название задачи этой олимпиады: 'Adamant digit', 'Binary palindromes', 'Composition of matrices', 'Deep tree', 'Empty cornet', 'Fantastic system', 'Great graph', 'H', 'Insidious time limit', 'Jagged sequence'.

Асимптотика: $O(1)$.

I. Insidious time limit

Автор: Абдикалыков А.К.

Используем матричное умножение:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$$

Таким образом $(a_n, a_{n-1}, a_{n-2})^T = A^{n-2}(a_2, a_1, a_0)^T$. Осталось вычислить степень матрицы A^{n-2} , что можно сделать бинарным возведением в степень: $A^m = \begin{cases} E, & \text{если } m = 0 \\ (A^{[n/2]})^2, & \text{если } m \text{ — четное, } m > 0 \\ (A^{[n/2]})^2 \cdot A, & \text{если } m \text{ — нечетное} \end{cases}$

Асимптотика: $O(\log n)$

Замечание 1: все умножения в матричных действиях необходимо производить по модулю.

Замечание 2: наивное решение не проходит по ограничениям времени.

J. Jagged sequence

Автор: Абдикалыков А.К.

Рассмотрим вспомогательную последовательность $b_i = a_i - i$. Необходимо изменить ее числа так, чтобы все числа стали равными.

Решение 1. Отсортируем числа по возрастанию \tilde{b}_i . Искомым числом будет медиана $\tilde{b}[n/2]$. Действительно, если искомое число меньше, то каждое число $\tilde{b}[i]$ при $i \geq [n/2]$ необходимо уменьшить дополнительно на 1, а числа $\tilde{b}[i]$ при $i < [n/2]$ необходимо увеличить дополнительно на 1. Тогда общее количество изменений увеличится, так как чисел первой группы больше, чем чисел второй группы.

Асимптотика: $O(n \log n)$.

Решение 2. Рассмотрим m — итоговое значение всех чисел. Тогда количество изменений равно

$$f(m) = \sum_{i=1}^n |b_i - m|$$

Данная функция является кусочно-линейной и выпуклой вниз. Поэтому ее минимум можно найти тернарным поиском по m на отрезке от $\min b_i$ до $\max b_i$.

Асимптотика: $O(m \log(\max |a_i| + n))$.