VIII Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютеное моделирование»

01 апреля 2016

Решения

1. (Абдикалыков А.К.)

Максимальный балл давался за алгоритм с асимптотической сложностью $O(1)$ (явную формулу), промежуточные баллы — за сложность $O(n)$ и $O(n^2)$.

$$\sum_{j=1}^{n^2}[\sqrt{j}\,] = \sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\sum_{\substack{[\sqrt{j}\,]=k\\ 1\leqslant j\leqslant n^2}}1\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(k\cdot\sum_{\substack{[\sqrt{j}\,]=k\\ 1\leqslant j\leqslant n^2}}1\right)+n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(k\cdot\sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1}1\right)+n=\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)+n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)+n=2\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+n=$$

$$=\frac{(n-1)n(4n+1)}{6}+n=\frac{n(4n^2-3n+5)}{6}$$

2. (Абдикалыков А.К.)

а) Две полупараболы из условия задачи — это графики функций $y=x^2$ и $y=-\sqrt{x}$ при $x\geqslant 0$. Поэтому искомая функция

$$S(L)=\int\limits_0^{f^{-1}(L)} f(x)\;dx,$$

где $f(x)=x^2+\sqrt{x}$. (В силу монотонности функции $f(x)$ корректно вводить $f^{-1}(L)$.) Так как, кроме прочего, подынтегральная функция в определении $S(L)$ положительная, то и сама функция $S(L)$ — возрастающая. Поскольку $S(2)=1$ (это можно показать разными способами: как графически, составив квадрат, например, так и аналитически, посчитав явно интеграл), то $S(L)>1$ при $L>2$.

б) Найдём сначала $x_0=f^{-1}(L)$ с помощью бинарного поиска, затем вычислим

$$S(L)=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x_0}=\frac{x_0^3+2x_0^{\frac{3}{2}}}{3}=$$

$$=\frac{x_0(2x_0^2+2\sqrt{x_0}-x_0^2)}{3}=\frac{x_0(2L-x_0^2)}{3}.$$

3. (Баев А.Ж.)

Продифференцируем по x и y:

$$f'(x-y)+f'(x+y)=2xf''(x^2+y^2),$$

$$-f'(x-y)+f'(x+y)=2yf''(x^2+y^2).$$

Пусть $x\neq 0$, $y\neq 0$. Приравняем $f''(x^2+y^2)$:

$$(y+x)f'(x-y)=(x-y)f'(x+y).$$

Пусть $|x| \neq |y|$.

$$\frac{f'(x+y)}{x+y} = \frac{f'(x-y)}{x-y}.$$

Зафиксируем величину $x - y = A$, отличную от нуля. Тогда выражение справа не зависит от y и равно некоторой константе $2C$.

$$\frac{f'(2y+A)}{2y+A} = \frac{f'(A)}{A} = 2C.$$

Заметим, что $t = 2y + A$ может принимать любые ненулевые значения. Значит, при $t \neq 0$:

$$f'(t) = 2Ct.$$

$$f(t) = Ct^2 + C_1.$$

При подстановке в исходное уравнение, получим: $C_1 = 0$. При $t = 0$ доопределяется из непрерывности $f'(t)$ (по соотношению в условии). Ответ: $f(t) = Ct^2$.

4. (Баев А.Ж., Абдикалыков А.К.)

Пусть конечное значение $S = \sum\limits_{j=1}^{2n-1} c_j \cdot \frac{f_{j-1}+f_j+f_{j+1}}{3}$. Тогда пункт б) эквивалентен решению нижеуказанной системы линейных уравнений, причём в целых числах. Видно, что система состоит из $(2n+1)$ уравнения относительно $(2n-1)$ неизвестной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{2n-3} \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ \cdots \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассматривая только первые $(2n-1)$ уравнения, мы получим систему с нижнетреугольной матрицей и определителем, равным единице, а значит, всеми уравнениями, кроме последних двух, все неизвестные определяются однозначно, принимая при этом целые значения. Таким образом, задача сводится к нахождению таких n, чтобы система из этих $(2n-1)$ уравнения имела решение, совместимое с дополнительными условиями $c_{2n-2} + c_{2n-1} = 4$, $c_{2n-1} = 1$. Решая эту систему методом Гаусса, получаем

$$\begin{array}{ccc} c_1 = 1, & c_2 = 3, & c_3 = -2, \\ c_4 = 3, & c_5 = 1, & c_6 = 0, \\ c_7 = 1, & c_8 = 3, & c_9 = -2, \\ c_{10} = 3, & c_{11} = 1, & c_{12} = 0, \\ & \cdots & \end{array}$$

Таким образом, равенства $c_{2n-2} = 3$, $c_{2n-1} = 1$ выполняются только в том случае, если

$$2n - 1 = 5 \pmod 6,$$

или, что то же самое, n кратно 3.

Пункт а) эквивалентен решению той же системы в целых числах, но уже без первого и последнего уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{2n-3} \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ \cdots \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Фиксируя $c_1 = c$ и используя все уравнения, кроме последнего ($c_{2n-2} + c_{2n-1} = 4$), находим

$$\begin{array}{ccc} c_1 = c, & c_2 = 4 - c, & c_3 = -2, \\ c_4 = 2 + c, & c_5 = 2 - c, & c_6 = 0, \\ c_7 = c, & c_8 = 4 - c, & c_9 = -2, \\ c_{10} = 2 + c, & c_{11} = 2 - c, & c_{12} = 0, \\ & \cdots & \end{array}$$

Значит,

$$c_{2n-2} + c_{2n-1} = \begin{cases} c, & 2n - 2 = 0 \pmod 6, \\ -2 - c, & 2n - 2 = 2 \pmod 6, \\ 4, & 2n - 2 = 4 \pmod 6. \end{cases}$$

Видно, что в любом случае можно подобрать такое c, чтобы выполнялось равенство

$$c_{2n-2} + c_{2n-1} = 4,$$

из чего следует, что система совместна при любом n.

5. (Абдикалыков А.К.)

   а) Уменьшить двоичное число на единицу: **CSLAF**.

   б) Поменять все биты: **CLA**.

   в) Поменять только старший бит: **CLRCLA**.

6. (Баев А.Ж.)

   а) Пусть исходный квадрат — это квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ на плоскости, а центр вырезанного квадрата расположен в точке (x_0, y_0). Квадрат целиком поместится, если $(x_0; y_0) \in [a, 1 - a] \times [a, 1 - a]$.

   1 шаг. Найдем центр тяжести. Запишем функцию плотности массы пластины по оси OX:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < x_0 - a \\ 1 - 2a, x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ 1, x < x_0 + a \end{cases}$$

   Найдем проекцию центра тяжести m на ось OX:

$$m = \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} = \frac{1 - 8a^2x_0}{2(1 - 4a^2)}.$$

   2 шаг. Найдем вероятность попадания центра тяжести в вырезанную часть.

$$P = P(m \in [x_0 - a; x_0 + a]) =$$

$$= P\left(\frac{1-8a^2x_0}{2(1-4a^2)} < x_0 + a\right) - P\left(\frac{1-8a^2x_0}{2(1-4a^2)} < x_0 - a\right) =$$

$$= P\left(x_0 + a > \frac{1}{2} + 4a^3\right) - P\left(x_0 - a > \frac{1}{2} - 4a^3\right).$$

Обознаим полученную разность $P_1 - P_2$.

Вычислим P_1. Заметим, что $x_0 + a$ равномерно распределено на $[2a, 1]$. Поэтому важно понять, попадает ли $\frac{1}{2} + 4a^3$ в интервал $[2a, 1]$. $\frac{1}{2} + 4a^3 < 1$ ввиду того, что $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Проверим левую границу:

$$\frac{1}{2} + 4a^3 > 2a$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)(a - \varphi)(a - \overline{\varphi}) > 0$$

где $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Значит, $\frac{1}{2} + 4a^3$ попадает в интервал $[2a, 1]$ при $a < \varphi$.

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1-8a^3}{2(1-2a)}, & a < \varphi \\ 1, & a > \varphi. \end{cases}$$

Аналогично вычислим P_2. $x_0 - a$ равномерно распределено на $[0, 1-2a]$. Поэтому важно понять, попадает ли $\frac{1}{2} - 4a^3$ в интервал $[0, 1-2a]$. $\frac{1}{2} - 4a^3 > 0$ ввиду того, что $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Значит:

$$P_2 = \begin{cases} \frac{1-4a+8a^3}{2(1-2a)}, & a < \varphi \\ 0, & a > \varphi. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания центра тяжести в вырезанную часть:

$$(P_1 - P_2)^2 = \begin{cases} 4a^2(1+2a)^2, & a \in [0, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}] \\ 1, & a \in \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

б) Промоделируем методом Монте–Карло и подсчет центра тяжести, и подсчет ответа. Генерируем N подходящих квадратов. У каждого из них генерируем M случайных точек. Если центр тяжести данных точек находится внутри квадрата, то засчитываем этот квадрат. Иначе — нет. Отметим, что порядок аппроксимации данного метода $O\left(\frac{1}{\sqrt{NM}}\right)$.