МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра Вычислительных технологий
(полное название кафедры)

Петр Сергеевич Жигалов
(И. О. Фамилия студента – автора работы)

Анализ систем источник-приемник в задачах морской геоэлектрики
(полное название темы магистерской диссертации)

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
по направлению высшего образования

01.04.02 – Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки магистра)

факультет прикладной математики и информатики
(факультет)

Тема диссертации утверждена приказом по НГТУ № 4931/2 от «15» октября 2014 г.

Руководитель

Шурина Э.П.
(фамилия, И., О.)

д.т.н., профессор
(уч. степень, уч. звание)

Новосибирск, 2016 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра Вычислительных технологий
(полное название кафедры)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой Шокин Ю.И.
(фамилия, И., О.)

(подпись, дата)

ЗАДАНИЕ
на магистерскую диссертацию

студенту Жигалову Петру Сергеевичу
(фамилия, имя, отчество)

факультета прикладной математики и информатики

Направление подготовки 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки магистра)

Магистерская программа Математическое моделирование
(наименование программы)
детерминированных и стохастических процессов

Тема Анализ систем источник-приемник в задачах морской геоэлектрики
(полное название темы)

Цели работы Lorem Ipsum
Lorem Ipsum
Lorem Ipsum
Lorem Ipsum

Руководитель
Шурина Э.П.
(фамилия, И., О.)
д.т.н., профессор
(уч. степень, уч. звание)

(подпись, дата)

Аннотация

Отчет 25 с., 4 рис., 3 табл., 20 источников, 1 прил.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА, ВЕКТОРНЫЙ МКЭ, ТЕТРАЭДРАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, МОРСКАЯ ГЕОЭЛЕКТРИКА, НЕФТЯНЫЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ

Объектом исследования является поведение электрического поля в недрах земли под слоем морской воды.

Цель работы – решение трехмерной прямой задачи морской геоэлектрики векторным методом конечных элементов.

В процессе работы проводилось численное моделирование электрического поля векторным методом конечных элементов, сравнивались результаты на разных частотах и разных комбинациях материалов с различными электрофизическими свойствами.

В результате исследования было получено представление электрического поля в сложно построенных средах.

Содержание

Введение

В современном мире экономика многих стран, таких как Россия, Швеция, Канада, зависит от цены на нефть. Несмотря на то, что цены на углеводороды снижаются, конкуренция за обладание ими не угасает, порой доходя и до вооруженных конфликтов. Таким образом, все более актуальными становятся задачи, связанные с геологоразведкой, особенно в недрах земли, скрытых под толщей морской воды. Это объясняется тем, что, по оценкам специалистов, только на территории Северного Ледовитого океана может находиться до 25 процентов мировых запасов нефти и газа [1].

Задачи морской геоэлектрики имеют ряд отличительных особенностей. К ним можно отнести изменение электропроводности морской воды в зависимости от глубины [1]. Это обусловлено различной соленостью и температурой разных слоев морской воды. Кроме того, эти свойства могут значительно изменяться в зависимости от сезона, погодных условий, интенсивности таяния льдов, а также от многих других факторов. Морское дно, кроме сложного рельефа, имеет в разных участках различный уровень проникновения соленой или пресной воды в грунт. Также к особенностям относятся большой размер расчетной области и низкая частота источника электромагнитного поля (0.25-100 Гц) [2].

Геометрические характеристики локального источника возбуждения электромагнитного поля значительно отличаются от области исследования, размеры первого в пределах сотен метров, а второй – более 6000 м. Это приводит к необходимости применения специальных методов для сокращения области моделирования. Одним из таких методов является применение специального поглощающего слоя, называемого идеально согласованным слоем (Perfectly Matched Layer) [3, 4]. PML-слой учитывается в вариационной формулировке как подобласть со специальными коэффициентами.

Целью данной работы является исследование применения идеально согласованного слоя (PML-слоя) для ограничения области моделирования в задачах морской геоэлектрики на низких частотах.

Математическая модель

Уравнения Максвелла и Гельмгольца

Электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла [5]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ – закон Фарадея,} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \text{ – закон Ампера,} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ – закон Гаусса для магнитной индукции,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ – закон Гаусса для электрической индукции,}$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля (В/м), $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля (А/м), $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ – магнитная индукция (Тл), $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ – электрическая индукция (Кл/м^2), ρ – плотность электрических зарядов (Кл/м^3), σ – электрическая проводимость (См/м), $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость (Ф/м), ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mu = \mu_r \mu_0$ – магнитная проницаемость (Гн/м), μ_r – относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума, $\mathbf{J}$ – плотность стороннего электрического тока (А/м^2).

На границе $\Gamma = \Omega^j \cap \Omega^k$ между материалами j и k с различными электрофизическими свойствами выполняются следующие условия:

$$[\![\mathbf{E} \times \mathbf{n}]\!]_\Gamma = 0 \text{ – тангенциальная компонента } \mathbf{E} \text{ непрерывна,} \tag{3}$$

$$[\![\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]\!]_\Gamma = 0 \text{ – нормальная компонента } \mathbf{B} \text{ непрерывна,}$$

$$[\![\mathbf{H} \times \mathbf{n}]\!]_\Gamma = \mathbf{J}_\Gamma \text{ – тангенциальная компонента } \mathbf{H} \text{ разрывна,}$$

$$[\![\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]\!]_\Gamma = \rho_\Gamma \text{ – нормальная компонента } \mathbf{D} \text{ разрывна.} \tag{4}$$

При моделировании электрического поля в частотной области будем полагать, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{J}$ будут зависеть от времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{J}(t) = \mathbf{J}e^{i\omega t}.$$

Используя такое представление, получим из (1) и (2):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B}, \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\mathbf{D} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}. \tag{6}$$

Выполним следующие преобразования над (5):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H},$$

$$\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{H},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) = -i\omega\nabla \times \mathbf{H}. \tag{7}$$

Подставим в (7) (6):

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) = -i\omega(i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}),$$

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2\varepsilon\mathbf{E} - i\omega\sigma\mathbf{E} - i\omega\mathbf{J},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) + k^2\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{J}, \tag{8}$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon$. Уравнение (8) называют уравнением Гельмгольца.

Краевые условия для уравнения (8) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}\big|_{S_1} = \mathbf{E}^g, \tag{9}$$

$$\sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\big|_{S_2} = 0. \tag{10}$$

В случае удаленных границ (9) принимает вид условия «большого бака»:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}\big|_{S_1} = 0. \tag{11}$$

Источником электромагнитного возмущения будет выступать замкнутая токовая петля.

Подействуем оператором $\nabla\cdot$ на уравнение (2):

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\nabla\cdot(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\sigma\mathbf{E}+\mathbf{J}).$$

Так как $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=0$, $\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\nabla\cdot\frac{\partial\varepsilon\mathbf{E}}{\partial t}=\nabla\cdot(i\omega\varepsilon\mathbf{E})$ и, так как для замкнутой петли с током выполняется $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$, получим закон сохранения заряда:

$$\nabla\cdot(\sigma+i\omega\varepsilon)\mathbf{E}=0. \tag{12}$$

Вариационная постановка

Введем следующие пространства [6, 10]:

$$\mathbb{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega)=\{\mathbf{v}\in[\mathbb{L}^2(\Omega)]^3:\nabla\times\mathbf{v}\in[\mathbb{L}^2(\Omega)]^3\},$$

$$\mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)=\{\mathbf{v}\in\mathbb{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega):\mathbf{v}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0\}.$$

Эти пространства имеют скалярное произведение и норму:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int\limits_\Omega\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega,$$

$$\|\mathbf{u}\|^2=\int\limits_\Omega\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^*\,d\Omega+\int\limits_\Omega(\nabla\times\mathbf{u})\cdot(\nabla\times\mathbf{u}^*)\,d\Omega,$$

где индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение.

Скалярно умножим (8) на некоторую пробную функцию $\mathbf{v}\in\mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$:

$$(\nabla\times(\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E}),\mathbf{v})+(k^2\mathbf{E},\mathbf{v})=-(i\omega\mathbf{J},\mathbf{v}),$$

$$\int\limits_\Omega\nabla\times(\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega+\int\limits_\Omega k^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega=-\int\limits_\Omega i\omega\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega.$$

Воспользовавшись первой векторной формулой Грина (13):

$$\int\limits_D\nabla\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^*\,dV=\int\limits_D\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}^*)\,dV+\int\limits_{\partial D}(\mathbf{n}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}^*\,dS, \tag{13}$$

получим:

$$\int\limits_{\Omega} \mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{v}^*\,d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{n}\times(\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{v}^*\,dS +$$
$$+\int\limits_{\Omega} k^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega = -\int\limits_{\Omega} i\omega\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega.$$

Применим тождества $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{v}^*\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} k^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega =\\ = -\int\limits_{\Omega} i\omega\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{v}^*\times\mathbf{n}\cdot(\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E})\,dS.\end{aligned} \tag{14}$$

Так как $\mathbf{v}\in\mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$, то из свойств пространства $\mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$ второй интеграл в правой части равен нулю, тогда уравнение (14) примет вид:

$$\int\limits_{\Omega} \mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{v}^*\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} k^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega = -\int\limits_{\Omega} i\omega\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}^*\,d\Omega. \tag{15}$$

В результате векторная вариационная постановка имеет вид: ***Найти*** $\mathbf{E}\in\mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$***, такое что*** $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$ ***будет выполнено*** (15).

Рассмотрим еще пару пространств [10]

$$\mathbb{H}(\mathrm{grad}\,,\Omega) = \{\varphi\in\mathbb{L}^2(\Omega) : \nabla\varphi\in[\mathbb{L}^2(\Omega)]^3\},$$

$$\mathbb{H}_0(\mathrm{grad}\,,\Omega) = \{\varphi\in\mathbb{H}(\mathrm{grad}\,,\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

В соответствии с комплексом Де Рама (De Rham) [11]

$$\mathbb{H}(\mathrm{grad}\,,\Omega) \xrightarrow{\nabla} \mathbb{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega) \xrightarrow{\nabla\times} \mathbb{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) \xrightarrow{\nabla\cdot} \mathbb{L}^2(\Omega), \tag{16}$$

будет иметь место вложение $\nabla\varphi\in\mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$, $\forall\varphi\in\mathbb{H}_0(\mathrm{grad}\,,\Omega)$. Возьмем $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, тогда (15) примет вид:

$$\int\limits_{\Omega} \mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E}\cdot\nabla\times(\nabla\varphi)^*\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} k^2\mathbf{E}\cdot(\nabla\varphi)^*\,d\Omega = -\int\limits_{\Omega} i\omega\mathbf{J}\cdot(\nabla\varphi)^*\,d\Omega.$$

Использовав свойство дивергенции $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{F}$ и применив формулу Остроградского-Гаусса (17)

$$\int\limits_{D} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int\limits_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS, \tag{17}$$

получим:

$$\int\limits_{\Omega} \mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E}\cdot\nabla\times(\nabla\varphi)^*\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} k^2\, \mathbf{E}\cdot(\nabla\varphi)^*\, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} i\omega\varphi^*\nabla\cdot\mathbf{J}\, d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} i\omega\varphi^*\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

Поскольку $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ и $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, в левой части останется только один интеграл:

$$\int\limits_{\Omega} k^2\, \mathbf{E} \cdot (\nabla\varphi)^*\, d\Omega = 0.$$

Снова применим свойство дивергенции $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{F}$:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (k^2\, \mathbf{E}\varphi^*)\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} \varphi^*\nabla \cdot (k^2\, \mathbf{E})\, d\Omega = 0,$$

после чего применим формулу Остроградского-Гаусса (17):

$$\int\limits_{\partial\Omega} (k^2\, \mathbf{E}\varphi^*) \cdot \mathbf{n}\, dS - \int\limits_{\Omega} \varphi^*\nabla \cdot (k^2\, \mathbf{E})\, d\Omega = 0.$$

С учетом условия $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, получим:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi^*\nabla \cdot (k^2\, \mathbf{E})\, d\Omega = 0,$$

следовательно, решение вариационной задачи (15) удовлетворяет закону сохранения заряда (12) в слабом смысле.

Вариационная постановка с учетом PML-слоя

Для ограничения расчетной области вводится PML-слой, который определяется модифицированными координатами $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, полученными следующей заменой координат [4]:

$$\tilde{x} = \int\limits_0^x s_x(t)\,dt, \quad \tilde{y} = \int\limits_0^y s_y(t)\,dt, \quad \tilde{z} = \int\limits_0^z s_z(t)\,dt,$$

где $s_j(\tau) = 1$ вне PML-слоя, а внутри него может быть задано в виде:

$$s_j(\tau) = 1 + \chi \left(\frac{d(\tau)}{\delta}\right)^m, \ \ m \geq 1, \tag{18}$$

где $d(\tau)$ – расстояние в j-м направлении от границы PML-слоя, δ – толщина PML-слоя, χ – некоторое комплексное число, причем $\mathrm{Re}(\chi) \geq 0$, $\mathrm{Im}(\chi) \geq 0$. Оператор ∇ в новых координатах будет иметь вид:

$$\tilde{\nabla} = \left[\frac{1}{s_x}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{s_y}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{s_z}\frac{\partial}{\partial z}\right].$$

После такой замены, внутри PML-слоя уравнение Гельмгольца (8) будет иметь вид (19)

$$\tilde{\nabla} \times (\mu^{-1}\tilde{\nabla} \times \mathbf{E}) + k^2\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{J}, \tag{19}$$

что приведет к преобразованию уравнения (15) к виду (20):

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} \mu^{-1}\tilde{\nabla} \times \mathbf{E} \cdot \tilde{\nabla} \times \mathbf{v}^*\,d\tilde{\Omega} + \int\limits_{\tilde{\Omega}} k^2\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^*\,d\tilde{\Omega} = -\int\limits_{\tilde{\Omega}} i\omega\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*\,d\tilde{\Omega}. \tag{20}$$

В результате векторная вариационная постановка имеет вид: ***Найти*** $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$***, такое что*** $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega)$ ***будет выполнено***:

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^*\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} k^2\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^*\,d\Omega = -\int\limits_{\Omega} i\omega\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*\,d\Omega \\ \int\limits_{\tilde{\Omega}} \mu^{-1}\tilde{\nabla} \times \mathbf{E} \cdot \tilde{\nabla} \times \mathbf{v}^*\,d\tilde{\Omega} + \int\limits_{\tilde{\Omega}} k^2\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^*\,d\tilde{\Omega} = -\int\limits_{\tilde{\Omega}} i\omega\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*\,d\tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Дискретная вариационная постановка

Разобьем область Ω на m непересекающихся элементов:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k, \ \ \forall i \neq j, \ \ \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing.$$

Введем конечномерные подпространства:

$$\mathbb{H}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega) \subset \mathbb{H}_0(\mathrm{rot}\,, \Omega), \ \ \mathbb{H}_0^h(\mathrm{grad}\,, \Omega) \subset \mathbb{H}_0(\mathrm{grad}\,, \Omega).$$

Для дискретных подпространств $\mathbb{H}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega)$ и $\mathbb{H}_0^h(\mathrm{grad}\,, \Omega)$ комплекс Де Рама (16) также будет верен, следовательно закон сохранения заряда (12) будет также выполнен в слабом смысле.

Пространство $\mathbb{H}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega)$ является прямой суммой подпространств [12]

$$\mathbb{H}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega) = \mathbb{N}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega) \oplus (\mathbb{N}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega))^{\perp},$$

где $\mathbb{N}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega)$ – ядро rot-оператора, $(\mathbb{N}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega))^{\perp}$ – его ортогональное дополнение. Для выполнения условий непрерывности, необходимо использовать полный базис [7, 13–15], то есть состоящий из роторных базисных функций, принадлежащих пространству $(\mathbb{N}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega))^{\perp}$ и обеспечивающих непрерывность тангенциальных компонент поля $\mathbf{E}$ (3), и градиентных базисных функций из пространства $\mathbb{N}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega)$, отвечающих за скачок нормальной компоненты поля (4) и выполнения закона сохранения заряда (12).

Представим векторнозначную функцию $\mathbf{E}^h$ в виде разложения по базису $\boldsymbol{\psi}_j \in \mathbb{H}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega)$:

$$\mathbf{E}^h = \sum_{j=1}^{n} q_j \boldsymbol{\psi}_j.$$

В качестве тестовой функции выберем базисную функцию $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{H}_0^h(\mathrm{rot}\,, \Omega)$, тогда конечноэлементная аппроксимация вариационного уравнения (15) примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int\limits_{\Omega}\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\psi}_j\cdot\nabla\times\boldsymbol{\psi}_i\,d\Omega+\int\limits_{\Omega}k^2\boldsymbol{\psi}_j\cdot\boldsymbol{\psi}_i\,d\Omega\right)q_j = \\ = -\int\limits_{\Omega}i\omega\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\psi}_i\,d\Omega. \tag{21}$$

В матрично-векторной форме (21) можно представить следующим образом:

$$(G+M)q = F, \tag{22}$$

где:

$$G_{i,j}=\int\limits_{\Omega_k}\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{w}_i\cdot\nabla\times\mathbf{w}_j\,d\Omega_k,\quad M_{i,j}=\int\limits_{\Omega_k}k^2\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_j\,d\Omega_k.$$

Тетраэдральные конечные элементы

В качестве конечных элементов для представления расчетной области, будем пользоваться тетраэдрами. На тетраэдральном конечном элементе удобно определить $\mathcal{L}$-координаты, называемые также барицентрическими координатами [9]. Введем нумерацию вершин и ребер, показанную на рисунке 1:

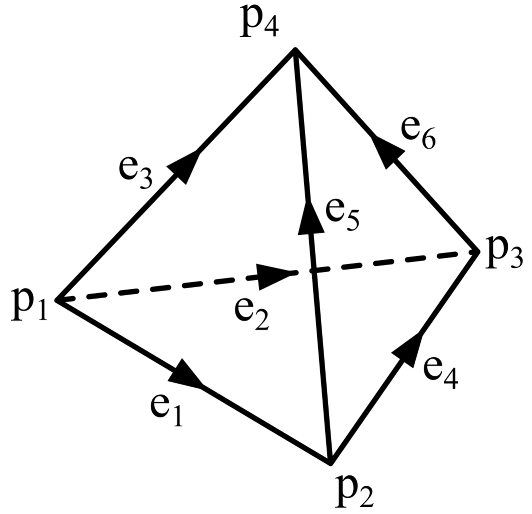


Рисунок 1 — Тетраэдральный конечный элемент

Под $\mathcal{L}$-координатами понимают функции следующего вида:

$$\mathcal{L}_i(x,y,z)=\alpha_{i,1}x+\alpha_{i,2}y+\alpha_{i,3}z+\alpha_{i,4},\quad i=\overline{1..4}.$$

Коэффициенты $\alpha_{i,j}$ могут быть определены по формуле (23):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = D^{-1}. \qquad (23)$$

Задав $\mathcal{L}$-координаты, можно определить на тетраэдре базисные функции. В отличие от узлового метода конечных элементов, в векторном методе конечных элементов базисные функции ассоциированы не с узлами, а с ребрами (edge), гранями (face) и объемами (volume) [7, 8]. Так как будет использован полный базис второго порядка (называемый также базисом второго порядка II типа), то ограничимся рассмотрением только базисных функций, ассоциированных с ребрами и гранями.

Иерархический векторный базис Вебба второго порядка второго типа на тетраэдрах имеет вид [16]:

$$\mathbf{w}_i^{1,\mathrm{I}} = \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k;\ {\scriptstyle i=1,\dots,6;\ k,l=1,\dots,4;\ k<l,}$$
$$\mathbf{w}_i^{1,\mathrm{II}} = \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k;\ {\scriptstyle i=7,\dots,12;\ k,l=1,\dots,4;\ k<l,}$$
$$\mathbf{w}_i^{2,\mathrm{I}} = \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_j \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k - 2\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l;\ {\scriptstyle i=13,\dots,16;\ j,k,l=1,\dots,4;\ j<k<l,}$$
$$\mathbf{w}_i^{2,\mathrm{I}} = \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_j - 2\mathcal{L}_j \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l;\ {\scriptstyle i=17,\dots,20;\ j,k,l=1,\dots,4;\ j<k<l,}$$
$$\mathbf{w}_i^{2,\mathrm{II}} = \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l);\ {\scriptstyle i=21,\dots,24;\ j,k,l=1,\dots,4;\ j<k<l,}$$
$$\mathbf{w}_i^{2,\mathrm{II}} = \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k(\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k));\ {\scriptstyle i=25,\dots,30;\ j,k=1,\dots,4;\ j<k,}$$

где $\mathbf{w}_1^{1,\mathrm{I}}, \dots, \mathbf{w}_6^{1,\mathrm{I}}$ – базисные функции первого порядка первого типа, ассоциированные с ребрами, $\mathbf{w}_7^{1,\mathrm{II}}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{1,\mathrm{II}}$ – базисные функции первого порядка второго типа, ассоциированные с ребрами, $\mathbf{w}_{13}^{2,\mathrm{I}}, \dots, \mathbf{w}_{20}^{2,\mathrm{I}}$ – базисные функции второго порядка первого типа, ассоциированные с гранями, $\mathbf{w}_{21}^{2,\mathrm{II}}, \dots, \mathbf{w}_{30}^{2,\mathrm{II}}$ – базисные функции второго порядка второго типа, ассоциированные с гранями (первые четыре) и ребрами.

Для вычисления интегралов в (21) воспользуемся кубатурной формулой численного интегрирования (формулой Гаусса) [17]:

$$\int\limits_{\Omega_k} f(x, y, z)\, d\Omega_k = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i, z_i) w_i,$$

где (x_i, y_i, z_i) – точки Гаусса, m – число точек Гаусса, w_i – соответствующие веса. При работе с базисными функциями второго порядка нужно использовать формулы, которые бы обеспечивали восьмой порядок интегрирования [18]. Для базисных функций первого порядка будет достаточно и меньших порядков интегрирования [17, 19].

Треугольные конечные элементы

Границы области Ω являются двумерными и представляют собой треугольники. Для учета краевых условий (9) требуется построить разложение $\mathbf{E}^g$ по базису соответствующей границы в смысле МНК, для этого нужно решать СЛАУ вида

$$M^{S_1} \tilde{q} = b^{S_1}, \tag{24}$$

где $M^{S_1}_{i,j} = \int\limits_{S_1} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \, dS_1$, $b^{S_1}_i = \int\limits_{S_1} \mathbf{E}^g \cdot \mathbf{w}_i \, dS_1$, $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{w}_j$ – базисные функции на треугольниках.

Определим $\mathcal{L}$-координаты на треугольниках таким же образом, как и на тетраэдрах. Введем нумерацию вершин и ребер согласно рисунку 2:

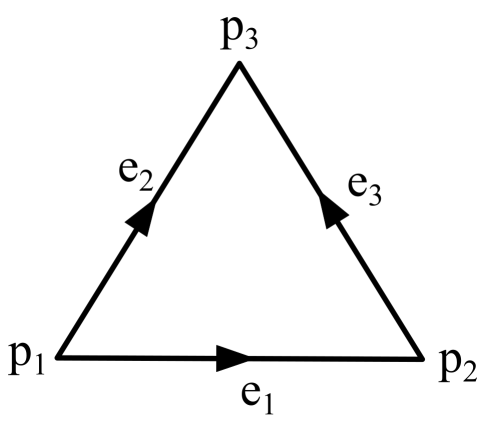


Рисунок 2 — Треугольный конечный элемент

Тогда $\mathcal{L}$-координаты примут вид:

$$\mathcal{L}_i(x, y) = \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}, \quad i = \overline{1..3}.$$

Коэффициенты $\alpha_{i,j}$ могут быть определены по формуле (25):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = D^{-1}. \tag{25}$$

Иерархический векторный базис Вебба второго порядка второго типа на треугольниках имеет вид:

$$\begin{gathered} \mathbf{w}_i^{1,\mathrm{I}} = \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \; {\scriptstyle i=1,\ldots,3;\; k,l=1,\ldots,3;\; k<l,} \\ \mathbf{w}_i^{1,\mathrm{II}} = \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \; {\scriptstyle i=4,\ldots,6;\; k,l=1,\ldots,3;\; k<l,} \\ \mathbf{w}_7^{2,\mathrm{I}} = \mathcal{L}_2\mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1\mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 \nabla \mathcal{L}_3, \\ \mathbf{w}_8^{2,\mathrm{I}} = \mathcal{L}_2\mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_1 - 2\mathcal{L}_1\mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 \nabla \mathcal{L}_3, \\ \mathbf{w}_9^{2,\mathrm{II}} = \nabla(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3), \\ \mathbf{w}_i^{2,\mathrm{II}} = \nabla(\mathcal{L}_j\mathcal{L}_k(\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k)); \; {\scriptstyle i=10,\ldots,12;\; j,k=1,\ldots,3;\; j<k,} \end{gathered}$$

где $\mathbf{w}_1^{1,\mathrm{I}}, \ldots, \mathbf{w}_3^{1,\mathrm{I}}$ – базисные функции первого порядка первого типа, $\mathbf{w}_4^{1,\mathrm{II}}, \ldots, \mathbf{w}_6^{1,\mathrm{II}}$ – базисные функции первого порядка второго типа, $\mathbf{w}_7^{2,\mathrm{I}}, \mathbf{w}_8^{2,\mathrm{I}}$ – базисные функции второго порядка первого типа, $\mathbf{w}_9^{2,\mathrm{II}}, \ldots, \mathbf{w}_{12}^{2,\mathrm{II}}$ – базисные функции второго порядка второго типа.

Для вычисления интегралов в (24) воспользуемся формулой Гаусса [17]:

$$\int\limits_{\Omega_k} f(x, y)\, d\Omega_k = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i) w_i,$$

где (x_i, y_i) – точки Гаусса, m – число точек Гаусса, w_i – соответствующие веса. Так же, как и для тетраэдров, для работы с базисом второго порядка нужно использовать формулы, обеспечивающие восьмой порядок интегрирования [18]. Для базиса первого порядка достаточно и меньших порядков интегрирования [17, 20].

Двухуровневый решатель

Построение СЛАУ

Структура глобальной матрицы СЛАУ

Учет краевых условий

Учет токовой петли

Вывод решения

Верификация

Верификация полученной конечноэлементной аппроксимации будет проводиться на тестовой задаче, имеющей аналитическое решение.

Расчетная область

Расчетная область представляет собой куб со следующими параметрами: $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$. Куб разбивается на регулярную тетраэдральную сетку согласно рисунку 3:

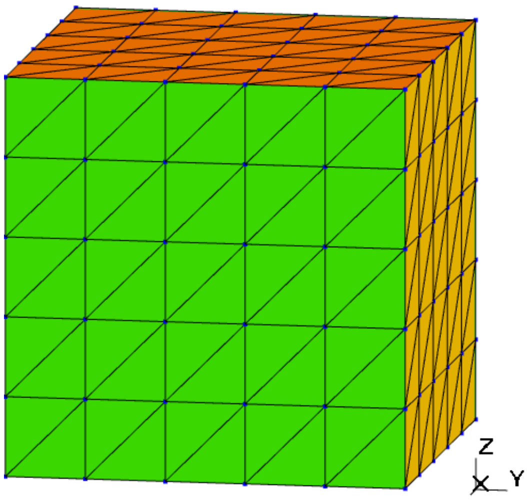


Рисунок 3 — Конечноэлементная сетка для верификации

Всего в сетке 750 тетраэдров, 300 треугольников по границе, 216 узлов, 1115 ребер и 1650 граней.

Физические параметры среды заданы следующим образом: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 10$ См/м. Частота источника поля $\nu = \frac{100}{2\pi}$ Гц. На всех внешних гранях расчетной области заданы краевые условия первого рода (9).

Тестирование на линейных функциях

В качестве аналитического решения уравнения (8) выберем функцию

$$\mathbf{E} = (y + z, x + z, x + y)^T.$$

Тестирование будем проводить на базисных функциях первого и второго порядка второго типа. Погрешности в норме пространства $\mathbb{L}^2$ полученных решений приведены в таблице 1.

Таблица 1 — относительные погрешности в норме $\mathbb{L}^2$

Порядок базисных ф-й	$\frac{\||\mathbf{E}\| - \|\mathbf{E}^h\||_{\mathbb{L}^2}}{\||\mathbf{E}\||_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\|\mathbf{E}_x - \mathbf{E}_x^h\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\mathbf{E}_x\|_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\|\mathbf{E}_y - \mathbf{E}_y^h\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\mathbf{E}_y\|_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\|\mathbf{E}_z - \mathbf{E}_z^h\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\mathbf{E}_z\|_{\mathbb{L}^2}}$
1	5.277e-11	5.313e-11	5.345e-11	5.169e-11
2	8.064e-11	8.111e-11	8.056e-11	8.025e-11

Как и следовало ожидать, метод хорошо аппроксимировал линейную функцию.

Тестирование на нелинейных функциях

В качестве аналитического решения уравнения (8) выберем функцию

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e^{-(0.5-y)^2-(0.5-z)^2} \\ e^{-(0.5-x)^2-(0.5-z)^2} \\ e^{-(0.5-x)^2-(0.5-y)^2} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Тестирование будем проводить на базисных функциях первого и второго порядка второго типа. Погрешности в норме пространства $\mathbb{L}^2$ полученных решений приведены в таблице 2.

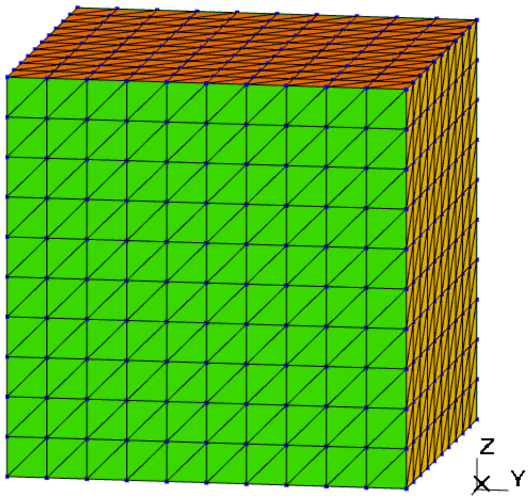
Таблица 2 — относительные погрешности в норме $\mathbb{L}^2$

Порядок базисных ф-й	$\frac{\||\mathbf{E}\| - \|\mathbf{E}^h\||_{\mathbb{L}^2}}{\||\mathbf{E}\||_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\|\mathbf{E}_x - \mathbf{E}_x^h\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\mathbf{E}_x\|_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\|\mathbf{E}_y - \mathbf{E}_y^h\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\mathbf{E}_y\|_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\|\mathbf{E}_z - \mathbf{E}_z^h\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\mathbf{E}_z\|_{\mathbb{L}^2}}$
1	6.608e-3	7.869e-3	5.877e-3	5.877e-3
2	1.775e-4	1.895e-4	1.712e-4	1.712e-4

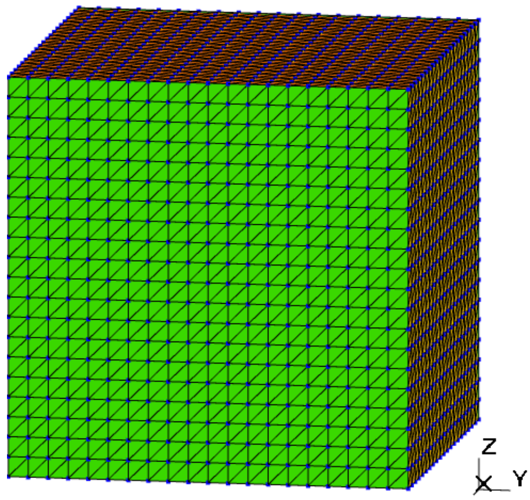
Метод достаточно хорошо аппроксимировал и нелинейную функцию.

Определение порядка аппроксимации

В качестве аналитического решения уравнения (8) выберем функцию (26). Проведем исследование на порядок аппроксимации. Измельчим сетку расчетной области, изображенную на рисунке (3), в 2 и 4 раза, после чего сравним погрешности полученных решений. Измельченные сетки приведены на рисунках 4а и 4б, погрешности в норме пространства $\mathbb{L}^2$ полученных решений и порядок аппроксимации – в таблице 3.



(а)



(б)

Рисунок 4 — Конечноэлементные сетки для определения порядка аппроксимации

Таблица 3 — относительные погрешности в норме $\mathbb{L}^2$

Порядок базиса	$\frac{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert - \lvert\mathbf{E}^h\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert - \lvert\mathbf{E}^{h/2}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert - \lvert\mathbf{E}^{h/4}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}$	$\log_2 \frac{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert - \lvert\mathbf{E}^h\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert - \lvert\mathbf{E}^{h/2}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}$	$\log_2 \frac{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert - \lvert\mathbf{E}^{h/2}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}{\lVert \lvert\mathbf{E}\rvert - \lvert\mathbf{E}^{h/4}\rvert \rVert_{\mathbb{L}^2}}$
1	6.608e-3	1.637e-3	5.051e-4	2.013	1.696
2	1.775e-4	2.164e-5	3.582e-6	3.036	2.595

Из результатов видно, что порядок аппроксимации получился второй для базисных функций первого порядка и третий для базисных функций второго порядка, что и следовало ожидать.

Список литературы

1. Шурина, Э.П. Морская геоэлектрика – задачи и перспективы / Э.П. Шурина, М.И. Эпов, А.В. Мариенко // Тезисы докладов всероссийской научно-технической конференции ”Научное и техническое обеспечение исследования и освоения шельфа Северного Ледовитого океана”. – 2010. – 9-13 августа. – С. 7-12.

2. Gabrielsen, P.T. 3D CSEM for Hydrocarbon Exploration in the Barents Sea / P.T. Gabrielsen, D.V. Shantsev, S. Fanavoll // 5th Saint Petersburg International Conference & Exhibition – Geosciences: Making the most of the Earth’s resources. – 2012. – 2-5 April. – P. 1-5.

3. Berenger, J.P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / J.P. Berenger // Jurnal of computation physics 114, 185-200, 1994

4. Wiik, T. A Discontinuous Galerkin Method for Modelling Marine Controlled Source Electromagnetic Data / T. Wiik, M.V. De Hoop, B. Ursin // Proceedings of the Project Review, Geo-Mathematical Imaging Group, Purdue University, West Lafayette, IN, Vol. 1 (2013) pp. 75-102.

5. Эпов, М.И. Параллельные конечноэлементные вычислительные схемы в задачах геоэлектрики / М.И. Эпов, Э.П. Шурина, Д.А. Архипов // Вычислительные технологии. – 2013. – Том 18, №2. – С. 94-112.

6. Баландин, М.Ю. Векторный метод конечных элементов : Учеб. пособие / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – 69 с.

7. Webb, J.P. Hierarchal Vector Basis Functions of Arbitrary Order for Triangular and Tetrahedral Finite Elements / J.P. Webb // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1999. – Vol. 47. – P. 1244-1253.

8. Nechaev, O.V. Multilevel iterative solver for the edge fem solution of the 3D Maxwell equation / O.V. Nechaev, E.P Shurina, M.A. Botchev // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – №55. – P. 2346-2362.

9. Соловейчик, Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.

10. Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations. – Oxford University Press, 2003.

11. Schwarzbach C. Stability of finite element solutions to Maxwell's equations in frequency domain. – 2009.

12. Hiptmair R. Multigrid method for Maxwell's equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1998. – Т. 36. – №. 1. – С. 204-225.

13. Nédélec J. C. Mixed finite elements in ℝ3 //Numerische Mathematik. – 1980. – Т. 35. – №. 3. – С. 315-341.

14. Nédélec J. C. A new family of mixed finite elements in ℝ3 //Numerische Mathematik. – 1986. – Т. 50. – №. 1. – С. 57-81.

15. Webb J. P. Edge elements and what they can do for you //Magnetics, IEEE Transactions on. – 1993. – Т. 29. – №. 2. – С. 1460-1465.

16. Михайлова Е. И., Шурина Э. П. Математическое моделирование высокочастотного электромагнитного поля в волноводных устройствах //Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13. – №. 4. – С. 102-118.

17. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.

18. Zhang L. et al. A set of symmetric quadrature rules on triangles and tetrahedra //J. Comput. Math. – 2009. – Т. 27. – №. 1. – С. 89-96.

19. Numerical Integration over the Tetrahedral Domain [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://people.fh-landshut.de/~maurer/numeth/node148.html.

20. Numerical Integration over the Triangular Domain [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://people.fh-landshut.de/~maurer/numeth/node147.html.