Республиканская студенческая предметная олимпиада проводится ежегодно весной по поручению министерства образования и науки Республики Казахстан. Олимпиада по каждой специальности проводится отдельно. В данной брошюре собраны олимпиады по двум специальностям: «Математика», «Математическое и компьютерное моделирование». Впервые такая олимпиада прошла в 2009 году на базе Казахского национального университета имени аль-Фараби (г. Алматы). Вплоть до 2015 года олимпиада не меняла свое место проведения по этим направлениям. В 2016 году олимпиады по данным направлениям прошли в Казахстанского филиале МГУ имени М. В. Ломомносова (г. Астана), что стало традицией передавать право проведения олимпиады университету, представитель которого стал победителем в личном зачете.

Задачи на олимпиадах, как правило, доступны хорошо подготовленным студентам 2-4 курса. Желающим углубить свои навыки в решении студенческих олимпиадных задач рекомендуется список литературы:

1. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука. 1978. — 208 с.

2. Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. Издательство МГУ, 1987. — 309 с.

3. Gelca R., Andreescu T. Putnam and Beyond. 2007. — 850 pp.

4. Меньшиков Ф. Олимпиадные задачи по программированию. 2007. — 320 с.

Содержание

VI олимпиада
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Алматы
27 марта 2014

1. Вычислить предел:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}.$$

2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases}\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}=3\\ x+y+z=3\\ \frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}=3\end{cases}$$

3. Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трех целых точках он принимает значение 2. Докажите, что ни в какой целой точке он не принимает значение 3.

4. Найти все решения дифференциального уравнения второго порядка
$$f''(x)+f(\pi-x)=1.$$

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	Σ	Диплом
1	Шокетаева Надира	КФ МГУ	1	15	25	35	15	90	1 степени
2	Кенжебаева Фариза	АГУ	2	15	25	35	10	85	2 степени
3	Тубалыков Кайрат	КФ МГУ	2	15	25	35	10	80	2 степени
4	Тыныштыкбай Абылай	КарГУ	2	14	23	35	5	77	3 степени
5	Кабак Мухтар	КазНУ	2	15	25	15	0	55	3 степени
6	Тилеуова Жаннат	КазНУ	1	15	13	25	0	53	3 степени

VII олимпиада

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Алматы

26 марта 2015

1. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ не менее трех различных нулей. Докажите, что существует точка $x \in [a, b]$ такая, что $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$.

2. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$. Известно, что $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ и $\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \leqslant 2$ для всех $x \in [0, +\infty)$. Доказать, что $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 0$.

3. Известно, что для квадратных матриц A и B одинакового порядка выполнены следующие равенства $AB = BA$, $A^{99} = E$, $B^{100} = E$, где E — единичная матрица. Докажите, что существует матрица C такая, что $(A + E + B)C = C(A + E + B) = E$.

4. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}.$$
Доказать существование и найти предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$.

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	Диплом
1	Шокетаева Надира	КФ МГУ	2	1 степени
2	Журавская Александра	КФ МГУ	1	2 степени
3	Тыныштыкбай Абылай	КарГУ	3	2 степени
4	Джумагулов Серик	КарГУ	?	3 степени
5	Кабак Мухтар	КазНУ	3	3 степени
6	Таскынов Ануар	КФ МГУ	2	3 степени

VIII олимпиада
Казахстанский филиала МГУ имени М.В.Ломоносова
Астана
1 апреля 2016

1. Какие натуральные числа представимы в виде $x^2 - y^2 + 2x + 2y$ для некоторых целых x и y?

2. Пусть $\alpha(x)$ — первая цифра после запятой в десятичной записи числа 2^x.
   а) Докажите, что функция $\alpha(x)$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$.
   б) Докажите, что $3.5 < \int\limits_0^1 \alpha(x)dx < 4.5$.

3. В конечном поле произведение всех ненулевых элементов не равно единице. Докажите, что сумма всех элементов поля равна нулю.

4. В эллипсе с фокусами F_1 и F_2 проведена хорда MN, которая проходит через фокус F_2. На прямой F_1F_2 выбраны две точки S и T такие, что прямые SM и TN являются касательными к эллипсу. Точка D симметрична F_2 относительно прямой SM, точка E симметрична F_2 относительно NT. Прямые DS, TE и MN при пересечении образуют треугольник ABC (точка C не лежит на MN). Докажите, что:

   а) CF_2 — медиана треугольника ABC;

   б) CF_1 — биссектриса треугольника ABC.

5. Максималист и минималист по очереди вписывают по одному числу в таблицу размера $n \times n$ (последовательно, строчка за строчкой, слева направо и сверху вниз). Каким окажется ранг получившейся матрицы, если максималист изо всех сил старается его максимизировать, а минималист — минимизировать? (Ответ может зависеть от n и от того, кто делает первый ход.)

6. Функция $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на всей области определения. Известно, что

$$f'(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) + f(x)$$

для всех $x > 1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{e^x} = 2$. Докажите, что $f(2) < 20{,}16$.

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	6	Σ	Диплом
1	Журавская Александра	КФ МГУ	2	10	9	0	0	9	0	28	1 степени
2	Аманкелды Акежан	НУ	3	3	9	2	0	1	7	22	2 степени
3	Турганбаев Сатбек	КФ МГУ	2	10	7	3	0	0	1	21	2 степени
4	Полищук Руслан	НУ	1	10	7	0	0	0	3	20	3 степени
5	Жанахметов Султан	НУ	2	10	5	0	0	1	3	19	3 степени
6	Токтаганов Адиль	КФ МГУ	2	8	0	0	10	1	0	19	3 степени

IX олимпиада
Казахстанский филиала МГУ имени М.В.Ломоносова
Астана
13 апреля 2017

1. Пусть $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, заданная рекуррентно: $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ и $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ при $n \geqslant 1$. Вычислите сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$
если известно, что данный ряд сходится.

2. Найдите все простые p, запись которых в k-ичной системе счисления при некотором натуральном $k > 1$ содержит ровно k различных цифр (старшая цифра не может быть нулём).

3. Докажите, что в любой группе квадрат произведения двух элементов порядка два и куб произведения двух элементов порядка три всегда являются коммутаторами.

4. Точка P лежит внутри выпуклой области, ограниченной параболой $y = x^2$, но не лежит на оси OY. Обозначим через $S(P)$ множество всех точек, полученных отражением P относительно всех касательных к параболе.

   а) Докажите, что значение суммы
$$\max_{(x,y)\in S(P)} y \ + \min_{(x,y)\in S(P)} y$$
   не зависит от выбора точки P.

   б) Найдите геометрическое место точек P таких, что $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = 0$.

5. Для каждой функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ обозначим через $s_n(f)$ и $S_n(f)$ нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции f, соответствующие равномерному разбиению $[0,1]$ на n частей. Существует ли такая интегрируемая функция f, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(f)$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(f)$ расходится?

6. Некоторые участники математической олимпиады списали решения некоторых задач у своих товарищей. Докажите, что можно с позором выгнать часть участников так, чтобы получилось, что более четверти от общего числа списанных решений было списано выгнанными участниками у не выгнанных.

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	6	Σ	Диплом
1	Жанбырбаев Есеналы	КБТУ	2	10	10	10	3	0	10	43	1 степени
2	Бекмаганбетов Бекарыс	КФ МГУ	1	10	10	10	2	10	0	42	2 степени
3	Сайланбаев Алибек	НУ	4	10	10	10	2	0	8	40	2 степени
4	Аманкелды Акежан	НУ	4	9	9	10	5	0	0	33	3 степени
5	Жанахметов Султан	НУ	3	10	10	10	2	0	0	32	3 степени
6	Шакиев Александр	МУИТ	2	10	9	10	0	0	0	29	3 степени

X олимпиада
Казахстанско-Британский технический университет
Алматы
3 апреля 2018

1. Последовательность многочленов P_n равномерно сходится на всей оси $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что f является многочленом.

2. Докажите, что если непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству $f(x) = \alpha f(x/2)$, а $|\alpha| < 2$, то при $|\alpha| = 1$ функция f — произвольная постоянная, а при остальных α — нулевая.

3. Две непрерывно дифференцируемые на $[0; a]$ функции f_0, f_1 принимают неположительные значения и $f_0(0) = f_1(0) = 0$. Докажите, что если при всех x выполняется неравенство $f_0'(x) + xf_1'(x) \geqslant 0$ на отрезке $[0; a]$, то обе функции являются тождественно нулевыми.

4. Известно, что на графике многочлена P можно отметить n точек, являющихся вершинами правильного n-угольника. Доказать, что его степень не меньше $n - 1$.

5. Если три вектора (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) с ненулевыми координатами попарно ортогональны, то векторы $\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}\right)$, $\left(\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}\right)$, $\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \frac{1}{w_3}\right)$ с обратными координатами компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	Σ	Диплом
1	Бекмаганбетов Бекарыс	КФ МГУ	2	10	8	10	8	10	46	1 степени
2	Жанбырбаев Есеналы	КБТУ	2	0	10	10	8	10	38	2 степени
3	Шакиев Александр	МУИТ	2	0	10	0	8	10	28	2 степени
4	Куанышабай Максат	НУ	2	0	4	10	1	10	25	3 степени
5	Жакатаев Еркебулан	КазНУ	4	10	10	0	2	0	22	3 степени
6	Аскергалиев Ануар	КФ МГУ	2	0	3	0	5	10	18	3 степени

VI олимпиада
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Алматы
27 марта 2014

Стоимость задач:
10, 20, 25, 15 и 20 баллов соответственно.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого имеет вид
$$a_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \right)^2.$$

2. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение Клеро $y = p \cdot x + f(p)$, где $p = y'$ и f — дифференцируемая функция. Доказать, что если f' — монотонная функция, то особое решение уравнения Клеро имеет ровно одну общую точку с любым частным решением.

3. Во время недавних раскопок на Марсе были обнаружены листы бумаги с таинственными символами на них. После долгих исследований учёные пришли к выводу, что надписи на них на самом деле могли быть обычными числовыми равенствами. Кроме того, из других источников было получено веское доказательство того, что марсиане знали только три операции: сложение, умножение и вычитание (марсиане никогда не использовали «унарный минус»: вместо «-5»они писали «$0 - 5$»). Также ученые доказали, что марсиане не наделяли операции разным приоритетом, а просто вычисляли выражения (если в них не было скобок) слева направо: например, $3+3*5$ у них равнялось 30, а не 18. К сожалению, символы арифметических действий стерлись. Например, если была запись «$18 = 7(53)2$», то возможно восстановить эту запись как «$18 = 7 + (5 - 3) * 2$». Требуется написать программу, находящую требуемую расстановку знаков или сообщающую, что таковой не существует.

   Первая строка входного файла `INPUT.TXT` состоит из натурального числа, не превосходящего 2^{30}, знака равенства, и последовательности натуральных чисел (не более десяти), произведение которых также не превосходит 2^{30}. Некоторые группы чисел (одно или более) могут быть окружены скобками. Длина входной строки не будет превосходить 80 символов, и других ограничений на количество и вложенность скобок нет. Между двумя соседними числами, не разделенными скобками, всегда будет хотя бы один пробел, во всех остальных местах может быть любое (в том числе и 0) число пробелов (естественно, внутри числа пробелов нет).

   В выходной файл `OUTPUT.TXT` необходимо вывести одну строку, содержащую полученное равенство (т.е., исходное равенство со вставленными знаками арифметических действий без лишних пробелов). В случае если требуемая расстановка знаков невозможна, вывести строку, состоящую из единственного числа «-1». Выходная строка не должна содержать пробелов.

4. Вычислите определитель
$$\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \ldots & P(x+2014) \\ P'(x) & P'(x+1) & \ldots & P'(x+2014) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P^{(2014)}(x) & P^{(2014)}(x+1) & \ldots & P^{(2014)}(x+2014) \end{vmatrix},$$
где $P(x) = x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+2014)$.

5. Внутри тетраэдра $ABCD$ расположена точка O так, что прямые AO, BO, CO, DO пересекают грани BCD, ACD, ABD, ABC тетраэдра в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Причем отношения
$$\frac{AO}{A_1O}, \frac{BO}{B_1O}, \frac{CO}{C_1O}, \frac{DO}{D_1O}$$
равны одному и тому же числу. Найти все значения, которые может принимать это число.

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	Итог	Диплом
1	Даржанова Асель	КазНУ	3	10	17	0	10	15	52	1 степени
2	Каныбек Тогжан	КазНУ	3	10	15	0	0	20	45	2 степени
3	Амир Мирас	КФ МГУ	1	3	0	0	15	20	38	2 степени
4	Тлеуова Гайни	КазНУ	3	0	17	0	0	20	37	3 степени
5	Бисенгалиева Асем	КазНУ	3	0	17	0	0	15	32	3 степени
6	Таскынов Ануар	КФ МГУ	1	0	0	0	3	18	21	3 степени

VII олимпиада
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Алматы
26 марта 2015

1. а) Вычислить предел:
$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n}\right).$$
б) Зная, что $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$, вычислить
$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}dx.$$

2. Числа 53295, 67507, 88825, 81719, 39083 делятся на 3553. Не вычисляя определитель матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 9 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$
доказать, что он делится на 3553.

3. Доказать тождество:
$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \ldots = \exp^{x^2/2}\cdot \int_0^x \exp^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

4. Даны две строки, представляющие числа A и B в фибоначчиевой системе счисления. Описать программу, которая находит строку, представляющую число $A+B$ в фибоначчиевой системе счисления. Числа A и B могут превышать максимальное допустимое значение в стандартных целочисленных типах.

   Примечание: Числа Фибоначии F_1, F_2, … определяются начальными значениями:
$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_{N+1} = F_N + F_{N-1}.$$
   Рассмотрим фибоначчиеву систему счисления с двумя цифрами 0 и 1, в которой, в отличие от двоичной системы весами являются не степени двойки 1, 2, 4, 8, 16, …, а числа Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, …. В этой системе счисления каждое положительное целое число единственным образом представляется в виде строки нулей и единиц, которая начинается с 1 и в которой нет двух единиц, стоящих рядом.

5. Совсем недавно Вася занялся программированием и решил реализовать собственную программу для игры в шахматы. Но у него возникла проблема определения правильности хода конем, который делает пользователь. Т.е. если пользователь вводит значение «C7-D5», то программа должна определить это как правильный ход, если же введено «E2-E4», то ход неверный. Так же нужно проверить корректность записи ввода: если например, введено «D9-N5», то программа должна определить данную запись как ошибочную. Помогите ему осуществить эту проверку!

   Входные данные:

В единственной строке входного файла `INPUT.TXT` записан текст хода (непустая строка), который указал пользователь. Пользователь не может ввести строку, длиннее 5 символов.

Выходные данные:

В выходной файл `OUTPUT.TXT` нужно вывести «YES», если указанный ход конем верный, если же запись корректна (в смысле правильности записи координат), но ход невозможен, то нужно вывести «NO». Если же координаты не определены или заданы некорректно, то вывести сообщение «ERROR».

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	Диплом
1	Амир Мирас	КФ МГУ	2	1 степени
2	Жусупов Али	КФ МГУ	1	2 степени
3	Мусакулова Гульдерайым	КазНУ	4	2 степени
4	Ахмер Ермек	КазНУ	4	3 степени
5	Каныбек Тогжан	КазНУ	4	3 степени
6	Иманбекова Жанна	КазНУ	?	3 степени

VIII олимпиада
Казахстанский филиала МГУ имени М.В.Ломоносова
Астана
1 апреля 2016

Стоимость задач:
10 баллов каждая задача.

1. Введём функцию
$$f(n) = \left[\sqrt{1}\,\right] + \left[\sqrt{2}\,\right] + \left[\sqrt{3}\,\right] + \ldots + \left[\sqrt{n^2-1}\,\right] + \left[\sqrt{n^2}\,\right],$$
где $[x]$ — наибольшее целое число, не превышающее x. Опишите функцию, которая вычисляет $f(n)$ для данного натурального n, не используя при этом операцию извлечения корня и вещественную арифметику.

2. На декартовой координатной плоскости нарисованы две полупараболы: график функции $y = x^2$ ($x \geqslant 0$) и его копия, повёрнутая на прямой угол по часовой стрелке. Эти две кривые отсекают от прямой, параллельной оси ординат, отрезок длины L. Обозначим через $S(L)$ — площадь отсечённой фигуры.

   а) Докажите, что $S(L) > 1$ при $L > 2$;

   б) Напишите функцию, которая вычисляет $S(L)$ для данного положительного вещественного числа L.

3. Найдите все дифференцируемые функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению
$$f(x-y) + f(x+y) = f'(x^2+y^2)$$
для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Дана функция $f\colon [0, 2n] \to \mathbb{R}$. Пусть $f_i = f(i)$ — значения функции во всех целых i от 0 до $2n$. Дана переменная S вещественного типа с начальным значением 0. За один ход робот может выбрать целое i от 1 до $2n-1$, затем добавить к переменной S или вычесть из нее среднее арифметическое значений функции $f(x)$ в узлах $i-1$, i, $i+1$:
$$S := S \pm \frac{f_{i-1} + f_i + f_{i+1}}{3}.$$
Может ли робот за конечное число ходов получить в переменной S значение
$$I = \frac{1}{3}\left(f_0 + 4\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n}\right),$$
которое является приближением интеграла $\int\limits_0^{2n} f(x)\,dx$, если

   а) $f(0) = f(2n) = 0$;
   б) $f(0) \neq 0$, $f(2n) \neq 0$?

5. Дана некоторая условная машина, состоящая из памяти в n бит и указателя, который в каждый отдельный момент находится над какой-то из этих n ячеек. Перед запуском программы в память записывается некоторое натуральное число m в двоичной системе счисления, а указатель устанавливается над крайним правым (младшим) битом числа. Язык программирования для этой машины состоит из следующих команд:

L	left	сместить указатель налево на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
R	right	сместить указатель направо на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
C	change	изменить значение бита в текущей ячейке на противоположное
A	again	перейти к выполнению первой команды
S	skip	пропустить две следующие команды, если в текущей ячейке 0
F	finish	завершить выполнение программы

Команды записываются в одну строку и выполняются в последовательном порядке, слева направо. При этом запись программы обязана оканчиваться командой **A** или **F**. Напишите для этой абстрактной машины следующие программы:

а) заменить данное число на $(m-1)$;

б) заменить данное число на $(2^n - m - 1)$;

в) изменить на противоположный его старший (крайний слева) бит.

Примеры:

а) программа, обнуляющая все ячейки: **SSCLA**;

б) программа, которая изменяет второй справа бит, если крайний справа бит нулевой: **SFFLCF**.

6. Из квадратной однородной пластины со стороной 1 случайным образом вырезается квадрат со сторонами, равными $2a$ и параллельными сторонам исходного квадрата. При этом центр квадрата — это случайная величина, равномерно распределённая по всем допустимым положениям (квадрат со стороной $(1-2a)$).

   а) Найдите вероятность $p(a)$ того, что центр тяжести полученной фигуры лежит в вырезанной области.

   б) Опишите функцию $p(a)$, которая вычисляет указанную вероятность приблизительно, считая при этом, что нам не известен метод нахождения центра тяжести произвольной фигуры, однако мы можем найти центр тяжести конечного множества точек одинаковой массы.

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	6	Σ	Диплом
1	Батырхан Орынкул	НУ	3	10	10	1	5	9	6	41	1 степени
2	Абайулы Ерулан	КФ МГУ	2	5	10	2	2	10	0	29	2 степени
3	Камалбеков Тимур	КФ МГУ	2	8	7	1	0	9	2	27	2 степени
4	Омаров Темирхан	КФ МГУ	2	4	10	0	2	10	0	22	3 степени
5	Сайланбаев Алибек	НУ	3	7	5	3	1	6	0	22	3 степени
6	Иманмалик Ержан	НУ	2	9	3	3	5	1	0	21	3 степени

IX олимпиада
Назарбаев Университет
Астана
13 апреля 2017

1. Назовем натуральное число a «хорошим», если его можно представить в виде $a = 10^e(1 + m)$, где e и m такие целые числа, что $0 \leqslant e < 224$ и $0 \leqslant m < 10^{100}$.

   а) Найдите минимальное натуральное число, которое не является «хорошим»;

   б) Найдите количество «хороших» натуральных чисел.

2. Сваха собрала базу данных из n мужчин и n женщин и желает их всех переженить. Проблема осложняется тем, что не все пары «мужчина — женщина» психологически совместимы (то есть, поженить такую пару нельзя). Назовем любовным циклов список из $k > 2$ различных персон $X_1, \ldots, X_k$, таких, что X_1 совместим с X_2, X_2 с X_3, ..., X_{k-1} с X_k, X_k с X_1. Собрав всю информацию о взаимной совместимости, сваха обнаружила, что в ее базе всего лишь один любовный цикл. Обозначим N общее количество способов которыми сваха сможет поженить всех. Два способа считаются различными, если хотя бы один человек в них вступает в брак с разными партнерами. Какие значения может принимать N?

3. В тридевятом царстве в тридесятом государстве жил был король-самодур и математик при его дворе. В государстве было n городов и длины дорог между ними были известны (они принимали натуральные значения и были не длиннее 100 км). Король попросил математика найти длину наикратчайшего пути между западной и восточной столицами с допустимой ошибкой не более 1%, пригрозив при этом казнью за любое сравнение чисел (операции $\min x, y$ и $\max x, y$ тоже запрещены). Разрешены лишь

   - суммирование;
   - умножение;
   - деление;
   - возведение в степень;
   - вычисление логарифма.

   Как быть математику? Опишите его алгоритм (как можно более оптимальный по вычислительным затратам). Оцените вычислительную сложность этого алгоритма (то есть, получите верхнюю оценку $g(n)$ на общее количество вышеперечисленных операций в данном алгоритме).

4. Вам дали задание написать программу которая должна делать следующее:

   - вначале прочитать файл с n вещественными числами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и создать массив $A[i] = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
   - если вы подаете ей на вход пару (i, j) такую, что $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, то

   программа должна возвратить $\max_{i \leqslant k \leqslant j} a_k$. Ваша программа, таким образом, существует в двух режимах:

   (a) в режиме препроцессинга массива A — в этом режиме вы можете обработать массив A, создать какие-то структуры данных, чтобы более эффективно выполнить работу на втором этапе;

   (b) в режиме расчета для заданной пары (i, j) ответа $\max_{i \leqslant k \leqslant j} a_k$.

Опишите алгоритм, в котором

- Первый этап занимает $O(n^2)$ арифметических операций;
- Второй этап занимает $O(1)$ арифметических операций;

Опишите алгоритм, в котором

- Первый этап занимает $O(n \log n)$ арифметических операций
- Второй этап занимает $O(1)$ арифметических операций

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	Диплом
1	Орынкул Батырхан	НУ	4	1 степени
2	Калмурзаев Сергазы	НУ	3	2 степени
3	Касенов Бекжан	НУ	4	2 степени
4	Жусупов Али	ЕНУ	2	3 степени
5	Шакиев Александр	МУИТ	1	3 степени
6	?	КазНУ	?	3 степени

X олимпиада
Назарбаев Университет
Астана
20 апреля 2018

Стоимость задач:
7 баллов каждая задача.

1. Мяч весом $0,1$ килограмма подбрасывают вверх с земли с начальной скоростью 20 м/с. Сила сопротивления воздуха величиной $|v|^3/1020,4$ направлена в сторону противоположную скорости мяча, где скорость v измеряется в м/с. Найдите формулу для вычисления времени, которое требуется мячу для достижения максимальной высоты над уровнем земли.

2. Допустим $1 < p < 2$ и дана функция $\varphi(x) = |x|^{p-2}x$, где $x \in \mathbb{R}$. Докажите неравенство
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2^{2-p}|x-y|^{p-1}.$$
Также покажите, что равенство имеет место если $y = -x$.

3. Вычислите точное значение $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

4. Вычислите интеграл
$$\int_0^1 \sqrt{-\ln(x)}dx.$$

5. Даны 52 точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $P_{52}(x_{52}, y_{52})$, расположенные в квадрате, длина стороны которого равна 7. Покажите, что среди этих 52 точек всегда можно найти 3 точки, которые расположены внутри круга радиуса 1.

Результаты

№	Участник	ВУЗ	Курс	1	2	3	4	5	Σ	Диплом
1	Бекмаганбетов Бекарыс	КФ МГУ	2	7	7	7	7	7	35	1 степени
2	Аскергалиев Ануар	КФ МГУ	2	4	0	7	6	2	19	2 степени
3	Шарипов Азат	КФ МГУ	2	2	0	0	5	1.5	8.5	2 степени
4	Сабирова Роза	КазНУ	?	3	0	0	2	3	8	3 степени
5	Абай Азат	КазНУ	?	4	1	0	0	1	6	3 степени
6	Ногаева Аида	КазНУ	3	3	1	0	0	1	5	3 степени