

VIII Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению  
«Математика»  
01 апреля 2016

1. (Васильев А.Н.)

Заметим, что справедливо разложение

$$x^2 - y^2 + 2x + 2y = (x + y)(x - y + 2).$$

Поэтому натуральное число представимо в этом виде тогда, и только тогда, когда раскладывается на произведение двух множителей одной четности. Ясно, что это все числа, которые дают остаток отличный от 2 при делении на 4.

Пример для нечетного  $n$ :  $x = \frac{n-1}{2}$ ,  $y = \frac{3-n}{2}$ .

Пример для  $n$ , кратного 4:  $x = y = \frac{n}{4}$ .

2. (Васильев А.Н.)

а) Легко понять, что функция кусочно-постоянная. Причем количество промежутков постоянства конечно и равно 10. Значит, функция интегрируема по Риману.

б) Найдем промежуток, на котором первая цифра числа  $2^x$  равна  $k$ :

$$1 + \frac{k}{10} \leq 2^x < 1 + \frac{k+1}{10},$$

$$\log_2 \left( 1 + \frac{k}{10} \right) \leq x < \log_2 \left( 1 + \frac{k+1}{10} \right).$$

Тогда наш интеграл можно записать в виде суммы:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \alpha(x) dx &= \\ &= \sum_{k=0}^9 k \left( \log_2 \left( 1 + \frac{k+1}{10} \right) - \log_2 \left( 1 + \frac{k}{10} \right) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^9 k (\log_2(k+11) - \log_2(k+10)) = \\ &= \sum_{k=0}^9 k \log_2(k+11) - \sum_{k=0}^8 (k+1) \log_2(k+11) = \\ &= 9 \log_2 20 - \sum_{k=0}^8 \log_2(k+11) = \log_2 \frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 19} \end{aligned}$$

Требуется доказать, что

$$2^7 < \left( \frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 19} \right)^2 < 2^9.$$

Докажем левую часть неравенства. Заметим, что по неравенству Коши

$$(10+k) * (20-k) < \left( \frac{10+k+20-k}{2} \right)^2 = 15^2.$$

Отсюда получается оценка слева:

$$\left(\frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 19}\right)^2 > \left(\frac{20^9}{15^9}\right)^2 = \frac{2^{36}}{3^{18}}.$$

Остается доказать, что  $2^{29} > 3^{18}$ . Заметим, что  $2^8 > 3^5$  и  $2^5 > 3^3$ . Перемножив три раза первое неравенство и один раз второе, получим требуемое.

Докажем правую часть неравенства. Заметим, что верно следующее неравенство:

$$(10 + k)(20 - k) = 200 + k(10 - k) > 200.$$

Значит, оценку справа можно получить так:

$$\left(\frac{20^9}{11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 19}\right)^2 < \left(\frac{400^4 \cdot 20}{200^4 \cdot 15}\right)^2 = 2^8 \left(\frac{4}{3}\right)^2 < 2^9.$$

3. (Фольклор) Первое решение («наивное»). Можно доказать более общее утверждение:

*В любом конечном поле  $F \neq \mathbb{Z}_2$  сумма всех элементов равна нулю.*

Пусть  $F$  — конечное поле и  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — все его элементы. Если  $F \neq \mathbb{Z}_2$ , то существует элемент  $a$ , отличный от нуля и единицы. Тогда  $aa_1, aa_2, \dots, aa_n$  попарно различны, следовательно

$$F = \{a_1, \dots, a_n\} = \{aa_1, \dots, aa_n\}.$$

Отсюда  $S = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n aa_i = aS$ , откуда следует, что  $S = 0$ .

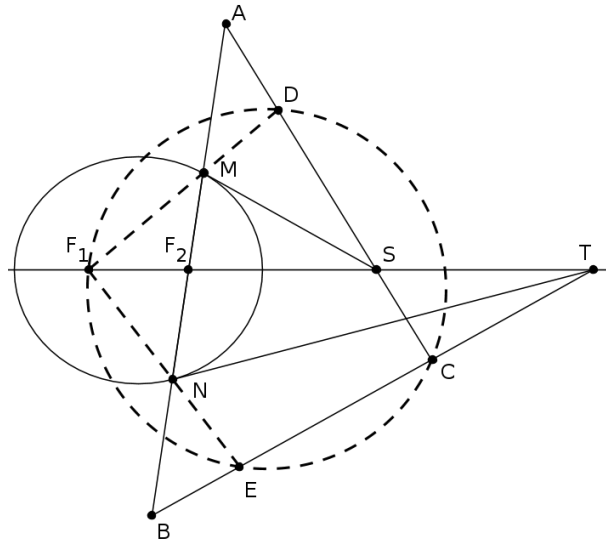
Второе решение(существенно использующее структуру конечного поля). Утверждение из предыдущего решения можно доказать и по-другому. Ненулевые элементы поля образуют группу по умножению, а порядок элемента группы делит порядок группы (по теореме Лагранжа). Следовательно, любой элемент поля  $F$  является корнем многочлена  $x^n - x = 0$ , где  $n$  — количество элементов поля. С другой стороны, по другой теореме Лагранжа, у этого многочлена не более  $n$  корней. Иными словами, указанный многочлен имеет своими корнями все элементы поля. Применяя теорему Виета, получаем требуемое.

Третье решение (еще одно). У каждого ненулевого элемента  $x$  есть обратный  $x^{-1}$ , причем  $x \neq x^{-1}$  при  $x \neq \pm 1$ . Следовательно, все ненулевые элементы, кроме  $\pm 1$ , разбиваются на пары с произведением 1. Поэтому произведение всех элементов поля равно  $-1$ . Из условия задачи следует, что  $-1 \neq 1$ . Следовательно, характеристика поля отлична от 2. Тогда любой ненулевой элемент отличается от своего противоположного, то есть все ненулевые элементы разбиваются на пары с нулевой суммой. Что означает, что сумма всех ненулевых элементов поля равна нулю. Добавление нуля сумму не изменяет. Утверждение доказано.

4. (Баев А.Ж.)

Факт 1 (оптическое свойство эллипса): луч, направленный из одного фокуса после отражения от внутренней стороны эллипса проходит через другой фокус. То есть  $\angle(F_1M, SM) = \angle(SM, F_2M)$ , где  $\angle(l_1, l_2)$  обозначает ориентированный угол между прямыми. Как следствие, получаем, что  $\angle F_1MS + \angle F_2MS = \pi$ . По условию,  $\angle F_2MS = \angle DMS$ . Откуда получаем, что  $F_1, M, D$  лежат на одной прямой. Аналогично,  $F_2, N, E$  лежат на одной прямой.

Факт 2 (определение эллипса). Сумма расстояний от фокусов до точек на эллипсе постоянна. Как следствие  $F_1M + MF_2 = F_1N + NF_2$ . Так как треугольники  $F_2MS$  и  $DMS$  симметричны относительно прямой  $MS$ , то и треугольники  $F_1MF_2$  и  $AMD$  тоже симметричны и, соответственно, равны. Аналогично, симметричны и равны треугольники  $F_1NF_2$  и  $BNE$ .



а)

$$\begin{aligned} AF_2 &= AM + MF_2 = F_1M + MF_2 = \\ &= F_1N + NF_2 = BN + NF_2 = BF_2. \end{aligned}$$

Значит,  $CF_2$  — медиана треугольника  $ABC$ .

б) Четырехугольник  $F_1DCE$  вписан в окружность, так как  $\angle F_1DC + \angle F_1EC = \angle MF_2S + \angle NF_2S = \pi$ . Так как в этом четырехугольнике две смежные стороны равны ( $F_1D = F_1E$ ), то  $CF_1$  — биссектриса треугольника  $ABC$ .

## 5. (Клячко А.А.)

1) Рассмотрим случай четного  $n$ . Тогда каждый из игроков полностью контролирует  $\frac{n}{2}$  столбцов (при этом не имеет значения, кто делает первый ход). Ясно, что Максималист может сделать свои столбцы линейно независимыми и обеспечить ранг матрицы минимум  $\frac{n}{2}$ . Также ясно, что Минималист может сделать все свои столбцы нулевыми, ограничив ранг матрицы  $\frac{n}{2}$ .

Ответ для четного  $n$ :  $\frac{n}{2}$ .

2) Пусть  $n$  нечетно. Тогда, если мы раскрасим клетки таблицы в черный и белый цвета в шахматном порядке, каждый из игроков будет контролировать клетки одного цвета.

а) Пусть Максималист делает первый ход. Тогда он сможет сделать ранг матрицы максимальным, то есть равным  $n$ . Опишем его стратегию. Она состоит в том, что, заполняя очередную диагональную клетку, он следит за тем, чтобы соответствующий главный (угловой) минор был отличен от нуля. Это всегда можно обеспечить, поскольку этот минор разлагается по своей последней строке, а алгебраическое дополнение последнего элемента не равно нулю. Ответ для нечетного  $n$ , когда Максималист делает первый ход:  $n$ .

б) Пусть Минималист делает первый ход. Тогда он сможет обеспечить равенство нулю определителя всей матрицы: заполняя очередную диагональную клетку (кроме последней), он следит за тем, чтобы соответствующий угловой минор был отличен от нуля, а в конце обнуляет определитель всей матрицы. Значит, он сможет гарантировать ранг меньше  $n$ . С другой стороны, Максималист сможет обеспечить, чтобы минор, полученный вычеркиванием последней строки и первого столбца, был отличен от нуля (аналогично пункту 2 а)). Тем самым, ранг матрицы будет равен по крайней мере  $n - 1$ .

Ответ для нечетного  $n$ , когда Минималист делает первый ход:  $n - 1$ .

6. (Баев А.Ж.)

1 шаг. Подставим в соотношение  $x = \frac{t}{t-1}$ , где  $t > 1$ . Получим

$$f' \left( \frac{t}{t-1} \right) = f(t) + f \left( \frac{t}{t-1} \right).$$

Получим свойство:

$$f' \left( \frac{t}{t-1} \right) = f'(t).$$

2 шаг. Продифференцируем исходное соотношение по  $x$ .

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} f' \left( \frac{x}{x-1} \right) + f'(x).$$

После замены из свойства, получаем:

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Уравнение интегрируется по частям:

$$f'(x) = C e^{x + \frac{1}{x-1}}.$$

Добавим условие на бесконечности и найдем  $C = 1$ :

$$f'(x) = 2e^{x + \frac{1}{x-1}}.$$

3 шаг. Заметим, что если в исходное дифференциальное уравнение мы подставим  $x = 2$ , то получим  $f(2) = \frac{1}{2}f'(2)$ . Значит:

$$f(2) = e^3.$$

Осталось доказать, что  $e^3 < 20.16$ . Заметим, что для проверки этого неравенства грубых оценок типа  $e < 3$  или  $e < 2.8$  недостаточно, требуется более точная:  $e < 2.72$ .