

IX Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютерное моделирование»  
14 апреля 2017

1. Назовем натуральное число  $a$  «хорошим», если его можно представить в виде  $a = 10^e(1 + m)$ , где  $e$  и  $m$  такие целые числа, что  $0 \leq e < 224$  и  $0 \leq m < 10^{100}$ .

а) Найдите минимальное натуральное число, которое не является «хорошим»;

б) Найдите количество «хороших» натуральных чисел.

2. Сваха собрала базу данных из  $n$  мужчин и  $n$  женщин и желает их всех переженить. Проблема осложняется тем, что не все пары «мужчина — женщина» психологически совместимы (то есть, поженить такую пару нельзя). Назовем любовным циклом список из  $k > 2$  различных персон  $X_1, \dots, X_k$ , таких, что  $X_1$  совместим с  $X_2$ ,  $X_2$  с  $X_3$ ,  $\dots$ ,  $X_{k-1}$  с  $X_k$ ,  $X_k$  с  $X_1$ . Собрав всю информацию о взаимной совместимости, сваха обнаружила, что в ее базе всего лишь один любовный цикл. Обозначим  $N$  общее количество способов которыми сваха сможет поженить всех. Два способа считаются различными, если хотя бы один человек в них вступает в брак с разными партнерами. Какие значения может принимать  $N$ ?

3. В тридевятиом царстве в тридесятом государстве жил был король-самодур и математик при его дворе. В государстве было  $n$  городов и длины дорог между ними были известны (они принимали натуральные значения и были не длиннее 100 км). Король попросил математика найти длину наикратчайшего пути между западной и восточной столицами с допустимой ошибкой не более 1%, пригрозив при этом казнью за любое сравнение чисел (операции  $\min x, y$  и  $\max x, y$  тоже запрещены). Разрешены лишь

- суммирование;
- умножение;
- деление;
- возведение в степень;
- вычисление логарифма.

Как быть математику? Опишите его алгоритм (как можно более оптимальный по вычислительным затратам). Оцените вычислительную сложность этого алгоритма (то есть, получите верхнюю оценку  $g(n)$  на общее количество вышеперечисленных операций в данном алгоритме).

4. Вам дали задание написать программу которая должна делать следующее:

- вначале прочитать файл с  $n$  вещественными числами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и создать массив  $A[i] = a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- если вы подаете ей на вход пару  $(i, j)$  такую, что  $1 \leq i \leq j \leq n$ , то

программа должна вернуть  $\max_{i \leq k \leq j} a_k$ . Ваша программа, таким образом, существует в двух режимах:

- (а) в режиме препроцессинга массива  $A$  — в этом режиме вы можете обработать массив  $A$ , создать какие-то структуры данных, чтобы более эффективно выполнить работу на втором этапе;
- (б) в режиме расчета для заданной пары  $(i, j)$  ответа  $\max_{i \leq k \leq j} a_k$ .

Опишите алгоритм, в котором

- Первый этап занимает  $O(n^2)$  арифметических операций;
- Второй этап занимает  $O(1)$  арифметических операций;

Опишите алгоритм, в котором

- Первый этап занимает  $O(n \log n)$  арифметических операций
- Второй этап занимает  $O(1)$  арифметических операций