

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

Кафедра ..... Вычислительных технологий  
(полное название кафедры)

Петр Сергеевич Жигалов

(фамилия, имя, отчество студента – автора работы)

Анализ систем источник-приемник в задачах морской геоэлектрики

(полное название темы магистерской диссертации)

---

---

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**  
по направлению высшего образования

01.04.02 – Прикладная математика и информатика

(код и наименование направления подготовки магистра)

---

факультет прикладной математики и информатики

(факультет)

Тема диссертации утверждена приказом по НГТУ № 4931/2 от «15» октября 2014 г.

**Руководитель**

Шурина Э.П.

(фамилия, имя, отчество)

д.т.н., профессор

(ученая степень, ученое звание)

Новосибирск 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра ..... Вычислительных технологий  
(полное название кафедры)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой ..... Шокин Ю.И.  
(фамилия, имя, отчество)

.....  
(подпись, дата)

**ЗАДАНИЕ**  
на магистерскую диссертацию

студенту ..... Жигалову Петру Сергеевичу  
(фамилия, имя, отчество)

факультета ..... прикладной математики и информатики

Направление подготовки ..... 01.04.02 – Прикладная математика и информатика  
(код и наименование направления подготовки магистра)

Магистерская программа ..... Математическое моделирование  
(наименование программы)  
детерминированных и стохастических процессов

Тема ..... Анализ систем источник-приемник в задачах морской геоэлектрики  
(полное название темы)

Цели работы Lorem Ipsum

Lorem Ipsum

Lorem Ipsum

Lorem Ipsum

**Руководитель**

Шурина Э.П.

(фамилия, имя, отчество)

д.т.н., профессор

(ученая степень, ученое звание)

.....  
(подпись, дата)

**Студент**

Жигалов П.С.

(фамилия, имя, отчество)

ФПМИ, ПММ-42

(факультет, группа)

.....  
(подпись, дата)

## **Аннотация**

Отчет 60 с., 33 рис., 9 табл., 49 источников, 2 прил.

**СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛА, УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА,  
ВЕКТОРНЫЙ МКЭ, РМЛ-СЛОЙ, МОРСКАЯ ГЕОЭЛЕКТРИКА, НЕФТЯНЫЕ  
МЕСТОРОЖДЕНИЯ**

Объектом исследования является поведение электрического поля в недрах земли под слоем морской воды.

Цель работы – решение трехмерной прямой задачи морской геоэлектрики векторным методом конечных элементов.

В процессе работы проводилось численное моделирование электрического поля векторным методом конечных элементов, проводились исследования влияния слоя воздуха, целесообразности применения РМЛ-слоя для ограничения области моделирования, сравнивалось поведение электромагнитного поля при различном расположении источника поля и объектов с различными электрофизическими свойствами друг относительно друга.

В результате исследования было получено представление электрического поля в различных средах, также были даны рекомендации по возможностям ограничения области моделирования.

## Оглавление

Введение . . . . .	6
1. Математическая модель . . . . .	9
1.1. Уравнения Максвелла и Гельмгольца . . . . .	9
1.2. Вариационная постановка . . . . .	11
1.3. Вариационная постановка с учетом PML-слоя . . . . .	14
1.4. Дискретная вариационная постановка . . . . .	15
1.5. Тетраэдральные конечные элементы . . . . .	17
1.6. Треугольные конечные элементы . . . . .	19
1.7. Двухуровневый решатель . . . . .	20
2. Построение и решение СЛАУ . . . . .	23
2.1. Структура глобальной матрицы СЛАУ . . . . .	23
2.2. Учет краевых условий . . . . .	24
2.3. Учет токовой петли . . . . .	25
3. Вычислительные эксперименты . . . . .	26
3.1. Верификация программного комплекса . . . . .	26
3.1.1 Расчетная область . . . . .	26
3.1.2 Тестирование на гладких функциях . . . . .	26
3.2. Исследование влияния слоя воздуха . . . . .	27
3.2.1 Описание расчетной области . . . . .	28
3.2.2 Конечноэлементная сетка . . . . .	28
3.2.3 Результаты исследования . . . . .	29
3.3. Исследование эффективности применения PML-слоя . . . . .	31
3.3.1 Описание расчетной области . . . . .	32
3.3.2 Варьирование коэффициентов растяжения . . . . .	33
3.3.3 Варьирование толщины PML-слоя . . . . .	33
3.3.4 Варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой . . . . .	34

3.3.5	Проверка выполнения условий на контактных границах	35
3.3.6	Графическое представление результатов . . . . .	36
3.3.7	Анализ целесообразности применения PML-слоя . . . .	37
3.4.	Задача, приближенная к реальной . . . . .	38
3.4.1	Описание расчетной области . . . . .	38
3.4.2	Конечноэлементная сетка . . . . .	39
3.4.3	Результаты вычислительного эксперимента . . . . .	40
4.	Описание программного комплекса . . . . .	46
4.1.	Формат конфигурационных файлов . . . . .	46
4.2.	Аргументы командной строки и переменные окружения . . . . .	47
	Заключение . . . . .	49
	Список литературы . . . . .	50
	Приложение А. Примеры конфигурационных файлов . . . . .	55
	Приложение Б. Интерфейсы основных классов программного комплекса	60

## Введение

В современном мире сложилась ситуация, что экономика многих стран, в число которых входят Россия, Швеция, Канада, Объединенные Арабские Эмираты, зависит от цены на нефть. Цены на углеводороды могут расти или падать, но конкуренция за обладание ими всегда велика и доходит порой до вооруженных конфликтов. Особенно актуальными в последнее время становятся задачи геологоразведки в недрах земли, скрытых под толщей морской воды, ведь, по оценкам специалистов, на территории только Северного Ледовитого океана может находиться до 25 процентов мировых запасов нефти и газа [1]

Обычно задача морской геоэлектрики выглядит так, как показано на рисунке 1: источник перемещается кораблем со специальным оборудованием. Приемники располагаются на морском дне, обычно вдоль линии или по равномерной сетке.

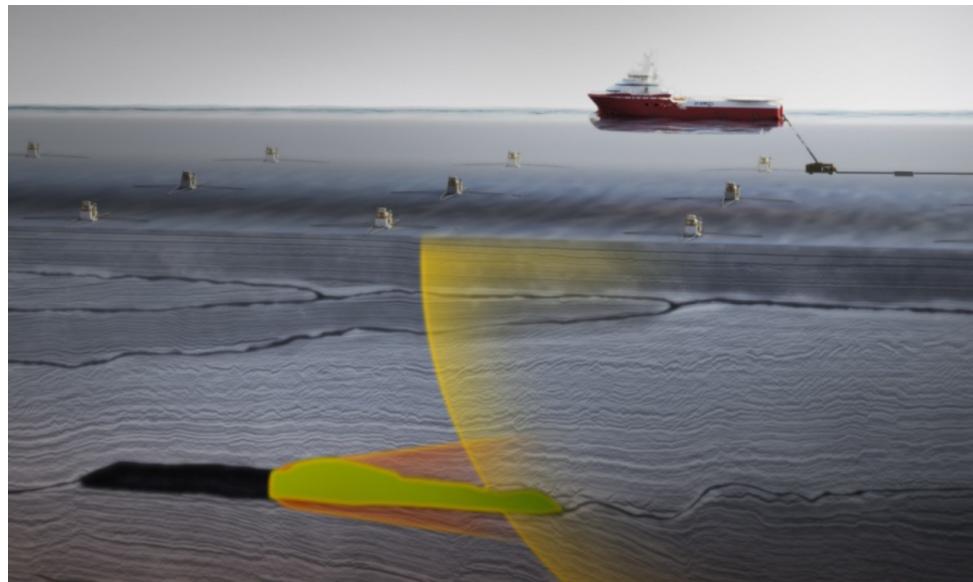


Рисунок 1 — задача морской геоэлектрики

К отличительным особенностям задач морской геоэлектрики относится низкая частота источника электромагнитного поля (0.25-100 Гц) [2] и, как следствие, большой размер области моделирования. Кроме того, морское дно имеет сложный рельеф, а электропроводность морской воды может изменяться в зависимости от глубины [1]. Это вызвано различной соленостью и температурой разных слоев морской воды, эти свойства, кроме того, могут меняться от внеш-

них факторов, таких как сезон, погодные условия или интенсивность таяния льдов.

Геометрические размеры локального источника возбуждения электромагнитного поля составляют несколько сотен метров, тогда как размеры области моделирования составляют 6000 м и более. Это приводит к необходимости применения специальных методов для сокращения расчетной области. Для этого нередко практикуется отказ от расчетов в области с воздухом и, вместо этого, задание на границе раздела сред воздух-вода условий непротекания. Однако такой подход не позволяет правильно учесть физические процессы, протекающие в воздухе [3, 4]. Другим подходом является выделение из области некоторой подобласти меньшего размера и задание на ее границах специальных поглощающих условий. К таким условиям относятся Absorbing Boundary Conditions (ABC) [5], предложенные G. Mur в 1981 году, а также Perfectly Matched Layer (PML) [6, 7], который предложил J.P. Berenger в 1994 году. PML-слой учитывается в вариационной формулировке как подобласть со специальными коэффициентами.

В настоящее время для решения задач морской геоэлектрики наиболее широко используется векторный метод конечных элементов (ВМКЭ). Этот метод подробно освещен в работах [8, 9].

Целью работы является решение трехмерной прямой задачи морской геоэлектрики векторным методом конечных элементов. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Исследование влияния слоя воздуха при различной глубине источника электромагнитного возмущения.
2. Исследование целесообразности применения PML-слоя для ограничения области моделирования в задачах морской геоэлектрики на низких частотах.
3. Исследование поведения электромагнитного поля при различном расположении источника поля и искомого объекта друг относительно друга.

Основные промежуточные результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- Городская научно-практическая конференция аспирантов и магистрантов «Progress Through Innovation» [10] (Новосибирск, 2015);
- 53 Международная научная студенческая конференция МНСК-2015 [11] (Новосибирск, 2015);
- X Международная научно-техническая конференция «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» [12] (Пенза, 2015);
- Всероссийская научно-техническая конференция «Наука. Технологии. Инновации» [4] (Новосибирск, 2015);
- Российская научно-техническая конференция «Обработка информации и математическое моделирование» [13] (Новосибирск, 2015).

## 1. Математическая модель

### 1.1. Уравнения Максвелла и Гельмгольца

Электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла [14]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ — закон Фарадея,} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \text{ — закон Ампера,} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ — закон Гаусса для магнитной индукции,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ — закон Гаусса для электрической индукции,}$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля ( $\text{В/м}$ ),  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля ( $\text{А/м}$ ),  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  — магнитная индукция ( $\text{Тл}$ ),  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  — электрическая индукция ( $\text{Кл/м}^2$ ),  $\rho$  — плотность электрических зарядов ( $\text{Кл/м}^3$ ),  $\sigma$  — электрическая проводимость ( $\text{См/м}$ ),  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость ( $\Phi/\text{м}$ ),  $\varepsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\mu = \mu_r \mu_0$  — магнитная проницаемость ( $\text{Гн/м}$ ),  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  — магнитная проницаемость вакуума,  $\mathbf{J}$  — плотность стороннего электрического тока ( $\text{А/м}^2$ ).

На границе  $\Gamma = \Omega^j \cap \Omega^k$  между материалами  $j$  и  $k$  с различными электрофизическими свойствами должны быть выполнены следующие условия:

$$[\![\mathbf{E} \times \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = 0 \text{ — тангенциальная компонента } \mathbf{E} \text{ непрерывна,} \quad (3)$$

$$[\![\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = 0 \text{ — нормальная компонента } \mathbf{B} \text{ непрерывна,}$$

$$[\![\mathbf{H} \times \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = \mathbf{J}_{\Gamma} \text{ — тангенциальная компонента } \mathbf{H} \text{ разрывна,}$$

$$[\![\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = \rho_{\Gamma} \text{ — нормальная компонента } \mathbf{D} \text{ разрывна.} \quad (4)$$

При моделировании электрического поля в частотной области будем полагать, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  будут зависеть от времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{J}(t) = \mathbf{J}e^{i\omega t}.$$

Используя такое представление, получим из (1) и (2):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}. \quad (6)$$

Выполним следующие преобразования над (5):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H},$$

$$\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{H},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = -i\omega \nabla \times \mathbf{H}. \quad (7)$$

Подставим в (7) (6):

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = -i\omega(i\omega \varepsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}),$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} - i\omega \sigma \mathbf{E} - i\omega \mathbf{J},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}, \quad (8)$$

где  $k^2 = i\omega \sigma - \omega^2 \varepsilon$ . Уравнение (8) называется уравнением Гельмгольца.

Краевые условия для уравнения (8) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{S_1} = \mathbf{E}^g, \quad (9)$$

$$\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{S_2} = 0. \quad (10)$$

В случае удаленных границ (9) принимает вид условия «большого бака»:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{S_1} = 0. \quad (11)$$

Источником электромагнитного возмущения будет выступать замкнутая токовая петля.

Подействуем оператором  $\nabla \cdot$  на уравнение (2):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \right).$$

Так как  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ ,  $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot (i\omega \varepsilon \mathbf{E})$  и, так как для замкнутой петли с током выполняется  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , получим закон сохранения заряда:

$$\nabla \cdot (\sigma + i\omega \varepsilon) \mathbf{E} = 0. \quad (12)$$

## 1.2. Вариационная постановка

Введем следующие пространства [8, 9]:

$$\mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3 \},$$

$$\mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Скалярное произведение в этих пространствах имеет вид:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega.$$

Скалярно умножим (8) на некоторую пробную функцию  $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ :

$$(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}), \mathbf{v}) + (k^2 \mathbf{E}, \mathbf{v}) = -(i\omega \mathbf{J}, \mathbf{v}),$$

$$\int_{\Omega} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega.$$

Воспользовавшись первой векторной формулой Грина (13):

$$\int_D \nabla \times \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV = \int_D \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{v}}) dV + \int_{\partial D} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} dS, \quad (13)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \bar{\mathbf{v}} dS + \\ & + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega. \end{aligned}$$

Применим тождества  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega - \int_{\partial \Omega} \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{n} \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dS. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как  $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ , то из свойств пространства  $\mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$  второй интеграл в правой части равен нулю, тогда уравнение (14) примет вид:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega. \quad (15)$$

В результате векторная вариационная постановка имеет вид: **Найти**  $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ , **такое что**  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$  **будет выполнено** (15).

Введем еще два пространства [9]

$$\mathbb{H}(\text{grad}, \Omega) = \{\varphi \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \nabla \varphi \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3\},$$

$$\mathbb{H}_0(\text{grad}, \Omega) = \{\varphi \in \mathbb{H}(\text{grad}, \Omega) : \varphi|_{\partial \Omega} = 0\}.$$

В соответствии с комплексом Де Рама (De Rham) [15]

$$\mathbb{H}(\text{grad}, \Omega) \xrightarrow{\nabla} \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} \mathbb{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (16)$$

будет иметь место вложение  $\nabla\varphi \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ ,  $\forall \varphi \in \mathbb{H}_0(\text{grad}, \Omega)$ . Возьмем  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ , тогда (15) примет вид:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times (\nabla\varphi) d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla\varphi) d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot (\nabla\varphi) d\Omega.$$

Использовав свойство дивергенции  $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$  и применив формулу Остроградского-Гаусса (17)

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (17)$$

получим:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times (\nabla\varphi) d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla\varphi) d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \bar{\varphi} \nabla \cdot \mathbf{J} d\Omega - \int_{\partial\Omega} i\omega \bar{\varphi} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Поскольку  $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  и  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ , в левой части останется только один интеграл:

$$\int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla\varphi) d\Omega = 0.$$

После преобразований получим:

$$\int_{\Omega} \bar{\varphi} \nabla \cdot (k^2 \mathbf{E}) d\Omega = 0,$$

следовательно, решение вариационной задачи (15) удовлетворяет закону сохранения заряда (12) в слабом смысле.

### 1.3. Вариационная постановка с учетом PML-слоя

Для ограничения расчетной области введем PML-слой  $\Omega^{PML}$ , который является подобластью основной расчетной области  $\Omega$  со специальными коэффициентами, построеннымными таким образом, чтобы обеспечить полное поглощение электрического поля внутри слоя и не допустить его отражения от внутренних границ и прохождения через внешние границы слоя (рисунок 2).

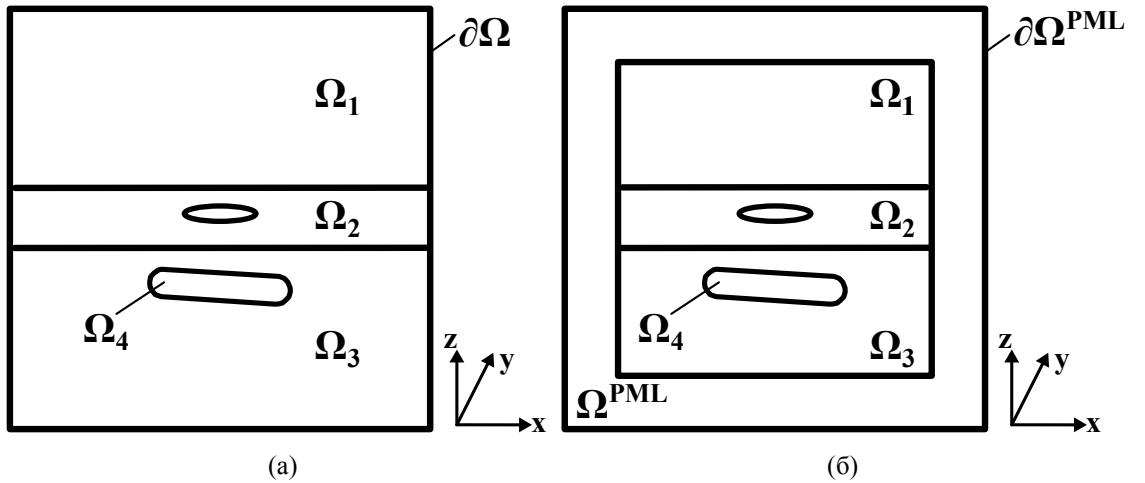


Рисунок 2 — расчетные области: (а) без PML-слоя и (б) с PML-слоем

PML-слой определяется модифицированными координатами  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ , полученными следующей заменой координат [7]:

$$\tilde{x} = \int_0^x s_x(t) dt, \quad \tilde{y} = \int_0^y s_y(t) dt, \quad \tilde{z} = \int_0^z s_z(t) dt,$$

где  $s_j(\tau) = 1$  вне PML-слоя, а внутри него может быть задано в виде:

$$s_j(\tau) = 1 + \chi \left( \frac{d(\tau)}{\delta} \right)^m, \quad m \geq 1, \quad (18)$$

где  $d(\tau)$  — расстояние в  $j$ -м направлении от внутренней границы PML-слоя,  $\delta$  — толщина PML-слоя,  $\chi$  — некоторое комплексное число, причем  $\operatorname{Re}(\chi) \geq 0$ ,  $\operatorname{Im}(\chi) \geq 0$ . Оператор  $\nabla$  в новых координатах будет иметь вид:

$$\tilde{\nabla} = \left[ \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

После такой замены, внутри PML-слоя уравнение Гельмгольца (8) будет иметь вид (19)

$$\tilde{\nabla} \times (\mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}) + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad (19)$$

что приведет к преобразованию уравнения (15) к виду (20):

$$\int_{\Omega^{PML}} \mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\nabla} \times \bar{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} + \int_{\Omega^{PML}} k^2 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} = 0. \quad (20)$$

В результате, если обозначить  $\widehat{\Omega} = \Omega \setminus \Omega^{PML}$ , то векторная вариационная постановка с учетом PML-слоя примет вид: **Найти**  $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \widehat{\Omega})$  и  $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$ , **такие что**  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \widehat{\Omega})$  и  $\forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$  **будем выполнено:**

$$\begin{cases} \int_{\widehat{\Omega}} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\widehat{\Omega} + \int_{\widehat{\Omega}} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\widehat{\Omega} = - \int_{\widehat{\Omega}} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\widehat{\Omega} \\ \int_{\Omega^{PML}} \mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} + \int_{\Omega^{PML}} k^2 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} = 0. \end{cases}$$

#### 1.4. Дискретная вариационная постановка

Разобьем область  $\Omega$  на  $m$  непересекающихся элементов:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k, \quad \forall i \neq j, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset.$$

Введем конечномерные подпространства:

$$\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) \subset \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega), \quad \mathbb{H}_0^h(\text{grad}, \Omega) \subset \mathbb{H}_0(\text{grad}, \Omega).$$

Для дискретных подпространств  $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$  и  $\mathbb{H}_0^h(\text{grad}, \Omega)$  комплекс Де Рама (16) также будет верен, следовательно закон сохранения заряда (12) будет также выполнен в слабом смысле [14].

Пространство  $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$  является прямой суммой подпространств [14, 16]

$$\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) = \mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega) \oplus (\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega))^{\perp}, \quad (21)$$

где  $\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega)$  – ядро rot-оператора,  $(\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega))^{\perp}$  – его ортогональное дополнение. Для выполнения условий непрерывности (3)-(4) необходимо использовать полный базис (базис II типа) [14, 17–19, 22], состоящий из двух типов базисных функций. Первый тип – роторные базисные функции из пространства  $(\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega))^{\perp}$ , которые обеспечивают непрерывность тангенциальных компонент электрического поля  $\mathbf{E}$  (3). Второй – градиентные базисные функции из пространства  $\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ , которые обеспечивают скачок нормальной компоненты электрического поля  $\mathbf{E}$  (4) и выполнение закона сохранения заряда (12).

Представим векторнозначную функцию  $\mathbf{E}^h$  в виде разложения по базису  $\psi_j \in \mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ :

$$\mathbf{E}^h = \sum_{j=1}^n q_j \psi_j.$$

В качестве тестовой функции выберем базисную функцию  $\psi_i \in \mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ , тогда конечноэлементная аппроксимация вариационного уравнения (15) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \psi_j \cdot \nabla \times \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \psi_j \cdot \psi_i d\Omega \right) q_j &= \\ &= - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \psi_i d\Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

В матрично-векторной форме (22) можно представить в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(\mathbf{G} + \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (23)$$

$$\mathbf{G}_{i,j} = \int_{\Omega_k} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_i \cdot \nabla \times \mathbf{w}_j d\Omega_k, \quad \mathbf{M}_{i,j} = \int_{\Omega_k} k^2 \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j d\Omega_k.$$

Матрица СЛАУ будет иметь симметричную разреженную структуру, поэтому ее удобно хранить в формате CSLR (Compressed Sparse (Lower triangle) Row) или CSR (Compressed Sparse Row) [20].

### 1.5. Тетраэдральные конечные элементы

В качестве конечных элементов для представления расчетной области, будем пользоваться тетраэдрами. На тетраэдральном конечном элементе определим  $\mathcal{L}$ -координаты, называемые также барицентрическими координатами [21]. Введем нумерацию вершин и ребер, показанную на рисунке 3:

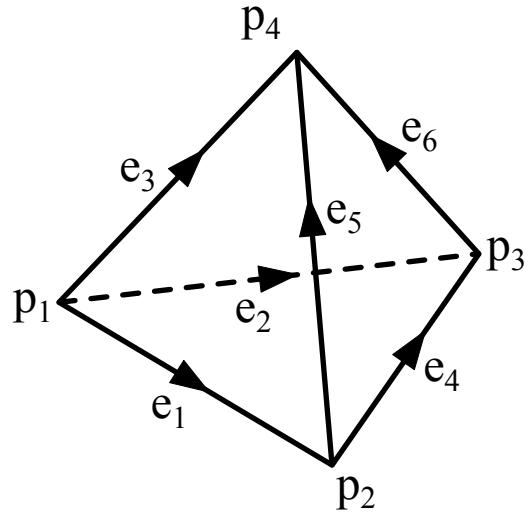


Рисунок 3 — тетраэдральный конечный элемент

Под  $\mathcal{L}$ -координатами понимают функции следующего вида:

$$\mathcal{L}_i(x, y, z) = \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}z + \alpha_{i,4}, \quad i = \overline{1..4}.$$

Коэффициенты  $\alpha_{i,j}$  могут быть определены по формуле (24):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} & p_{4x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} & p_{4y} \\ p_{1z} & p_{2z} & p_{3z} & p_{4z} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (24)$$

Задав  $\mathcal{L}$ -координаты, можно определить на тетраэдре базисные функции. В отличие от узлового метода конечных элементов, в векторном методе конечных

элементов базисные функции ассоциированы не с узлами, а с ребрами (edge), гранями (face) и объемами (volume) [22, 23]. Так как будут использованы полные (II типа) базисы первого и второго порядков, то ограничимся рассмотрением только базисных функций, ассоциированных с ребрами и гранями.

Иерархический векторный базис Вебба второго порядка второго типа на тетраэдрах имеет вид [24]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_i^{1,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=1, \dots, 6; \quad k, l = 1, \dots, 4; \quad k < l, \\
 \mathbf{w}_i^{1,\text{II}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=7, \dots, 12; \quad k, l = 1, \dots, 4; \quad k < l, \\
 \mathbf{w}_i^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_j \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k - 2\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l; \quad i=13, \dots, 16; \quad j, k, l = 1, \dots, 4; \quad j < k < l, \\
 \mathbf{w}_i^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_j - 2\mathcal{L}_j \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l; \quad i=17, \dots, 20; \quad j, k, l = 1, \dots, 4; \quad j < k < l, \\
 \mathbf{w}_i^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l); \quad i=21, \dots, 24; \quad j, k, l = 1, \dots, 4; \quad j < k < l, \\
 \mathbf{w}_i^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k)); \quad i=25, \dots, 30; \quad j, k = 1, \dots, 4; \quad j < k,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где  $\mathbf{w}_1^{1,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_6^{1,\text{I}}$  – базисные функции первого порядка первого типа, ассоциированные с ребрами,  $\mathbf{w}_7^{1,\text{II}}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{1,\text{II}}$  – базисные функции первого порядка второго типа, ассоциированные с ребрами,  $\mathbf{w}_{13}^{2,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_{20}^{2,\text{I}}$  – базисные функции второго порядка первого типа, ассоциированные с гранями,  $\mathbf{w}_{21}^{2,\text{II}}, \dots, \mathbf{w}_{24}^{2,\text{II}}$  – базисные функции второго порядка второго типа, ассоциированные с гранями,  $\mathbf{w}_{25}^{2,\text{II}}, \dots, \mathbf{w}_{30}^{2,\text{II}}$  – базисные функции второго порядка второго типа, ассоциированные с ребрами. Так как этот базис иерархический, то для получения базиса меньшего порядка следует ограничиться меньшим количеством функций. Так, для базиса первого порядка второго типа следует использовать функции  $\mathbf{w}_1^{1,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{1,\text{II}}$ .

Для вычисления интегралов в (22) воспользуемся кубатурной формулой численного интегрирования (формулой Гаусса) [25]:

$$\int_{\Omega_k} f(x, y, z) d\Omega_k = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i, z_i) w_i,$$

где  $(x_i, y_i, z_i)$  – точки Гаусса,  $m$  – число точек Гаусса,  $w_i$  – соответствующие веса. При работе с базисными функциями второго порядка нужно использовать формулы, которые бы обеспечивали восьмой порядок интегрирования [26]. Для

базисных функций первого порядка будет достаточно и меньших порядков интегрирования [25, 27].

### 1.6. Треугольные конечные элементы

Границы области  $\Omega$  являются двумерными и представляют собой треугольники. Для учета краевых условий (9) требуется построить разложение  $\mathbf{E}^g$  по базису соответствующей границы в смысле МНК, для этого нужно решать СЛАУ вида

$$\mathbf{M}^{S_1} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{b}^{S_1}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{M}_{i,j}^{S_1} = \int_{S_1} \tilde{\mathbf{w}}_i \cdot \tilde{\mathbf{w}}_j dS_1$ ,  $\mathbf{b}_i^{S_1} = \int_{S_1} \mathbf{E}^g \cdot \tilde{\mathbf{w}}_i dS_1$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_i$  и  $\tilde{\mathbf{w}}_j$  – базисные функции на треугольниках.

Определим  $\mathcal{L}$ -координаты на треугольниках таким же образом, как и на тетраэдрах. Введем нумерацию вершин и ребер согласно рисунку 4:

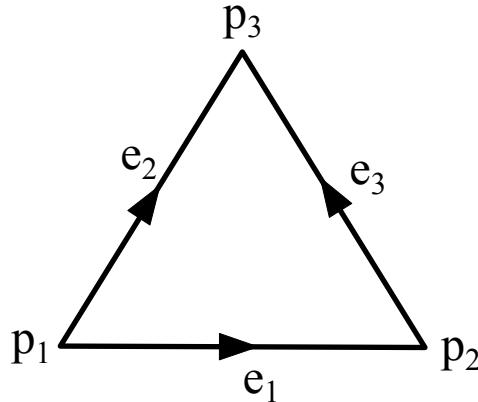


Рисунок 4 — треугольный конечный элемент

Тогда  $\mathcal{L}$ -координаты примут вид:

$$\mathcal{L}_i(x, y) = \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}, \quad i = \overline{1..3}.$$

Коэффициенты  $\alpha_{i,j}$  могут быть определены по формуле (27):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (27)$$

Иерархический векторный базис Вебба второго порядка второго типа на треугольниках имеет вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}_i^{1,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=1, \dots, 3; \quad k, l=1, \dots, 3; \quad k < l, \\
\tilde{\mathbf{w}}_i^{1,\text{II}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=4, \dots, 6; \quad k, l=1, \dots, 3; \quad k < l, \\
\tilde{\mathbf{w}}_7^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_2 - 2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \nabla \mathcal{L}_3, \\
\tilde{\mathbf{w}}_8^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_1 - 2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \nabla \mathcal{L}_3, \\
\tilde{\mathbf{w}}_9^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3), \\
\tilde{\mathbf{w}}_i^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k)); \quad i=10, \dots, 12; \quad j, k=1, \dots, 3; \quad j < k,
\end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{w}}_1^{1,\text{I}}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_3^{1,\text{I}}$  – базисные функции первого порядка первого типа,  $\tilde{\mathbf{w}}_4^{1,\text{II}}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_6^{1,\text{II}}$  – базисные функции первого порядка второго типа,  $\tilde{\mathbf{w}}_7^{2,\text{I}}, \tilde{\mathbf{w}}_8^{2,\text{I}}$  – базисные функции второго порядка первого типа,  $\tilde{\mathbf{w}}_9^{2,\text{II}}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_{12}^{2,\text{II}}$  – базисные функции второго порядка второго типа. Для базиса первого порядка второго типа следует использовать функции  $\tilde{\mathbf{w}}_1^{1,\text{I}}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_6^{1,\text{II}}$ .

Для вычисления интегралов в (26) воспользуемся формулой Гаусса [25]:

$$\int_{\Omega_k} f(x, y) d\Omega_k = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) w_i,$$

где  $(x_i, y_i)$  – точки Гаусса,  $m$  – число точек Гаусса,  $w_i$  – соответствующие веса. Так же, как и для тетраэдров, для работы с базисом второго порядка нужно использовать формулы, обеспечивающие восьмой порядок интегрирования [26]. Для базиса первого порядка достаточно и меньших порядков интегрирования [25, 28].

### 1.7. Двухуровневый решатель

Так как пространство  $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$  представимо в виде прямой суммы подпространств (21), можно построить специальный двухуровневый решатель, который учитывает ядро rot-оператора. Принцип построения подробно изложен в [23, 29].

Рассмотрим иерархический узловой базис пространства  $\mathbb{H}_0^h(\text{grad}, \Omega)$  на тетраэдре:

$$\begin{aligned}\phi_i &= \mathcal{L}_i; \quad i=1,\dots,4, \\ \phi_i &= \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l; \quad i=5,\dots,10; \quad k,l=1,\dots,4; \quad k < l, \\ \phi_i &= \mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l; \quad i=11,\dots,14; \quad j,k,l=1,\dots,4; \quad j < k < l, \\ \phi_i &= \mathcal{L}_j \mathcal{L}_k (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k); \quad i=15,\dots,20; \quad j,k=1,\dots,4; \quad j < k.\end{aligned}$$

Градиенты этих базисных функций принадлежат пространству  $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ :

$$\begin{aligned}\nabla \phi_1 &= \nabla \mathcal{L}_1 = -\mathbf{w}_1^{1,I} - \mathbf{w}_2^{1,I} - \mathbf{w}_3^{1,I}, \\ \nabla \phi_2 &= \nabla \mathcal{L}_2 = \mathbf{w}_1^{1,I} - \mathbf{w}_4^{1,I} + \mathbf{w}_5^{1,I}, \\ \nabla \phi_3 &= \nabla \mathcal{L}_3 = \mathbf{w}_2^{1,I} + \mathbf{w}_4^{1,I} - \mathbf{w}_6^{1,I}, \\ \nabla \phi_4 &= \nabla \mathcal{L}_4 = \mathbf{w}_3^{1,I} - \mathbf{w}_5^{1,I} + \mathbf{w}_6^{1,I}, \\ \nabla \phi_i &= \nabla (\mathcal{L}_k \mathcal{L}_l) = \mathbf{w}_{i+2}^{1,II}; \quad i=5,\dots,10; \quad k,l=1,\dots,4; \quad k < l, \\ \nabla \phi_i &= \nabla (\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l) = \mathbf{w}_{i+10}^{2,II}; \quad i=11,\dots,14; \quad j,k,l=1,\dots,4; \quad j < k < l, \\ \nabla \phi_i &= \nabla (\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k)) = \mathbf{w}_{i+10}^{2,II}; \quad i=15,\dots,20; \quad j,k=1,\dots,4; \quad j < k.\end{aligned}\tag{28}$$

Таким образом мы можем построить матрицу перехода  $\mathbf{P}$  от базиса  $\mathbf{w}$  (25) к базису  $\nabla \phi$  (28). В силу иерархичности базисов, матрица  $\mathbf{P}$  будет иметь блочную структуру. Матрицы перехода для базисов различных порядков имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{1,I} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{1,II} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{1,I} & \mathbb{O}_{4 \times 6} \\ \mathbb{O}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}^{2,I} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{1,II} & \mathbb{O}_{10 \times 8} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{2,II} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{2,I} & \mathbb{O}_{10 \times 10} \\ \mathbb{O}_{10 \times 20} & \mathbf{I}_{10 \times 10} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}_{n \times n}$  – единичная матрица размерностью  $n \times n$ ,  $\mathbb{O}_{n \times m}$  – нулевая матрица размерностью  $n \times m$ .

Общий алгоритм многоуровневых методов имеет следующий вид:

1. Выбрать некоторое начальное приближение;
2. Уточнить решение на полном пространстве (подавить высокочастотную составляющую ошибки);
3. Спроектировать приближение с шага 2 на грубое подпространство;
4. Уточнить решение на грубом подпространстве (подавить низкочастотную составляющую ошибки);
5. Интерполировать решение на полное подпространство;
6. Повторить шаги 2 - 5 пока не будет достигнута нужная точность.

Псевдокод алгоритма двухуровневого метода:

**Входные данные:**  $\mathbf{A}, \mathbf{f}, \mathbf{q}_0, \mathbf{P}, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2$

**Результат:**  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{q}_0$$

**цикл**  $i = 1, 2, \dots$  **пока**  $\|\mathbf{r}_i\| > \gamma \|\mathbf{r}_0\|$  **выполнять**

$$\tilde{\mathbf{z}} = \text{solve}(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^T, \mathbf{P}\mathbf{r}_{i-1}, \varepsilon_1)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{z}}$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}_i$$

$$\mathbf{z} = \text{solve}(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{r}}_i, \varepsilon_2)$$

$$\mathbf{q}_i = \tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{q}_i$$

**конец**

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_i$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{f}$  – матрица и правая часть СЛАУ (23);  $\mathbf{q}_0$  – начальное приближение;  $\mathbf{P}$  – матрица перехода от базиса  $\mathbf{w}$  (25) к базису  $\nabla\phi$  (28);  $\gamma$  – точность решения СЛАУ;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – точности решения промежуточных СЛАУ на подпространстве ядра и полном пространстве соответственно;  $\text{solve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \varepsilon)$  – процедура решения СЛАУ с матрицей  $\mathbf{A}$  и правой частью  $\mathbf{b}$  с точностью  $\varepsilon$ .

В качестве  $\text{solve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \varepsilon)$  можно воспользоваться методами на подпространствах Крылова [20, 30–32], например GMRES или COCG. Величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  следует выбирать небольшими, от 0.9 до 0.01 [23].

## 2. Построение и решение СЛАУ

### 2.1. Структура глобальной матрицы СЛАУ

Рассмотрим структуру глобальной матрицы СЛАУ на примере двух тетраэдральных конечных элементов с базисом первого полного порядка, имеющих общую грань. Глобальная нумерация вершин и ребер этих тетраэдров приведена на рисунке 5.

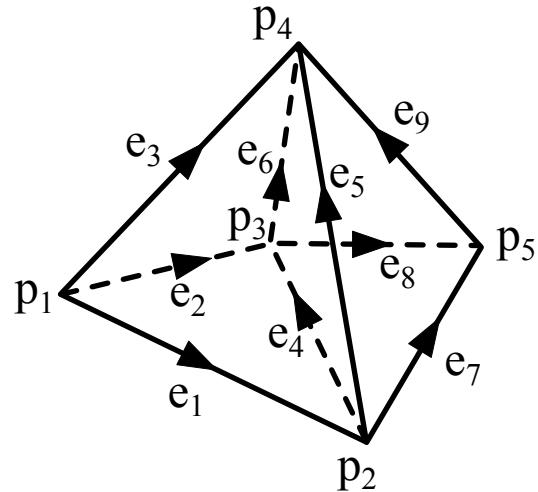


Рисунок 5 — два тетраэдральных конечных элемента

Локальные матрицы тетраэдра имеют блочный вид, матрица массы является плотной (29), а в матрице жесткости ненулевой только один блок (30):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{I,I} & \mathbf{M}^{I,II} \\ \mathbf{M}^{II,I} & \mathbf{M}^{II,II} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{I,I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{M}^{I,I}$ ,  $\mathbf{G}^{I,I}$  – блоки от интегралов, содержащих только роторные ( $\mathbf{w}_1^{1,I}, \dots, \mathbf{w}_6^{1,I}$ );  $\mathbf{M}^{II,II}$  – только градиентные ( $\mathbf{w}_7^{1,II}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{1,II}$ );  $\mathbf{M}^{I,II}$ ,  $\mathbf{M}^{II,I}$  – и роторные, и градиентные базисные функции.

Глобальная матрица также имеет блочную структуру, для двух тетраэдров она схематично приведена на рисунке 6. Под  $G_1$  и  $G_2$  понимаются элементы матриц жесткости (30) первого и второго тетраэдров соответственно, под  $M_1$  и

$M_2$  – элементы матриц массы (29) первого и второго тетраэдров соответственно.

$G_1 + M_1$				$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$								
$G_1 + M_1$				$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$								
$G_1 + M_1$				$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$								
$G_1 + M_1$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$					
$G_1 + M_1$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$					
$G_1 + M_1$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$					
$G_1 + M_1$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$					
						$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$					$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$
						$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$					$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$
						$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$	$G_2 + M_2$					$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$
$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$				$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$			
$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$				$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$			
$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$				$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$			
$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$						
$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$						
$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$						
$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_1$	$M_2$	$M_2$	$M_2$						
						$M_2$	$M_2$	$M_2$					$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$
						$M_2$	$M_2$	$M_2$					$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$
						$M_2$	$M_2$	$M_2$					$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$	$M_2$

Рисунок 6 — структура СЛАУ

## 2.2. Учет краевых условий

Неоднородные краевые условия первого рода вида (9) учитываются путем обнуления внедиагональных элементов строк глобальной матрицы, соответствующих базисным функциям, ассоциированным с ребрами и гранями сетки на границе, причем диагональные элементы приравниваются к 1, а элементы вектора правой части – к значениям, взятым из решения (26) [20].

Однородные краевые условия первого рода вида (11) учитываются аналогично, с той лишь разницей, что соответствующие элементы вектора правой части обнуляются вместе с элементами строки.

Однородные электрические краевые условия второго рода вида (10) учитываются естественным образом и не вносят вклад в матрицу или правую часть СЛАУ, поэтому не требуют какой-либо специальной процедуры учета.

### ***2.3. Учет токовой петли***

Петля с током представляется в виде бесконечно тонкого замкнутого контура, толщиной которого в данной задаче можно пренебречь. Для учета такого источника необходимо при построении сетки задать необходимую конфигурацию ребер, которая будет с достаточной точностью аппроксимировать геометрию контура. Далее необходимо разложить ток в петле по базисным функциям и учесть в виде добавки в правую часть, соблюдая правильную ориентацию ребер в пространстве.

### 3. Вычислительные эксперименты

#### 3.1. Верификация программного комплекса

Верификация полученной конечноэлементной аппроксимации будет проводиться на тестовой задаче, имеющей аналитическое решение.

##### 3.1.1. Расчетная область

Расчетная область представляет собой куб со следующими параметрами:  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $z \in [0, 1]$ . Куб разбивается на регулярную тетраэдralную сетку согласно рисунку 7:

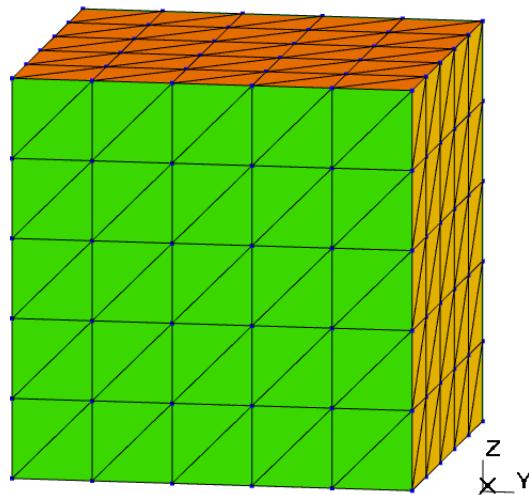


Рисунок 7 — конечноэлементная сетка для верификации

Всего в сетке 750 тетраэдров, 300 треугольников по границе, 216 узлов, 1115 ребер и 1650 граней.

Физические параметры среды заданы следующим образом:  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 10$  См/м. Частота источника поля  $\nu = \frac{100}{2\pi}$  Гц. На всех внешних гранях расчетной области заданы краевые условия первого рода (9).

##### 3.1.2. Тестирование на гладких функциях

В качестве аналитического решения уравнения (8) выберем функцию

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e^{-(0.5-y)^2-(0.5-z)^2} \\ e^{-(0.5-x)^2-(0.5-z)^2} \\ e^{-(0.5-x)^2-(0.5-y)^2} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Тестирование будем проводить на базисных функциях первого и второго порядка второго типа. Погрешности в норме пространства  $\mathbb{L}^2$  полученных решений приведены в таблице 1.

Таблица 1 — относительные погрешности в норме  $\mathbb{L}^2$

Порядок базисных ф-й	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_x - \mathbf{E}_x^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_x\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_y - \mathbf{E}_y^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_y\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_z - \mathbf{E}_z^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_z\ _{\mathbb{L}^2}}$
1	6.608e-3	7.869e-3	5.877e-3	5.877e-3
2	1.775e-4	1.895e-4	1.712e-4	1.712e-4

Измельчим сетку расчетной области, изображенную на рисунке 7, в 2 и 4 раза. Погрешности в норме пространства  $\mathbb{L}^2$  полученных решений и порядок аппроксимации – в таблице 2.

Таблица 2 — относительные погрешности в норме  $\mathbb{L}^2$

Порядок базиса	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/2}\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/4}\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\log_2 \frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/2}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\log_2 \frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/2}\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/4}\ _{\mathbb{L}^2}}$
1	6.608e-3	1.637e-3	5.051e-4	2.013	1.696
2	1.775e-4	2.164e-5	3.582e-6	3.036	2.595

Из результатов видно, метод достаточно хорошо аппроксимировал гладкую функцию. Порядок аппроксимации получился второй для базисных функций первого порядка второго типа и третий для базисных функций второго порядка второго типа, что совпадает с теоретическими значениями.

### 3.2. Исследование влияния слоя воздуха

Проведем исследование влияния слоя воздуха в модельной задаче морской геоэлектрики при различной глубине погружения в воду источника электромагнитного возмущения.

В этом исследовании будем пользоваться базисными функциями второго полного порядка.

### 3.2.1. Описание расчетной области

Схематичное изображение расчетной области показано на рисунке 8, где  $\Omega_1$  – воздух ( $\sigma = 10^{-6}$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_2$  – морская вода ( $\sigma = 3.3$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_3$  – грунт ( $\sigma = 0.2$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_4$  – углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  – размеры области моделирования по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$  м;  $h_1 = 600$  м – толщина  $\Omega_2$ ;  $l_1 = 400$  м,  $h_3 = 75$  м,  $h_2 = 135$  м – длина, толщина и глубина объекта  $\Omega_4$  соответственно.

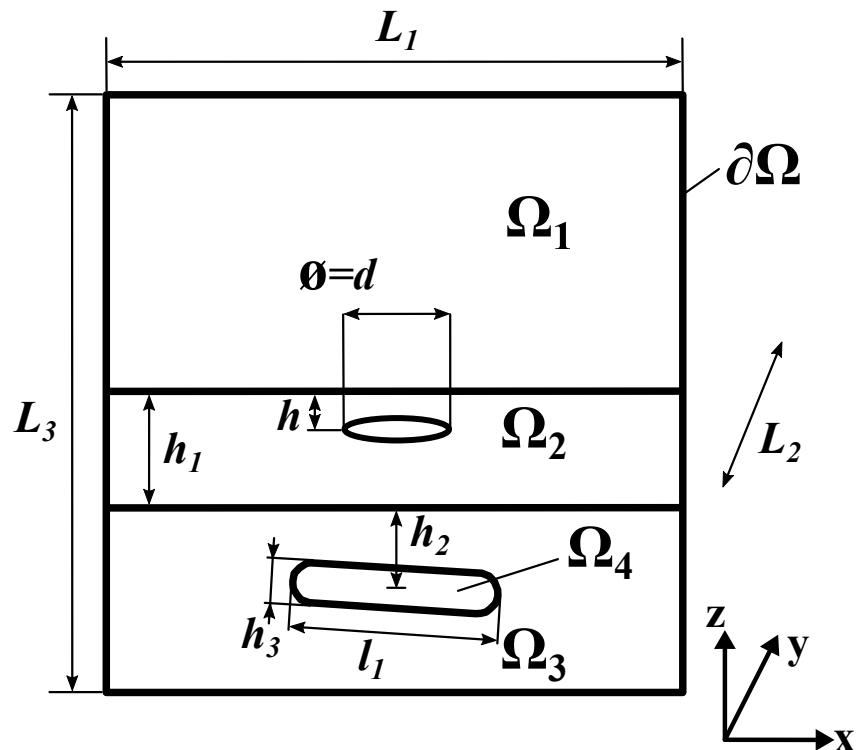


Рисунок 8 — схематичное изображение расчетной области

Объект  $\Omega_4$  представляет собой скругленный прямоугольный параллелепипед с двумя равными сторонами, наклоненный под углом  $5^\circ$ . Источником электрического поля является токовая петля диаметром  $d = 100$  м с током частотой 1 Гц, глубина  $h$  которой варьируется в ходе исследования.

### 3.2.2. Конечноэлементная сетка

Фрагмент  $x \in [-600, 0]$ ,  $y \in [-600, 600]$   $z \in [-1000, 600]$  одной из конечно-элементных сеток, использованных для проведения исследования, представлен на рисунке 9.

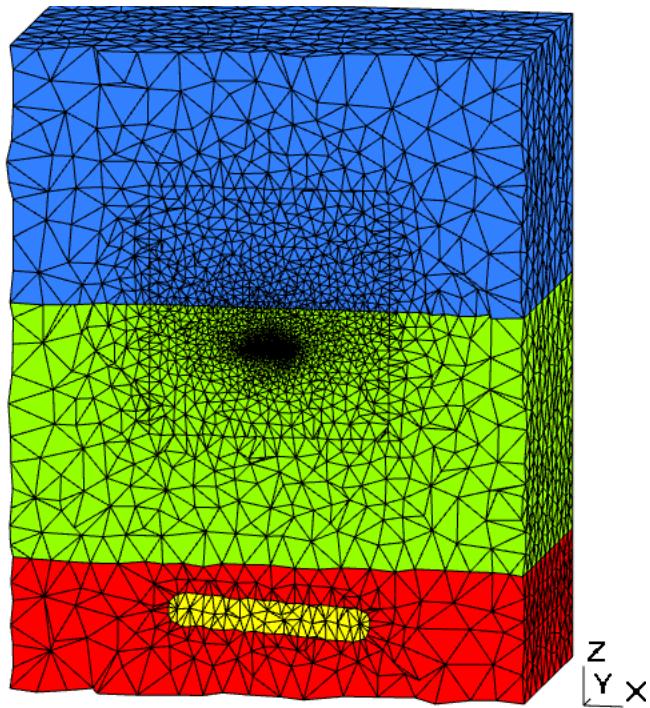


Рисунок 9 — фрагмент конечноэлементной сетки

### 3.2.3. Результаты исследования

Разности решений в норме  $\mathbb{L}^2$  в объеме  $[-600, 600] \times [-600, 600] \times [-1000, 0]$  между областью, в которой присутствует слой воздуха, и областью, в которой заданы условия непротекания (10), для некоторых значений глубины петли  $h$  показаны в таблице 3. В форме графика эти данные приведены на рисунке 10.

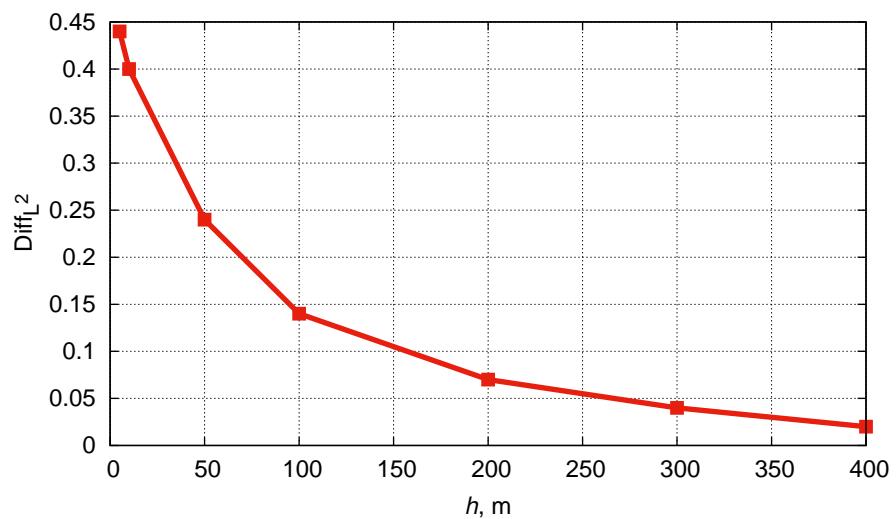


Рисунок 10 — график изменения относительной разности решений при изменении глубины

Таблица 3 — относительные разности решений

Глубина петли	5	10	50	100	200	300	400
$\frac{\ \mathbf{E}^{air} - \mathbf{E}^{noair}\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}^{air}\ _{\mathbb{L}^2}}$	0.44	0.40	0.24	0.14	0.07	0.04	0.02

Графики вещественной компоненты  $E_y$  по линии  $y = 0, z = -610$  для различных глубин петли представлены на рисунках 11 и 12.

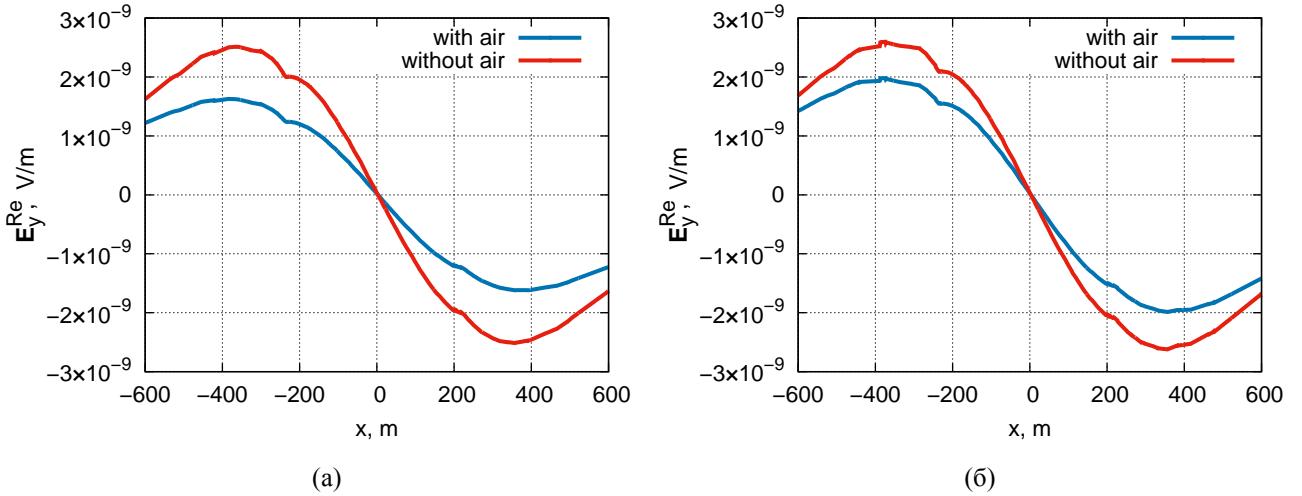


Рисунок 11 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  по линии  $y = 0, z = -610$ , глубина (а) 5 м и (б) 50 м

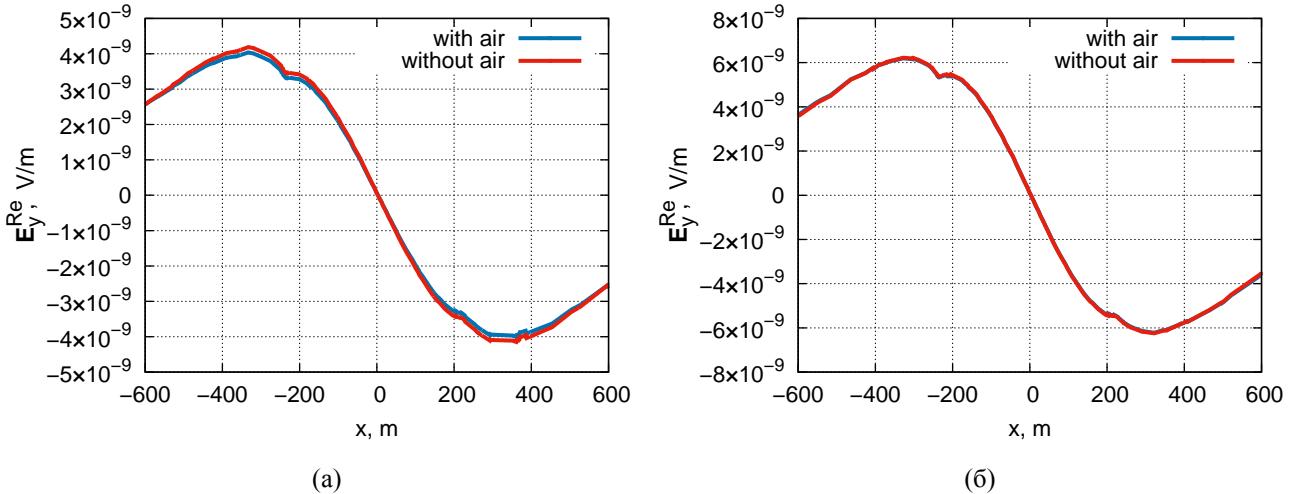


Рисунок 12 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  по линии  $y = 0, z = -610$ , глубина (а) 200 м и (б) 300 м

Из результатов следует, что слой воздуха оказывает значительное влияние на получаемое решение при расположении источника электромагнитного возмущения на малой глубине (меньше трехсот метров для рассмотренной конфигурации).

### 3.3. Исследование эффективности применения PML-слоя

Цель вычислительных экспериментов: определение эффективности применения PML-слоя. Геометрические характеристики PML-слоя показаны на рисунке 13.

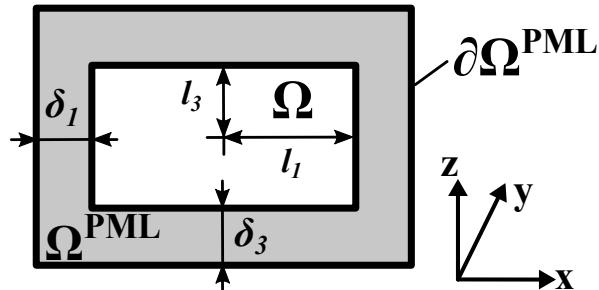


Рисунок 13 — геометрические характеристики PML-слоя

Вычислительные эксперименты проводились следующим образом: последовательно варьировался каждый из параметров PML-слоя: толщина слоя в  $k$ -м направлении  $\delta_k$ , где  $k = \frac{x}{1}, \frac{y}{2}, \frac{z}{3}$ , расстояние от центра области до внутренних границ слоя  $l_k$ , коэффициент комплексного растяжения координат  $\chi$  (18), оставшиеся параметры фиксировались, что позволило определить параметры, оказывающие наибольшее влияние на характеристики PML-слоя.

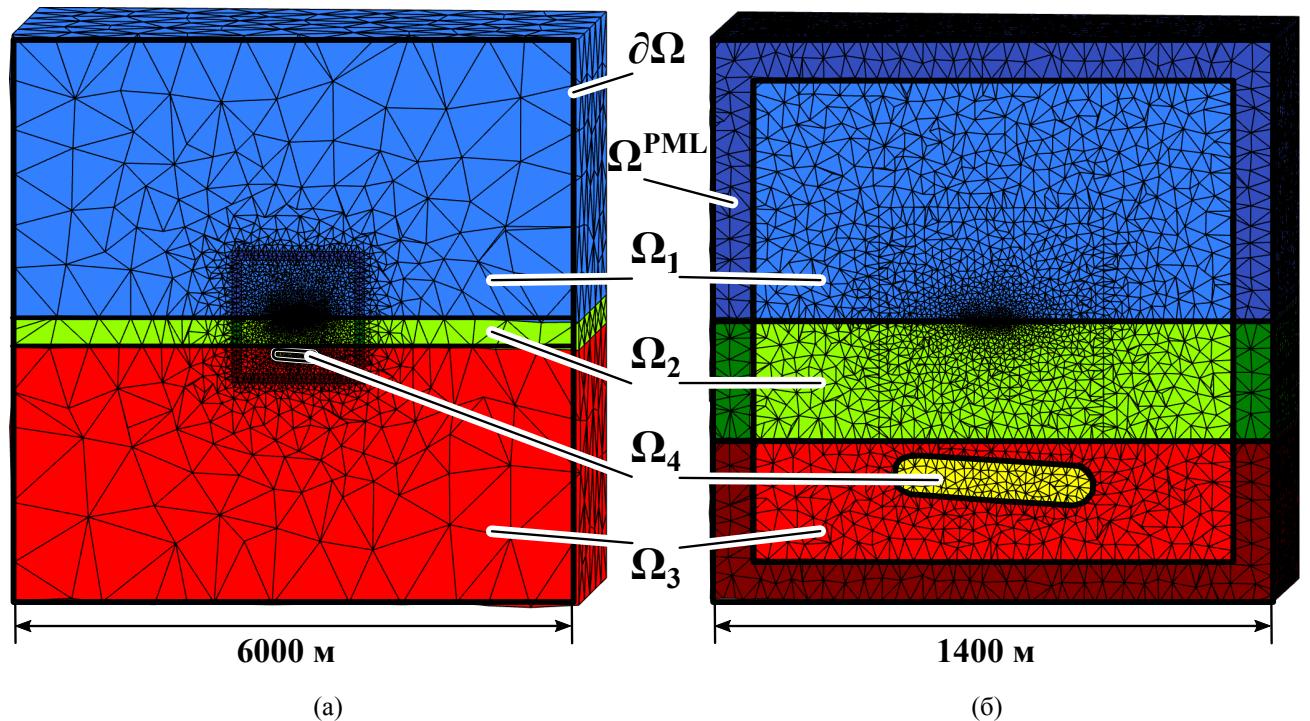


Рисунок 14 — конечноэлементные сетки: (а) «большой бак» и (б) PML-слой

Фрагменты тетраэдральных конечноэлементных сеток с «большим баком» и с PML-слоем приведены на рисунках 14а и 14б.

В этом исследовании будем пользоваться базисными функциями первого полного порядка.

### 3.3.1. Описание расчетной области

Схематичное изображение расчетной области показано на рисунке 15, где  $\Omega_1$  – воздух ( $\sigma = 10^{-6}$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_2$  – морская вода ( $\sigma = 3.3$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_3$  – грунт ( $\sigma = 0.2$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_4$  – углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  – размеры области моделирования по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$  м;  $h_1 = 300$  м – толщина  $\Omega_2$ ;  $l_1 = 400$  м,  $h_3 = 100$  м,  $h_2 = 100$  м – длина, толщина и глубина объекта  $\Omega_4$  соответственно.

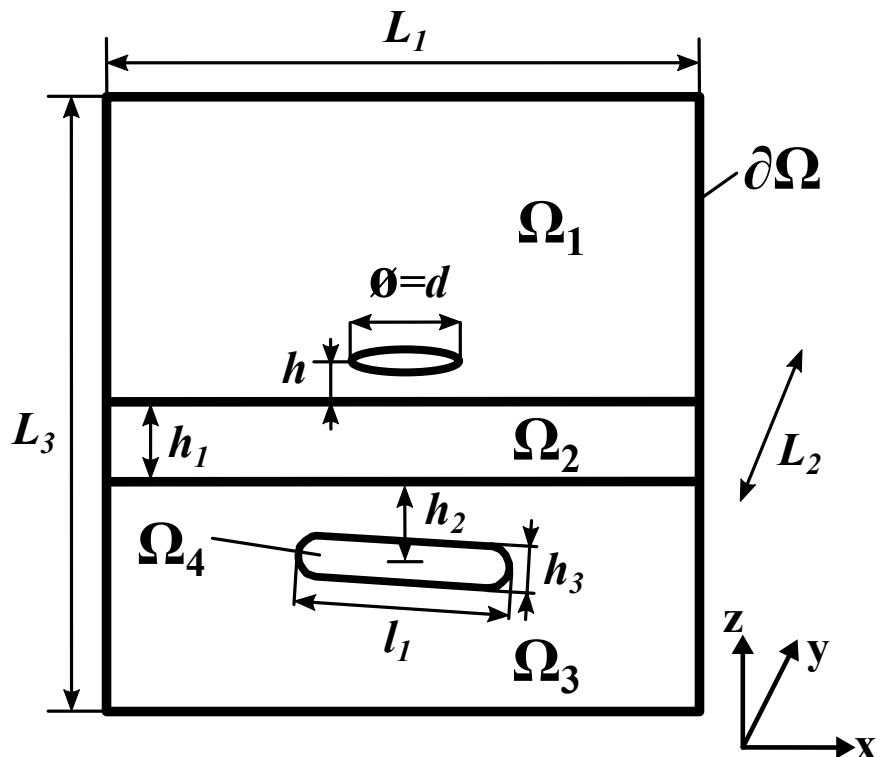


Рисунок 15 — расчетная область

Объект  $\Omega_4$  представляет собой скругленный прямоугольный параллелепипед с двумя равными сторонами, наклоненный под углом  $5^\circ$ . Источником электрического поля является петля диаметром  $d = 100$  м с током частотой 1 Гц, расположенная в воздухе на расстоянии  $h = 5$  м от границы раздела сред

воздух-вода. Также рассматривается случай, когда петля расположена в воде ( $h = -5$  м).

Выделим внутри области с условием «большого бака» и области, на границе которой задан PML-слой, подобласть  $\Omega'$  размером  $1000 \times 1000 \times 1000$  м<sup>3</sup>. Для этой подобласти в данном исследовании будем оценивать разность в норме  $\mathbb{L}^2$  между действительными компонентами  $\mathbf{E}_y$  векторов решений  $\mathbf{E}_y^{\text{бак}}$  и  $\mathbf{E}_y^{\text{PML}}$ , полученных с применением «большого бака» и PML-слоя соответственно.

### 3.3.2. Варьирование коэффициентов растяжения

Зафиксируем  $\delta_k = 100$  м,  $l_k = 600$  м,  $m = 3$ ,  $h = 5$  м и будем варьировать коэффициент комплексного растяжения координат  $\chi$ . Размер получаемой СЛАУ для «большого бака» – 653814, с PML-слоем – 616180. Результаты приведены в таблице 4. Для случая  $h = -5$  м размер получаемой СЛАУ для «большого бака» – 652396, с PML-слоем – 614504. Результаты приведены в таблице 5.

Таблица 4 — варьирование коэффициентов растяжения при  $h = 5$  м

$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_1$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_1$	$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_2$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_2$	$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_3$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_3$	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
3	0	1	5	3	1	0.106636	650	592
3	1	0	6	2	1	0.0925		599
4	0	1	5	3	1	0.0947		731
4	1	0	6	2	1	0.0910		591

Таблица 5 — варьирование коэффициентов растяжения при  $h = -5$  м

$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_1$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_1$	$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_2$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_2$	$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_3$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_3$	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
4	0	1	5	3	1	0.0929047	309	344
4	0	1	6	3	1	0.0870		294
4	0	1	6	3	2	0.0809		253
4	1	1	6	3	2	0.0658		306

### 3.3.3. Варьирование толщины PML-слоя

Зафиксируем  $\chi_{\Omega_1} = (4, 1)$ ,  $\chi_{\Omega_2} = (0, 6)$ ,  $\chi_{\Omega_3} = (2, 1)$ ,  $l_k = 600$  м,  $m = 3$ ,  $h = 5$  м и будем варьировать толщину PML-слоя  $\delta_k$ . Результаты приведены в

таблице 6. Для случая  $h = -5$  м выберем  $\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$ ,  $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$ ,  $\chi_{\Omega_3} = (3, 2)$ . Результаты приведены в таблице 7.

Таблица 6 — варьирование толщины PML-слоя при  $h = 5$  м

$\delta_k$	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
80	0.1199	673	1289	659858	618128
100	0.0910	650	591	653814	616180
120	0.0784	609	1142	654354	617324

Таблица 7 — варьирование толщины PML-слоя при  $h = -5$  м

$\delta_k$	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
80	0.1201	359	297	652312	614822
100	0.0809	309	253	652396	614504
120	0.0623	250	859	652422	615394

### 3.3.4. Варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой

Зафиксируем  $\chi_{\Omega_1} = (4, 1)$ ,  $\chi_{\Omega_2} = (0, 6)$ ,  $\chi_{\Omega_3} = (2, 1)$ ,  $\delta_k = 100$  м,  $m = 3$ ,  $h = 5$  м и будем варьировать  $l_k$  — размер области, на границе которой вводится PML-слой. Результаты приведены в таблице 8. Для случая  $h = -5$  м выберем  $\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$ ,  $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$ ,  $\chi_{\Omega_3} = (3, 2)$ . Результаты приведены в таблице 9.

Таблица 8 — варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой, при  $h = 5$  м

$l_k$	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
500	0.187456	628	587	659130	621390
600	0.0909998	650	591	652396	614504
800	0.0440642	718	658	794310	744856

Таблица 9 — варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой, при  $h = -5$  м

$l_k$	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
500	0.1751746	317	238	659814	621390
600	0.0809429	309	253	652396	614504
800	0.0348019	357	329	793272	743780

### 3.3.5. Проверка выполнения условий на контактных границах

Проверим, что в случае независимого варьирования коэффициентов комплексного растяжения координат  $\chi$ , на границе двух соседних PML-слоев с различными характеристиками не нарушаются условия на контактных границах (3)-(4). Для этого рассмотрим напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  вдоль линии  $x = 650$ ,  $y = 0$ ,  $z = [-0.005, 0.005]$  (середина PML-слоя по  $x$ -направлению):

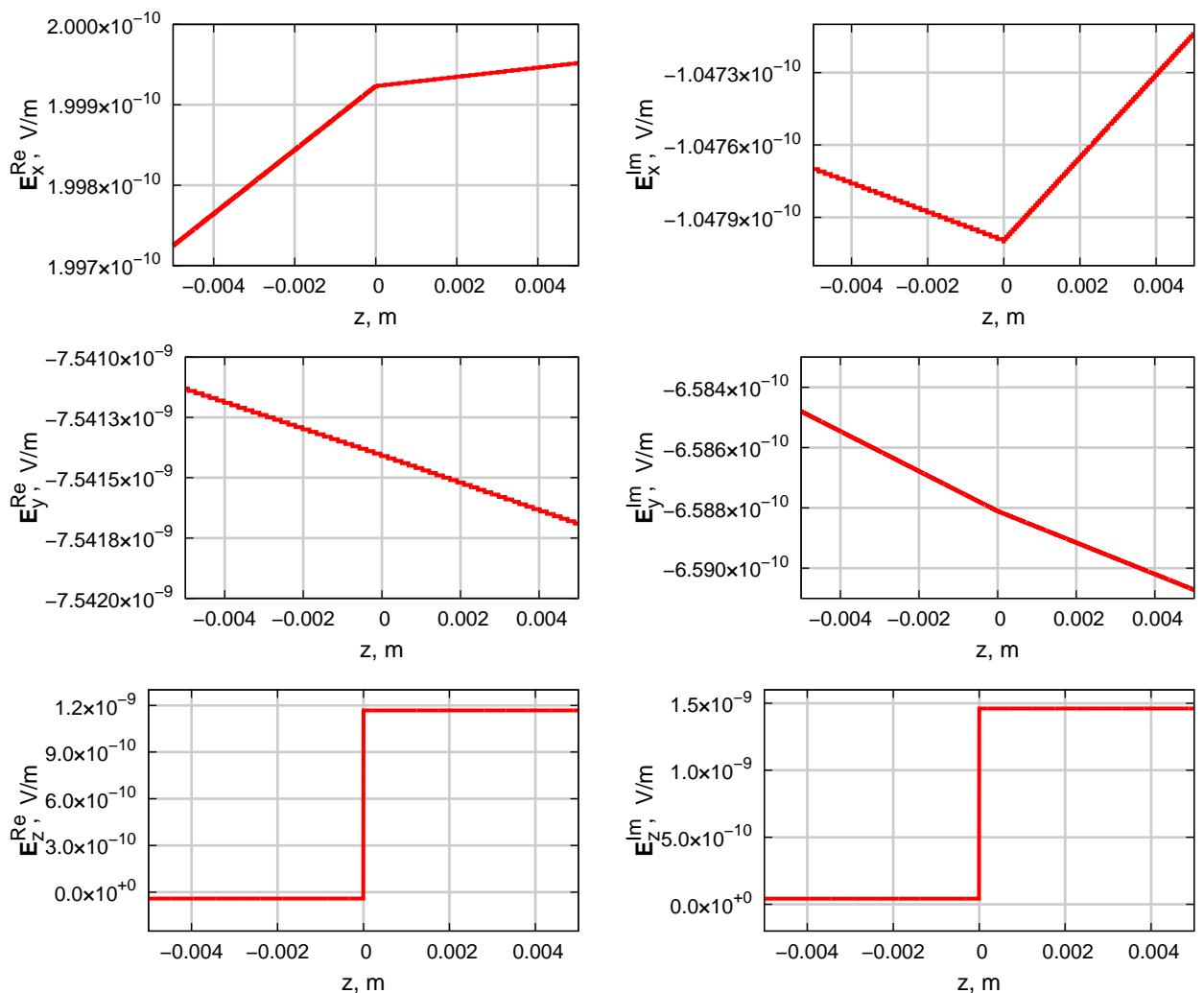


Рисунок 16 — графики компонент электрического поля на контактных границах

Как видно из графиков на рисунке 16, разрывна только нормальная компонента  $\mathbf{E}_z$ , следовательно, условия (3)-(4) выполнены.

### 3.3.6. Графическое представление результатов

Рассмотрим результаты, полученные при параметрах  $h = 5$  м,  $\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$ ,  $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$ ,  $\chi_{\Omega_3} = (3, 2)$ ,  $m = 3$ ,  $l_k = 600$  м и  $\delta_k = 100$  м. На рисунках 17 и 18 показаны картины электрического поля в сечении плоскостью  $z = -10$  м. На рисунках 17а и 18а представлено решение с PML-слоем; 17б и 18б – решение с «большим баком».

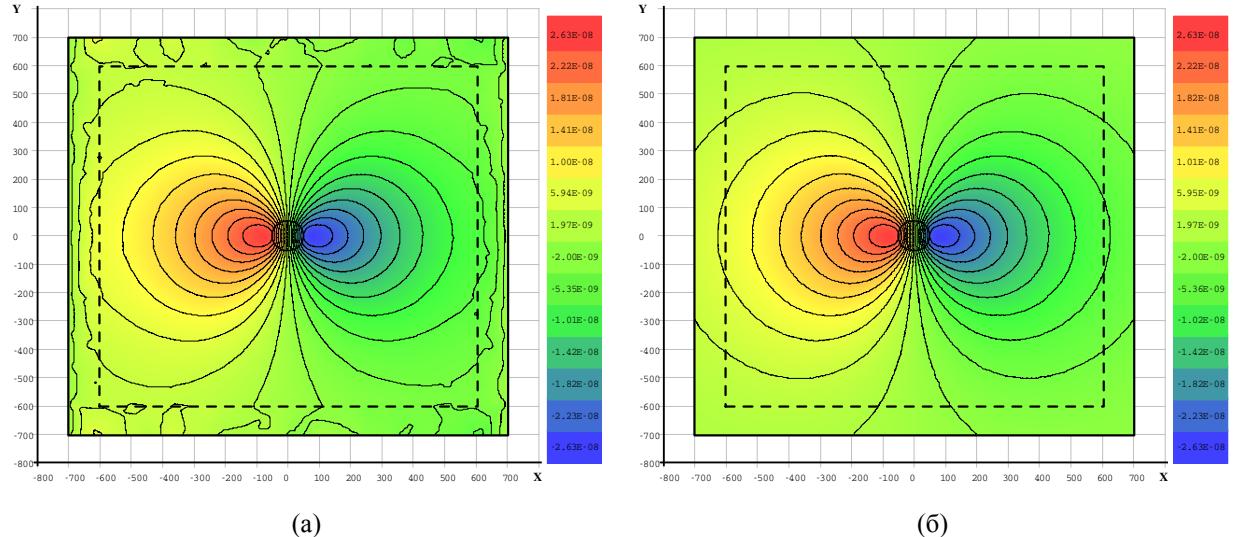


Рисунок 17 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$

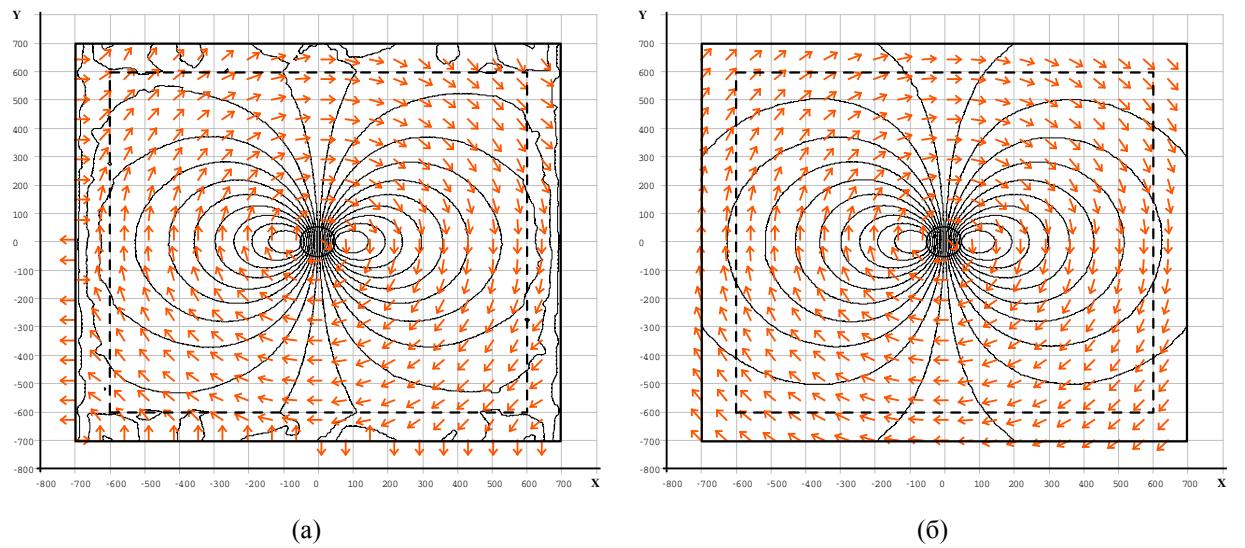


Рисунок 18 — изолинии  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  и векторы  $(\text{Re}(\mathbf{E}_x), \text{Re}(\mathbf{E}_y))^T$

На рисунке 19 показаны картины электрического поля в сечении плоскостью  $y = 0$ . На рисунках 19а и 19б представлено решение с PML-слоем и решение с «большим баком» соответственно.

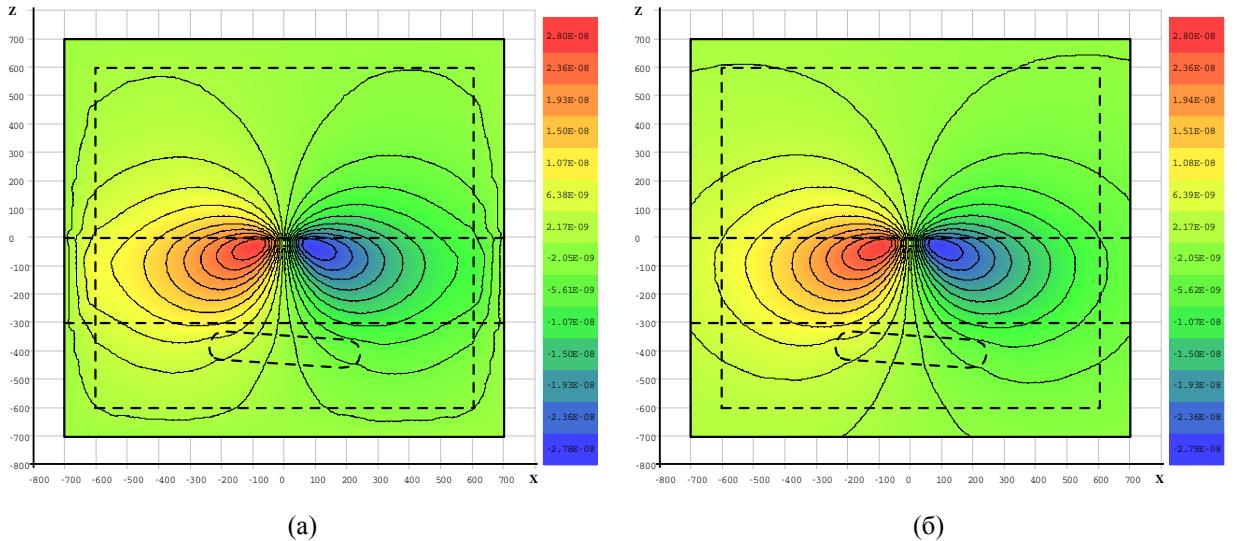


Рисунок 19 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$

### 3.3.7. Анализ целесообразности применения PML-слоя

Наибольшее влияние на точность получаемого решения при введении PML-слоя оказывают коэффициент комплексного растяжения координат  $\chi$  и  $l$  – размер области, на границе которой вводится PML-слой. При увеличении размера внутренней области ожидаемо увеличивается размер СЛАУ, поэтому этот параметр при решении реальных задач следует не варьировать, а выбрать как некоторое ограничение. Таким образом, в первую очередь стоит проводить поиск оптимального значения именно для коэффициента растяжения  $\chi$ . Выбор толщины PML-слоя влияет на точность решения незначительно, поэтому достаточно лишь убедиться, что она выбрана в подходящих для задачи пределах – не слишком большой и не слишком маленькой.

В рассмотренном виде применение PML-слоя для сокращения области моделирования задач низкочастотной морской геоэлектрики незначительно уменьшает размерность СЛАУ и, в большинстве случаев, не приводит к существенному сокращению времени решения задачи. Одной из причин этого может быть то, что основное растяжение приходится на вещественные компоненты координат. Это приводит к значительной «вытянутости» тетраэдров внутри PML-слоя и, как следствие, сильному ухудшению свойств матрицы СЛАУ и увеличению времени решения. Параллелепипедальные конечные элементы

лишены подобного недостатка, поэтому для них можно проводить комплексное растяжение в гораздо больших диапазонах. Однако, такие элементы не подходят для аппроксимации сколь-либо сложных областей. Для использования в одной сетке и тетраэдральных, и параллелепипедальных конечных элементов можно применять специальные переходные элементы [33, 34], либо воспользоваться неконформными методами [35–39].

### ***3.4. Задача, приближенная к реальной***

В этом исследовании рассмотрим поведение электрического поля при различном расположении источника этого поля относительно объекта, скрытого в грунте. Различное положение источника обеспечивается за счет «протаскивания» его на некотором расстоянии от морского дна.

В этом исследовании будем пользоваться базисными функциями второго полного порядка.

#### ***3.4.1. Описание расчетной области***

Схематичное изображение расчетной области показано на рисунке 20, где  $\Omega_1$  – воздух ( $\sigma = 10^{-6}$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_2$  – морская вода ( $\sigma = 3.3$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_3$  – грунт ( $\sigma = 0.2$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $\Omega_4$  – углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м,  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ );  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  – размеры области моделирования по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$  м;  $h_1 = 600$  м – толщина  $\Omega_2$ ;  $l_1 = 400$  м,  $h_3 = 75$  м,  $h_2 = 120$  м – длина, толщина и глубина объекта  $\Omega_4$  соответственно.

Источником электрического поля является петля диаметром  $d = 100$  м с током частотой 1 Гц, расположенная в воде на расстоянии  $h = 590$  м от границы раздела сред воздух-вода (в 10 метрах над поверхностью грунта). Объект  $\Omega_4$  представляет собой скругленный прямоугольный параллелепипед с двумя равными сторонами, наклоненный под углом  $5^\circ$ .

В этой области рассмотрим электрическое поле при различных смещениях объекта относительно источника ( $l_2 = -300, -200, -100$  и 0 м), а также сравним с электрическим полем в случае проводящего объекта ( $\sigma = 10^2$  См/м).

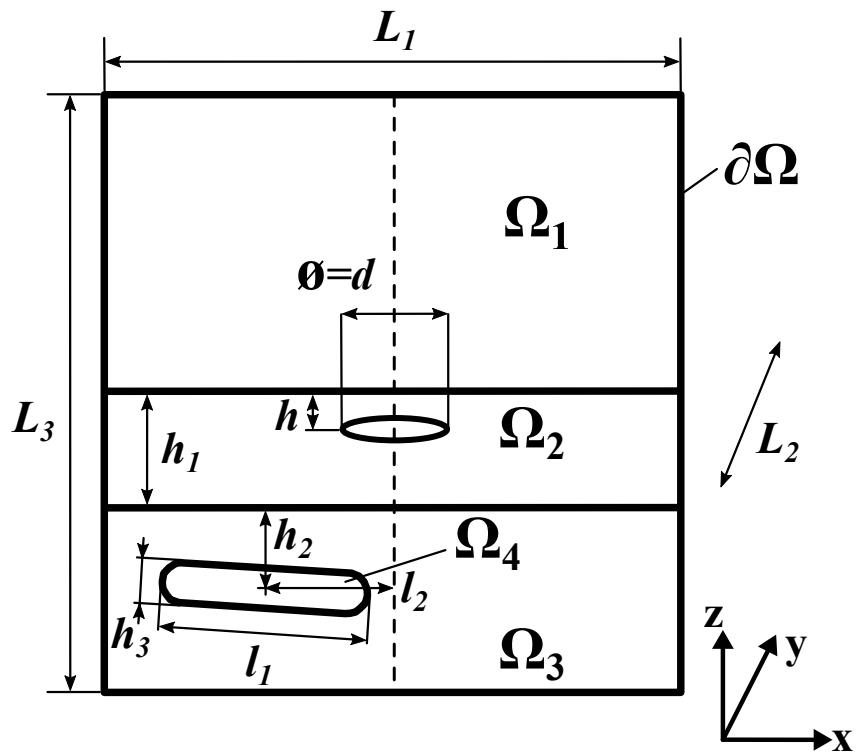


Рисунок 20 — схематичное изображение расчетной области

### 3.4.2. Конечноэлементная сетка

Фрагмент  $x \in [-600, 0], y \in [-600, 600] z \in [-1000, 600]$  одной из конечно-элементных сеток, использованных для проведения исследования, представлен на рисунке 21.

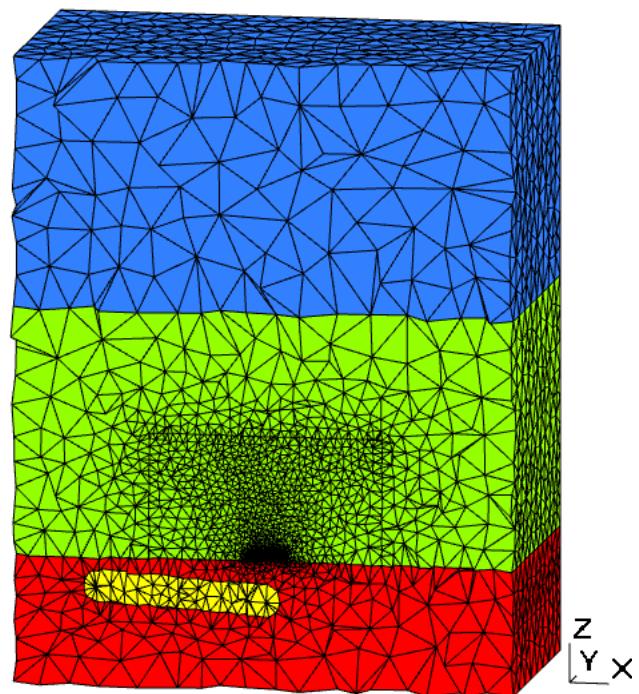


Рисунок 21 — фрагмент конечноэлементной сетки

### 3.4.3. Результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим результаты для проводящего и непроводящего объекта при различных его смещениях относительно источника ( $l_2 = -300, -200, -100$  и  $0$  м). На рисунках 22-23 показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = 0$  в сечении  $y = 0$ , на рисунках 22а и 23а – для объекта с  $\sigma = 10^{-2}$  См/м, на рисунках 22б и 23б – для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м.

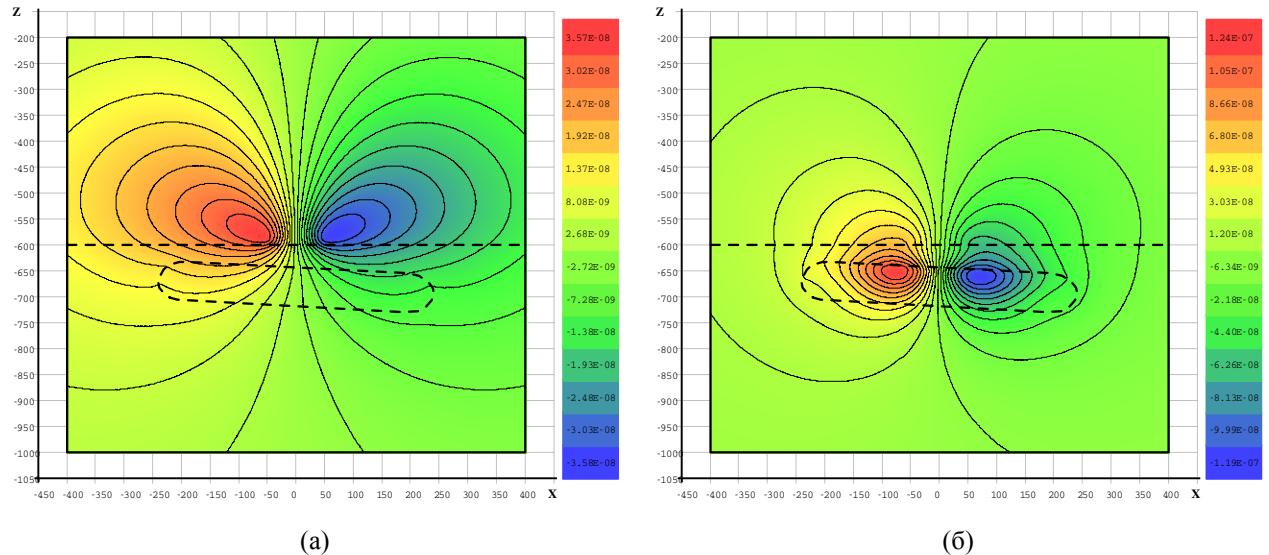


Рисунок 22 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = 0$

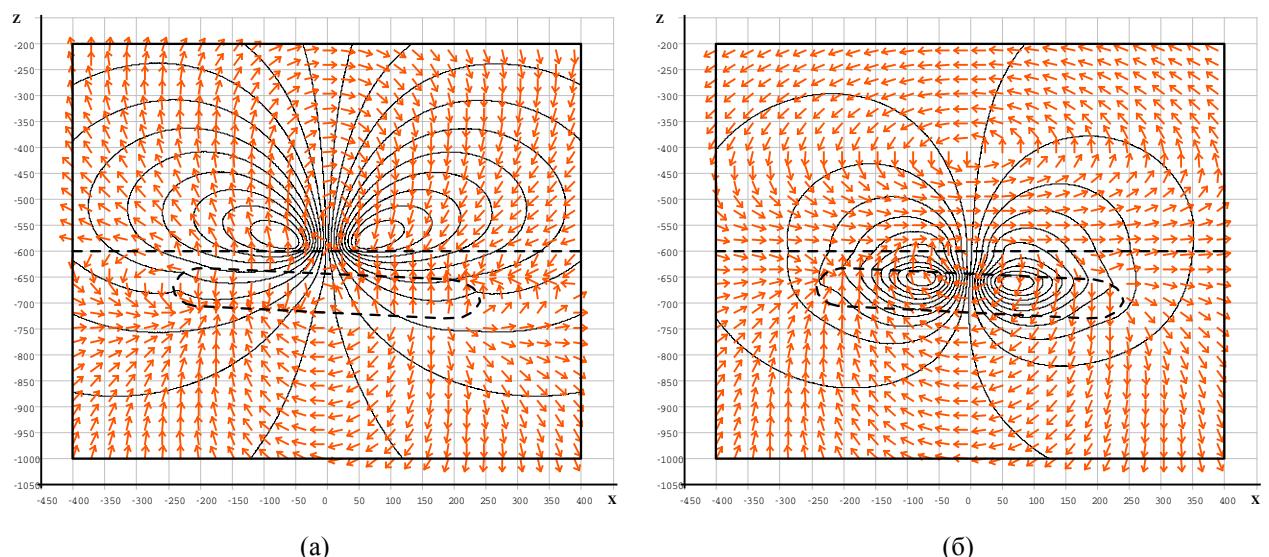


Рисунок 23 — векторы  $(\text{Re}(\mathbf{E}_x), \text{Re}(\mathbf{E}_z))^T$ , изолинии  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = 0$

На рисунках 24а и 24б показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = 0$  в сечении  $z = -601$  м для объекта с

$\sigma = 10^{-2}$  См/м и для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м соответственно.

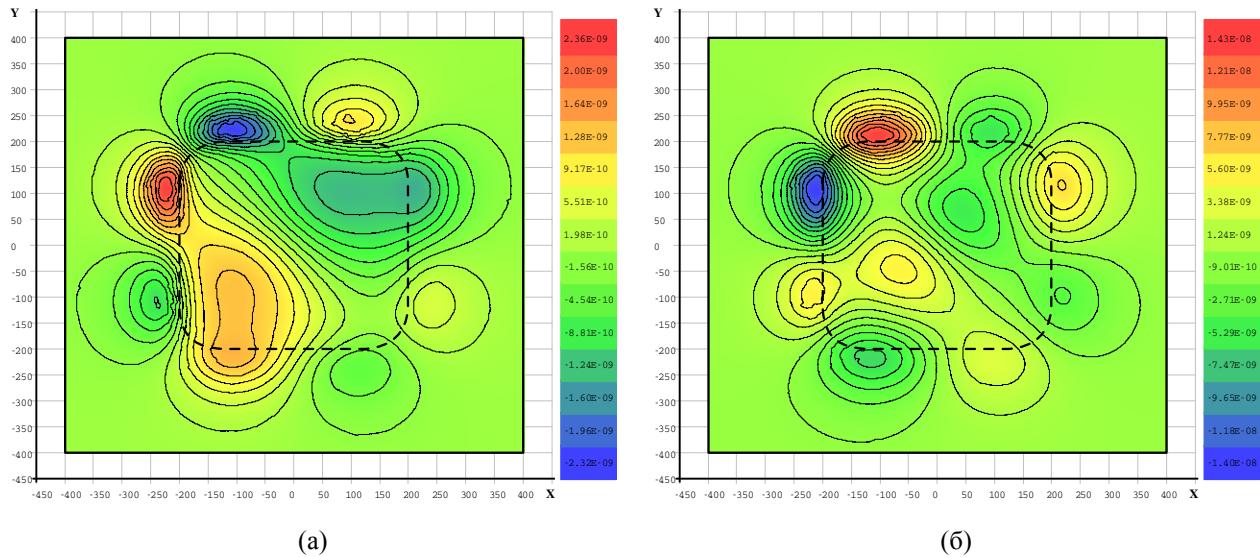


Рисунок 24 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_z)$  при  $l_2 = 0$

На рисунках 25-26 показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = -100$  в сечении  $y = 0$ , на рисунках 25а и 26а – для объекта с  $\sigma = 10^{-2}$  См/м, на рисунках 25б и 26б – для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м.

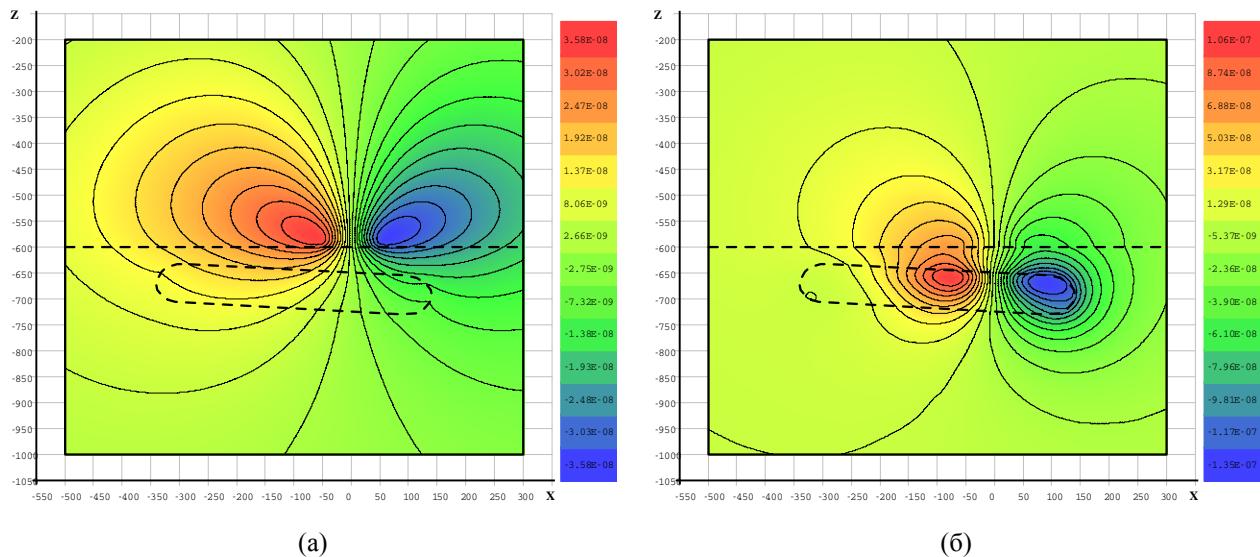


Рисунок 25 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = -100$

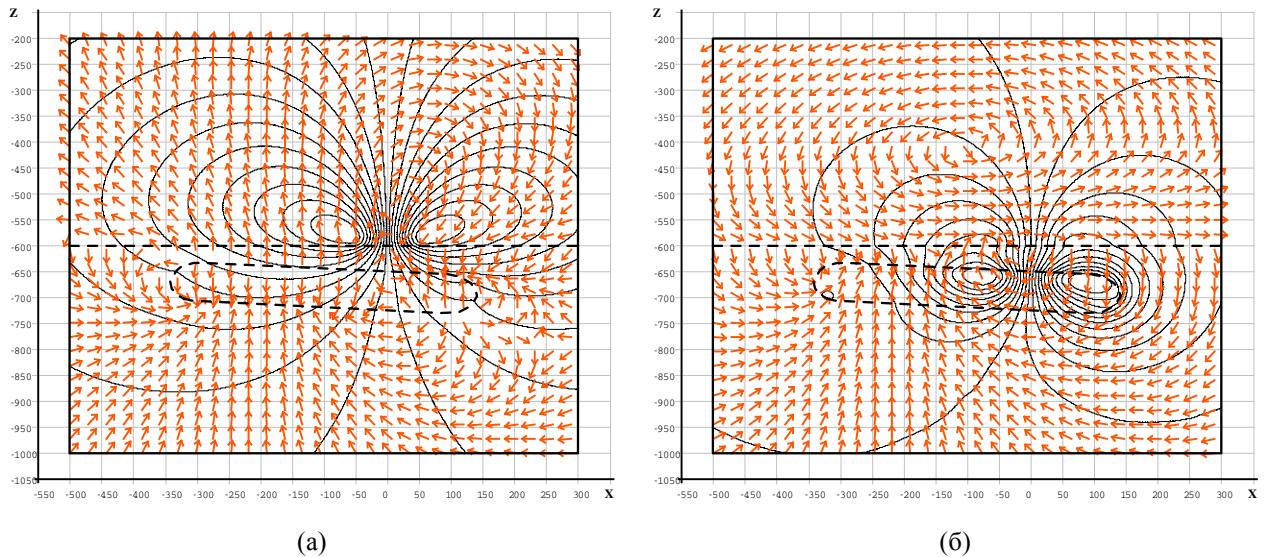


Рисунок 26 — векторы  $(\text{Re}(\mathbf{E}_x), \text{Re} \mathbf{E}_z)^T$ , изолинии  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = -100$

На рисунках 27а и 27б показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = -100$  в сечении  $z = -601$  м для объекта с  $\sigma = 10^{-2}$  См/м и для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м соответственно.

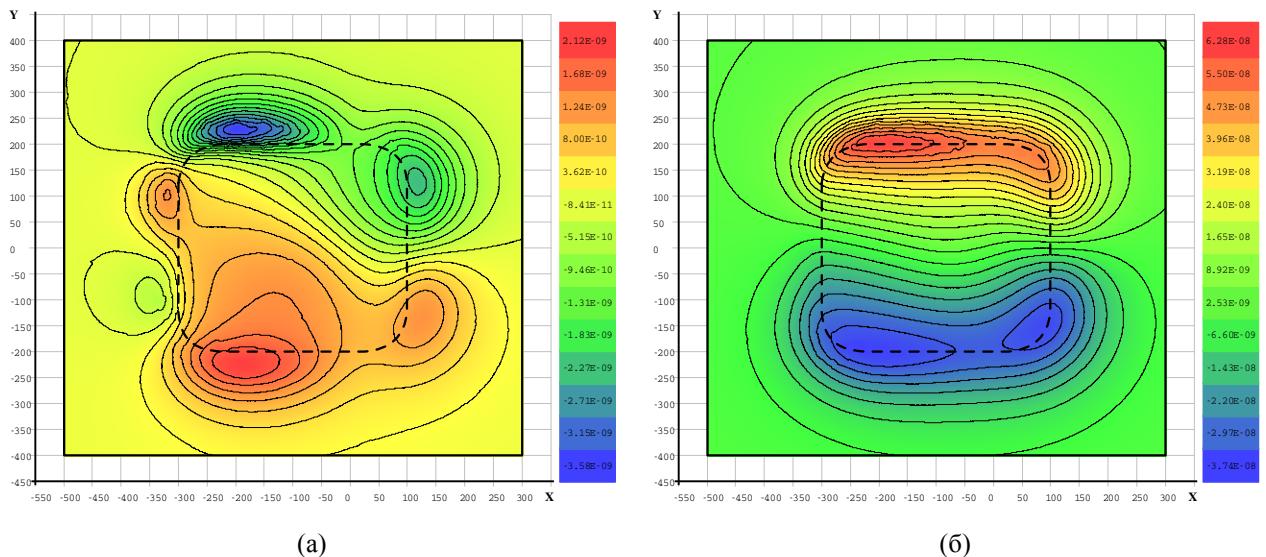


Рисунок 27 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_z)$  при  $l_2 = -100$

На рисунках 28-29 показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = -200$  в сечении  $y = 0$ , на рисунках 28а и 29а — для объекта с  $\sigma = 10^{-2}$  См/м, на рисунках 28б и 29б — для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м.

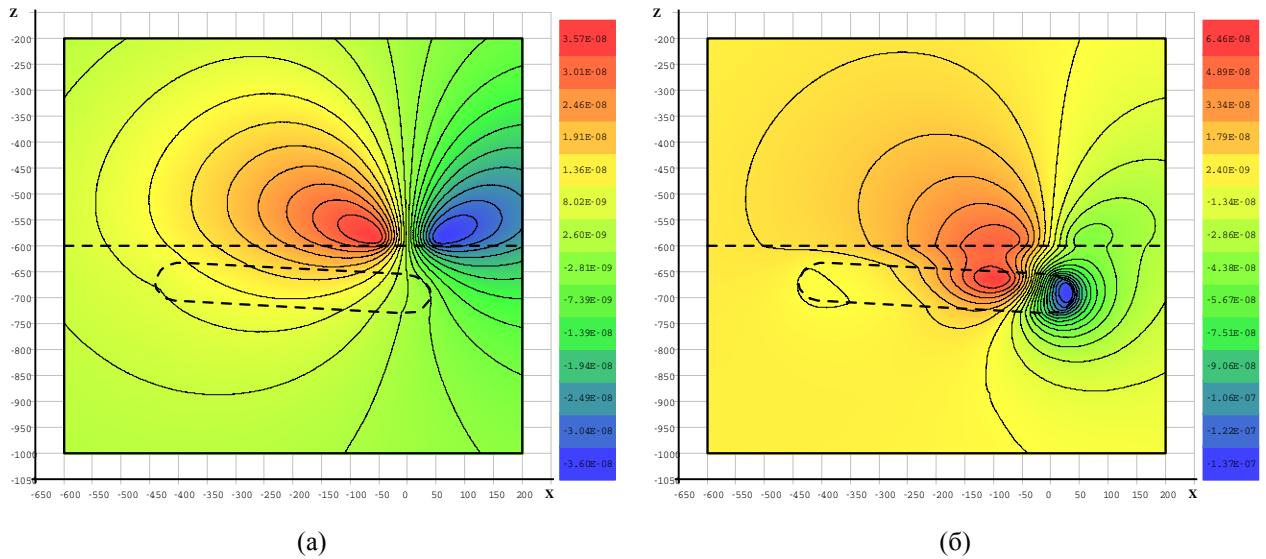


Рисунок 28 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = -200$

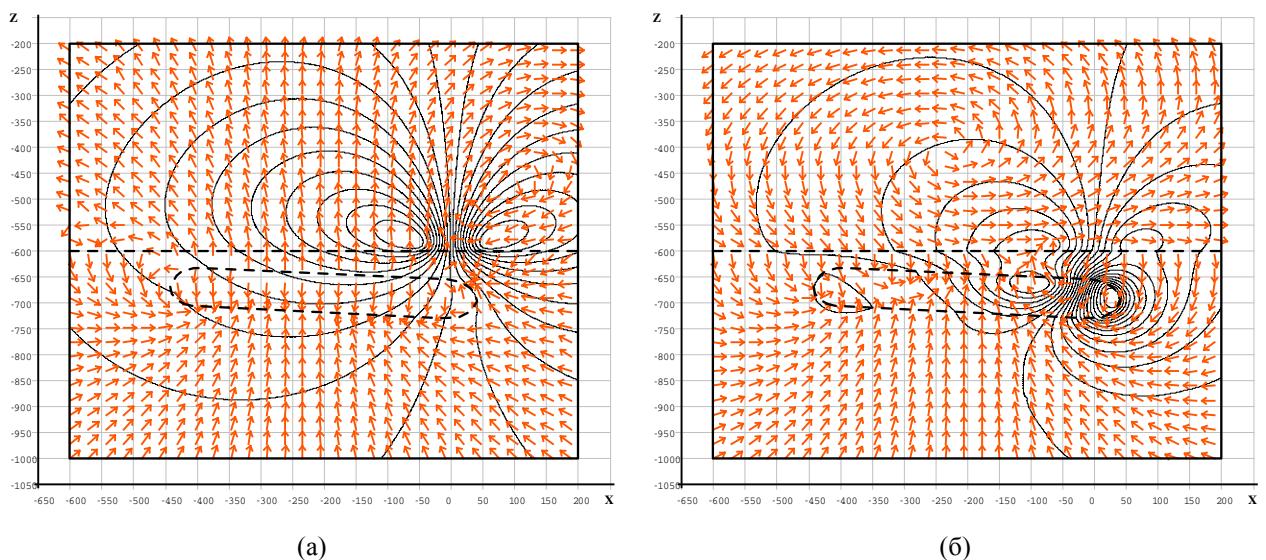


Рисунок 29 — векторы  $(\text{Re}(\mathbf{E}_x), \text{Re} \mathbf{E}_z)^T$ , изолинии  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = -200$

На рисунках 30а и 30б показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = -200$  в сечении  $z = -601$  м для объекта с  $\sigma = 10^{-2}$  См/м и для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м соответственно.

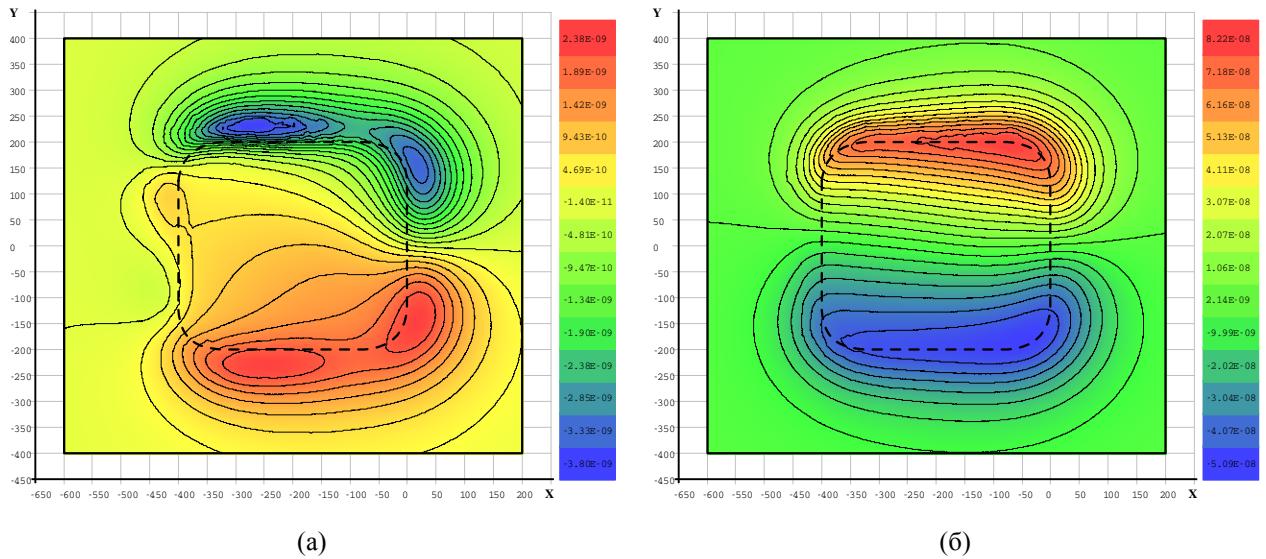


Рисунок 30 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_z)$  при  $l_2 = -200$

На рисунках 31-32 показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = -300$  в сечении  $y = 0$ , на рисунках 31а и 32а – для объекта с  $\sigma = 10^{-2}$  См/м, на рисунках 31б и 32б – для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м.

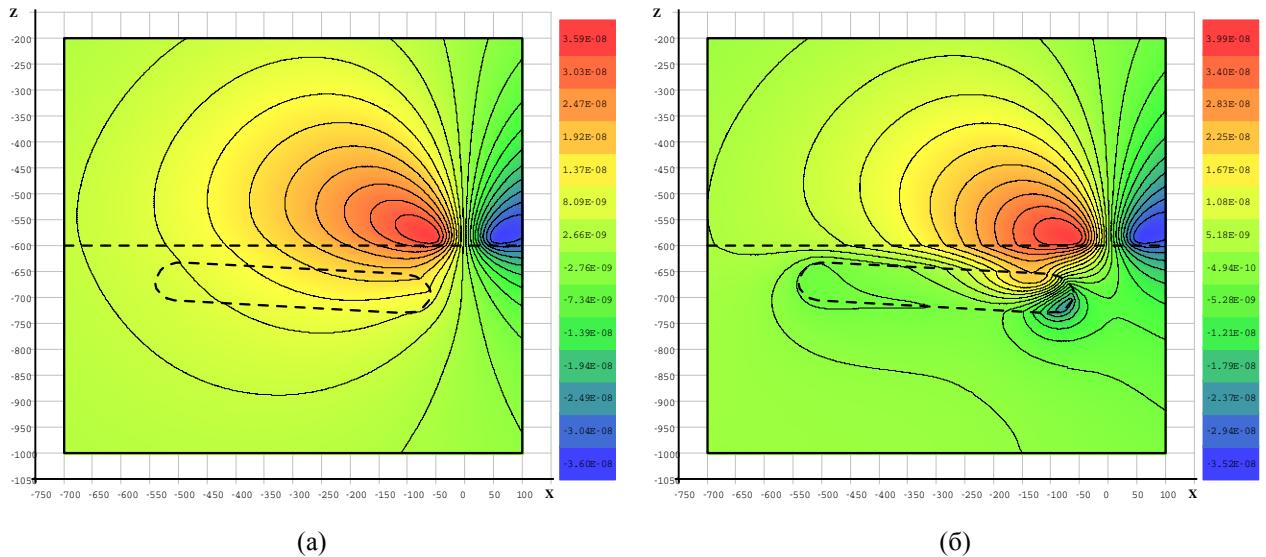


Рисунок 31 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = -300$

На рисунках 33а и 33б показано графическое представление напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $l_2 = -300$  в сечении  $z = -601$  м для объекта с  $\sigma = 10^{-2}$  См/м и для объекта с  $\sigma = 10^2$  См/м соответственно.

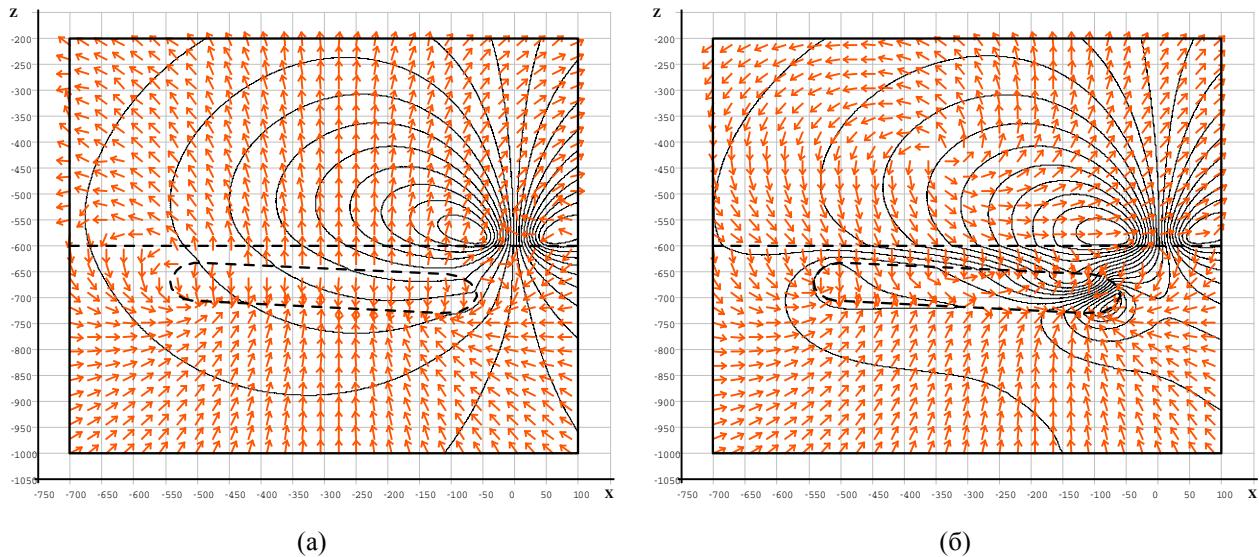


Рисунок 32 — векторы  $(\operatorname{Re}(\mathbf{E}_x), \operatorname{Re}(\mathbf{E}_z))^T$ , изолинии  $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_y)$  при  $l_2 = -300$

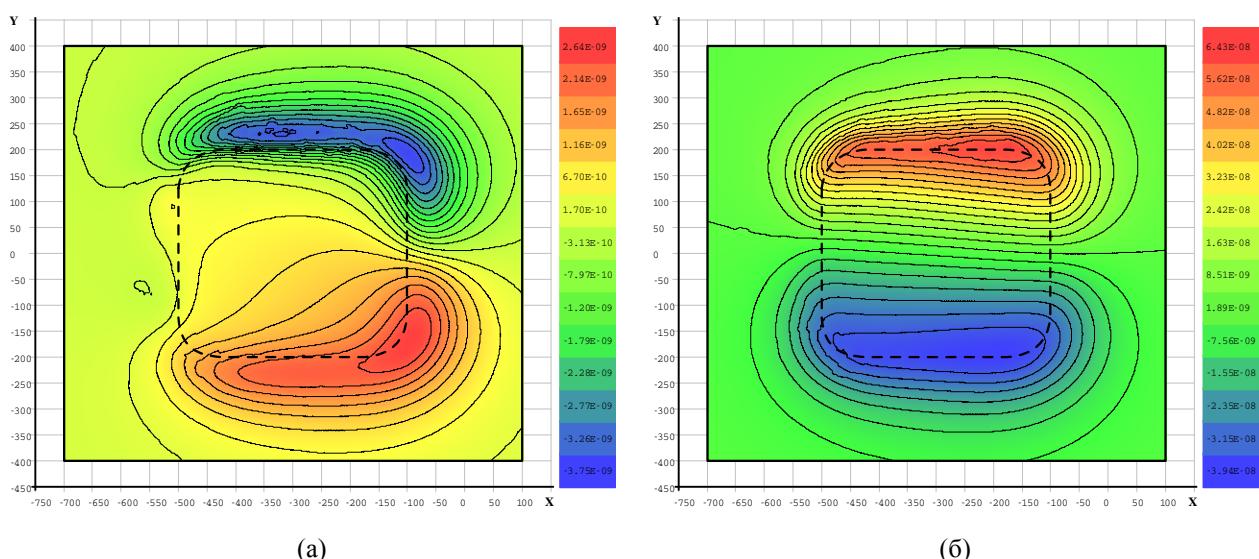


Рисунок 33 —  $\text{Re}(\mathbf{E}_z)$  при  $l_2 = -300$

Результаты моделирования показывают, что проводящий объект хорошо «виден» и на некотором расстоянии от морского дна, а непроводящий – только вблизи поверхности или при некотором заглублении приемника в грунт, причем наибольший отклик на источник электромагнитного возмущения для непроводящего объекта наблюдается в том случае, когда этот источник расположен с некоторым смещением от центра симметрии объекта.

## **4. Описание программного комплекса**

Разработанный программный комплекс ориентирован на решение задач, представимых в виде уравнения Гельмгольца, векторным методом конечных элементов. Комплекс написан на языке C++ [40] и может использовать стороннюю библиотеку Intel® MKL [41] и распараллеливание с помощью OpenMP [42], однако это не является обязательным – достаточно любого компилятора C++, поддерживающего стандарт C++03 и новее. Программный комплекс не имеет жесткой привязки к архитектуре процессора и операционной системе.

Этапы пре- и постпроцессинга выполняются сторонними программами. Построение конечноэлементной сетки выполняется с помощью пакета Gmsh [43]. Регулярные тетраэдralьные сетки могут быть построены с помощью пакета TetMeshGen [44]. Результаты работы программного комплекса выводятся в формате пакета Tecplot [45]. В двумерном и одномерных случаях этот формат, помимо пакета Tecplot, может быть обработан в пакетах FEM Draw [46] и gnuplot [47] соответственно.

Входными данными для программного комплекса являются аргументы командной строки, в которых задаются режим работы и расположение основных конфигурационных файлов; сами конфигурационные файлы, в которых задаются настройки программного комплекса, описания физических областей и PML-слоя; файл сетки в формате MSH ASCII file format [48]. Выходными данными для программного комплекса являются файлы в формате пакета Tecplot, а также файл с результатами решения СЛАУ. Параметры выходных данных задаются в основном конфигурационном файле.

### **4.1. Формат конфигурационных файлов**

Конфигурационные файлы представляют собой файлы настроек в формате `ini` [49]. Данный формат имеет простую структуру, поэтому легко обрабатывается программно и имеет понятный для чтения и редактирования человеком вид. Рассмотрим пример синтаксиса файлов подобного типа:

```

; Commentary
[Section]
parameter1 = value1
parameter2 = value2

[Section.Subsection]
parameter3 = value3

```

В рассматриваемом примере `Commentary` – комментарий; `Section` – название секции, некоторая заранее определенная строка; `Subsection` – название подсекции, используется как уникальный идентификатор подсекции, отличающий ее от других подсекций той же секции; `parameterX` – название параметра, строка из множества допустимых параметров для данной секции; `valueX` – значение соответствующего параметра, тип значения определяется соответствующим параметром.

Подробные примеры конфигурационных файлов с пояснениями приведены в приложении А.

#### **4.2. Аргументы командной строки и переменные окружения**

В зависимости от режима работы программного комплекса список аргументов командной строки может оказаться различным.

**Режим решения.** Наиболее часто используемый режим, в процессе работы которого производится чтение исходных данных и решение задачи, после чего результат решения обрабатывается постпроцессором. Опции командной строки, доступные в таком режиме:

```
programname [-nosolve|-continue] [-nopost] [config.ini]
```

где `programname` – имя программы; `-nosolve` – ключ, по которому не будет проводиться процедура решения СЛАУ, вместо этого веса решения будут восстановлены из файла, указанного в основном конфигурационном файле; `-continue` – ключ, по которому начальные веса будут взяты из файла, указанного в основном конфигурационном файле; `-nopost` – ключ, отключающий постпроцессор; `config.ini` – имя основного конфигурационного файла (по умолчанию – «`config.ini`»).

**Режим сравнения.** Режим, в котором последовательное решение двух задач, а затем производится сравнение полученных решений в заданной подоб-

ласти  $\Omega'$  в норме  $\mathbb{L}^2(\Omega')$ . Опции командной строки, доступные в таком режиме:

```
programname -diff [-nosolve|-continue] [-nopost] master.ini  
[-nosolve|-continue] [-nopost] slave.ini diff.ini
```

где `master.ini` – имя конфигурационного файла для первичной задачи, сетка которой будет использоваться для численного интегрирования; `slave.ini` – имя конфигурационного файла для вторичной задачи; `diff.ini` – имя конфигурационного файла сравнения решений; остальные параметры идентичны таковым в режиме решения.

**Режим сравнения на идентичных сетках.** Режим, аналогичный предыдущему, с той лишь разницей, что сетки обеих задач должны быть геометрически идентичными в подобласти для сравнения  $\Omega'$ . За счет такого ограничения сравнение решений выполняется значительно быстрее. Опции командной строки, доступные в таком режиме:

```
programname -diff_simple [-nosolve|-continue] [-nopost]  
master.ini [-nosolve|-continue] [-nopost] slave.ini diff.ini
```

все параметры идентичны параметрам в режиме сравнения.

Для тонкой настройки работы программы доступны также некоторые переменные окружения:

- `NO_PROGRESS` – отключает вывод прогресса текущей операции (по умолчанию прогресс показывается);
- `OMP_NUM_THREADS=N` – устанавливает количество доступных потоков в подпрограммах, использующих OpenMP (по умолчанию – 1);
- `MKL_NUM_THREADS=N` – устанавливает количество доступных потоков в подпрограммах, использующих Intel® MKL (по умолчанию – 1);
- `GMRES_M=N` – устанавливает глубину метода для решателей на базе GMRES (по умолчанию – 5).

## **Заключение**

В работе были реализованы алгоритмы на базе векторного метода конечных элементов. Эти алгоритмы были положены в основу программного комплекса, который позволяет моделировать электромагнитные поля в областях разнообразной структуры. С помощью этого программного комплекса были решены несколько модельных задач морской геоэлектрики на низких частотах, проведены исследования возможности сокращения области моделирования без внесения дополнительных погрешностей.

Исследования показали, что отказ от расчетов в области с воздухом допустим только при расположении источника электромагнитного поля на большой глубине, иначе, из-за неправильного учета физических процессов, происходящих в воздухе, полученное решение будет неверным.

Применение PML-слоя позволило получить достаточно точные решения, однако его применение не привело к существенному уменьшению размеров систем уравнений и, как следствие, к уменьшению времени решения. Было выдвинуто предположение, что увеличить эффективность применения PML-слоя можно с помощью применения методов, пригодных для решения на конечно-элементных сетках, содержащих как тетраэдральные, так и параллелепипедальные конечные элементы.

Расчеты на модельной задаче с проводящим и непроводящим объектами показали, что проводящий объект хорошо «виден» на некотором расстоянии от морского дна, а непроводящий – только вблизи поверхности или при небольшом заглублении приемника в грунт. Наибольший отклик на источник электромагнитного возмущения для непроводящего объекта наблюдался в том случае, когда источник располагался со смещением от центра симметрии объекта.

## **Список литературы**

1. Шурина, Э.П. Морская геоэлектрика – задачи и перспективы / Э.П. Шурина, М.И. Эпов, А.В. Мариенко // Тез. докл. всеросс. науч.-техн. конф. «Научное и техническое обеспечение исследования и освоения шельфа Северного Ледовитого океана». – 2010. – 9-13 августа. – С. 7-12.
2. Gabrielsen, P.T. 3D CSEM for Hydrocarbon Exploration in the Barents Sea / P.T. Gabrielsen, D.V. Shantsev, S. Fanavoll // 5th Saint Petersburg International Conference & Exhibition – Geosciences: Making the most of the Earth's resources. – 2012. – 2-5 April. – Pp. 1-5.
3. Anderson, C. An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source / C. Anderson, J. Mattsson // First Break. – May 2010. – Vol. 28, Iss. 5. – Pp. 71-75.
4. Жигалов, П.С. Влияние слоя воздуха в задачах морской геоэлектрики / П.С. Жигалов, Б.В. Рак // Наука. Технологии. Инновации. : сб. науч. трудов – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2015 – 01-05 декабря – Часть 2 – С. 56-57.
5. Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations // Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on. – 1981. – No. 4. – Pp. 377-382.
6. Berenger, J.P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / J.P. Berenger // Journal of computation physics. – 1994 – No. 114. – Pp. 185-200.
7. Wiik, T. A Discontinuous Galerkin Method for Modelling Marine Controlled Source Electromagnetic Data / T. Wiik, M.V. De Hoop, B. Ursin // Proceedings of the Project Review, Geo-Mathematical Imaging Group, Purdue University, West Lafayette, IN. – 2013 – Vol. 1 – P. 75-102.
8. Баландин, М.Ю. Векторный метод конечных элементов : Учеб. пособие / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – 69 с.
9. Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations. / P. Monk – Oxford University Press, 2003.

10. Zhigalov, P. Analysis of the Source-Receiver Systems in Marine Geoelectric Problems / P. Zhigalov // Progress Through Innovation : Тез. городск. науч.-практ. конф. аспирантов и магистрантов. – Новосибирск : 2015. – 2 апреля. – С. 30-31.
11. Жигалов, П.С. Анализ систем источник-приемник в задачах морской геоэлектрики / П.С. Жигалов // МНСК-2015 : матер. 53 междунар. научн. студенч. конф. – Новосибирск : 2015 – 11-17 апреля – Математика – С. 216.
12. Шурина, Э.П. Математическое моделирование электромагнитного поля для задачи морской геоэлектрики / Э.П. Шурина, Б.В. Рак, П.С. Жигалов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. X междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – 28-30 октября. – С. 131-137.
13. Жигалов, П.С. Идеально согласованные слои / П.С. Жигалов, Б.В. Рак // Обработка информации и математическое моделирование. Росс. науч.-техн. конф. : матер. конф. – Новосибирск : 2015 – С. 106-114.
14. Эпов, М.И. Параллельные конечноэлементные вычислительные схемы в задачах геоэлектрики / М.И. Эпов, Э.П. Шурина, Д.А. Архипов // Вычислительные технологии. – 2013. – Том 18, №2. – С. 94-112.
15. Schwarzbach C. Stability of finite element solutions to Maxwell's equations in frequency domain. / C. Schwarzbach – 2009.
16. Hiptmair R. Multigrid method for Maxwell's equations / R. Hiptmair // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1998. – Vol. 36. – No. 1. – Pp. 204-225.
17. Nédélec J.C. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$  / J.C. Nédélec // Numerische Mathematik. – 1980. – Vol. 35. – No. 3. – Pp. 315-341.
18. Nédélec J.C. A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$  / J.C. Nédélec // Numerische Mathematik. – 1986. – Vol. 50. – No. 1. – Pp. 57-81.
19. Webb J.P. Edge elements and what they can do for you / J.P. Webb // Magnetics, IEEE Transactions on. – 1993. – Vol. 29. – No. 2. – Pp. 1460-1465.
20. Баландин М.Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности: Учеб. пособие / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000.

– 70 с.

21. Соловейчик, Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
22. Webb, J.P. Hierarchical Vector Basis Functions of Arbitrary Order for Triangular and Tetrahedral Finite Elements / J.P. Webb // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1999. – Vol. 47. – Pp. 1244-1253.
23. Nечаев, О.В. Multilevel iterative solver for the edge fem solution of the 3D Maxwell equation / О.В. Нечаев, Е.П. Шурина, М.А. Ботчев // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – No. 55. – Pp. 2346-2362.
24. Михайлова Е.И., Шурина Э.П. Математическое моделирование высокочастотного электромагнитного поля в волноводных устройствах / Е.И. Михайлова, Э.П. Шурина // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13. – №. 4. – С. 102-118.
25. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
26. Zhang L. et al. A set of symmetric quadrature rules on triangles and tetrahedra / L. Zhang, T. Cui, H. Liu // J. Comput. Math. – 2009. – Vol. 27. – No. 1. – Pp. 89-96.
27. Numerical Integration over the Tetrahedral Domain [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://people.fh-landshut.de/~maurer/numeth/node148.html>.
28. Numerical Integration over the Triangular Domain [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://people.fh-landshut.de/~maurer/numeth/node147.html>.
29. Шокин Ю.И. Современные многосеточные методы. – Часть II. Многоуровневые методы. Применение многомасштабных методов.: Учеб. пособие / Ю.И. Шокин, Э.П. Шурина, Н.Б. Иткина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – 98 с.
30. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. / Y. Saad – Siam, 2003.
31. Van der Vorst H.A. Iterative Krylov methods for large linear systems. / H.A. Van der Vorst – Cambridge University Press, 2003. – Vol. 13.

32. Barrett R. et al. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods. / R. Barrett et al. – Siam, 1994. – Vol. 43.
33. Solin P., Segeth K., Dolezel I. Higher-order finite element methods. / P. Solin, K. Segeth, I. Dolezel – CRC Press, 2003. – 388 p.
34. Bergot M., Duruflé M. High-order optimal edge elements for pyramids, prisms and hexahedra / M. Bergot, M. Duruflé // Journal of Computational Physics. – 2013. – Vol. 232. – No. 1. – Pp. 189-213.
35. Dosopoulos S., Zhao B., Lee J.F. Non-conformal and parallel discontinuous Galerkin time domain method for Maxwell's equations: EM analysis of IC packages / S. Dosopoulos, B. Zhao, J.F. Lee // Journal of Computational Physics. – 2013. – Vol. 238. – Pp. 48-70.
36. Perugia I., Schötzau D. The  $hp$ -local discontinuous Galerkin method for low-frequency time-harmonic Maxwell equations / I. Perugia, D. Schötzau // Mathematics of Computation. – 2003. – Vol. 72. – No. 243. – Pp. 1179-1214.
37. Dosopoulos S., Lee J.F. Interconnect and lumped elements modeling in interior penalty discontinuous Galerkin time-domain methods / S. Dosopoulos, J.F. Lee // Journal of Computational Physics. – 2010. – Vol. 229. – No. 22. – Pp. 8521-8536.
38. Christophe A. et al. An Overlapping Nonmatching Grid Mortar Element Method for Maxwell's Equations / A. Christophe et al. // Magnetics, IEEE Transactions on. – 2014. – Vol. 50. – Iss. 2. – Pp. 409-412.
39. Gopalakrishnan J., Pasciak J.E. Multigrid for the mortar finite element method / J. Gopalakrishnan, J.E. Pasciak // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 37. – No. 3. – Pp. 1029-1052.
40. International organization for standardization, ISO/IEC 14882:2003: Programming languages: C++, 2nd ed. – Geneva, Switzerland, 2003 – 757 p.
41. Intel® Math Kernel Library (Intel® MKL) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://software.intel.com/en-us/intel-mkl>.
42. OpenMP Application Programming Interface: Version 4.5 November 2015 – OpenMP Architecture Review Board. – 2015. – 368 p.

43. Geuzaine C. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities / C. Geuzaine J.F. Remacle. // International Journal for Numerical Methods in Engineering – 2009 – Vol. 79 – Iss. 11 – Pp. 1309-1331
44. TetMeshGen: A regular tetrahedral finite element mesh generator [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://github.com/AlienCowEatCake/tet\\_mesh\\_gen](https://github.com/AlienCowEatCake/tet_mesh_gen).
45. Tecplot 10 User's Manual – Amtec Engineering, Inc., Bellevue, Washington., 2003.
46. FEM Draw: The software for visualization of scalar and vector fields [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://github.com/AlienCowEatCake/fem\\_draw](https://github.com/AlienCowEatCake/fem_draw).
47. Williams T. gnuplot 5.0: An Interactive Plotting Program / T. Williams, C. Kelley – 2016. – 254 p.
48. Gmsh Reference Manual [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html>.
49. .ini: Формат файла [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/.ini>.

## Приложение А. Примеры конфигурационных файлов

### Пример основного конфигурационного файла

```
; Общие параметры программного комплекса
[VFEM]
; Порядок базиса, 1 или 2
; [по умолчанию - 1]
basis_order = 1
; Тип базиса, 1 (неполный) или 2 (полный)
; [по умолчанию - 2]
basis_type = 2
; Порядок интегрирования на тетраэдральных элементах, от 2 до 14 включительно
; [по умолчанию - 8]
tet_integration_order = 4
; Порядок интегрирования на треугольных элементах, от 2 до 29 включительно
; [по умолчанию - 8]
tr_integration_order = 5
; Точность решения основной СЛАУ
; [по умолчанию - 1e-10]
eps_slae = 1e-10
; Точность решения СЛАУ неоднородных краевых условий первого типа
; [по умолчанию - 1e-14]
eps_slae_bound = 1e-15
; Использовать двухуровневый решатель или нет?
; [по умолчанию - no]
v_cycle_enabled = yes
; Точность нахождения начального приближения в двухуровневом решателе
; [по умолчанию - 0.01]
gamma_v_cycle_0 = 0.1
; Точность решения СЛАУ на полном пространстве в двухуровневом решателе
; [по умолчанию - 0.05]
gamma_v_cycle_full = 0.5
; Точность решения СЛАУ на пространстве ядра в двухуровневом решателе
; [по умолчанию - 0.01]
gamma_v_cycle_ker = 0.1
; Максимальное количество итераций для не двухуровневых решателей
; [по умолчанию - 15000]
max_iter = 15000
; Максимальное количество итераций при решении СЛАУ на полном пространстве и пространстве ядра
; в двухуровневом решателе
; [по умолчанию - 500]
max_iter_v_cycle_local = 100
; Описание типа решателя состоит из двух частей: название собственно решателя и название
; предобуславливателя. Общий синтаксис для описания решателей:
; "SolverName<PreconditionerName>""
; Описание всех используемых решателей:
; * "COCG" - COCG
; * "COCG_Smooth" - COCG со слаживанием невязки
; * "COCG_Smooth_OpenMP" - COCG со слаживанием невязки, распараллеленный через OpenMP
; * "COCG_Smooth_MKL" - COCG со слаживанием невязки, использующий библиотеку MKL
; * "COCR" - COCR
; * "COCR_Smooth" - COCR со слгавживанием невязки
; * "BicG_Complex" - Комплексный BicG
; * "BicG_Complex_Smooth" - Комплексный BicG со слаживанием невязки
; * "BicGSTab_Complex" - Комплексный BiCGStab
; * "BiCGStab_Complex_Smooth" - Комплексный BiCGStab со слаживанием невязки
; * "GMRES_Complex" - Комплексный GMRES
; * "GMRES_Complex_OpenMP" - Комплексный GMRES, распараллеленный через OpenMP
; * "GMRES_Complex_MKL" - Комплексный GMRES, использующий библиотеку MKL
; Описание всех используемых предобуславливателей:
; * "Nothing" - стандартный пустой предобуславливатель
; * "Nothing_OpenMP" - пустой предобуславливатель, распараллеленный через OpenMP
; * "Nothing_MKL" - пустой предобуславливатель, использующий библиотеку MKL
; * "Di" - стандартный диагональный предобуславливатель ( $A=S^*Q : S=Di, Q=I$ )
; * "Di_OpenMP" - диагональный предобуславливатель, распараллеленный через OpenMP
; * "Di_MKL" - диагональный предобуславливатель, использующий библиотеку MKL
; * "LLT" - стандартный предобуславливатель неполным  $LL^T$  разложением ( $A=S^*Q : S=L, Q=L^T$ )
; * "LLT_MKL" - предобуславливатель неполным  $LL^T$  разложением, использующий библиотеку MKL
; * "LDLT" - стандартный предобуславливатель неполным  $LDL^T$  разложением ( $A=S^*Q : S=L^*D, Q=L^T$ )
; * "GS" - стандартный предобуславливатель типа Гаусса-Зейделя ( $A=S^*Q : S=(D+L)^{-1}*D^*(D+U)^{-1}, Q=I$ )
; Название решателя для решения основной СЛАУ
; [по умолчанию - COCG_Smooth<LLT>]
solver_name = "COCG_Smooth<LLT>"
```

```

; Названия решателя для решения СЛАУ неоднородных краевых условий первого типа
; [по умолчанию - COCG_Smooth<LLT>]
solver_name_bound = "COCG_Smooth<LLT>"
; Название решателя для решения СЛАУ на полном пространстве в двухуровневом решателе
; [по умолчанию - COCG_Smooth<LLT>]
solver_name_v_cycle_full = "GMRES<LLT>"
; Название решателя для решения СЛАУ на пространстве ядра в двухуровневом решателе
; [по умолчанию - COCG_Smooth<LLT>]
solver_name_v_cycle_ker = "GMRES<LLT>"
; Путь к файлу с конечноэлементной сеткой
; [по умолчанию - mesh.msh]
filename_mesh = "mesh.msh"
; Путь к файлу с параметрами физических областей
; [по умолчанию - phys.ini]
filename_phys = "phys.ini"
; Путь к файлу с параметрами PML-слоя
; [по умолчанию - пустая строка (файл не задан, то есть PML-слой не используется)]
filename_pml = "config_pml.ini"
; Путь к файлу для сохранения или загрузки весов решения
; [по умолчанию - пустая строка (файл не задан, то есть загрузка/сохранение не производятся)]
filename_slae = "slaе.txt"
; Для ускорения вычисления матрицы СЛАУ, выражения для краевых условий, правых частей и
; аналитического решения могут быть скомпилированы "на лету". В настоящий момент такая
; возможность предоставляется для процессорных архитектур x86, x86_64 и x86_32 и операционных
; систем, использующих MSVC, MinGW или SysV ABI. Доступные значения:
; * disable - не компилировать
; * extcall - использовать математические операции из стандартной математической
;   библиотеки C++
; * inline - компилировать, использовать собственные реализации математических операций (в
;   большинстве случаев такой метод работает значительно быстрее, но не удовлетворяет IEEE 754
; [по умолчанию - disable]
jit_type = disable

; Параметры краевых условий первого типа (по умолчанию)
[Boundary]
; Включено использование неоднородных краевых условий первого типа или нет?
; [по умолчанию - no]
enabled = yes
; Покомпонентно заданная функция от x, y, z, omega, epsilon, sigma, mu, k2
x = 0.0
y = 0.0
z = 0.0

; Параметры краевых условий первого типа (двумерная физическая область 42)
[Boundary.42]
; Покомпонентно заданная функция от x, y, z, omega, epsilon, sigma, mu, k2
x = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega
y = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega
z = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega

; Параметры правой части (по умолчанию)
[Right]
; Включено использование неоднородной правой части или нет?
; [по умолчанию - no]
enabled = yes
; Покомпонентно заданная функция от x, y, z, omega, epsilon, sigma, mu, k2
x = 0.0
y = 0.0
z = 0.0

; Параметры правой части (трехмерная физическая область 42)
[Right.42]
; Покомпонентно заданная функция от x, y, z, omega, epsilon, sigma, mu, k2
x = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega
y = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega
z = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega

; Параметры аналитического решения (по умолчанию)
[Analytical]
; Включено использование аналитического решения или нет?
; [по умолчанию - no]
enabled = yes
; Покомпонентно заданная функция от x, y, z, omega, epsilon, sigma, mu, k2
x = 0.0
y = 0.0
z = 0.0

```

```

; Параметры аналитического решения (трехмерная физическая область область 42)
[Analytical.42]
; Покомпонентно заданная функция от x, y, z, omega, epsilon, sigma, mu, k2
x = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega
y = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega
z = x + y * sigma - z + i * epsilon / mu ^ omega

; Параметры 3D постпроцессора
[Postprocessing.1]
; Тип 1d, 2d или 3d
; [по умолчанию - 3d]
type = 3d
; Для 3d можно настроить только имя файла
; [по умолчанию - plot.plt]
filename = "plot.plt"
; Добавить ли метку времени запуска расчетов в имя файла?
; [по умолчанию - no]
timestamp = yes

; Параметры 2D постпроцессора
[Postprocessing.2]
; Тип 1d, 2d или 3d
; [по умолчанию - 3d]
type = 2d
; Имя файла
; [по умолчанию - plot.plt]
filename = "plot_y=0.dat"
; Добавить ли метку времени запуска расчетов в имя файла?
; [по умолчанию - no]
timestamp = yes
; Имя и значение фиксированной переменной
slice_var_name = Y
slice_var_value = 0.0
; Имя первой свободной переменной + откуда докуда брать значения + к-во точек
var1_name = X
var1_from = -700
var1_to = 700
var1_num = 70
; Имя второй свободной переменной + откуда докуда брать значения + к-во точек
var2_name = Z
var2_from = -700
var2_to = 700
var2_num = 70

; Параметры 1D постпроцессора
[Postprocessing.3]
; Тип 1d, 2d или 3d
; [по умолчанию - 3d]
type = 1d
; Имя файла
; [по умолчанию - plot.plt]
filename = "z=-100.dat"
; Добавить ли метку времени запуска расчетов в имя файла?
; [по умолчанию - no]
timestamp = yes
; Имена и значения двух фиксированных переменных
line_var1_name = Y
line_var1_value = 0.0
line_var2_name = Z
line_var2_value = -100
; Имя свободной переменной + откуда докуда брать значения + к-во точек
var_name = X
var_from = -600
var_to = 600
var_num = 70

```

## Пример конфигурационного файла физических областей

```

; Глобальные физические параметры
[Global]
; Частота источника поля, Гц
frequency = 15.915494309189533576888
; Магнитная проницаемость (относительная)

```

```

; [по умолчанию - mu0]
mu = 1
; Диэлектрическая проницаемость (относительная)
; [по умолчанию - eps0]
eps = 1
; Электрическая проводимость, См/м
; [по умолчанию - 0]
sigma = 10

; Параметры среды для конкретной трехмерной физической области с номером 27
[Phys3D.27]
; Магнитная проницаемость (относительная)
; [по умолчанию как в Global]
mu = 1
; Диэлектрическая проницаемость (относительная)
; [по умолчанию как в Global]
eps = 1
; Электрическая проводимость, См/м
; [по умолчанию как в Global]
sigma = 10

; Параметры среды для конкретной двумерной физической области с номером 28
; (граница трехмерной области 27)
[Phys2D.28]
; Родительская область (трехмерная)
; [по умолчанию наследуется от Global]
parent = 27
; Тип краевого условия, 1 или 2
; [по умолчанию - 2]
boundary = 1

; Параметры среды для конкретной одномерной физической области с номером 1
; (ребра для описания петли, являющейся источником поля)
[Phys1D.1]
; Родительская область (трехмерная)
; [по умолчанию наследуется от Global]
parent = 27
; Электрический ток в линии (A)
; [по умолчанию - 0]
current = 1.0

```

## Пример конфигурационного файла PML-слоя

```

; Глобальные параметры PML-слоя
[PML]
; Границы внутренней области без PML-слоя
; [если не указано - определяются автоматически]
x0 = -600
x1 = 600
y0 = -600
y1 = 600
z0 = -600
z1 = 600
; Вещественная и мнимая части коэффициента комплексного растяжения
; [по умолчанию растяжение производиться не будет]
chi_real = 2
chi_imag = 3
; Степенной параметр m
; [по умолчанию m = 3]
m = 3
; Толщина PML-слоя
; [по умолчанию width = 100]
width = 100

; Параметры PML-слоя для конкретной физической области с номером 21
[PML.21]
; Вещественная и мнимая части коэффициента комплексного растяжения
; [по умолчанию как в секции PML]
chi_real = 5
chi_imag = 0
; Степенной параметр m
; [по умолчанию как в секции PML]
m = 3
; Толщина PML-слоя

```

```
; [по умолчанию как в секции PML]
width = 100
```

## Пример конфигурационного файла сравнения решений

```
; Область, внутри которой нужно смотреть разницу
[Area.1]
; Тип области, раз смотрим разницу, значит included
type = included
; Координаты области
x0 = -500
x1 = 500
y0 = -500
y1 = 500
z0 = -500
z1 = 500

; Область, внутри которой НЕ нужно смотреть разницу
[Area.2]
; Тип области, раз НЕ смотрим разницу, значит excluded
type = excluded
; Координаты области
x0 = -180
x1 = 180
y0 = -180
y1 = 180
z0 = -180
z1 = 180
```

## **Приложение Б. Интерфейсы основных классов программного комплекса**

**Вставить интерфейсы основных классов программного комплекса**