

VI Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению
«Математическое и компьютерное моделирование»
27 марта 2014

Стоимость задач:

10, 20, 25, 15 и 20 баллов соответственно.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого имеет вид

$$a_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2.$$

2. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение Клеро $y = p \cdot x + f(p)$, где $p = y'$ и f — дифференцируемая функция. Доказать, что если f' — монотонная функция, то особое решение уравнения Клеро имеет ровно одну общую точку с любым частным решением.
3. Во время недавних раскопок на Марсе были обнаружены листы бумаги с таинственными символами на них. После долгих исследований учёные пришли к выводу, что надписи на них на самом деле могли быть обычными числовыми равенствами. Кроме того, из других источников было получено веское доказательство того, что марсиане знали только три операции: сложение, умножение и вычитание (марсиане никогда не использовали «унарный минус»: вместо « -5 » они писали « $0 - 5$ »). Также ученые доказали, что марсиане не наделяли операции разным приоритетом, а просто вычисляли выражения (если в них не было скобок) слева направо: например, $3 + 3 * 5$ у них равнялось 30, а не 18. К сожалению, символы арифметических действий стерлись. Например, если была запись « $18 = 7(53)2$ », то возможно восстановить эту запись как « $18 = 7 + (5 - 3) * 2$ ». Требуется написать программу, находящую требуемую расстановку знаков или сообщающую, что таковой не существует.

Первая строка входного файла INPUT.TXT состоит из натурального числа, не превосходящего 2^{30} , знака равенства, и последовательности натуральных чисел (не более десяти), произведение которых также не превосходит 2^{30} . Некоторые группы чисел (одно или более) могут быть окружены скобками. Длина входной строки не будет превосходить 80 символов, и других ограничений на количество и вложенность скобок нет. Между двумя соседними числами, не разделенными скобками, всегда будет хотя бы один пробел, во всех остальных местах может быть любое (в том числе и 0) число пробелов (естественно, внутри числа пробелов нет).

В выходной файл OUTPUT.TXT необходимо вывести одну строку, содержащую полученное равенство (т.е., исходное равенство со вставленными знаками арифметических действий без лишних пробелов). В случае если требуемая расстановка знаков невозможна, вывести строку, состоящую из единственного числа « -1 ». Выходная строка не должна содержать пробелов.

4. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+2014) \\ P'(x) & P'(x+1) & \dots & P'(x+2014) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^{(2014)}(x) & P^{(2014)}(x+1) & \dots & P^{(2014)}(x+2014) \end{vmatrix},$$

где $P(x) = x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+2014)$.

5. Внутри тетраэдра $ABCD$ расположена точка O так, что прямые AO , BO , CO , DO пересекают грани BCD , ACD , ABD , ABC тетраэдра в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соответственно. Причем отношения

$$\frac{AO}{A_1O}, \frac{BO}{B_1O}, \frac{CO}{C_1O}, \frac{DO}{D_1O}$$

равны одному и тому же числу. Найти все значения, которые может принимать это число.