

VIII Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютерное моделирование»  
01 апреля 2016

1. (Абдикалыков А.К.)

Максимальный балл давался за алгоритм с асимптотической сложностью  $O(1)$  (явную формулу), промежуточные баллы — за сложность  $O(n)$  и  $O(n^2)$ .

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n^2} [\sqrt{j}] &= \sum_{k=1}^n \left( k \cdot \sum_{\substack{[\sqrt{j}]=k \\ 1 \leq j \leq n^2}} 1 \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left( k \cdot \sum_{\substack{[\sqrt{j}]=k \\ 1 \leq j \leq n^2}} 1 \right) + n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( k \cdot \sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1} 1 \right) + n = \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) + n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k) + n = 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + n = \\ &= \frac{(n-1)n(4n+1)}{6} + n = \frac{n(4n^2 - 3n + 5)}{6}\end{aligned}$$

2. (Абдикалыков А.К.)

а) Две полупараболы из условия задачи — это графики функций  $y = x^2$  и  $y = -\sqrt{x}$  при  $x \geq 0$ . Поэтому искомая функция

$$S(L) = \int_0^{f^{-1}(L)} f(x) dx,$$

где  $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ . (В силу монотонности функции  $f(x)$  корректно вводить  $f^{-1}(L)$ .) Так как, кроме прочего, подынтегральная функция в определении  $S(L)$  положительная, то и сама функция  $S(L)$  — возрастающая. Поскольку  $S(2) = 1$  (это можно показать разными способами: как графически, составив квадрат, например, так и аналитически, посчитав явно интеграл), то  $S(L) > 1$  при  $L > 2$ .

б) Найдём сначала  $x_0 = f^{-1}(L)$  с помощью бинарного поиска, затем вычислим

$$\begin{aligned}S(L) &= \left( \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{x=0}^{x_0} = \frac{x_0^3 + 2x_0^{\frac{3}{2}}}{3} = \\ &= \frac{x_0(2x_0^2 + 2\sqrt{x_0} - x_0^2)}{3} = \frac{x_0(2L - x_0^2)}{3}.\end{aligned}$$

3. (Баев А.Ж.)

Продифференцируем по  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned}f'(x-y) + f'(x+y) &= 2xf''(x^2+y^2), \\ -f'(x-y) + f'(x+y) &= 2yf''(x^2+y^2).\end{aligned}$$

Пусть  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ . Приравняем  $f''(x^2+y^2)$ :

$$(y+x)f'(x-y) = (x-y)f'(x+y).$$

Пусть  $|x| \neq |y|$ .

$$\frac{f'(x+y)}{x+y} = \frac{f'(x-y)}{x-y}.$$

Зафиксируем величину  $x-y = A$ , отличную от нуля. Тогда выражение справа не зависит от  $y$  и равно некоторой константе  $2C$ .

$$\frac{f'(2y+A)}{2y+A} = \frac{f'(A)}{A} = 2C.$$

Заметим, что  $t = 2y + A$  может принимать любые ненулевые значения. Значит, при  $t \neq 0$ :

$$f'(t) = 2Ct.$$

$$f(t) = Ct^2 + C_1.$$

При подстановке в исходное уравнение, получим:  $C_1 = 0$ . При  $t = 0$  доопределяется из непрерывности  $f'(t)$  (по соотношению в условии). Ответ:  $f(t) = Ct^2$ .

4. (Баев А.Ж., Абдикалыков А.К.)

Пусть конечное значение  $S = \sum_{j=1}^{2n-1} c_j \cdot \frac{f_{j-1}+f_j+f_{j+1}}{3}$ . Тогда пункт б) эквивалентен решению нижеуказанной системы линейных уравнений, причём в целых числах. Видно, что система состоит из  $(2n+1)$  уравнения относительно  $(2n-1)$  неизвестной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_{2n-3} \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ \dots \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассматривая только первые  $(2n-1)$  уравнения, мы получим систему с нижнетреугольной матрицей и определителем, равным единице, а значит, всеми уравнениями, кроме последних двух, все неизвестные определяются однозначно, принимая при этом целые значения. Таким образом, задача сводится к нахождению таких  $n$ , чтобы система из этих  $(2n-1)$  уравнения имела решение, совместимое с дополнительными условиями  $c_{2n-2} + c_{2n-1} = 4$ ,  $c_{2n-1} = 1$ . Решая эту систему методом Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, & c_2 &= 3, & c_3 &= -2, \\ c_4 &= 3, & c_5 &= 1, & c_6 &= 0, \\ c_7 &= 1, & c_8 &= 3, & c_9 &= -2, \\ c_{10} &= 3, & c_{11} &= 1, & c_{12} &= 0, \\ & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, равенства  $c_{2n-2} = 3$ ,  $c_{2n-1} = 1$  выполняются только в том случае, если

$$2n-1 \equiv 5 \pmod{6},$$

или, что то же самое,  $n$  кратно 3.

Пункт а) эквивалентен решению той же системы в целых числах, но уже без первого и последнего уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_{2n-3} \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ \dots \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Фиксируя  $c_1 = c$  и используя все уравнения, кроме последнего ( $c_{2n-2} + c_{2n-1} = 4$ ), находим

$$\begin{aligned} c_1 &= c, & c_2 &= 4 - c, & c_3 &= -2, \\ c_4 &= 2 + c, & c_5 &= 2 - c, & c_6 &= 0, \\ c_7 &= c, & c_8 &= 4 - c, & c_9 &= -2, \\ c_{10} &= 2 + c, & c_{11} &= 2 - c, & c_{12} &= 0, \\ & \dots \end{aligned}$$

Значит,

$$c_{2n-2} + c_{2n-1} = \begin{cases} c, & 2n-2 = 0 \pmod{6}, \\ -2-c, & 2n-2 = 2 \pmod{6}, \\ 4, & 2n-2 = 4 \pmod{6}. \end{cases}$$

Видно, что в любом случае можно подобрать такое  $c$ , чтобы выполнялось равенство

$$c_{2n-2} + c_{2n-1} = 4,$$

из чего следует, что система совместна при любом  $n$ .

5. (Абдикалыков А.К.)

а) Уменьшить двоичное число на единицу: **CSLAF**.

б) Поменять все биты: **CLA**.

в) Поменять только старший бит: **CLRCLA**.

6. (Баев А.Ж.)

а) Пусть исходный квадрат — это квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$  на плоскости, а центр вырезанного квадрата расположен в точке  $(x_0, y_0)$ . Квадрат целиком поместится, если  $(x_0, y_0) \in [a, 1-a] \times [a, 1-a]$ .

1 шаг. Найдем центр тяжести. Запишем функцию плотности массы пластины по оси  $OX$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 - a \\ 1 - 2a, & x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ 1, & x > x_0 + a \end{cases}$$

Найдем проекцию центра тяжести  $m$  на ось  $OX$ :

$$m = \frac{\int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{1 - 8a^2 x_0}{2(1 - 4a^2)}.$$

2 шаг. Найдем вероятность попадания центра тяжести в вырезанную часть.

$$\begin{aligned} P &= P(m \in [x_0 - a, x_0 + a]) = \\ &= P\left(\frac{1 - 8a^2 x_0}{2(1 - 4a^2)} < x_0 + a\right) - P\left(\frac{1 - 8a^2 x_0}{2(1 - 4a^2)} < x_0 - a\right) = \\ &= P\left(x_0 + a > \frac{1}{2} + 4a^3\right) - P\left(x_0 - a > \frac{1}{2} - 4a^3\right). \end{aligned}$$

Обозначим полученную разность  $P_1 - P_2$ .

Вычислим  $P_1$ . Заметим, что  $x_0 + a$  равномерно распределено на  $[2a, 1]$ . Поэтому важно понять, попадает ли  $\frac{1}{2} + 4a^3$  в интервал  $[2a, 1]$ .  $\frac{1}{2} + 4a^3 < 1$  ввиду того, что  $a \in [0, \frac{1}{2}]$ . Проверим левую границу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + 4a^3 &> 2a \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)(a - \varphi)(a - \bar{\varphi}) &> 0 \end{aligned}$$

где  $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ . Значит,  $\frac{1}{2} + 4a^3$  попадает в интервал  $[2a, 1]$  при  $a < \varphi$ .

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1-8a^3}{2(1-4a^2)}, & a < \varphi \\ 1, & a > \varphi. \end{cases}$$

Аналогично вычислим  $P_2$ .  $x_0 - a$  равномерно распределено на  $[0, 1-2a]$ . Поэтому важно понять, попадает ли  $\frac{1}{2} - 4a^3$  в интервал  $[0, 1-2a]$ .  $\frac{1}{2} - 4a^3 > 0$  ввиду того, что  $a \in [0, \frac{1}{2}]$ . Значит:

$$P_2 = \begin{cases} \frac{1-4a+8a^3}{2(1-2a)}, & a < \varphi \\ 0, & a > \varphi. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания центра тяжести в вырезанную часть:

$$(P_1 - P_2)^2 = \begin{cases} 4a^2(1 + 2a)^2, & a \in [0, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}] \\ 1, & a \in [\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

б) Промоделируем методом Монте–Карло и подсчет центра тяжести, и подсчет ответа. Генерируем  $N$  подходящих квадратов. У каждого из них генерируем  $M$  случайных точек. Если центр тяжести данных точек находится внутри квадрата, то засчитываем этот квадрат. Иначе — нет. Отметим, что порядок аппроксимации данного метода  $O\left(\frac{1}{\sqrt{NM}}\right)$ .