

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра **Вычислительных технологий**
(полное название кафедры)

Петр Сергеевич Жигалов
(И. О. Фамилия студента – автора работы)

Анализ систем источник-приемник в задачах морской геоэлектрики
(полное название темы магистерской диссертации)

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
по направлению высшего образования

01.04.02 – Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки магистра)

факультет прикладной математики и информатики
(факультет)

Тема диссертации утверждена приказом по НГТУ № 4931/2 от «15» октября 2014 г.

Руководитель
Шурина Э.П.
(фамилия, И., О.)
д.т.н., профессор
(уч. степень, уч. звание)

Новосибирск, 2016 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра Вычислительных технологий
(полное название кафедры)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой Шокин Ю.И.
(фамилия, И., О.)

.....
(подпись, дата)

ЗАДАНИЕ
на магистерскую диссертацию

студенту Жигалову Петру Сергеевичу
(фамилия, имя, отчество)

факультета прикладной математики и информатики

Направление подготовки 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки магистра)

Магистерская программа Математическое моделирование
(наименование программы)
детерминированных и стохастических процессов

Тема Анализ систем источник-приемник в задачах морской геоэлектрики
(полное название темы)

Цели работы Lorem Ipsum

Lorem Ipsum

Lorem Ipsum

Lorem Ipsum

Руководитель

Шурина Э.П.

(фамилия, И., О.)

д.т.н., профессор

(уч. степень, уч. звание)

.....
(подпись, дата)

Аннотация

Отчет 45 с., 33 рис., 10 табл., 21 источников, 1 прил.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА, ВЕКТОРНЫЙ МКЭ, ТЕТРАЭДРАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, МОРСКАЯ ГЕОЭЛЕКТРИКА, НЕФТЯНЫЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ

Объектом исследования является поведение электрического поля в недрах земли под слоем морской воды.

Цель работы – решение трехмерной прямой задачи морской геоэлектрики векторным методом конечных элементов.

В процессе работы проводилось численное моделирование электрического поля векторным методом конечных элементов, сравнивались результаты на разных частотах и разных комбинациях материалов с различными электрофизическими свойствами.

В результате исследования было получено представление электрического поля в сложно построенных средах.

Содержание

Введение	6
1. Математическая модель	8
1.1. Уравнения Максвелла и Гельмгольца	8
1.2. Вариационная постановка	10
1.3. Вариационная постановка с учетом PML-слоя	12
1.4. Дискретная вариационная постановка	14
1.5. Тетраэдральные конечные элементы	15
1.6. Треугольные конечные элементы	18
1.7. Двухуровневый решатель	19
2. Построение СЛАУ	20
2.1. Структура глобальной матрицы СЛАУ	20
2.2. Учет краевых условий	21
2.3. Учет токовой петли	22
3. Верификация программного комплекса	23
3.1. Расчетная область	23
3.2. Тестирование на линейных функциях	23
3.3. Тестирование на нелинейных функциях	24
3.4. Определение порядка аппроксимации	25
4. Вычислительные эксперименты	26
4.1. Исследование влияния слоя воздуха	26
4.1.1 Описание расчетной области	26
4.1.2 Конечноэлементная сетка	27
4.1.3 Результаты исследования	27
4.2. Исследование эффективности применения PML-слоя	29
4.2.1 Описание расчетной области	30
4.2.2 Варьирование коэффициентов растяжения	31
4.2.3 Варьирование толщины PML-слоя	32

4.2.4	Варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой	33
4.2.5	Проверка выполнения условий на контактных границах	33
4.2.6	Графическое представление результатов	34
4.2.7	Анализ целесообразности применения PML-слоя	36
4.3.	Задача, приближенная к реальной	36
4.3.1	Описание расчетной области	37
4.3.2	Конечноэлементная сетка	38
4.3.3	Результаты вычислительного эксперимента	38
5.	Описание программного комплекса	43
	Заключение	43
	Список литературы	44

Введение

В современном мире экономика многих стран, таких как Россия, Швеция, Канада, зависит от цены на нефть. Несмотря на то, что цены на углеводороды снижаются, конкуренция за обладание ими не угасает, порой доходя и до вооруженных конфликтов. Таким образом, все более актуальными становятся задачи, связанные с геологоразведкой, особенно в недрах земли, скрытых под толщей морской воды. Это объясняется тем, что, по оценкам специалистов, только на территории Северного Ледовитого океана может находиться до 25 процентов мировых запасов нефти и газа [1].

Задачи морской геоэлектрики имеют ряд отличительных особенностей. К ним можно отнести изменение электропроводности морской воды в зависимости от глубины [1]. Это обусловлено различной соленостью и температурой разных слоев морской воды. Кроме того, эти свойства могут значительно изменяться в зависимости от сезона, погодных условий, интенсивности таяния льдов, а также от многих других факторов. Морское дно, кроме сложного рельефа, имеет в разных участках различный уровень проникновения соленой или пресной воды в грунт. Также к особенностям относятся большой размер расчетной области и низкая частота источника электромагнитного поля (0.25-100 Гц) [2].

Геометрические характеристики локального источника возбуждения электромагнитного поля значительно отличаются от области исследования, размеры первого в пределах сотен метров, а второй – более 6000 м. Это приводит к необходимости применения специальных методов для сокращения области моделирования. Одним из таких методов является применение специально-го поглощающего слоя, называемого идеально согласованным слоем (Perfectly Matched Layer) [3, 4]. PML-слой учитывается в вариационной формулировке как подобласть со специальными коэффициентами.

Целью данной работы является исследование применения идеально согласованного слоя (PML-слоя) для ограничения области моделирования в задачах морской геоэлектрики на низких частотах.

Для сокращения размеров расчетной области нередко практикуется отказ от расчетов в подобласти с воздухом и, вместо этого, задание на границе раздела сред воздух-вода условий непротекания (10). Однако такой подход не позволяет правильно учесть физические процессы, протекающие в воздухе [21].

Математическая модель

Уравнения Максвелла и Гельмгольца

Электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла [5]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ — закон Фарадея,} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \text{ — закон Ампера,} \quad (2)$$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ — закон Гаусса для магнитной индукции,

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ — закон Гаусса для электрической индукции,

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля (В/м), \mathbf{H} — напряженность магнитного поля (А/м), $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ — магнитная индукция (Тл), $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ — электрическая индукция (Кл/м²), ρ — плотность электрических зарядов (Кл/м³), σ — электрическая проводимость (См/м), $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость (Ф/м), ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mu = \mu_r \mu_0$ — магнитная проницаемость (Гн/м), μ_r — относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума, \mathbf{J} — плотность стороннего электрического тока (А/м²).

На границе $\Gamma = \Omega^j \cap \Omega^k$ между материалами j и k с различными электрофизическими свойствами должны быть выполнены следующие условия:

$$[\![\mathbf{E} \times \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = 0 \text{ — тангенциальная компонента } \mathbf{E} \text{ непрерывна,} \quad (3)$$

$$[\![\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = 0 \text{ — нормальная компонента } \mathbf{B} \text{ непрерывна,}$$

$$[\![\mathbf{H} \times \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = \mathbf{J}_{\Gamma} \text{ — тангенциальная компонента } \mathbf{H} \text{ разрывна,}$$

$$[\![\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]\!]_{\Gamma} = \rho_{\Gamma} \text{ — нормальная компонента } \mathbf{D} \text{ разрывна.} \quad (4)$$

При моделировании электрического поля в частотной области будем полагать, что \mathbf{E} и \mathbf{J} будут зависеть от времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{J}(t) = \mathbf{J}e^{i\omega t}.$$

Используя такое представление, получим из (1) и (2):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}. \quad (6)$$

Выполним следующие преобразования над (5):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H},$$

$$\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{H},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = -i\omega \nabla \times \mathbf{H}. \quad (7)$$

Подставим в (7) (6):

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = -i\omega(i\omega \varepsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}),$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} - i\omega \sigma \mathbf{E} - i\omega \mathbf{J},$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}, \quad (8)$$

где $k^2 = i\omega \sigma - \omega^2 \varepsilon$. Уравнение (8) называется уравнением Гельмгольца.

Краевые условия для уравнения (8) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{S_1} = \mathbf{E}^g, \quad (9)$$

$$\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{S_2} = 0. \quad (10)$$

В случае удаленных границ (9) принимает вид условия «большого бака»:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{S_1} = 0. \quad (11)$$

Источником электромагнитного возмущения будет выступать замкнутая токовая петля.

Подействуем оператором $\nabla \cdot$ на уравнение (2):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \right).$$

Так как $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot (i\omega \varepsilon \mathbf{E})$ и, так как для замкнутой петли с током выполняется $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, получим закон сохранения заряда:

$$\nabla \cdot (\sigma + i\omega \varepsilon) \mathbf{E} = 0. \quad (12)$$

Вариационная постановка

Введем следующие пространства [6, 10]:

$$\mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3 \},$$

$$\mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Эти пространства имеют скалярное произведение и норму:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega,$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}^*) d\Omega,$$

где индекс * обозначает комплексное сопряжение.

Скалярно умножим (8) на некоторую пробную функцию $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$:

$$(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}), \mathbf{v}) + (k^2 \mathbf{E}, \mathbf{v}) = -(i\omega \mathbf{J}, \mathbf{v}),$$

$$\int_{\Omega} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}^* d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega.$$

Воспользовавшись первой векторной формулой Грина (13):

$$\int_D \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* dV = \int_D \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}^*) dV + \int_{\partial D} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}^* dS, \quad (13)$$

получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}^* dS + \\ + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega. \end{aligned}$$

Применим тождества $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^* d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega = \\ = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^* \times \mathbf{n} \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dS. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$, то из свойств пространства $\mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ второй интеграл в правой части равен нулю, тогда уравнение (14) примет вид:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^* d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega. \quad (15)$$

В результате векторная вариационная постановка имеет вид: **Найти** $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$, **такое что** $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ **будет выполнено** (15).

Рассмотрим еще пару пространств [10]

$$\mathbb{H}(\text{grad}, \Omega) = \{\varphi \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \nabla \varphi \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3\},$$

$$\mathbb{H}_0(\text{grad}, \Omega) = \{\varphi \in \mathbb{H}(\text{grad}, \Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

В соответствии с комплексом Де Рама (De Rham) [11]

$$\mathbb{H}(\text{grad}, \Omega) \xrightarrow{\nabla} \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} \mathbb{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (16)$$

будет иметь место вложение $\nabla \varphi \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$, $\forall \varphi \in \mathbb{H}_0(\text{grad}, \Omega)$. Возьмем $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, тогда (15) примет вид:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times (\nabla \varphi)^* d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \varphi)^* d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot (\nabla \varphi)^* d\Omega.$$

Использовав свойство дивергенции $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$ и применив формулу Остроградского-Гаусса (17)

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (17)$$

получим:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times (\nabla \varphi)^* d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \varphi)^* d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \varphi^* \nabla \cdot \mathbf{J} d\Omega - \int_{\partial \Omega} i\omega \varphi^* \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Поскольку $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ и $\varphi|_{\partial \Omega} = 0$, в левой части останется только один интеграл:

$$\int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \varphi)^* d\Omega = 0.$$

Снова применим свойство дивергенции $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k^2 \mathbf{E} \varphi^*) d\Omega - \int_{\Omega} \varphi^* \nabla \cdot (k^2 \mathbf{E}) d\Omega = 0,$$

после чего применим формулу Остроградского-Гаусса (17):

$$\int_{\partial \Omega} (k^2 \mathbf{E} \varphi^*) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \varphi^* \nabla \cdot (k^2 \mathbf{E}) d\Omega = 0.$$

С учетом условия $\varphi|_{\partial \Omega} = 0$, получим:

$$\int_{\Omega} \varphi^* \nabla \cdot (k^2 \mathbf{E}) d\Omega = 0,$$

следовательно, решение вариационной задачи (15) удовлетворяет закону сохранения заряда (12) в слабом смысле.

Вариационная постановка с учетом PML-слоя

Для ограничения расчетной области вводится PML-слой Ω^{PML} согласно рисунку 1, который определяется модифицированными координатами $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$,

полученными следующей заменой координат [4]:

$$\tilde{x} = \int_0^x s_x(t) dt, \quad \tilde{y} = \int_0^y s_y(t) dt, \quad \tilde{z} = \int_0^z s_z(t) dt,$$

где $s_j(\tau) = 1$ вне PML-слоя, а внутри него может быть задано в виде:

$$s_j(\tau) = 1 + \chi \left(\frac{d(\tau)}{\delta} \right)^m, \quad m \geq 1, \quad (18)$$

где $d(\tau)$ – расстояние в j -м направлении от внутренней границы PML-слоя, δ – толщина PML-слоя, χ – некоторое комплексное число, причем $\operatorname{Re}(\chi) \geq 0$, $\operatorname{Im}(\chi) \geq 0$. Оператор ∇ в новых координатах будет иметь вид:

$$\tilde{\nabla} = \left[\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

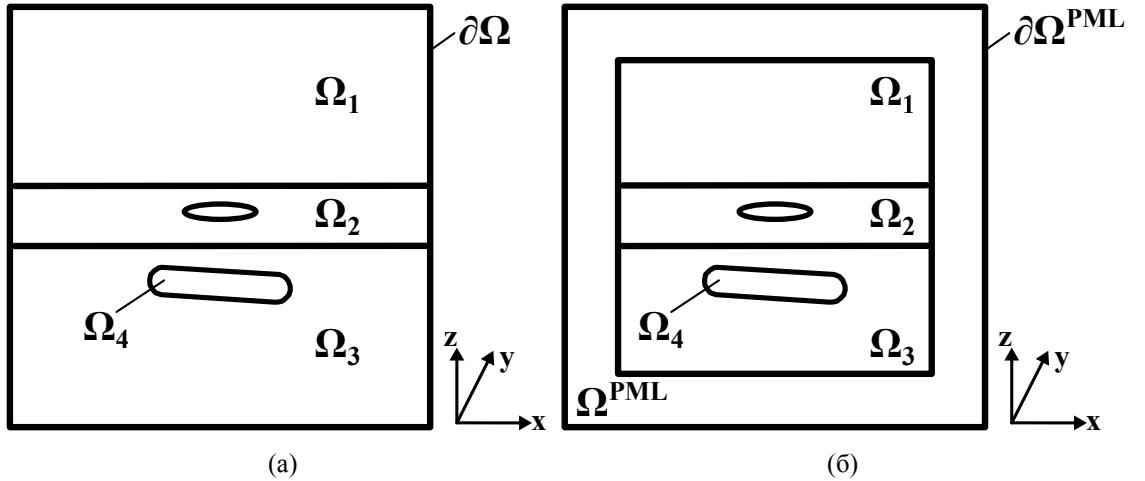


Рисунок 1 — расчетные области: (а) без PML-слоя и (б) с PML-слоем

После такой замены, внутри PML-слоя уравнение Гельмгольца (8) будет иметь вид (19)

$$\tilde{\nabla} \times (\mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}) + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad (19)$$

что приведет к преобразованию уравнения (15) к виду (20):

$$\int_{\Omega^{PML}} \mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\nabla} \times \mathbf{v}^* d\Omega^{PML} + \int_{\Omega^{PML}} k^2 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega^{PML} = 0. \quad (20)$$

В результате, если обозначить $\widehat{\Omega} = \Omega \setminus \Omega^{PML}$, то векторная вариационная постановка с учетом PML-слоя примет вид: **Найти** $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \widehat{\Omega})$ и $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$, **такие что** $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \widehat{\Omega})$ и $\forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$ **будет выполнено**:

$$\begin{cases} \int_{\widehat{\Omega}} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^* d\widehat{\Omega} + \int_{\widehat{\Omega}} k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}^* d\widehat{\Omega} = - \int_{\widehat{\Omega}} i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^* d\widehat{\Omega} \\ \int_{\Omega^{PML}} \mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}}^* d\Omega^{PML} + \int_{\Omega^{PML}} k^2 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^* d\Omega^{PML} = 0. \end{cases}$$

Дискретная вариационная постановка

Разобьем область Ω на m непересекающихся элементов:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k, \quad \forall i \neq j, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset.$$

Введем конечномерные подпространства:

$$\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) \subset \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega), \quad \mathbb{H}_0^h(\text{grad}, \Omega) \subset \mathbb{H}_0(\text{grad}, \Omega).$$

Для дискретных подпространств $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ и $\mathbb{H}_0^h(\text{grad}, \Omega)$ комплекс Де Рама (16) также будет верен, следовательно закон сохранения заряда (12) будет также выполнен в слабом смысле.

Пространство $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ является прямой суммой подпространств [12]

$$\mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) = \mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega) \oplus (\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega))^{\perp},$$

где $\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ – ядро rot-оператора, $(\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega))^{\perp}$ – его ортогональное дополнение. Для выполнения условий непрерывности (3)-(4) необходимо использовать полный базис (базис II типа) [7, 13–15], состоящий из роторных базисных функций, принадлежащих пространству $(\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega))^{\perp}$ и обеспечивающих непрерывность тангенциальных компонент электрического поля \mathbf{E} (3), и градиентных базисных функций из пространства $\mathbb{N}_0^h(\text{rot}, \Omega)$, отвечающих за скачок

нормальной компоненты электрического поля \mathbf{E} (4) и выполнения закона сохранения заряда (12).

Представим векторнозначную функцию \mathbf{E}^h в виде разложения по базису $\psi_j \in \mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$:

$$\mathbf{E}^h = \sum_{j=1}^n q_j \psi_j.$$

В качестве тестовой функции выберем базисную функцию $\psi_i \in \mathbb{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$, тогда конечноэлементная аппроксимация вариационного уравнения (15) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \psi_j \cdot \nabla \times \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \psi_j \cdot \psi_i d\Omega \right) q_j &= \\ &= - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \psi_i d\Omega. \end{aligned} \quad (21)$$

В матрично-векторной форме (21) можно представить следующим образом:

$$(G + M)q = F, \quad (22)$$

где:

$$G_{i,j} = \int_{\Omega_k} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_i \cdot \nabla \times \mathbf{w}_j d\Omega_k, \quad M_{i,j} = \int_{\Omega_k} k^2 \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j d\Omega_k.$$

Тетраэдральные конечные элементы

В качестве конечных элементов для представления расчетной области, будем пользоваться тетраэдрами. На тетраэдральном конечном элементе определим \mathcal{L} -координаты, называемые также барицентрическими координатами [9]. Введем нумерацию вершин и ребер, показанную на рисунке 2:

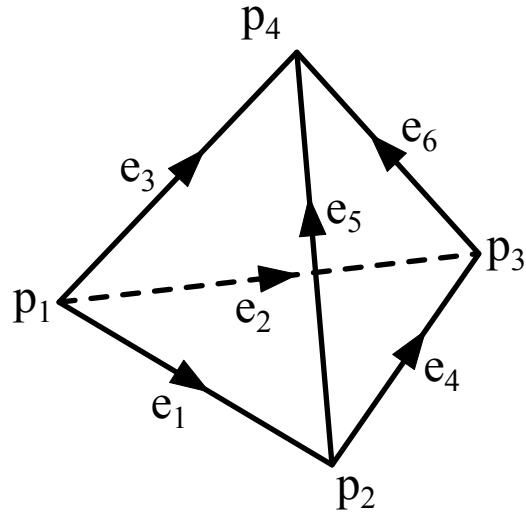


Рисунок 2 — тетраэдральный конечный элемент

Под \mathcal{L} -координатами понимают функции следующего вида:

$$\mathcal{L}_i(x, y, z) = \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}z + \alpha_{i,4}, \quad i = \overline{1..4}.$$

Коэффициенты $\alpha_{i,j}$ могут быть определены по формуле (23):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} & p_{4x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} & p_{4y} \\ p_{1z} & p_{2z} & p_{3z} & p_{4z} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = D^{-1}. \quad (23)$$

Задав \mathcal{L} -координаты, можно определить на тетраэдре базисные функции. В отличие от узлового метода конечных элементов, в векторном методе конечных элементов базисные функции ассоциированы не с узлами, а с ребрами (edge), гранями (face) и объемами (volume) [7, 8]. Так как будут использованы полные (II типа) базисы первого и второго порядков, то ограничимся рассмотрением только базисных функций, ассоциированных с ребрами и гранями.

Иерархический векторный базис Вебба второго порядка второго типа на тетраэдрах имеет вид [16]:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_i^{1,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=1, \dots, 6; \quad k, l=1, \dots, 4; \quad k < l, \\ \mathbf{w}_i^{1,\text{II}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=7, \dots, 12; \quad k, l=1, \dots, 4; \quad k < l, \\ \mathbf{w}_i^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_j \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k - 2\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l; \quad i=13, \dots, 16; \quad j, k, l=1, \dots, 4; \quad j < k < l, \\ \mathbf{w}_i^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_j - 2\mathcal{L}_j \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l; \quad i=17, \dots, 20; \quad j, k, l=1, \dots, 4; \quad j < k < l, \\ \mathbf{w}_i^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l); \quad i=21, \dots, 24; \quad j, k, l=1, \dots, 4; \quad j < k < l, \\ \mathbf{w}_i^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k)); \quad i=25, \dots, 30; \quad j, k=1, \dots, 4; \quad j < k,\end{aligned}$$

где $\mathbf{w}_1^{1,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_6^{1,\text{I}}$ – базисные функции первого порядка первого типа, ассоциированные с ребрами, $\mathbf{w}_7^{1,\text{II}}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{1,\text{II}}$ – базисные функции первого порядка второго типа, ассоциированные с ребрами, $\mathbf{w}_{13}^{2,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_{20}^{2,\text{I}}$ – базисные функции второго порядка первого типа, ассоциированные с гранями, $\mathbf{w}_{21}^{2,\text{II}}, \dots, \mathbf{w}_{30}^{2,\text{II}}$ – базисные функции второго порядка второго типа, ассоциированные с гранями (первые четыре) и ребрами. Так как этот базис иерархический, то для получения базиса меньшего порядка следует ограничиться меньшим количеством функций. Так, для базиса первого порядка второго типа следует использовать функции $\mathbf{w}_1^{1,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{1,\text{II}}$.

Для вычисления интегралов в (21) воспользуемся кубатурной формулой численного интегрирования (формулой Гаусса) [17]:

$$\int_{\Omega_k} f(x, y, z) d\Omega_k = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i, z_i) w_i,$$

где (x_i, y_i, z_i) – точки Гаусса, m – число точек Гаусса, w_i – соответствующие веса. При работе с базисными функциями второго порядка нужно использовать формулы, которые бы обеспечивали восьмой порядок интегрирования [18]. Для базисных функций первого порядка будет достаточно и меньших порядков интегрирования [17, 19].

Треугольные конечные элементы

Границы области Ω являются двумерными и представляют собой треугольники. Для учета краевых условий (9) требуется построить разложение \mathbf{E}^g по базису соответствующей границы в смысле МНК, для этого нужно решать СЛАУ вида

$$M^{S_1} \tilde{q} = b^{S_1}, \quad (24)$$

где $M_{i,j}^{S_1} = \int_{S_1} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j dS_1$, $b_i^{S_1} = \int_{S_1} \mathbf{E}^g \cdot \mathbf{w}_i dS_1$, \mathbf{w}_i и \mathbf{w}_j – базисные функции на треугольниках.

Определим \mathcal{L} -координаты на треугольниках таким же образом, как и на тетраэдрах. Введем нумерацию вершин и ребер согласно рисунку 3:

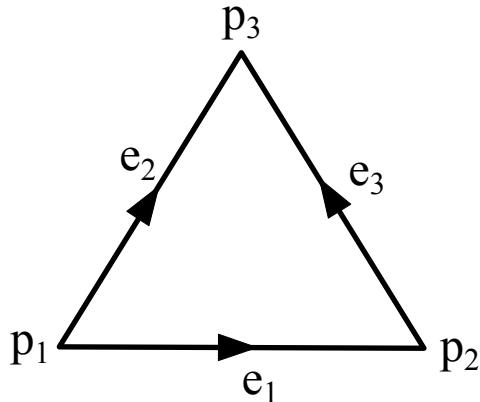


Рисунок 3 — треугольный конечный элемент

Тогда \mathcal{L} -координаты примут вид:

$$\mathcal{L}_i(x, y) = \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}, \quad i = \overline{1..3}.$$

Коэффициенты $\alpha_{i,j}$ могут быть определены по формуле (25):

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = D^{-1}. \quad (25)$$

Иерархический векторный базис Вебба второго порядка второго типа на треугольниках имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_i^{1,\text{I}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=1, \dots, 3; \quad k, l = 1, \dots, 3; \quad k < l, \\
\mathbf{w}_i^{1,\text{II}} &= \mathcal{L}_k \nabla \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_l \nabla \mathcal{L}_k; \quad i=4, \dots, 6; \quad k, l = 1, \dots, 3; \quad k < l, \\
\mathbf{w}_7^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_2 - 2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \nabla \mathcal{L}_3, \\
\mathbf{w}_8^{2,\text{I}} &= \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_1 - 2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 \nabla \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \nabla \mathcal{L}_3, \\
\mathbf{w}_9^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3), \\
\mathbf{w}_i^{2,\text{II}} &= \nabla(\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_k)); \quad i=10, \dots, 12; \quad j, k = 1, \dots, 3; \quad j < k,
\end{aligned}$$

где $\mathbf{w}_1^{1,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_3^{1,\text{I}}$ – базисные функции первого порядка первого типа, $\mathbf{w}_4^{1,\text{II}}, \dots, \mathbf{w}_6^{1,\text{II}}$ – базисные функции первого порядка второго типа, $\mathbf{w}_7^{2,\text{I}}, \mathbf{w}_8^{2,\text{I}}$ – базисные функции второго порядка первого типа, $\mathbf{w}_9^{2,\text{II}}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{2,\text{II}}$ – базисные функции второго порядка второго типа. Для базиса первого порядка второго типа следует использовать функции $\mathbf{w}_1^{1,\text{I}}, \dots, \mathbf{w}_6^{1,\text{II}}$.

Для вычисления интегралов в (24) воспользуемся формулой Гаусса [17]:

$$\int_{\Omega_k} f(x, y) d\Omega_k = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) w_i,$$

где (x_i, y_i) – точки Гаусса, m – число точек Гаусса, w_i – соответствующие веса. Так же, как и для тетраэдров, для работы с базисом второго порядка нужно использовать формулы, обеспечивающие восьмой порядок интегрирования [18]. Для базиса первого порядка достаточно и меньших порядков интегрирования [17, 20].

Двухуровневый решатель

Написать про двухуровневый решатель

Построение СЛАУ

Структура глобальной матрицы СЛАУ

Рассмотрим структуру глобальной матрицы СЛАУ на примере двух тетраэдральных конечных элементов с базисом первого полного порядка, имеющих общую грань. Глобальная нумерация вершин и ребер этих тетраэдров приведена на рисунке 4.

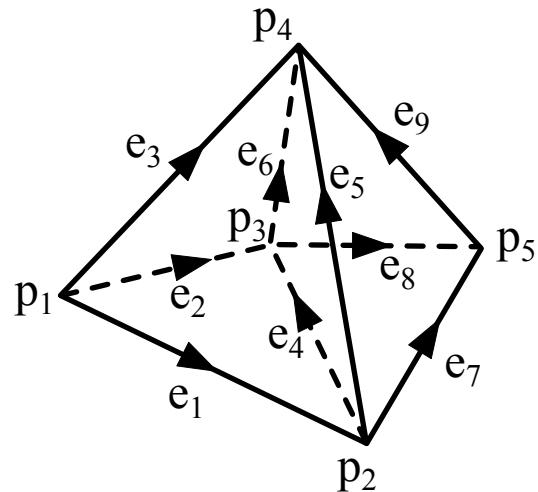


Рисунок 4 — два тетраэдральных конечных элемента

Локальные матрицы тетраэдра имеют блочный вид, матрица массы является плотной (26), а в матрице жесткости ненулевой только один блок (27):

$$M = \begin{bmatrix} M^{I,I} & M^{I,II} \\ M^{II,I} & M^{II,II} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$G = \begin{bmatrix} G^{I,I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

где $M^{I,I}$, $G^{I,I}$ – вклады от интегралов, содержащих только роторные ($\mathbf{w}_1^{1,I}, \dots, \mathbf{w}_6^{1,I}$); $M^{II,II}$ – только градиентные ($\mathbf{w}_7^{1,II}, \dots, \mathbf{w}_{12}^{1,II}$); $M^{I,II}$, $M^{II,I}$ – и роторные, и градиентные базисные функции.

Глобальной матрице жесткости также имеет блочную структуру, для двух тетраэдров она схематично приведена на рисунке 5. Под G_1 и G_2 понимаются вклады от матриц жесткости (27) первого и второго тетраэдров соответственно.

но, под M_1 и M_2 – вклады от матриц массы (26) первого и второго тетраэдров соответственно.

G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1				M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1			
G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1				M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1			
G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1				M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1			
G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2
G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2
G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2
G_1+M_1	G_1+M_1	G_1+M_1	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2
			G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2					M_2	M_2	M_2	M_2	M_2
			G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2					M_2	M_2	M_2	M_2	M_2
			G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2	G_2+M_2					M_2	M_2	M_2	M_2	M_2
M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1				M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1			
M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1				M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1			
M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1				M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1			
M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2	M_2	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2	M_2
M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_1	M_2	M_2	M_2	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2	M_2
M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_1	M_1	M_1	M_1	M_1	M_2	M_2	M_2	M_2
			M_2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2					M_2	M_2	M_2	M_2	M_2
			M_2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2					M_2	M_2	M_2	M_2	M_2
			M_2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2					M_2	M_2	M_2	M_2	M_2

Рисунок 5 — структура СЛАУ

Учет краевых условий

Неоднородные краевые условия первого рода вида (9) учитываются следующим образом:

1. строится разложение \mathbf{E}^g по базису треугольников границы в смысле МНК, для этого решается СЛАУ вида (24);
2. в диагональные элементы глобальной матрицы, соответствующие базисным функциям треугольников границы, записываются единицы, в элементы правой части – полученные веса;

3. выполняется симметризация СЛАУ (если СЛАУ хранится в несимметричном формате, этот шаг можно пропустить).

Однородные краевые условия первого рода вида (11) учитываются аналогично, с той лишь разницей, что не требуется строить разложение E^g по базису, так как очевидно, что все веса будут нулевыми.

Однородные электрические краевые условия второго рода вида (10) учитываются естественным образом и не вносят вклад в матрицу или правую часть СЛАУ, поэтому не требуют какой-либо специальной процедуры учета.

Учет токовой петли

Написать про учет токовой петли

Верификация программного комплекса

Верификация полученной конечноэлементной аппроксимации будет проводиться на тестовой задаче, имеющей аналитическое решение.

Расчетная область

Расчетная область представляет собой куб со следующими параметрами: $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$. Куб разбивается на регулярную тетраэдralную сетку согласно рисунку 6:

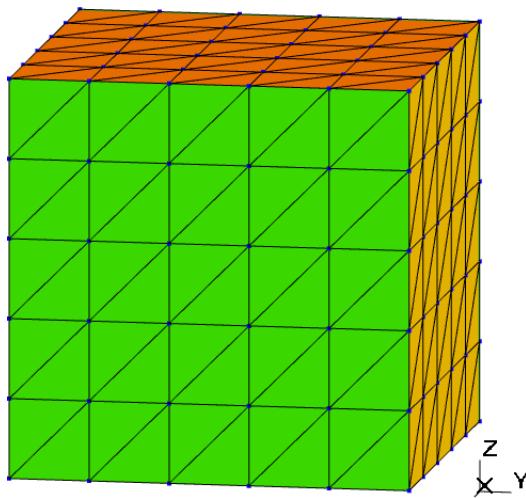


Рисунок 6 — конечноэлементная сетка для верификации

Всего в сетке 750 тетраэдров, 300 треугольников по границе, 216 узлов, 1115 ребер и 1650 граней.

Физические параметры среды заданы следующим образом: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 10$ См/м. Частота источника поля $\nu = \frac{100}{2\pi}$ Гц. На всех внешних гранях расчетной области заданы краевые условия первого рода (9).

Тестирование на линейных функциях

В качестве аналитического решения уравнения (8) выберем функцию

$$\mathbf{E} = (y + z, x + z, x + y)^T.$$

Тестируемое будем проводить на базисных функциях первого и второго порядка второго типа. Погрешности в норме пространства \mathbb{L}^2 полученных решений приведены в таблице 1.

Таблица 1 — относительные погрешности в норме \mathbb{L}^2

Порядок базисных ф-й	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_x - \mathbf{E}_x^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_x\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_y - \mathbf{E}_y^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_y\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_z - \mathbf{E}_z^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_z\ _{\mathbb{L}^2}}$
1	5.277e-11	5.313e-11	5.345e-11	5.169e-11
2	8.064e-11	8.111e-11	8.056e-11	8.025e-11

Как и следовало ожидать, метод хорошо аппроксимировал линейную функцию.

Тестирование на нелинейных функциях

В качестве аналитического решения уравнения (8) выберем функцию

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e^{-(0.5-y)^2-(0.5-z)^2} \\ e^{-(0.5-x)^2-(0.5-z)^2} \\ e^{-(0.5-x)^2-(0.5-y)^2} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Тестируемое будем проводить на базисных функциях первого и второго порядка второго типа. Погрешности в норме пространства \mathbb{L}^2 полученных решений приведены в таблице 2.

Таблица 2 — относительные погрешности в норме \mathbb{L}^2

Порядок базисных ф-й	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_x - \mathbf{E}_x^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_x\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_y - \mathbf{E}_y^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_y\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E}_z - \mathbf{E}_z^h\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}_z\ _{\mathbb{L}^2}}$
1	6.608e-3	7.869e-3	5.877e-3	5.877e-3
2	1.775e-4	1.895e-4	1.712e-4	1.712e-4

Метод достаточно хорошо аппроксимировал и нелинейную функцию.

Определение порядка аппроксимации

В качестве аналитического решения уравнения (8) выберем функцию (28). Проведем исследование на порядок аппроксимации. Измельчим сетку расчетной области, изображенную на рисунке 6, в 2 и 4 раза, после чего сравним погрешности полученных решений. Измельченные сетки приведены на рисунках 7а и 7б, погрешности в норме пространства \mathbb{L}^2 полученных решений и порядок аппроксимации – в таблице 3.

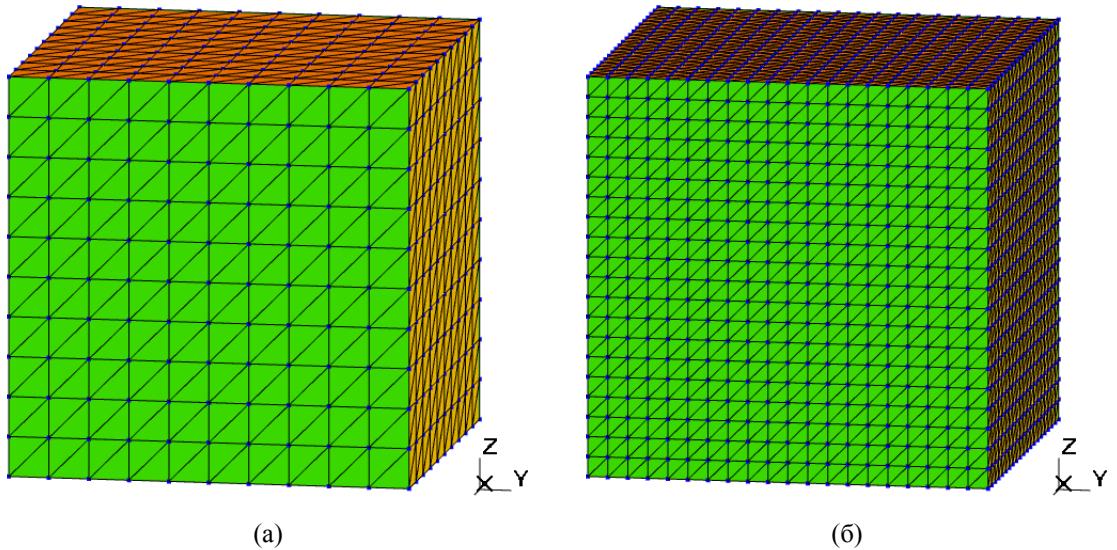


Рисунок 7 — конечноэлементные сетки для определения порядка аппроксимации

Таблица 3 — относительные погрешности в норме \mathbb{L}^2

Порядок базиса	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^h \ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/2} \ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/4} \ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}\ _{\mathbb{L}^2}}$	$\log_2 \frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^h \ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/2} \ _{\mathbb{L}^2}}$	$\log_2 \frac{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/2} \ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E} - \mathbf{E}^{h/4} \ _{\mathbb{L}^2}}$
1	6.608e-3	1.637e-3	5.051e-4	2.013	1.696
2	1.775e-4	2.164e-5	3.582e-6	3.036	2.595

Из результатов видно, что порядок аппроксимации получился второй для базисных функций первого порядка и третий для базисных функций второго порядка, что совпадает с теоретическими значениями.

Вычислительные эксперименты

Исследование влияния слоя воздуха

Проведем исследование влияния слоя воздуха в модельной задаче морской геоэлектрики при различной глубине погружения в воду источника электромагнитного возмущения.

В этом исследовании будем пользоваться базисными функциями второго полного порядка.

Описание расчетной области

Схематичное изображение расчетной области показано на рисунке 8, где Ω_1 – воздух ($\sigma = 10^{-6}$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_2 – морская вода ($\sigma = 3.3$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_3 – грунт ($\sigma = 0.2$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_4 – углеводороды ($\sigma = 10^{-2}$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); L_1 , L_2 и L_3 – размеры области моделирования по осям x , y и z соответственно; $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$ м; $h_1 = 600$ м – толщина Ω_2 ; $l_1 = 400$ м, $h_3 = 75$ м, $h_2 = 135$ м – длина, толщина и глубина объекта Ω_4 соответственно.

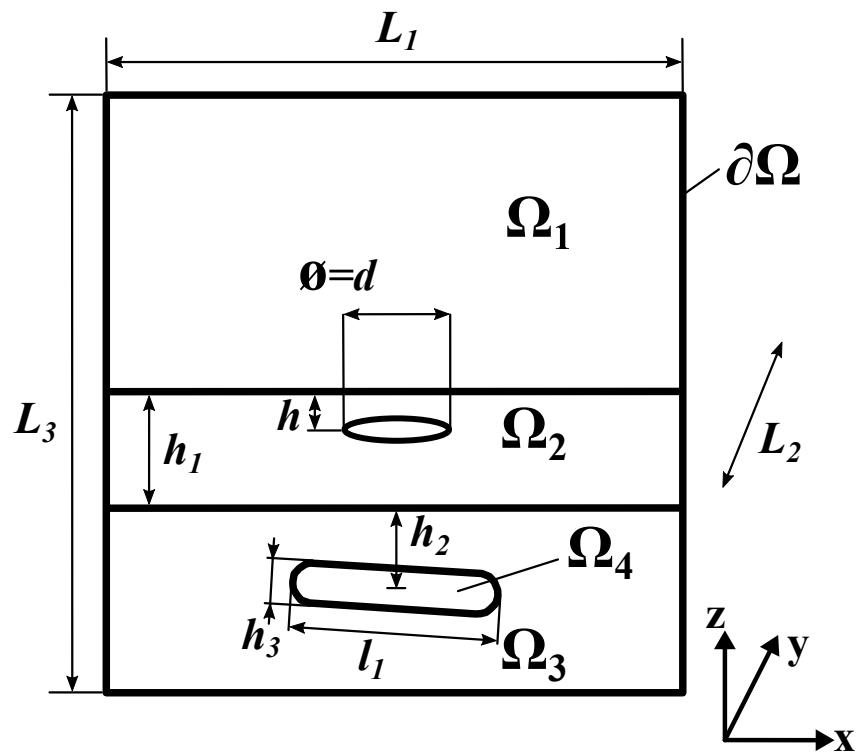


Рисунок 8 — схематичное изображение расчетной области

Объект Ω_4 представляет собой скругленный прямоугольный параллелепипед с двумя равными сторонами, наклоненный под углом 5° . Источником электрического поля является токовая петля диаметром $d = 100$ м с током частотой 1 Гц, глубина h которой варьируется в ходе исследования.

Конечноэлементная сетка

Фрагмент $x \in [-600, 0], y \in [-600, 600] z \in [-1000, 600]$ одной из конечноэлементных сеток, использованных для проведения исследования, представлен на рисунке 9.

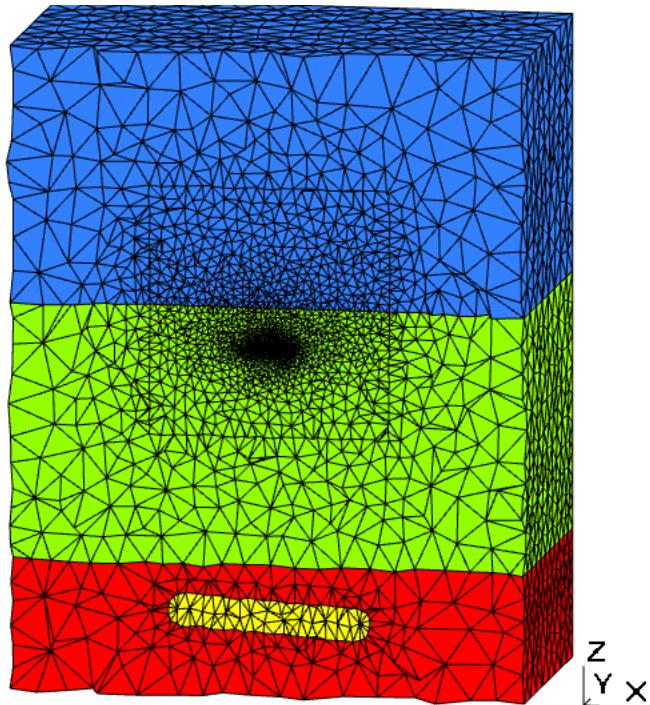


Рисунок 9 — фрагмент конечноэлементной сетки

Результаты исследования

Разности решений в норме \mathbb{L}^2 в объеме $[-600, 600] \times [-600, 600] \times [-1000, 0]$ между областью, в которой присутствует слой воздуха, и областью, в которой заданы условия непротекания (10), для некоторых значений глубины петли h показаны в таблице 4. В форме графика эти данные приведены на рисунке 10.

Таблица 4 — относительные разности решений

Глубина петли	5	10	50	100	200	300	400
$\frac{\ \mathbf{E}^{air} - \mathbf{E}^{noair}\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}^{air}\ _{\mathbb{L}^2}}$	0.44	0.40	0.24	0.14	0.07	0.04	0.02

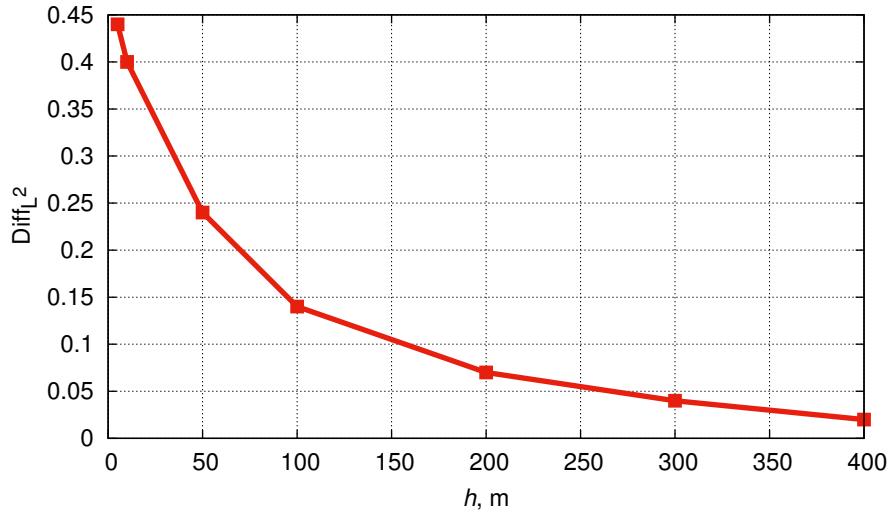


Рисунок 10 — график изменения относительной разности решений при изменении глубины

Графики вещественной компоненты \mathbf{E}_y по линии $y = 0, z = -610$ для различных глубин петли представлены на рисунках 11 и 12.

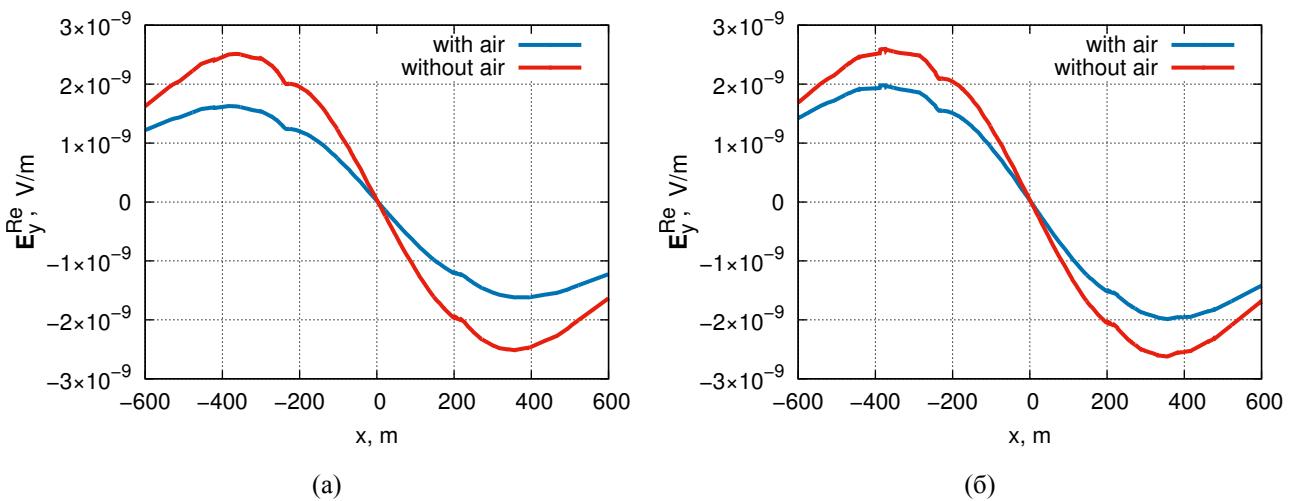


Рисунок 11 — $Re(\mathbf{E}_y)$ по линии $y = 0, z = -610$, глубина (а) 5 м и (б) 50 м

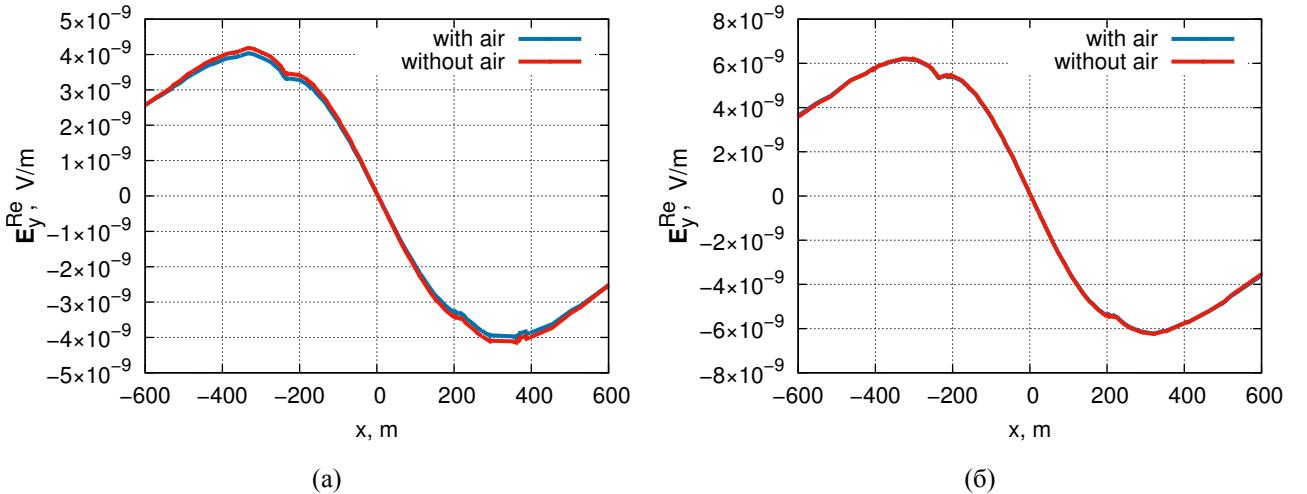


Рисунок 12 — $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$ по линии $y = 0$, $z = -610$, глубина (а) 200 м и (б) 300 м

Из результатов следует, что слой воздуха оказывает значительное влияние на получаемое решение при расположении источника электромагнитного возмущения на малой глубине (меньше трехсот метров для рассмотренной конфигурации).

Исследование эффективности применения PML-слоя

Цель вычислительных экспериментов: определение эффективности применения PML-слоя. Геометрические характеристики PML-слоя показаны на рисунке 13.

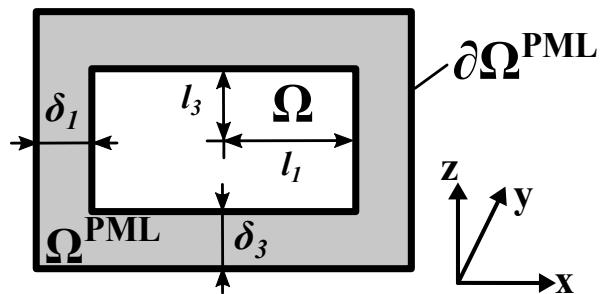


Рисунок 13 — геометрические характеристики PML-слоя

Вычислительные эксперименты проводились следующим образом: последовательно варьировался каждый из параметров PML-слоя: толщина слоя в k -м направлении δ_k , где $k = 1, 2, 3$, расстояние от центра области до внутренних границ слоя l_k , коэффициент комплексного растяжения координат χ (18),

оставшиеся параметры фиксировались, что позволило определить параметры, оказывающие наибольшее влияние на характеристики PML-слоя.

Фрагменты тетраэдральных конечноэлементных сеток с «большим баком» и с PML-слоем приведены на рисунках 14а и 14б.

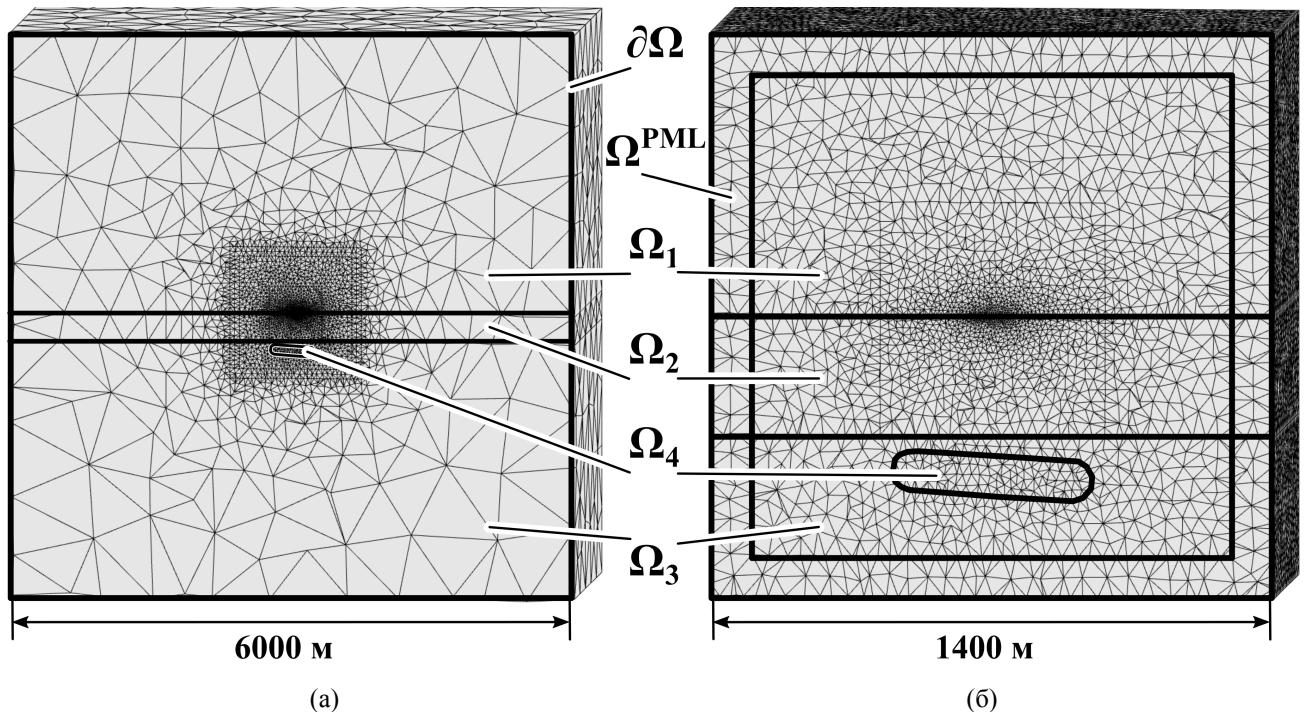


Рисунок 14 — конечноэлементные сетки: (а) «большой бак» и (б) PML-слой

В этом исследовании будем пользоваться базисными функциями первого полного порядка.

Описание расчетной области

Схематичное изображение расчетной области показано на рисунке 15, где Ω_1 – воздух ($\sigma = 10^{-6}$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_2 – морская вода ($\sigma = 3.3$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_3 – грунт ($\sigma = 0.2$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_4 – углеводороды ($\sigma = 10^{-2}$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); L_1 , L_2 и L_3 – размеры области моделирования по осям x , y и z соответственно; $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$ м; $h_1 = 300$ м – толщина Ω_2 ; $l_1 = 400$ м, $h_3 = 100$ м, $h_2 = 100$ м – длина, толщина и глубина объекта Ω_4 соответственно.

Объект Ω_4 представляет собой скругленный прямоугольный параллелепипед с двумя равными сторонами, наклоненный под углом 5° . Источником электрического поля является петля диаметром $d = 100$ м с током частотой 1 Гц, расположенная в воздухе на расстоянии $h = 5$ м от границы раздела сред воздух-вода. Также рассматривается случай, когда петля расположена в воде ($h = -5$ м).

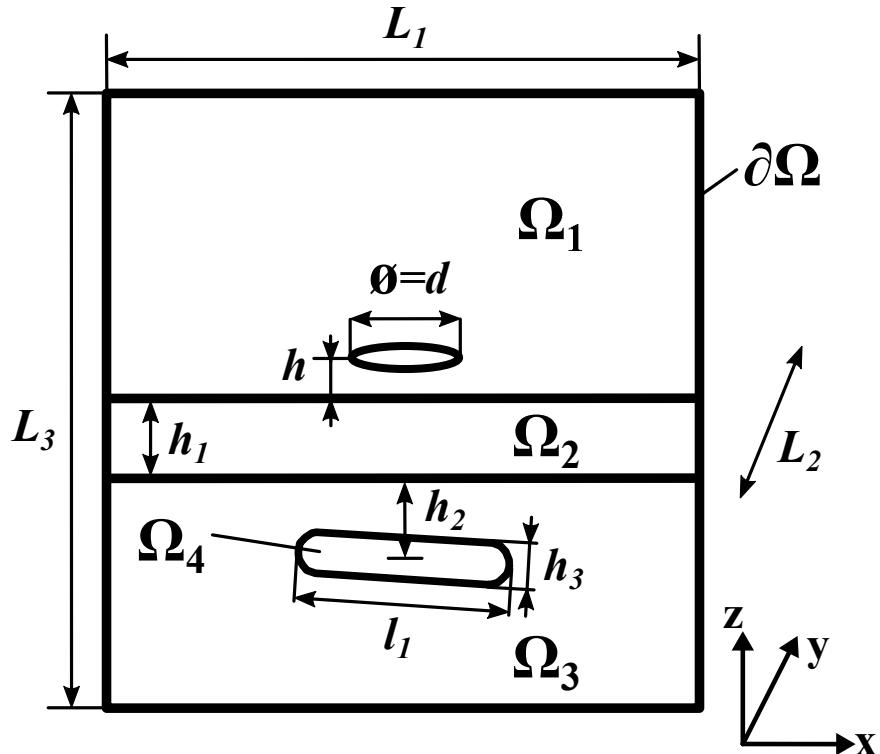


Рисунок 15 — расчетная область

Выделим внутри области с условием «большого бака» и области, на границе которой задан PML-слой, подобласть Ω' размером $1000 \times 1000 \times 1000$ м³. Для этой подобласти в данном исследовании будем оценивать разность в норме \mathbb{L}^2 между действительными компонентами E_y векторов решений $E_y^{\text{бак}}$ и E_y^{PML} , полученных с применением «большого бака» и PML-слоя соответственно.

Варьирование коэффициентов растяжения

Зафиксируем $\delta_k = 100$ м, $l_k = 600$ м, $m = 3$, $h = 5$ м и будем варьировать коэффициент комплексного растяжения координат χ . Размер получаемой СЛАУ для «большого бака» – 653814, с PML-слоем – 616180. Результаты приведены

в таблице 5. Для случая $h = -5$ м размер получаемой СЛАУ для «большого бака» – 652396, с PML-слоем – 614504. Результаты приведены в таблице 6.

Таблица 5 — варьирование коэффициентов растяжения при $h = 5$ м

$\operatorname{Re}(\chi)$ в Ω_1	$\operatorname{Im}(\chi)$ в Ω_1	$\operatorname{Re}(\chi)$ в Ω_2	$\operatorname{Im}(\chi)$ в Ω_2	$\operatorname{Re}(\chi)$ в Ω_3	$\operatorname{Im}(\chi)$ в Ω_3	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
3	0	1	5	3	1	0.106636	650	592
3	1	0	6	2	1	0.0925		599
4	0	1	5	3	1	0.0947		731
4	1	0	6	2	1	0.0910		591

Таблица 6 — варьирование коэффициентов растяжения при $h = -5$ м

$\operatorname{Re}(\chi)$ в Ω_1	$\operatorname{Im}(\chi)$ в Ω_1	$\operatorname{Re}(\chi)$ в Ω_2	$\operatorname{Im}(\chi)$ в Ω_2	$\operatorname{Re}(\chi)$ в Ω_3	$\operatorname{Im}(\chi)$ в Ω_3	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
4	0	1	5	3	1	0.0929047	309	344
4	0	1	6	3	1	0.0870		294
4	0	1	6	3	2	0.0809		253
4	1	1	6	3	2	0.0658		306

Варьирование толщины PML-слоя

Зафиксируем $\chi_{\Omega_1} = (4, 1)$, $\chi_{\Omega_2} = (0, 6)$, $\chi_{\Omega_3} = (2, 1)$, $l_k = 600$ м, $m = 3$, $h = 5$ м и будем варьировать толщину PML-слоя δ_k . Результаты приведены в таблице 7. Для случая $h = -5$ м выберем $\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$, $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$, $\chi_{\Omega_3} = (3, 2)$. Результаты приведены в таблице 8.

Таблица 7 — варьирование толщины PML-слоя при $h = 5$ м

δ_k	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
80	0.1199	673	1289	659858	618128
100	0.0910	650	591	653814	616180
120	0.0784	609	1142	654354	617324

Таблица 8 — варьирование толщины PML-слоя при $h = -5$ м

δ_k	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
80	0.1201	359	297	652312	614822
100	0.0809	309	253	652396	614504
120	0.0623	250	859	652422	615394

Варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой

Зафиксируем $\chi_{\Omega_1} = (4, 1)$, $\chi_{\Omega_2} = (0, 6)$, $\chi_{\Omega_3} = (2, 1)$, $\delta_k = 100$ м, $m = 3$, $h = 5$ м и будем варьировать l_k — размер области, на границе которой вводится PML-слой. Результаты приведены в таблице 9. Для случая $h = -5$ м выберем $\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$, $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$, $\chi_{\Omega_3} = (3, 2)$. Результаты приведены в таблице 10.

Таблица 9 — варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой, при $h = 5$ м

l_k	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
500	0.187456	628	587	659130	621390
600	0.0909998	650	591	652396	614504
800	0.0440642	718	658	794310	744856

Таблица 10 — варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой, при $h = -5$ м

l_k	$\frac{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}}) - \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML	Размер СЛАУ, бак	Размер СЛАУ, PML
500	0.1751746	317	238	659814	621390
600	0.0809429	309	253	652396	614504
800	0.0348019	357	329	793272	743780

Проверка выполнения условий на контактных границах

Проверим, что в случае независимого варьирования коэффициентов комплексного растяжения координат χ , на границе двух соседних PML-слоев с различными характеристиками не нарушаются условия на контактных границах (3)-(4). Для этого рассмотрим напряженность электрического поля \mathbf{E} вдоль линии $x = 650$, $y = 0$, $z = [-0.005, 0.005]$ (середина PML-слоя по x -направлению):

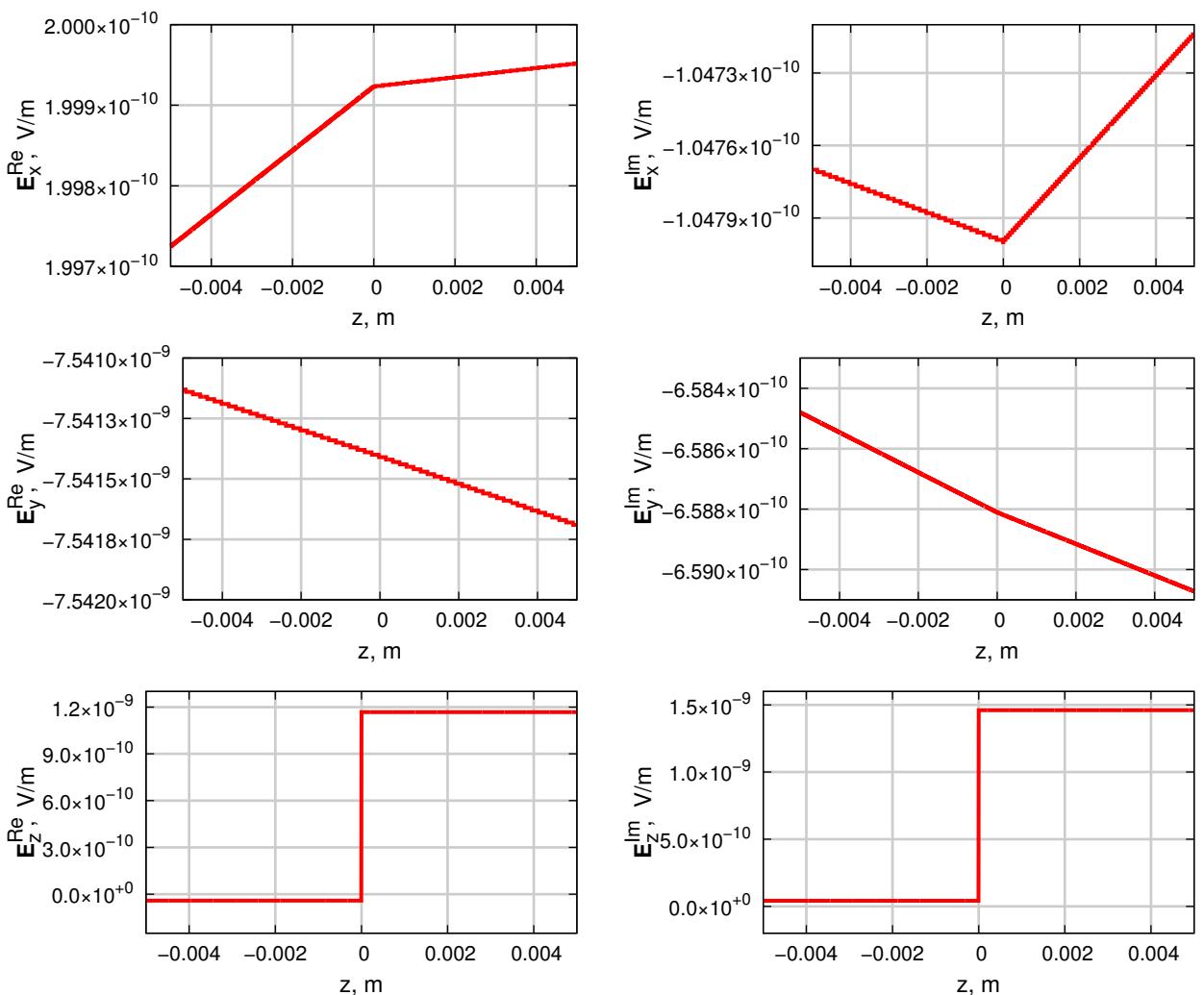


Рисунок 16 — графики компонент электрического поля на контактных границах

Как видно из графиков на рисунке 16, разрывна только нормальная компонента E_z , следовательно, условия (3)-(4) выполнены.

Графическое представление результатов

На рисунках 17, 18 и 19 показаны картины электрического поля, полученные при параметрах $h = 5$ м, $\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$, $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$, $\chi_{\Omega_2} = (3, 2)$, $m = 3$, $l_k = 600$ м и $\delta_k = 100$ м. На рисунках 17а, 18а и 19а представлено решение с PML-слоем; 17б, 18б и 19б – решение с «большим баком».

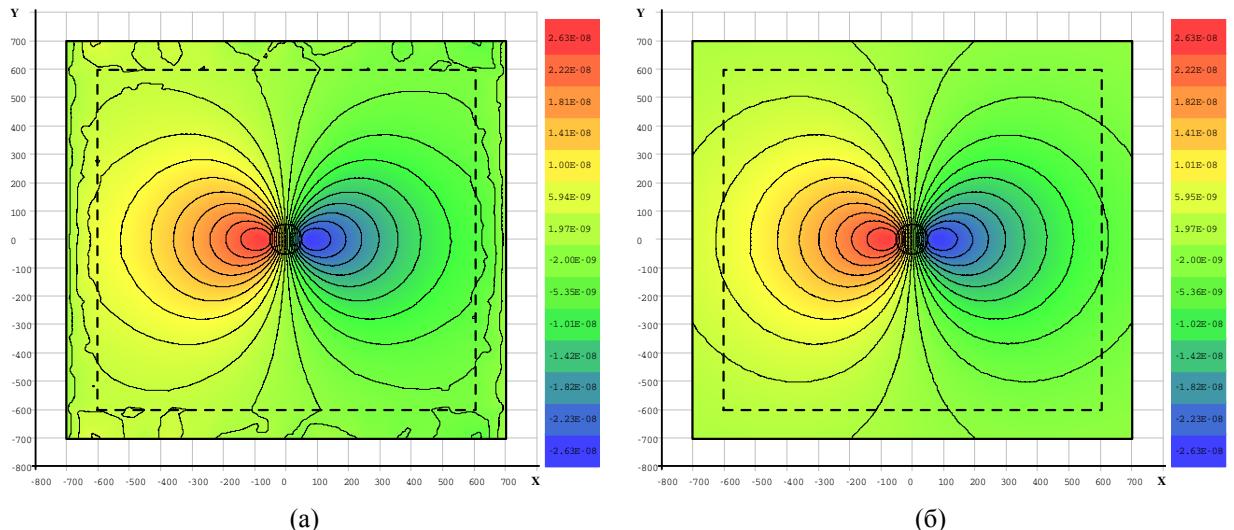


Рисунок 17 — $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$ в сечении плоскостью $z = -10$ м

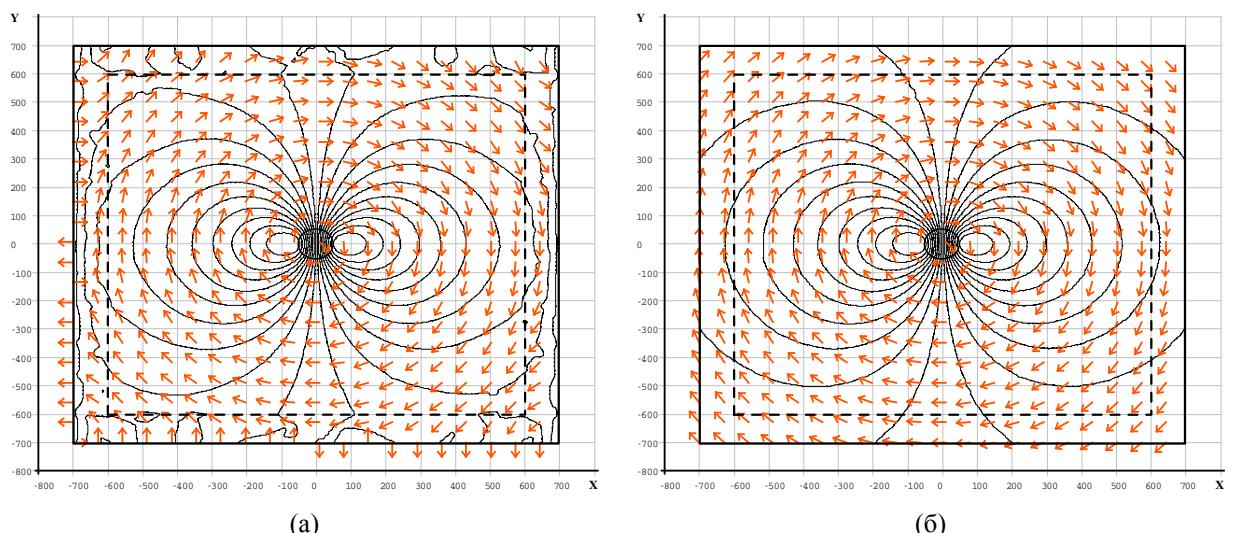


Рисунок 18 — изолинии $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_y)$ и векторы $(\operatorname{Re}(\mathbf{E}_x), \operatorname{Re}(\mathbf{E}_y))^T$ в сечении плоскостью $z = -10$ м

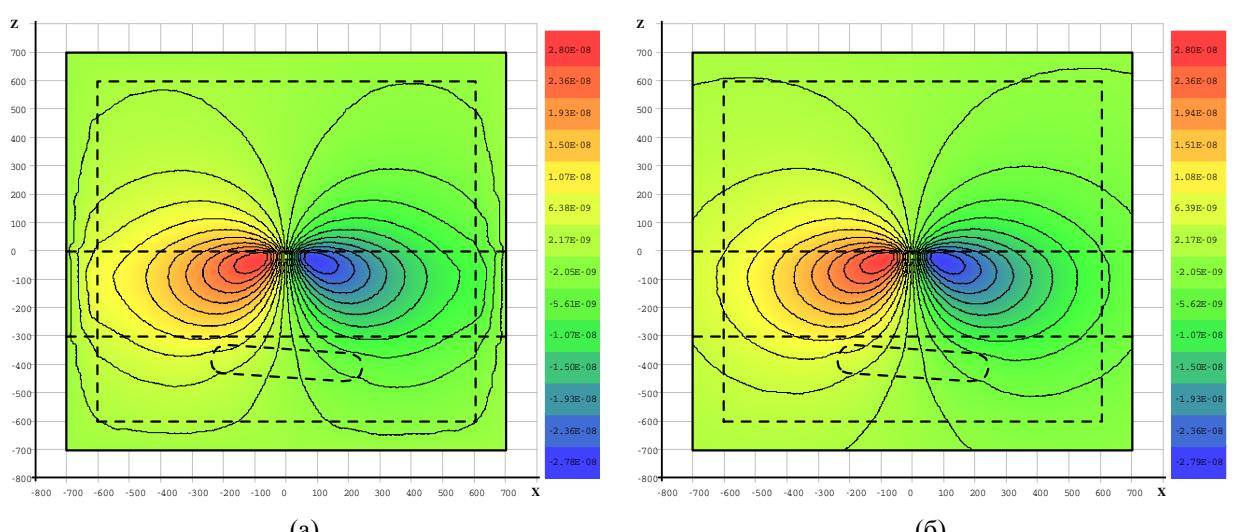


Рисунок 19 — $\operatorname{Re}(E_{\mu})$ в сечении плоскостью $y = 0$

Анализ целесообразности применения PML-слоя

Наибольшее влияние на точность получаемого решения при введении PML-слоя оказывают коэффициент комплексного растяжения координат χ и l – размер области, на границе которой вводится PML-слой. При увеличении размера внутренней области ожидаемо увеличивается размер СЛАУ, поэтому этот параметр при решении реальных задач следует не варьировать, а выбрать как некоторое ограничение. Таким образом, в первую очередь стоит проводить поиск оптимального значения именно для коэффициента растяжения χ . Выбор толщины PML-слоя влияет на точность решения незначительно, поэтому достаточно лишь убедиться, что она выбрана в подходящих для задачи пределах – не слишком большой и не слишком маленькой.

В рассмотренном виде применение PML-слоя для сокращения области моделирования задач низкочастотной морской геоэлектрики незначительно уменьшает размерность СЛАУ и, в большинстве случаев, не приводит к существенному сокращению времени решения задачи. Одной из причин этого может быть то, что основное растяжение приходится на вещественные компоненты координат. Это приводит к значительной «вытянутости» тетраэдров внутри PML-слоя и, как следствие, сильному ухудшению свойств матрицы СЛАУ и увеличению времени решения. Параллелепипедальные конечные элементы лишены подобного недостатка, поэтому для них можно проводить комплексное растяжение в гораздо больших диапазонах. Однако, такие элементы не подходят для аппроксимации сколь-либо сложных областей. Для использования в одной сетке и тетраэдральных, и параллелепипедальных конечных элементов можно применять специальные переходные элементы **[ССЫЛКИ!]**, либо воспользоваться неконформными методами **[ССЫЛКИ!]**.

Задача, приближенная к реальной

В этом исследовании рассмотрим поведение электрического поля при различном расположении источника этого поля относительно объекта, скрытого в

грунте. Различное положение источника обеспечивается за счет «протаскивания» его на некотором расстоянии от морского дна.

В этом исследовании будем пользоваться базисными функциями второго полного порядка.

Описание расчетной области

Схематичное изображение расчетной области показано на рисунке 20, где Ω_1 – воздух ($\sigma = 10^{-6}$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_2 – морская вода ($\sigma = 3.3$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_3 – грунт ($\sigma = 0.2$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); Ω_4 – углеводороды ($\sigma = 10^{-2}$ См/м, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$); L_1 , L_2 и L_3 – размеры области моделирования по осям x , y и z соответственно; $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$ м; $h_1 = 600$ м – толщина Ω_2 ; $l_1 = 400$ м, $h_3 = 75$ м, $h_2 = 135$ м – длина, толщина и глубина объекта Ω_4 соответственно.

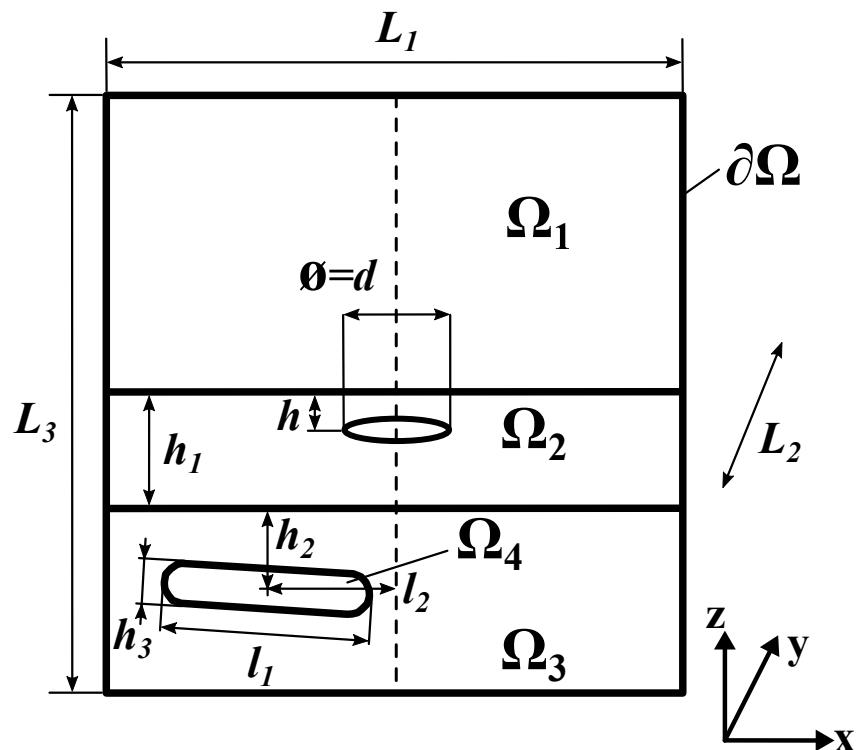


Рисунок 20 — схематичное изображение расчетной области

Источником электрического поля является петля диаметром $d = 100$ м с током частотой 1 Гц, расположенная в воде на расстоянии $h = 590$ м от границы раздела сред воздух-вода (в 10 метрах над поверхностью грунта). Объ-

ект Ω_4 , как и в предыдущих исследованиях, представляет собой скругленный прямоугольный параллелепипед с двумя равными сторонами, наклоненный под углом 5° .

В этой области рассмотрим электрическое поле при различных смещениях объекта относительно источника ($l_2 = -300, -200, -100$ и 0 м), а также сравним с электрическим полем в случае проводящего объекта ($\sigma = 10^2$ См/м).

Конечноэлементная сетка

Фрагмент $x \in [-600, 0], y \in [-600, 600] z \in [-1000, 600]$ одной из конечноэлементных сеток, использованных для проведения исследования, представлен на рисунке 21.

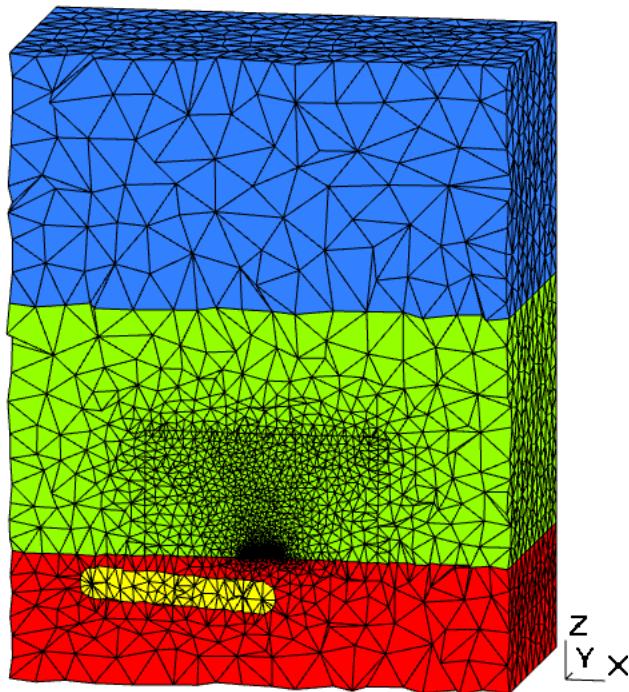


Рисунок 21 — фрагмент конечноэлементной сетки

Результаты вычислительного эксперимента

На рисунках 22-33 показано графическое представление напряженности электрического поля \mathbf{E} , на рисунках под буквой «а» (слева) – для объекта с $\sigma = 10^{-2}$ См/м, под буквой «б» (справа) – для объекта с $\sigma = 10^2$ См/м.

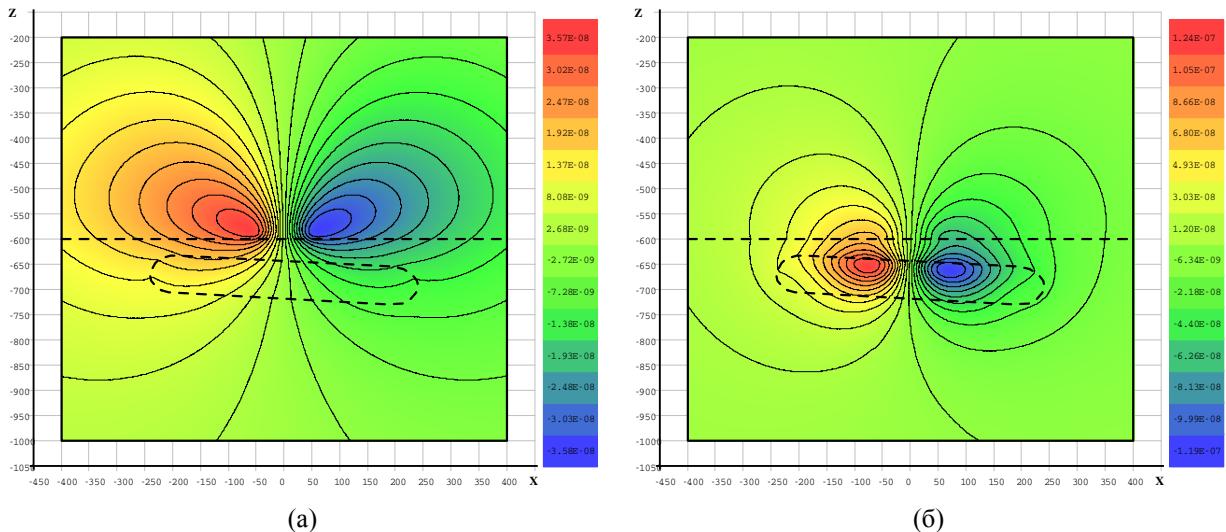


Рисунок 22 — $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_y)$ при $l_2 = 0$ в сечении $y = 0$

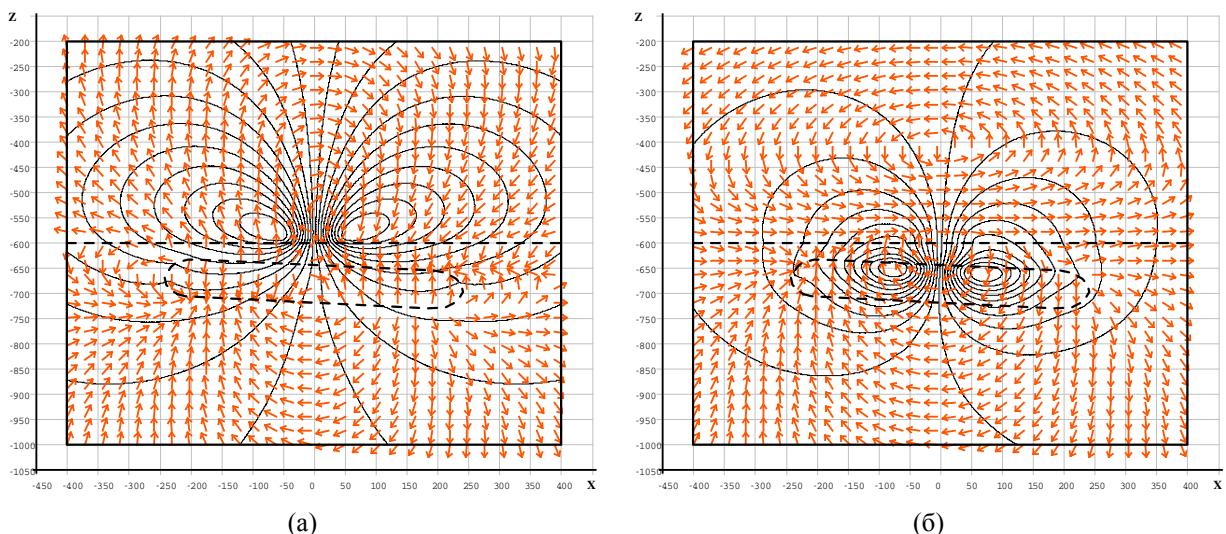


Рисунок 23 — векторы $(\operatorname{Re}(\mathbf{E}_x), \operatorname{Re} \mathbf{E}_z)^T$, изолинии $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_y)$ при $l_2 = 0$ в сечении $y = 0$

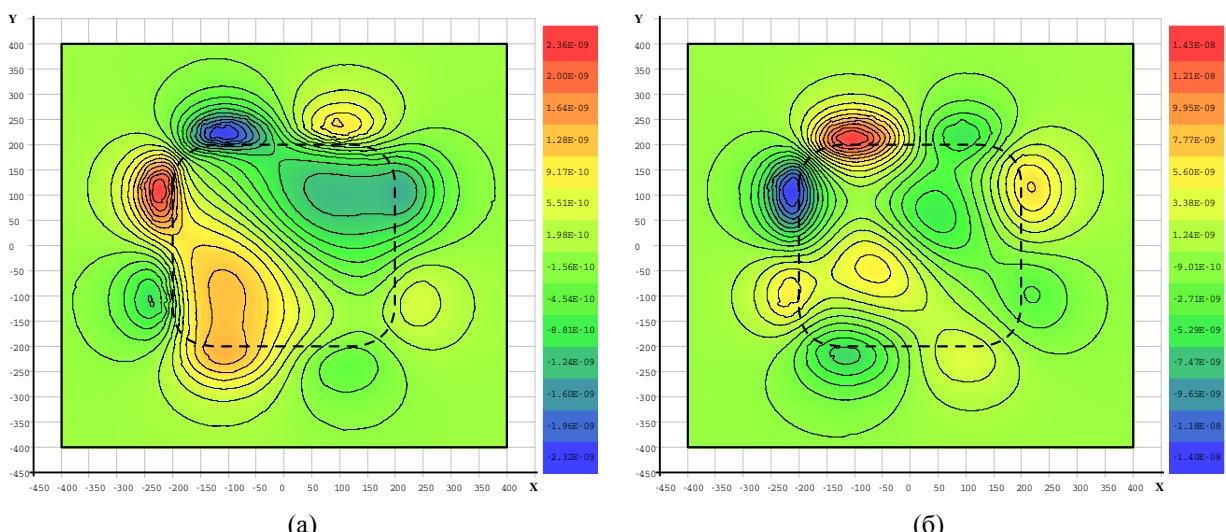


Рисунок 24 — $\operatorname{Re}(E_z)$ при $l_2 = 0$ в сечении $z = -601$

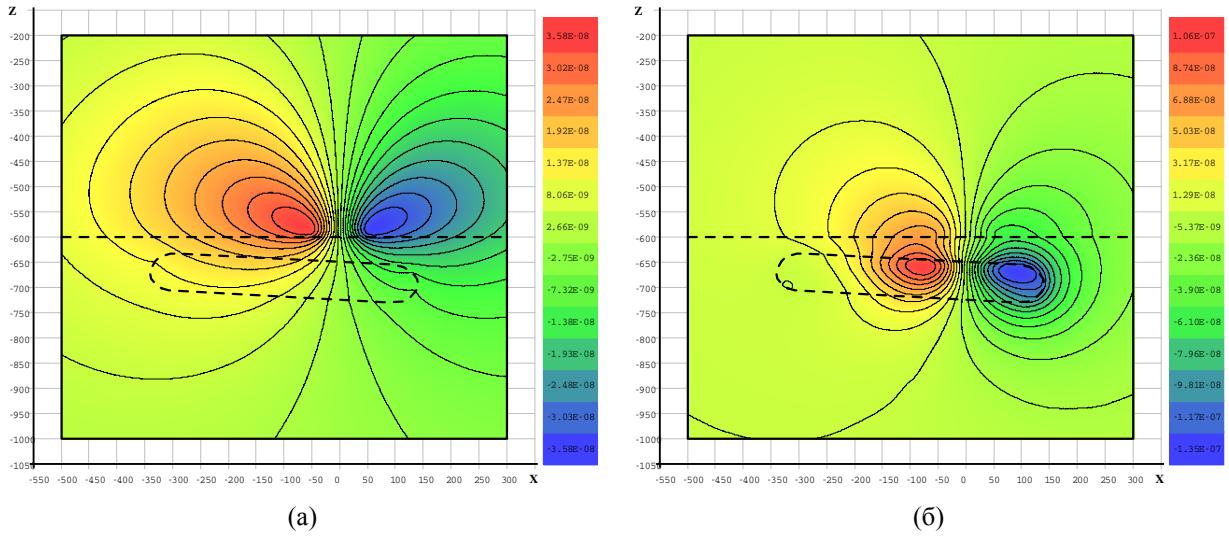


Рисунок 25 — $\operatorname{Re}(E_y)$ при $l_2 = -100$ в сечении $y = 0$

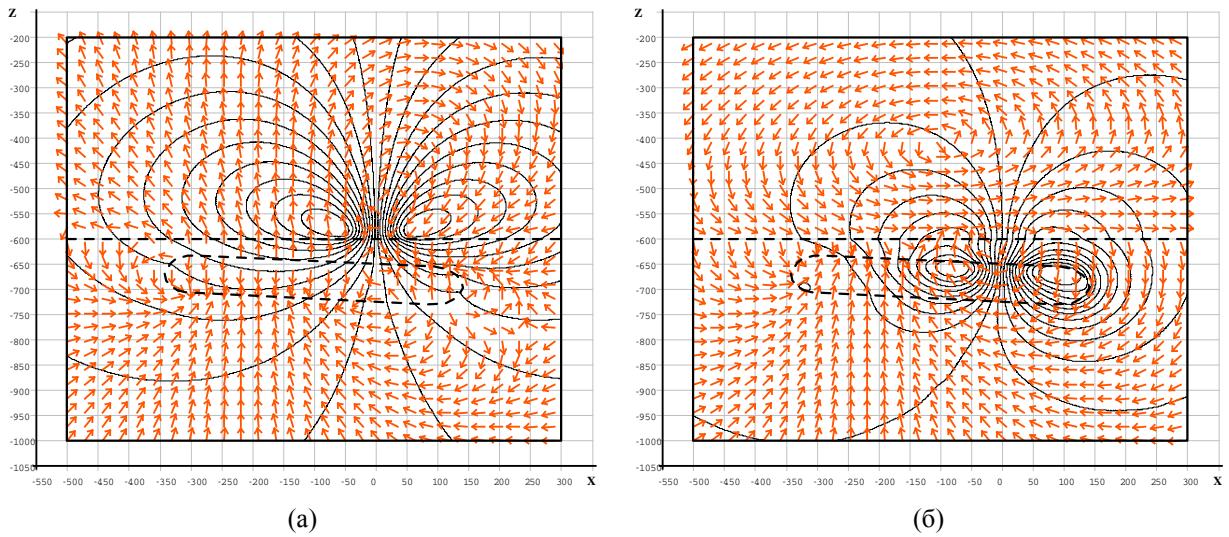


Рисунок 26 — векторы $(\operatorname{Re}(\mathbf{E}_x), \operatorname{Re}(\mathbf{E}_z))^T$, изолинии $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_y)$ при $l_2 = -100$ в сечении $y = 0$

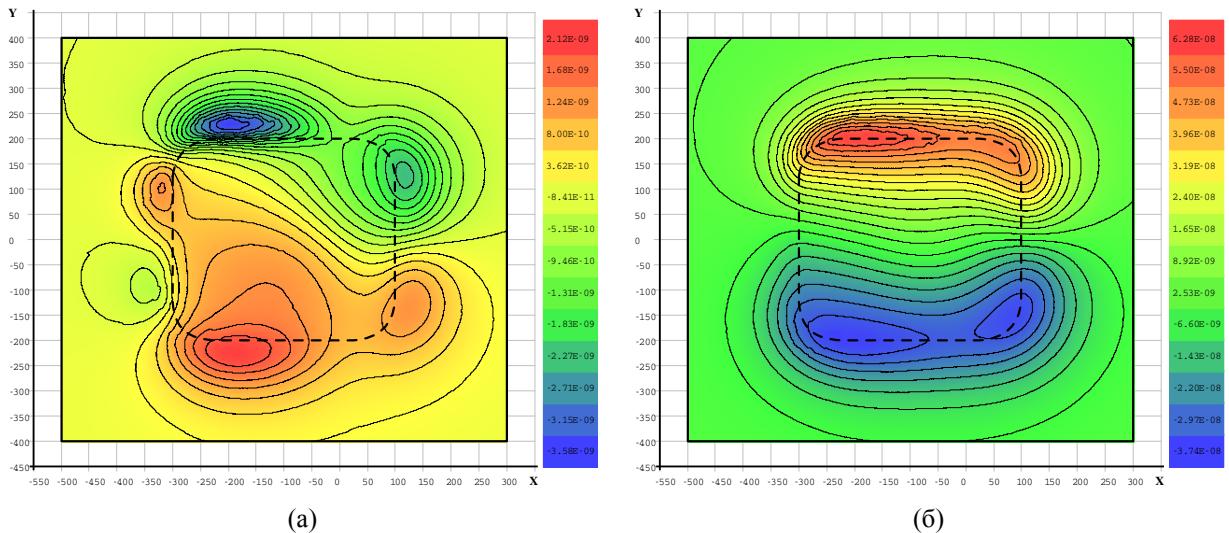


Рисунок 27 — $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_z)$ при $l_2 = -100$ в сечении $z = -601$

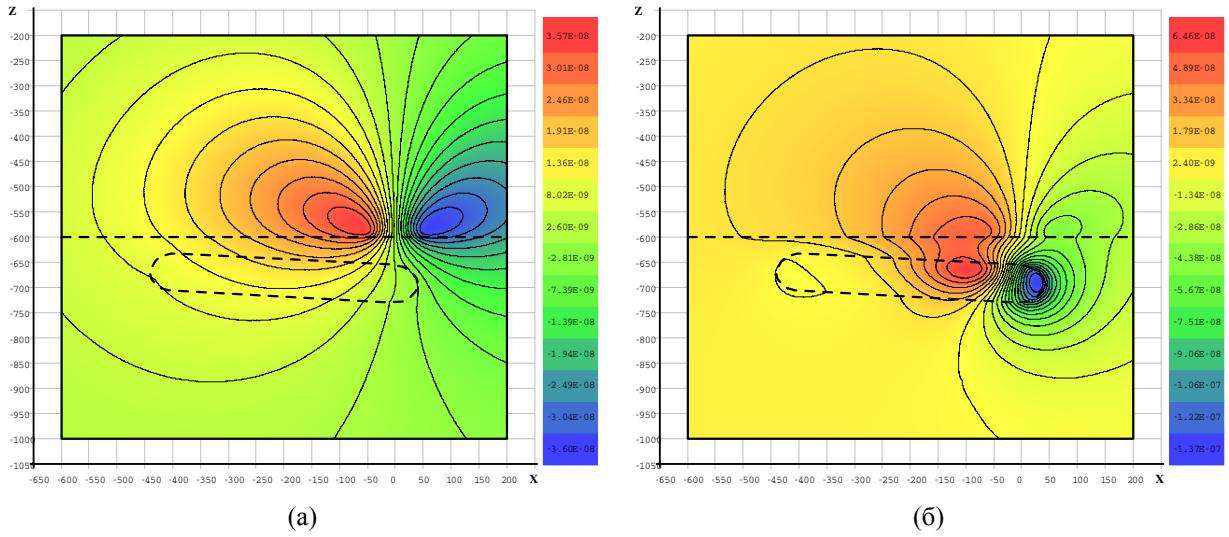


Рисунок 28 — $\operatorname{Re}(E_y)$ при $l_2 = -200$ в сечении $y = 0$

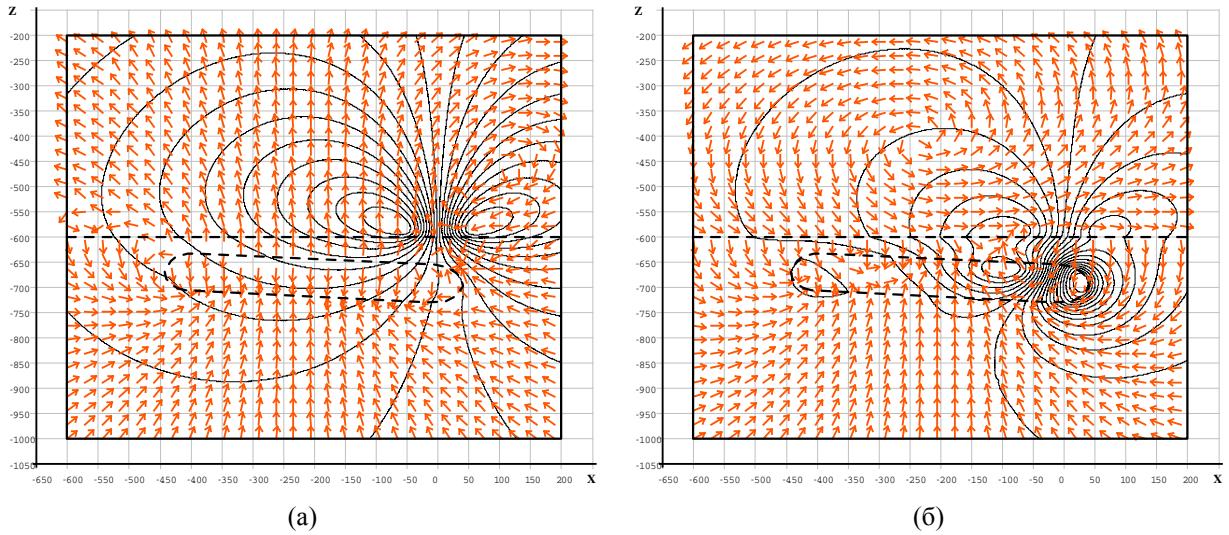


Рисунок 29 — векторы $(\operatorname{Re}(\mathbf{E}_x), \operatorname{Re}(\mathbf{E}_z))^T$, изолинии $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_y)$ при $l_2 = -200$ в сечении $y = 0$

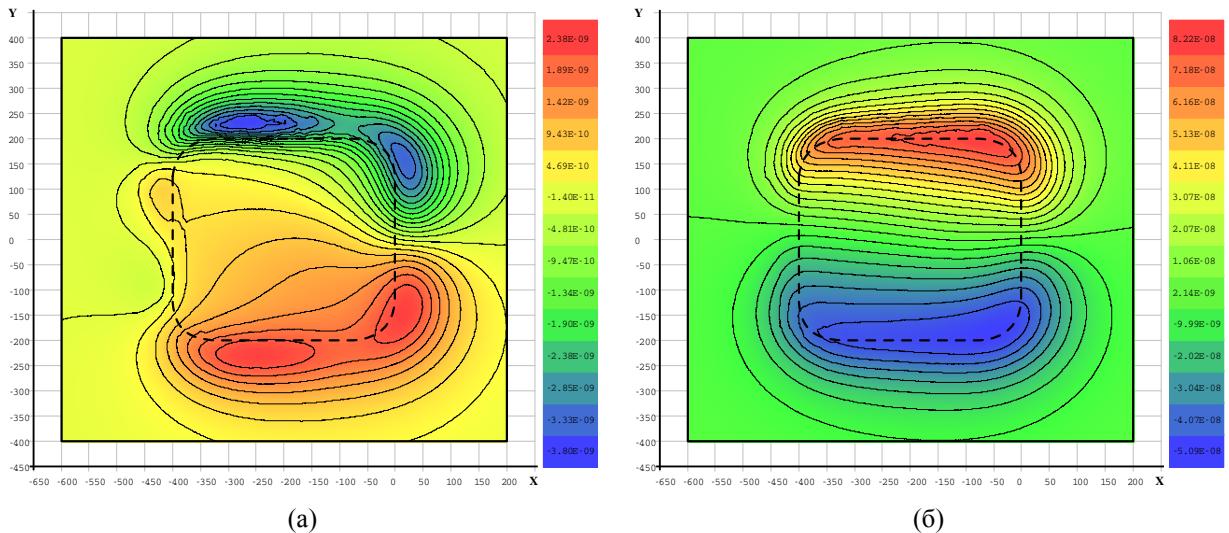


Рисунок 30 — $\operatorname{Re}(E_z)$ при $l_2 = -200$ в сечении $z = -601$

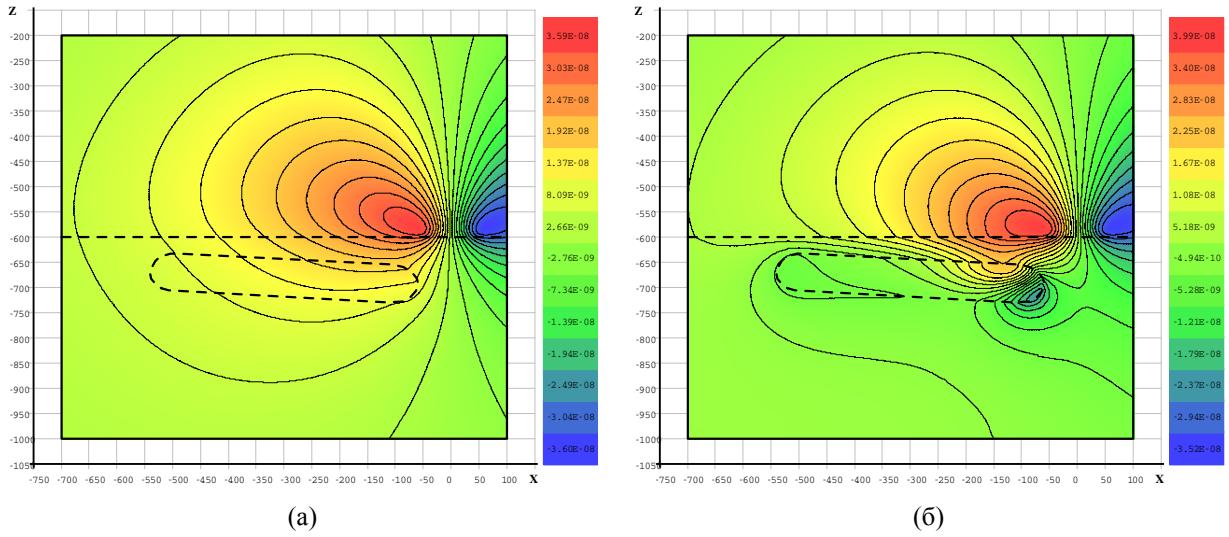


Рисунок 31 — $\operatorname{Re}(E_y)$ при $l_2 = -300$ в сечении $y = 0$

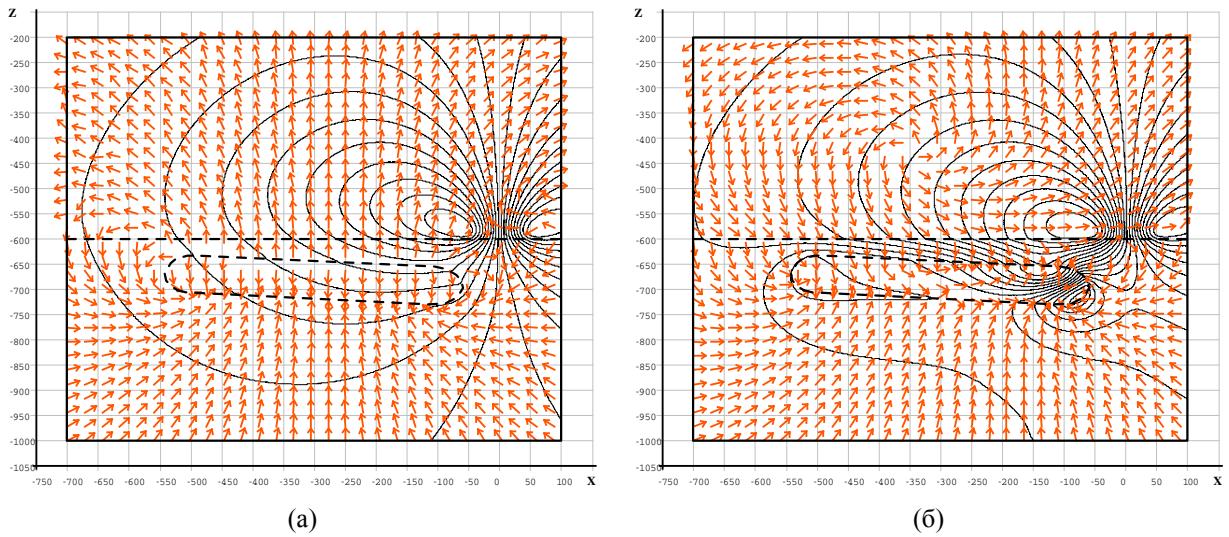


Рисунок 32 — векторы $(\operatorname{Re}(\mathbf{E}_x), \operatorname{Re}(\mathbf{E}_z))^T$, изолинии $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_y)$ при $l_2 = -300$ в сечении $y = 0$

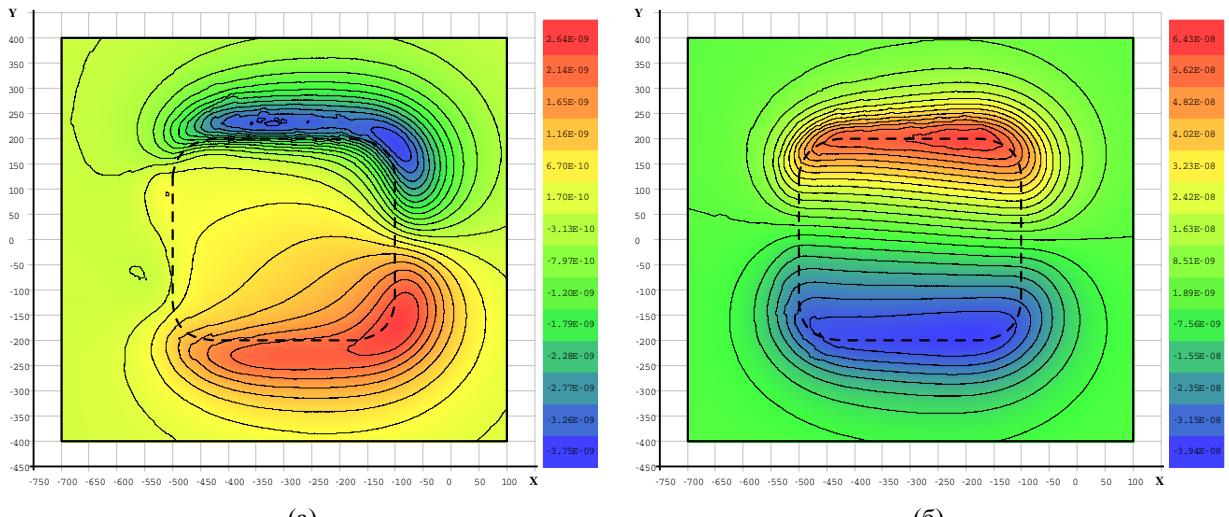


Рисунок 33 — $\operatorname{Re}(E_z)$ при $l_2 \equiv -300$ в сечении $z \equiv -601$

Результаты моделирования показывают, что проводящий объект хорошо «виден» и на некотором расстоянии от морского дна, а непроводящий – только вблизи поверхности или при некотором заглублении приемника в грунт, причем наибольший отклик на источник электромагнитного возмущения для непроводящего объекта наблюдается в том случае, когда этот источник расположен с некоторым смещением от центра симметрии объекта.

Описание программного комплекса

Описать программный комплекс

Заключение

Написать заключение

Список литературы

1. Шурина, Э.П. Морская геоэлектрика – задачи и перспективы / Э.П. Шурина, М.И. Эпов, А.В. Мариенко // Тезисы докладов всероссийской научно-технической конференции "Научное и техническое обеспечение исследования и освоения шельфа Северного Ледовитого океана". – 2010. – 9-13 августа. – С. 7-12.
2. Gabrielsen, P.T. 3D CSEM for Hydrocarbon Exploration in the Barents Sea / P.T. Gabrielsen, D.V. Shantsev, S. Fanavoll // 5th Saint Petersburg International Conference & Exhibition – Geosciences: Making the most of the Earth's resources. – 2012. – 2-5 April. – P. 1-5.
3. Berenger, J.P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / J.P. Berenger // Journal of computation physics 114, 185-200, 1994
4. Wiik, T. A Discontinuous Galerkin Method for Modelling Marine Controlled Source Electromagnetic Data / T. Wiik, M.V. De Hoop, B. Ursin // Proceedings of the Project Review, Geo-Mathematical Imaging Group, Purdue University, West Lafayette, IN, Vol. 1 (2013) pp. 75-102.
5. Эпов, М.И. Параллельные конечноэлементные вычислительные схемы в задачах геоэлектрики / М.И. Эпов, Э.П. Шурина, Д.А. Архипов // Вычислительные технологии. – 2013. – Том 18, №2. – С. 94-112.
6. Баландин, М.Ю. Векторный метод конечных элементов : Учеб. пособие / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – 69 с.
7. Webb, J.P. Hierarchical Vector Basis Functions of Arbitrary Order for Triangular and Tetrahedral Finite Elements / J.P. Webb // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1999. – Vol. 47. – P. 1244-1253.
8. Nechaev, O.V. Multilevel iterative solver for the edge fem solution of the 3D Maxwell equation / O.V. Nechaev, E.P. Shurina, M.A. Botchev // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – №55. – P. 2346-2362.
9. Соловейчик, Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.

10. Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations. – Oxford University Press, 2003.
11. Schwarzbach C. Stability of finite element solutions to Maxwell's equations in frequency domain. – 2009.
12. Hiptmair R. Multigrid method for Maxwell's equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1998. – T. 36. – №. 1. – C. 204-225.
13. Nédélec J. C. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 //Numerische Mathematik. – 1980. – T. 35. – №. 3. – C. 315-341.
14. Nédélec J. C. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 //Numerische Mathematik. – 1986. – T. 50. – №. 1. – C. 57-81.
15. Webb J. P. Edge elements and what they can do for you //Magnetics, IEEE Transactions on. – 1993. – T. 29. – №. 2. – C. 1460-1465.
16. Михайлова Е. И., Шурина Э. П. Математическое моделирование высокочастотного электромагнитного поля в волноводных устройствах //Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13. – №. 4. – С. 102-118.
17. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
18. Zhang L. et al. A set of symmetric quadrature rules on triangles and tetrahedra //J. Comput. Math. – 2009. – T. 27. – №. 1. – C. 89-96.
19. Numerical Integration over the Tetrahedral Domain [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://people.fh-landshut.de/~maurer/numeth/node148.html>.
20. Numerical Integration over the Triangular Domain [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://people.fh-landshut.de/~maurer/numeth/node147.html>.
21. Anderson C. An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source / Anderson C., Mattsson J. // First Break. – May 2010. – Volume 28, Issue 5. – P. 71-75.