

VIII Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математическое и компьютерное моделирование»  
01 апреля 2016

Стоимость задач:  
10 баллов каждая задача.

1. Введём функцию

$$f(n) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n^2 - 1}] + [\sqrt{n^2}],$$

где  $[x]$  — наибольшее целое число, не превышающее  $x$ . Опишите функцию, которая вычисляет  $f(n)$  для данного натурального  $n$ , не используя при этом операцию извлечения корня и вещественную арифметику.

2. На декартовой координатной плоскости нарисованы две полупараболы: график функции  $y = x^2$  ( $x \geq 0$ ) и его копия, повернутая на прямой угол по часовой стрелке. Эти две кривые отсекают от прямой, параллельной оси ординат, отрезок длины  $L$ . Обозначим через  $S(L)$  — площадь отсечённой фигуры.

- а) Докажите, что  $S(L) > 1$  при  $L > 2$ ;  
б) Напишите функцию, которая вычисляет  $S(L)$  для данного положительного вещественного числа  $L$ .

3. Найдите все дифференцируемые функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие соотношению

$$f(x - y) + f(x + y) = f'(x^2 + y^2)$$

для любых  $x, y \in \mathbb{R}$ .

4. Дана функция  $f: [0, 2n] \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $f_i = f(i)$  — значения функции во всех целых  $i$  от 0 до  $2n$ . Дана переменная  $S$  вещественного типа с начальным значением 0. За один ход робот может выбрать целое  $i$  от 1 до  $2n - 1$ , затем добавить к переменной  $S$  или вычесть из нее среднее арифметическое значений функции  $f(x)$  в узлах  $i - 1, i, i + 1$ :

$$S := S \pm \frac{f_{i-1} + f_i + f_{i+1}}{3}.$$

Может ли робот за конечное число ходов получить в переменной  $S$  значение

$$I = \frac{1}{3} \left( f_0 + 4 \sum_{k=1}^n f_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n} \right),$$

которое является приближением интеграла  $\int_0^{2n} f(x) dx$ , если

- а)  $f(0) = f(2n) = 0$ ;  
б)  $f(0) \neq 0, f(2n) \neq 0$ ?

5. Дана некоторая условная машина, состоящая из памяти в  $n$  бит и указателя, который в каждый отдельный момент находится над какой-то из этих  $n$  ячеек. Перед запуском программы в память записывается некоторое натуральное число  $m$  в двоичной системе счисления, а указатель устанавливается над крайним правым (младшим) битом числа. Язык программирования для этой машины состоит из следующих команд:

<b>L</b>	left	сместить указатель налево на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
<b>R</b>	right	сместить указатель направо на одну ячейку, если это возможно, иначе завершить программу
<b>C</b>	change	изменить значение бита в текущей ячейке на противоположное
<b>A</b>	again	перейти к выполнению первой команды
<b>S</b>	skip	пропустить две следующие команды, если в текущей ячейке 0
<b>F</b>	finish	завершить выполнение программы

Команды записываются в одну строку и выполняются в последовательном порядке, слева направо. При этом запись программы обязана оканчиваться командой **A** или **F**. Напишите для этой абстрактной машины следующие программы:

- а) заменить данное число на  $(m - 1)$ ;
- б) заменить данное число на  $(2^n - m - 1)$ ;
- в) изменить на противоположный его старший (крайний слева) бит.

*Примеры:*

- а) программа, обнуляющая все ячейки: **SSCLA**;
  - б) программа, которая изменяет второй справа бит, если крайний справа бит нулевой: **SFFLCF**.
6. Из квадратной однородной пластины со стороной 1 случайным образом вырезается квадрат со сторонами, равными  $2a$  и параллельными сторонам исходного квадрата. При этом центр квадрата — это случайная величина, равномерно распределённая по всем допустимым положениям (квадрат со стороной  $(1 - 2a)$ ).
- а) Найдите вероятность  $p(a)$  того, что центр тяжести полученной фигуры лежит в вырезанной области.
  - б) Опишите функцию  $p(a)$ , которая вычисляет указанную вероятность приблизительно, считая при этом, что нам не известен метод нахождения центра тяжести произвольной фигуры, однако мы можем найти центр тяжести конечного множества точек одинаковой массы.