

X Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математика»
03 апреля 2018

1. Последовательность многочленов P_n равномерно сходится на всей оси $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Докажите, что f является многочленом.
2. Докажите, что если непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству $f(x) = \alpha f(x/2)$, а $|\alpha| < 2$, то при $|\alpha| = 1$ функция f — произвольная постоянная, а при остальных α — нулевая.
3. Две непрерывно дифференцируемые на $[0; a]$ функции f_0, f_1 принимают неположительные значения и $f_0(0) = f_1(0) = 0$. Докажите, что если при всех x выполняется неравенство $f_0'(x) + x f_1'(x) \geq 0$ на отрезке $[0; a]$, то обе функции являются тождественно нулевыми.
4. Известно, что на графике многочлена P можно отметить n точек, являющихся вершинами правильного n -угольника. Доказать, что его степень не меньше $n - 1$.
5. Если три вектора $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3)$ с ненулевыми координатами попарно ортогональны, то векторы $\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}\right), \left(\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}\right), \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \frac{1}{w_3}\right)$ с обратными координатами компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.