IX Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математика»

13 апреля 2017

1. Пусть $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, заданная рекуррентно: $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ и $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ при $n \geqslant 1$. Вычислите сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{2^n},$$
если известно, что данный ряд сходится.

2. Найдите все простые p, запись которых в k-ичной системе счисления при некотором натуральном $k > 1$ содержит ровно k различных цифр (старшая цифра не может быть нулём).

3. Докажите, что в любой группе квадрат произведения двух элементов порядка два и куб произведения двух элементов порядка три всегда являются коммутаторами.

4. Точка P лежит внутри выпуклой области, ограниченной параболой $y = x^2$, но не лежит на оси OY. Обозначим через $S(P)$ множество всех точек, полученных отражением P относительно всех касательных к параболе.

   а) Докажите, что значение суммы
$$\max_{(x,y)\in S(P)} y + \min_{(x,y)\in S(P)} y$$
не зависит от выбора точки P.

   б) Найдите геометрическое место точек P таких, что $\max\limits_{(x,y)\in S(P)} y = 0$.

5. Для каждой функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ обозначим через $s_n(f)$ и $S_n(f)$ нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции f, соответствующие равномерному разбиению $[0,1]$ на n частей. Существует ли такая интегрируемая функция f, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(f)$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(f)$ расходится?

6. Некоторые участники математической олимпиады списали решения некоторых задач у своих товарищей. Докажите, что можно с позором выгнать часть участников так, чтобы получилось, что более четверти от общего числа списанных решений было списано выгнанными участниками у не выгнанных.