

VI Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютерное моделирование»  
27 марта 2014

Стоимость задач:  
10, 20, 25, 15 и 20 баллов соответственно.

1. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , общий член которого имеет вид

$$a_n = \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2.$$

2. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение Клеро  $y = p \cdot x + f(p)$ , где  $p = y'$  и  $f$  — дифференцируемая функция. Доказать, что если  $f'$  — монотонная функция, то особое решение уравнения Клеро имеет ровно одну общую точку с любым частным решением.
3. Во время недавних раскопок на Марсе были обнаружены листы бумаги с таинственными символами на них. После долгих исследований учёные пришли к выводу, что надписи на них на самом деле могли быть обычными числовыми равенствами. Кроме того, из других источников было получено веское доказательство того, что марсиане знали только три операции: сложение, умножение и вычитание (марсиане никогда не использовали «унарный минус»: вместо « $-5$ » они писали « $0-5$ »). Также ученые доказали, что марсиане не наделяли операции разным приоритетом, а просто вычисляли выражения (если в них не было скобок) слева направо: например,  $3 + 3 * 5$  у них равнялось 30, а не 18. К сожалению, символы арифметических действий стерлись. Например, если была запись « $18 = 7(53)2$ », то возможно восстановить эту запись как « $18 = 7 + (5 - 3) * 2$ ». Требуется написать программу, находящую требуемую расстановку знаков или сообщающую, что таковой не существует.

Первая строка входного файла `INPUT.TXT` состоит из натурального числа, не превосходящего  $2^{30}$ , знака равенства, и последовательности натуральных чисел (не более десяти), произведение которых также не превосходит  $2^{30}$ . Некоторые группы чисел (одно или более) могут быть окружены скобками. Длина входной строки не будет превосходить 80 символов, и других ограничений на количество и вложенность скобок нет. Между двумя соседними числами, не разделенными скобками, всегда будет хотя бы один пробел, во всех остальных местах может быть любое (в том числе и 0) число пробелов (естественно, внутри числа пробелов нет).

В выходной файл `OUTPUT.TXT` необходимо вывести одну строку, содержащую полученное равенство (т.е., исходное равенство со вставленными знаками арифметических действий без лишних пробелов). В случае если требуемая расстановка знаков невозможна, вывести строку, состоящую из единственного числа « $-1$ ». Выходная строка не должна содержать пробелов.

4. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+2014) \\ P'(x) & P'(x+1) & \dots & P'(x+2014) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(2014)}(x) & P^{(2014)}(x+1) & \dots & P^{(2014)}(x+2014) \end{vmatrix},$$

где  $P(x) = x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+2014)$ .

5. Внутри тетраэдра  $ABCD$  расположена точка  $O$  так, что прямые  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$ ,  $DO$  пересекают грани  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$ ,  $ABC$  тетраэдра в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  соответственно. Причем отношения

$$\frac{AO}{A_1O}, \frac{BO}{B_1O}, \frac{CO}{C_1O}, \frac{DO}{D_1O}$$

равны одному и тому же числу. Найти все значения, которые может принимать это число.