

# Анализ систем источник-приёмник в задачах морской геоэлектрики

Жигалов Петр Сергеевич

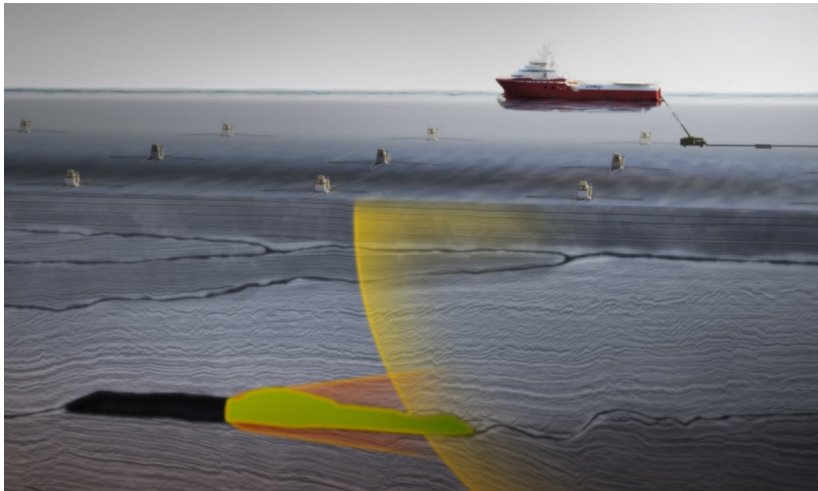
Новосибирский государственный технический университет  
Факультет прикладной математики и информатики  
Кафедра вычислительных технологий

2016 г.

**Цель работы:** решение трёхмерной прямой задачи морской геоэлектрики векторным методом конечных элементов

## Задачи:

- Исследование влияния слоя воздуха при различной глубине источника электромагнитного возмущения
- Исследование целесообразности применения PML-слоя для ограничения области моделирования в задачах морской геоэлектрики на низких частотах
- Исследование поведения электромагнитного поля при различном расположении источника поля и искомого объекта друг относительно друга



Уравнение Гельмгольца:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}, \quad k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon \quad (1)$$

$\mathbf{E}$  – напряжённость электрического поля (В/м),

$\sigma$  – электрическая проводимость (См/м),

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость (Ф/м),

$\mu = \mu_r \mu_0$  – магнитная проницаемость (Гн/м),

$\mathbf{J}$  – плотность стороннего электрического тока (А/м<sup>2</sup>).

Краевые условия:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{S_1} = \mathbf{E}^g, \quad (2)$$

$$\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{S_2} = 0. \quad (3)$$

Пространства:

$$\mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \mathbf{v} \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3\},$$

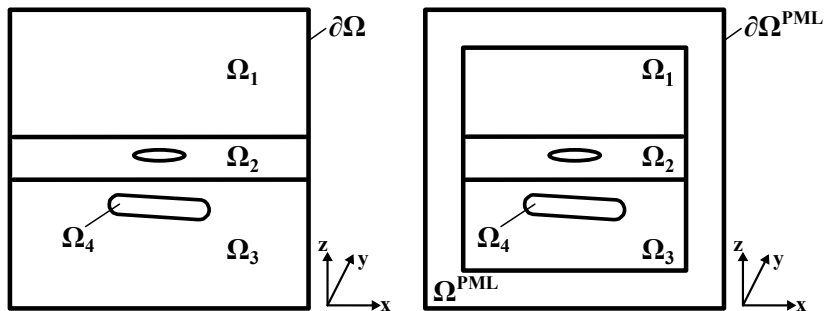
$$\mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

**Вариационная постановка:** Найти  $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ , такое что  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega)$  будет выполнено:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega = - \int_{\Omega} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega. \quad (4)$$

**PML-слой**  $\Omega^{PML}$  является подобластью  $\Omega$  со специальными коэффициентами, построенными таким образом, чтобы обеспечить полное поглощение электрического поля внутри слоя и не допустить его отражения от внутренних границ и прохождения через внешние границы слоя.

Расчётные области без PML-слоя и с PML-слоем:



Комплексное растяжение координат:

$$\tilde{x} = \int_0^x s_x(t) dt, \quad \tilde{y} = \int_0^y s_y(t) dt, \quad \tilde{z} = \int_0^z s_z(t) dt,$$

$$\begin{cases} s_j(\tau) = 1 & \text{— вне PML-слоя,} \\ s_j(\tau) = 1 + \chi \left( \frac{d(\tau)}{\delta} \right)^m, & m \geq 1 \text{ — внутри PML-слоя,} \end{cases}$$

где  $d(\tau)$  — расстояние в  $j$ -м направлении от внутренней границы PML-слоя,  $\delta$  — толщина PML-слоя,  $\chi$  — некоторое комплексное число, причём  $\operatorname{Re}(\chi) \geq 0$ ,  $\operatorname{Im}(\chi) \geq 0$ .

Оператор  $\nabla$  в новых координатах:

$$\tilde{\nabla} = \left[ \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

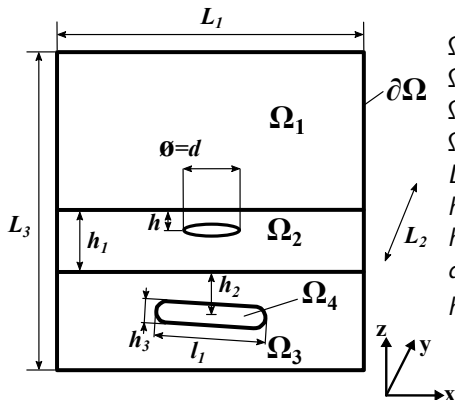
Вариационная постановка:

Найти  $\mathbf{E} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \hat{\Omega} = \Omega \setminus \Omega^{PML})$  и  $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$ , такие что  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \hat{\Omega})$  и  $\forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \Omega^{PML})$  будет выполнено:

$$\begin{cases} \int_{\hat{\Omega}} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}} d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\hat{\Omega} = - \int_{\hat{\Omega}} i\omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\hat{\Omega} \\ \int_{\Omega^{PML}} \mu^{-1} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} + \int_{\Omega^{PML}} k^2 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Omega^{PML} = 0. \end{cases}$$



## Описание расчётной области



$\Omega_1$  – воздух ( $\sigma = 10^{-6}$  См/м);

$\Omega_2$  – морская вода ( $\sigma = 3.3$  См/м);

$\Omega_3$  – грунт ( $\sigma = 0.2$  См/м);

$\Omega_4$  – углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м);

$L_1 = L_2 = L_3 = 6000$  м;

$h_1 = 600$  м;  $h_2 = 135$  м;

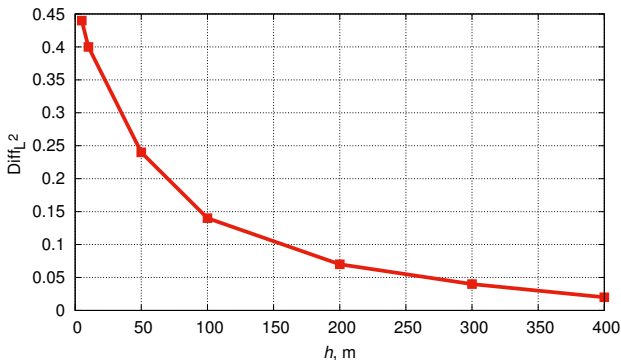
$h_3 = 75$  м;  $l_1 = 400$  м;

$d = 100$  м;  $\nu = 1$  Гц.

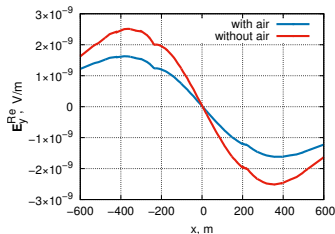
$h$  варьируется в ходе исследования.

Относительная разность решений при изменении глубины петли  $h$ :

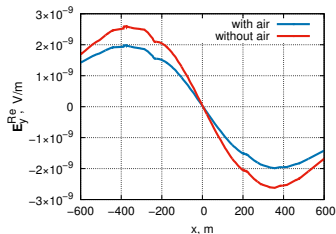
Глубина петли	5	10	50	100	200	300	400
$\frac{\ \mathbf{E}^{air} - \mathbf{E}^{noair}\ _{\mathbb{L}^2}}{\ \mathbf{E}^{air}\ _{\mathbb{L}^2}}$	0.44	0.40	0.24	0.14	0.07	0.04	0.02



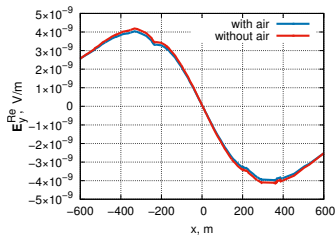
$\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  по линии  $y = 0, z = -610$ :



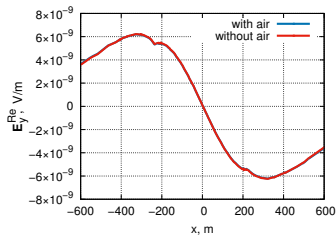
$h = 5$  м



$h = 50$  м

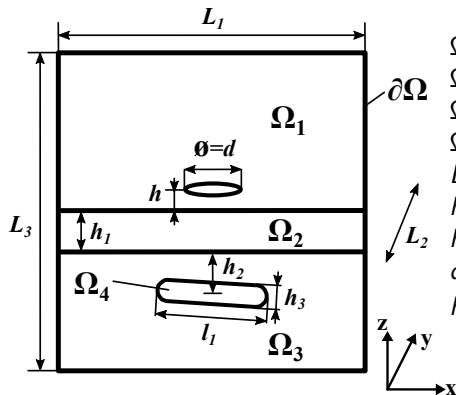


$h = 200$  м



$h = 300$  м

## Описание расчётной области



- $\Omega_1$  – воздух ( $\sigma = 10^{-6}$  См/м);
- $\Omega_2$  – морская вода ( $\sigma = 3.3$  См/м);
- $\Omega_3$  – грунт ( $\sigma = 0.2$  См/м);
- $\Omega_4$  – углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м);
- $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$  м;
- $h_1 = 300$  м;  $h_2 = 100$  м;
- $h_3 = 100$  м;  $l_1 = 400$  м;
- $d = 100$  м;  $\nu = 1$  Гц;
- $h = 5$  м.

## Варьирование коэффициентов растяжения:

$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_1$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_1$	$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_2$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_2$	$\text{Re}(\chi)$ в $\Omega_3$	$\text{Im}(\chi)$ в $\Omega_3$	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}} - \mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
3	0	1	5	3	1	0.106636	650	592
3	1	0	6	2	1	0.0925		599
4	0	1	5	3	1	0.0947		731
4	1	0	6	2	1	0.0910		591

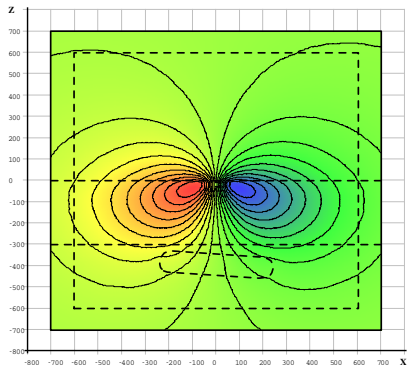
## Варьирование толщины PML-слоя:

$\delta_k$	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}} - \mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
80	0.1199	673	1289
100	0.0910	650	591
120	0.0784	609	1142

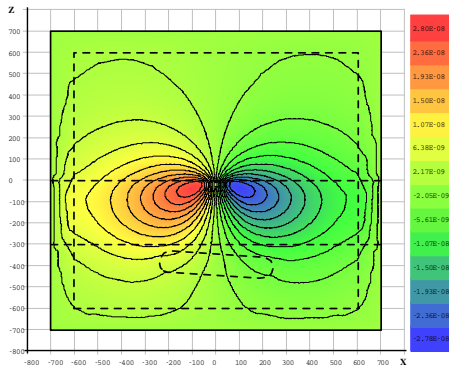
## Варьирование размера области, на границе которой вводится PML-слой:

$l_k$	$\frac{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}} - \mathbf{E}_y^{\text{PML}})\ }{\ \text{Re}(\mathbf{E}_y^{\text{бак}})\ }$	Время, бак	Время, PML
500	0.187456	628	587
600	0.0909998	650	591
800	0.0440642	718	658

Картины электрического поля  $\text{Re}(\mathbf{E}_y)$  при параметрах  $\chi_{\Omega_1} = (4, 0)$ ,  $\chi_{\Omega_2} = (1, 6)$ ,  $\chi_{\Omega_2} = (3, 2)$   $m = 3$ ,  $l_k = 600$  м и  $\delta_k = 100$  м в сечении плоскостью  $y = 0$ :

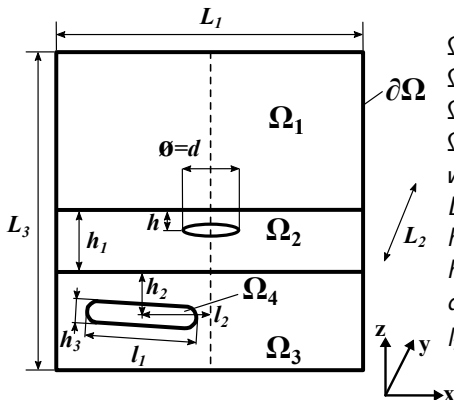


Решение с «большим баком»



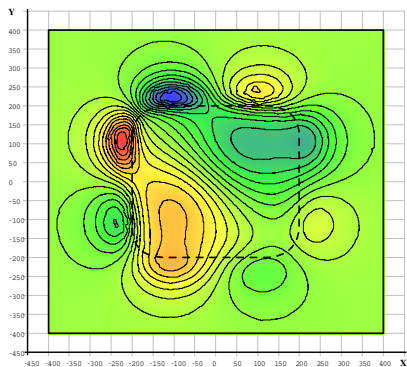
Решение с PML-слоем

## Описание расчётной области

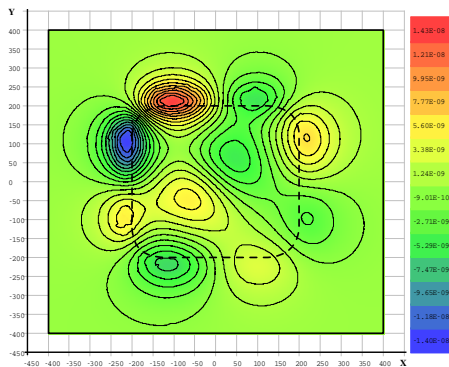


$\Omega_1$  – воздух ( $\sigma = 10^{-6}$  См/м);  
 $\Omega_2$  – морская вода ( $\sigma = 3.3$  См/м);  
 $\Omega_3$  – грунт ( $\sigma = 0.2$  См/м);  
 $\Omega_4$  – углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м)  
 или проводящий объект ( $\sigma = 10^2$  См/м);  
 $L_1 = L_2 = L_3 = 6000$  м;  
 $h_1 = 600$  м;  $h_2 = 120$  м;  
 $h_3 = 75$  м;  $l_1 = 400$  м;  
 $d = 100$  м;  $\nu = 1$  Гц;  $h = 590$  м;  
 $l_2 \in \{-200, -100, 0\}$ .

Картины электрического поля  $\text{Re}(\mathbf{E}_z)$  при  $l_2 = 0$  в сечении плоскостью  $z = -601$ :



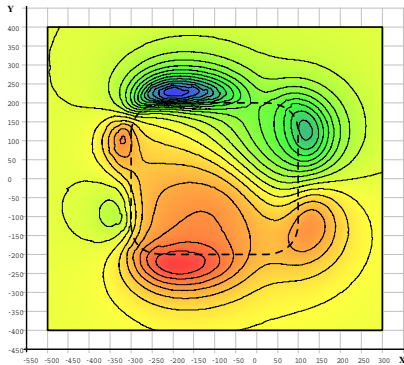
Углеводороды ( $\sigma = 10^{-2} \text{ См/м}$ )



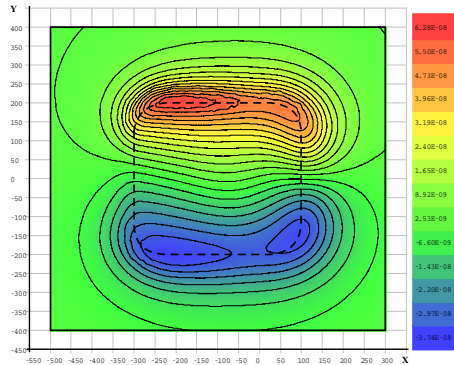
Проводящий объект ( $\sigma = 10^2 \text{ См/м}$ )



Картини электрического поля  $\text{Re}(\mathbf{E}_z)$  при  $l_2 = -100$  м в сечении плоскостью  $z = -601$ :

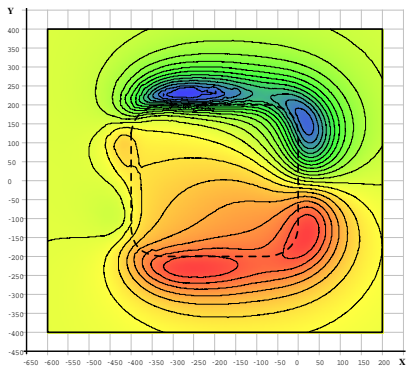


Углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м)

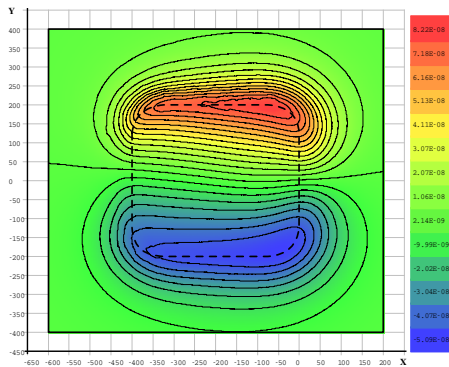


Проводящий объект ( $\sigma = 10^2$  См/м)

Картины электрического поля  $\text{Re}(\mathbf{E}_z)$  при  $l_2 = -200$  м в сечении плоскостью  $z = -601$ :



Углеводороды ( $\sigma = 10^{-2}$  См/м)



Проводящий объект ( $\sigma = 10^2$  См/м)

- Расчёты, в которых в область моделирования не включается воздух, допустимы только при расположении источника электромагнитного поля на большой глубине.
- Применение PML-слоя позволяет получить достаточно точные решения, однако его применение не приводит к резкому уменьшению размерности систем уравнений и, как следствие, к уменьшению времени решения.
- Проводящий объект хорошо «виден» на некотором расстоянии от морского дна, а непроводящий – только вблизи дна или при небольшом заглублении приёмника в грунт. Наибольший отклик на источник электромагнитного возмущения для непроводящего объекта наблюдался в том случае, когда источник располагался со смещением от центра симметрии объекта.