تمرین‌های کامپیوتری، سری چهارم (امتیاز تشویقی)

آخرین زمان تحویل: ۰۱/۱۱/۰۵ ساعت ۱۳:۳۰

راهنمایی عمومی: برای اطلاع از جزئیات و مشاهدهٔ مثال‌هایی از چگونگی استفاده از یک تابع متلب، کافیست به حسب نیاز به help متلب مراجعه کنید. برای این منظور وارد صفحهٔ help شوید و در قسمت جستجو، عنوان دستور مورد نظر را وارد کنید. در بخش توضیحات، توصیف جامعی از آن دستور شامل توصیف عملکرد دستور، نحوه تنظیم ورودی(ها)، توصیف خروجی(ها) و مثال‌هایی از نحوهٔ استفاده از دستور قابل مشاهده است.

در همه سوالات، m-file ها (کدها)ی خود را علاوه بر پاسخ‌های خود بارگذاری کنید.

۱- فرض کنید PMF متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد:

$$P(X=k)=\begin{cases}1/8 & k=1\\ 2/8 & k=2\\ 4/8 & k=3\\ 1/8 & k=4\end{cases}$$

الف) $\mu = E\{X\}$ را بر مبنای رابطه‌ی تئوری محاسبه کنید.

ب) کمیت $\sigma^2 = E\{(X-\mu)^2\}$ را بر مبنای رابطه‌ی تئوری محاسبه کنید.

ج) در این قسمت قصد داریم کمیت‌های μ و σ^2 را با استفاده از شبیه‌سازی، استخراج کرده و با مقادیر تئوری بند الف و ب مقایسه کنیم. برای این منظور، به کمک متلب، 1000 نمونه از متغیر تصادفی X را با تابع جرم احتمال داده شده تولید نمایید. سپس **بدون** استفاده از توابع mean و var، کمیت‌های μ و σ^2 را به کمک نمونه‌های تولید شده، استخراج، و با مقادیر تئوری مقایسه کنید.

راهنمایی:

- برای تولید نمونه‌های متغیر تصادفی X می‌توانید از روشی مشابه سوال ۲ از تمرین CA_2 و گسترش آن به ۴ حالت استفاده کنید.
- الزامی وجود ندارد حتما از دستورات logical ارائه شده در تمرین CA_2، استفاده کنید.
- برای تخمین میانگین یک متغیر تصادفی، می‌توان مجموع نمونه‌های آن متغیر تصادفی را بر تعداد نمونه‌ها تقسیم نمود.

۲- فرض کنید تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y، به صورت زیر باشد:

$p(X=x,Y=y)$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$X=1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

الف) توابع PMF حاشیه‌ای را به صورت تئوری، محاسبه نمایید.

ب) 10000 نمونه از متغیرهای تصادفی X و Y را با تابع جرم احتمال توام داده شده تولید کنید.

راهنمایی:

- برای تولید نمونه‌های متغیرهای تصادفی X و Y می‌توانید از روشی مشابه سوال ۲ از تمرین CA_2 و گسترش آن به ۴ حالت استفاده کنید.
- مقادیر نمونه‌های متغیرهای تصادفی X و Y را می‌توانید در دو بردار ذخیره کنید.
- الزامی وجود ندارد حتما از دستورات logical ارائه شده در تمرین CA_2، استفاده نمایید.

ج) به کمک نمونه‌های تولید شده از X و Y، مقادیر احتمالات توام $p(X=i, Y=j)\ ; i,j=0,1$، را با شمارش تعداد حالات مطلوب و تقسیم بر تعداد کل حالات، استخراج نمایید.

۳) در این سوال به بررسی قضیه‌ی حد مرکزی خواهیم پرداخت. طبق قضیه‌ی حد مرکزی، می‌دانیم اگر متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$، مستقل و با توزیع یکسان باشند، آنگاه توزیع متغیر تصادفی $Y = X_1 + \cdots + X_n$ با بزرگ شدن n، به توزیع نرمال، با میانگین $\mu_Y = n\mu_X$ و واریانس $\sigma_Y^2 = n\sigma_X^2$ میل خواهد کرد.

به منظور تایید صحت این قضیه، فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$، مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ هستند. بندهای الف تا ن را به ازای $n = 2, 6, 15, 20$ انجام دهید.

الف) تعداد $N = 1000$ نمونه از هر یک از متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ به صورت مستقل تولید کنید (و در n بردار ذخیره کنید).

ب) هیستوگرام یکی از متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ (مثلا X_1) را ترسیم کنید (با استفاده از دستور hist با تعداد دسته‌های 100).

ج) نمونه‌های متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را نظیر به نظیر جمع کرده و بردار حاصل را Y بنامید (برداری به طول 1000).

د) هیستوگرام متغیر تصادفی Y را ترسیم کرده و مشاهده‌ی خود را توصیف کنید.

ن) میانگین و واریانس Y را به کمک توابع mean و var تخمین زده و با آنچه انتظار داریم، مقایسه کنید.