X Республиканская студенческая предметная олимпиада по направлению «Математика»

03 апреля 2018

1. Последовательность многочленов P_n равномерно сходится на всей оси $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Докажите, что f является многочленом.

2. Докажите, что если непрерывно дифференцируемая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлевторяет тождеству $f(x)=\alpha f(x/2)$, а $|\alpha|<2$, то при $|\alpha|=1$ функция f — произвольная постоянная, а при остальных α — нулевая.

3. Две непрерывно дифференцируемые на $[0;a]$ функции f_0, f_1 принимают неположительные значения и $f_0(0)=f_1(0)=0$. Докажите, что если при всех x выполняется неравенство $f_0'(x)+xf_1'(x)\geqslant 0$ на отрезке $[0;a]$, то обе функции являются тождественно нулевыми.

4. Известно, что на графике многочлена P можно отметить n точек, являющихся вершинами правильного n-угольника. Доказать, что его степень не меньше $n-1$.

5. Если три вектора (u_1,u_2,u_3), (v_1,v_2,v_3), (w_1,w_2,w_3) с ненулевыми координатами попарно ортогональны, то векторы $\left(\frac{1}{u_1},\frac{1}{u_2},\frac{1}{u_3}\right)$, $\left(\frac{1}{v_1},\frac{1}{v_2},\frac{1}{v_3}\right)$, $\left(\frac{1}{w_1},\frac{1}{w_2},\frac{1}{w_3}\right)$ с обратными координатами компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.