

Анализ систем источник-приёмник в задачах морской геоэлектрики

Жигалов Петр Сергеевич

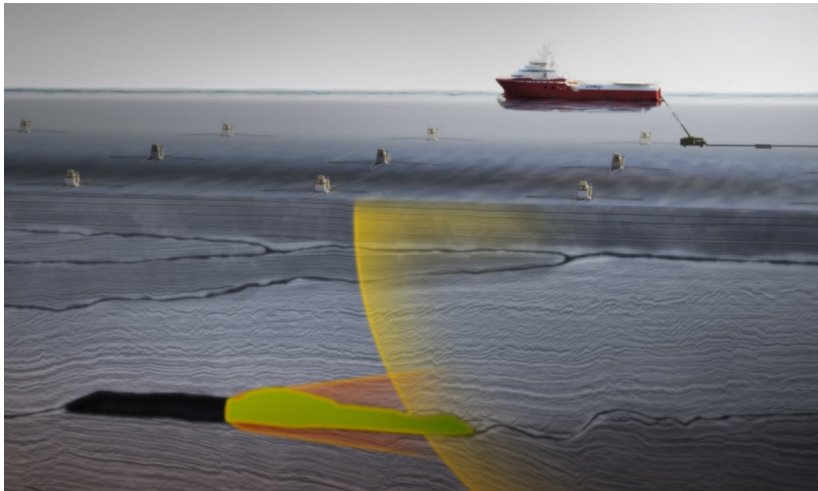
Новосибирский государственный технический университет
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра вычислительных технологий

2016 г.

Цель работы: решение трёхмерной прямой задачи морской геоэлектрики векторным методом конечных элементов

Задачи:

- Исследование влияния слоя воздуха при различной глубине источника электромагнитного возмущения
- Исследование целесообразности применения PML-слоя для ограничения области моделирования в задачах морской геоэлектрики на низких частотах
- Исследование поведения электромагнитного поля при различном расположении источника поля и искомого объекта друг относительно друга



Уравнение Гельмгольца:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}, \quad k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon \quad (1)$$

\mathbf{E} – напряжённость электрического поля (В/м),

σ – электрическая проводимость (См/м),

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость (Ф/м),

$\mu = \mu_r \mu_0$ – магнитная проницаемость (Гн/м),

\mathbf{J} – плотность стороннего электрического тока (А/м²).

Краевые условия:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{S_1} = \mathbf{E}^g, \quad (2)$$

$$\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{S_2} = 0. \quad (3)$$

Пространства:

$$\mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3\},$$

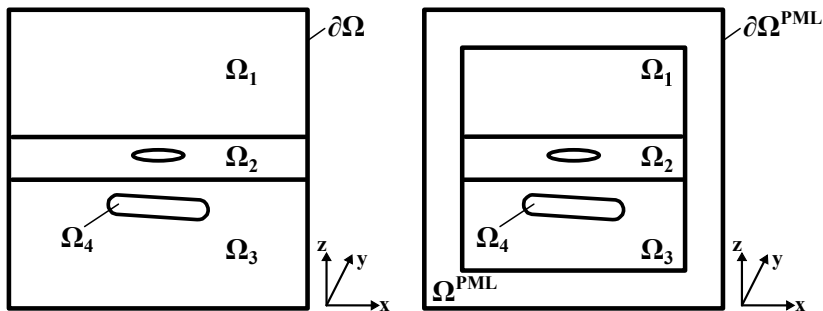
$$\mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Вариационная постановка: Найти $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$, такое что $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ будет выполнено:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega. \quad (4)$$

PML-слой Ω^{PML} является подобластью Ω со специальными коэффициентами, построенными таким образом, чтобы обеспечить полное поглощение электрического поля внутри слоя и не допустить его отражения от внутренних границ и прохождения через внешние границы слоя.

Расчётные области без PML-слоя и с PML-слоем:



Комплексное растяжение координат:

$$\tilde{x} = \int_0^x s_x(t) dt, \quad \tilde{y} = \int_0^y s_y(t) dt, \quad \tilde{z} = \int_0^z s_z(t) dt,$$

$$\begin{cases} s_j(\tau) = 1 & \text{— вне PML-слоя,} \\ s_j(\tau) = 1 + \chi \left(\frac{d(\tau)}{\delta} \right)^m, & m \geq 1 \text{ — внутри PML-слоя,} \end{cases}$$

где $d(\tau)$ — расстояние в j -м направлении от внутренней границы PML-слоя, δ — толщина PML-слоя, χ — некоторое комплексное число, причём $\operatorname{Re}(\chi) \geq 0$, $\operatorname{Im}(\chi) \geq 0$.

Оператор ∇ в новых координатах:

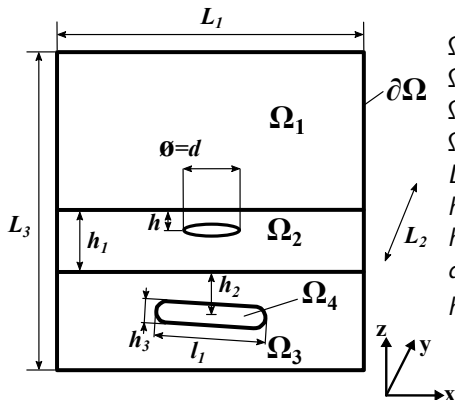
$$\tilde{\nabla} = \left[\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

Вариационная постановка:

Найти $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \hat{\Omega} = \Omega \setminus \Omega^{PML})$ и $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$, такие что $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \hat{\Omega})$ и $\forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$ будет выполнено:

$$\begin{cases} \int_{\hat{\Omega}} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\hat{\Omega} = - \int_{\hat{\Omega}} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\hat{\Omega} \\ \int_{\Omega^{PML}} \mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} + \int_{\Omega^{PML}} k^2 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} = 0. \end{cases}$$

Описание расчётной области



Ω_1 – воздух ($\sigma = 10^{-6}$ См/м);

Ω_2 – морская вода ($\sigma = 3.3$ См/м);

Ω_3 – грунт ($\sigma = 0.2$ См/м);

Ω_4 – углеводороды ($\sigma = 10^{-2}$ См/м);

$L_1 = L_2 = L_3 = 6000$ м;

$h_1 = 600$ м; $h_2 = 135$ м;

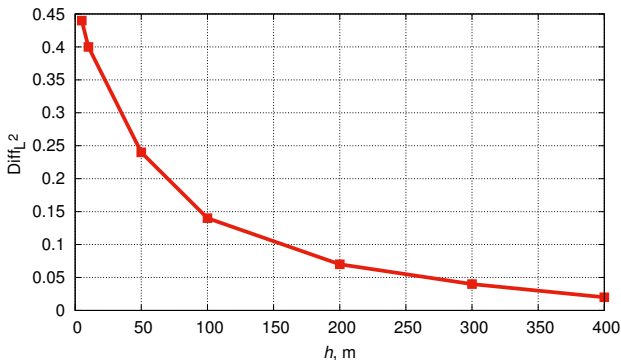
$h_3 = 75$ м; $l_1 = 400$ м;

$d = 100$ м; $\nu = 1$ Гц.

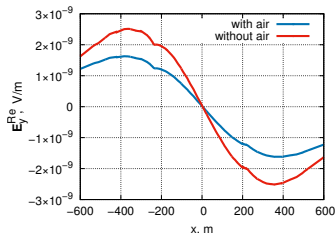
h варьируется в ходе исследования.

Относительная разность решений при изменении глубины петли h :

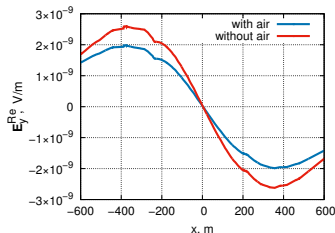
Глубина петли	5	10	50	100	200	300	400
$\frac{\ \mathbf{E}^{air} - \mathbf{E}^{noair}\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}^{air}\ _{\mathbb{L}^2}}$	0.44	0.40	0.24	0.14	0.07	0.04	0.02



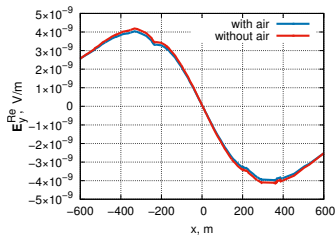
$\text{Re}(\mathbf{E}_y)$ по линии $y = 0, z = -610$:



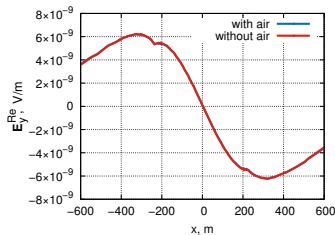
$h = 5$ м



$h = 50$ м

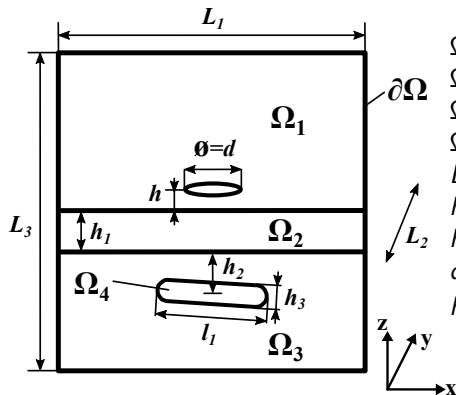


$h = 200$ м



$h = 300$ м

Описание расчётной области



Ω_1 – воздух ($\sigma = 10^{-6}$ См/м);
 Ω_2 – морская вода ($\sigma = 3.3$ См/м);
 Ω_3 – грунт ($\sigma = 0.2$ См/м);
 Ω_4 – углеводороды ($\sigma = 10^{-2}$ См/м);
 $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$ м;
 $h_1 = 300$ м; $h_2 = 100$ м;
 $h_3 = 100$ м; $l_1 = 400$ м;
 $d = 100$ м; $\nu = 1$ Гц;
 $h = 5$ м.

Варьирование коэффициентов растяжения:

$\text{Re}(\chi)$ в Ω_1	$\text{Im}(\chi)$ в Ω_1	$\text{Re}(\chi)$ в Ω_2	$\text{Im}(\chi)$ в Ω_2	$\text{Re}(\chi)$ в Ω_3	$\text{Im}(\chi)$ в Ω_3	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}} - \mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
3	0	1	5	3	1	0.106636	650	592
3	1	0	6	2	1	0.0925		599
4	0	1	5	3	1	0.0947		731
4	1	0	6	2	1	0.0910		591

Варьирование толщины PML-слоя:

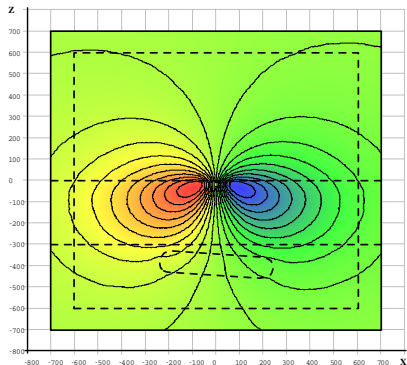
δ_k	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}} - \mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
80	0.1199	673	1289
100	0.0910	650	591
120	0.0784	609	1142

Варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой:

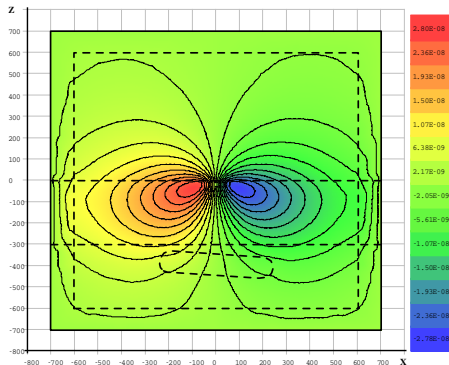
l_k	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}} - \mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
500	0.187456	628	587
600	0.0909998	650	591
800	0.0440642	718	658

Картины электрического поля при параметрах

$\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$, $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$, $\chi_{\Omega_2} = (3, 2)$ $m = 3$, $l_k = 600$ м и $\delta_k = 100$ м, в сечении плоскостью $y = 0$:



Решение с «большим баком»



Решение с PML-слоем

В работе были реализованы алгоритмы на базе векторного метода конечных элементов. Эти алгоритмы были положены в основу программного комплекса, который позволяет моделировать электромагнитные поля в областях разнообразной структуры. С помощью этого программного комплекса были решены модельные задачи морской геоэлектрики на низких частотах, проведены исследования возможности сокращения области моделирования без внесения дополнительных погрешностей.

На основании исследований были сделаны выводы, что расчёты, в которых в область моделирования не включается воздух, допустимы только при расположении источника электромагнитного поля на большой глубине, иначе, из-за неправильного учёта физических процессов, происходящих в воздухе, полученное решение будет неверным.

Применение PML-слоя позволило получить достаточно точные