

IX Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютерное моделирование»
14 апреля 2017

1. Назовем натуральное число a «хорошим», если его можно представить в виде $a = 10^e(1 + m)$, где e и m такие целые числа, что $0 \leq e < 224$ и $0 \leq m < 10^{100}$.
 - а) Найдите минимальное натуральное число, которое не является «хорошим»;
 - б) Найдите количество «хороших» натуральных чисел.
2. Сваха собрала базу данных из n мужчин и n женщин и желает их всех переженить. Проблема осложняется тем, что не все пары «мужчина — женщина» психологически совместимы (то есть, поженить такую пару нельзя). Назовем любовным циклом список из $k > 2$ различных персон X_1, \dots, X_k , таких, что X_1 совместим с X_2 , X_2 с X_3 , \dots , X_{k-1} с X_k , X_k с X_1 . Собрав всю информацию о взаимной совместимости, сваха обнаружила, что в ее базе всего лишь один любовный цикл. Обозначим N общее количество способов которыми сваха сможет поженить всех. Два способа считаются различными, если хотя бы один человек в них вступает в брак с разными партнерами. Какие значения может принимать N ?
3. В тридевятиом царстве в тридесятом государстве жил был король-самодур и математик при его дворе. В государстве было n городов и длины дорог между ними были известны (они принимали натуральные значения и были не длиннее 100 км). Король попросил математика найти длину наикратчайшего пути между западной и восточной столицами с допустимой ошибкой не более 1%, пригрозив при этом казнью за любое сравнение чисел (операции $\min x, y$ и $\max x, y$ тоже запрещены). Разрешены лишь
 - суммирование;
 - умножение;
 - деление;
 - возведение в степень;
 - вычисление логарифма.

Как быть математику? Опишите его алгоритм (как можно более оптимальный по вычислительным затратам). Оцените вычислительную сложность этого алгоритма (то есть, получите верхнюю оценку $g(n)$ на общее количество вышеперечисленных операций в данном алгоритме).

4. Вам дали задание написать программу которая должна делать следующее:
 - вначале прочитать файл с n вещественными числами a_1, a_2, \dots, a_n и создать массив $A[i] = a_i$, $1 \leq i \leq n$.
 - если вы подаете ей на вход пару (i, j) такую, что $1 \leq i \leq j \leq n$, то

программа должна вернуть $\max_{i \leq k \leq j} a_k$. Ваша программа, таким образом, существует в двух режимах:

- (а) в режиме препроцессинга массива A — в этом режиме вы можете обработать массив A , создать какие-то структуры данных, чтобы более эффективно выполнить работу на втором этапе;
- (б) в режиме расчета для заданной пары (i, j) ответа $\max_{i \leq k \leq j} a_k$.

Опишите алгоритм, в котором

- Первый этап занимает $O(n^2)$ арифметических операций;
- Второй этап занимает $O(1)$ арифметических операций;

Опишите алгоритм, в котором

- Первый этап занимает $O(n \log n)$ арифметических операций
- Второй этап занимает $O(1)$ арифметических операций