

Х Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютерное моделирование»
20 апреля 2018

Стоимость задач:
7 баллов каждая задача.

1. Мяч весом $0,1$ килограмма подбрасывают вверх с земли с начальной скоростью 20 м/с. Сила сопротивления воздуха величиной $|v|^3/1020,4$ направлена в сторону противоположную скорости мяча, где скорость v измеряется в м/с. Найдите формулу для вычисления времени, которое требуется мячу для достижения максимальной высоты над уровнем земли.

2. Допустим $1 < p < 2$ и дана функция $\varphi(x) = |x|^{p-2}x$, где $x \in \mathbb{R}$. Докажите неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2^{2-p}|x - y|^{p-1}.$$

Также покажите, что равенство имеет место если $y = -x$.

3. Вычислите точное значение $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{-\ln(x)} dx.$$

5. Даны 52 точки $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_{52}(x_{52}, y_{52})$, расположенные в квадрате, длина стороны которого равна 7. Покажите, что среди этих 52 точек всегда можно найти 3 точки, которые расположены внутри круга радиуса 1.