

VIII Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютерное моделирование»
01 апреля 2016

Стоимость задач:
10 баллов каждая задача.

1. Введём функцию

$$f(n) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n^2 - 1}] + [\sqrt{n^2}],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превышающее x . Опишите функцию, которая вычисляет $f(n)$ для данного натурального n , не используя при этом операцию извлечения корня и вещественную арифметику.

2. На декартовой координатной плоскости нарисованы две полупараболы: график функции $y = x^2$ ($x \geq 0$) и его копия, повернутая на прямой угол по часовой стрелке. Эти две кривые отсекают от прямой, параллельной оси ординат, отрезок длины L . Обозначим через $S(L)$ — площадь отсечённой фигуры.

а) Докажите, что $S(L) > 1$ при $L > 2$;

б) Напишите функцию, которая вычисляет $S(L)$ для данного положительного вещественного числа L .

3. Найдите все дифференцируемые функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению

$$f(x - y) + f(x + y) = f'(x^2 + y^2)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Дана функция $f: [0, 2n] \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $f_i = f(i)$ — значения функции во всех целых i от 0 до $2n$. Дана переменная S вещественного типа с начальным значением 0. За один ход робот может выбрать целое i от 1 до $2n - 1$, затем добавить к переменной S или вычесть из нее среднее арифметическое значений функции $f(x)$ в узлах $i - 1, i, i + 1$:

$$S := S \pm \frac{f_{i-1} + f_i + f_{i+1}}{3}.$$

Может ли робот за конечное число ходов получить в переменной S значение

$$I = \frac{1}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{k=1}^n f_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n} \right),$$

которое является приближением интеграла $\int_0^{2n} f(x) dx$, если

а) $f(0) = f(2n) = 0$;

б) $f(0) \neq 0, f(2n) \neq 0$?

5. Дана некоторая условная машина, состоящая из памяти в n бит и указателя, который в каждый отдельный момент находится над какой-то из этих n ячеек. Перед запуском программы в память записывается некоторое натуральное число m в двоичной системе счисления, а указатель устанавливается над крайним правым (младшим) битом числа. Язык программирования для этой машины состоит из следующих команд:

L	left	сместить указатель налево на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
R	right	сместить указатель направо на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
C	change	изменить значение бита в текущей ячейке на противоположное
A	again	перейти к выполнению первой команды
S	skip	пропустить две следующие команды, если в текущей ячейке 0
F	finish	завершить выполнение программы

Команды записываются в одну строку и выполняются в последовательном порядке, слева направо. При этом запись программы обязана оканчиваться командой **A** или **F**. Напишите для этой абстрактной машины следующие программы:

- а) заменить данное число на $(m - 1)$;
- б) заменить данное число на $(2^n - m - 1)$;
- в) изменить на противоположный его старший (крайний слева) бит.

Примеры:

- а) программа, обнуляющая все ячейки: **SSCLA**;
 - б) программа, которая изменяет второй справа бит, если крайний справа бит нулевой: **SFFLCF**.
6. Из квадратной однородной пластины со стороной 1 случайным образом вырезается квадрат со сторонами, равными $2a$ и параллельными сторонам исходного квадрата. При этом центр квадрата — это случайная величина, равномерно распределённая по всем допустимым положениям (квадрат со стороной $(1 - 2a)$).
- а) Найдите вероятность $p(a)$ того, что центр тяжести полученной фигуры лежит в вырезанной области.
 - б) Опишите функцию $p(a)$, которая вычисляет указанную вероятность приблизительно, считая при этом, что нам не известен метод нахождения центра тяжести произвольной фигуры, однако мы можем найти центр тяжести конечного множества точек одинаковой массы.