

Республиканская студенческая олимпиада по математике
2006

1. (6 баллов) Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и для любого $x \geq 0$ справедливо равенство

$$\sin \int_0^x f(u) du = \frac{x}{x+1}$$

Определить функцию $f(x)$.

2. (8 баллов) Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0.$$

3. (8 баллов) Доказать, что если $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, где $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ — биссектрисы треугольника, то треугольник правильный.
4. (8 баллов) Найти наибольшее значение определителя 3-го порядка, элементы которого состоят из 1 и -1 .