

Х Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению  
«Математика»  
03 апреля 2018

1. Последовательность многочленов  $P_n$  равномерно сходится на всей оси  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажите, что  $f$  является многочленом.
2. Докажите, что если непрерывно дифференцируемая функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет тождеству  $f(x) = \alpha f(x/2)$ , а  $|\alpha| < 2$ , то при  $|\alpha| = 1$  функция  $f$  — произвольная постоянная, а при остальных  $\alpha$  — нулевая.
3. Две непрерывно дифференцируемые на  $[0; a]$  функции  $f_0, f_1$  принимают неположительные значения и  $f_0(0) = f_1(0) = 0$ . Докажите, что если при всех  $x$  выполняется неравенство  $f'_0(x) + x f'_1(x) \geq 0$  на отрезке  $[0; a]$ , то обе функции являются тождественно нулевыми.
4. Известно, что на графике многочлена  $P$  можно отметить  $n$  точек, являющихся вершинами правильного  $n$ -угольника. Доказать, что его степень не меньше  $n - 1$ .
5. Если три вектора  $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3)$  с ненулевыми координатами попарно ортогональны, то векторы  $\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}\right), \left(\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}\right), \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \frac{1}{w_3}\right)$  с обратными координатами компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.