تمرین‌های کامپیوتری، سری دوم

آخرین زمان تحویل: ۰۱/۰۹/۰۷ ساعت ۱۳:۳۰

راهنمایی عمومی: برای اطلاع از جزئیات و مشاهدهٔ مثال‌هایی از چگونگی استفاده از یک تابع متلب، کافیست به حسب نیاز به help متلب مراجعه کنید. برای این منظور وارد صفحهٔ help شوید و در قسمت جستجو، عنوان دستور مورد نظر را وارد کنید. در بخش توضیحات، توصیف جامعی از آن دستور شامل توصیف عملکرد دستور، نحوه تنظیم ورودی (ها)، توصیف خروجی (ها) و مثال‌هایی از نحوهٔ استفاده از دستور قابل مشاهده است.

۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع $\mathcal{N}(0,1)$ باشد.

الف) می‌دانیم تابع چگالی احتمال و تابع توزیع جمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad F_X(x) = 1 - Q(x)$$

به ازای مقادیر x در گسترهٔ $[-5,5]$ با اندازهٔ گام 0.01 دو تابع فوق را در دو شکل مجزا مستقیماً ترسیم کنید.

راهنمایی:

- برای ترسیم از دستور `plot` استفاده کنید.
- برای تعیین گسترهٔ مذکور کافیست x را به صورت $x = (-5:0.01:5)$ مقداردهی کنید.
- مقدار e^x در متلب با استفاده از دستور $\exp(x)$ قابل محاسبه است.
- تابع Q در متلب با استفاده از تابع `qfunc` در دسترس می‌باشد.
- توجه کنید که توابع موجود در متلب به گونه‌ای نوشته شده است که می‌تواند ورودی آن به جای یک عدد، یک ماتریس متشکل از مجموعه‌ای از اعداد باشد. خروجی متناظر نیز یک ماتریس متشکل از اعدادی متناظر به اعداد ورودی می‌باشد. بنابراین در محاسبات، از این ویژگی توابع استفاده کنید.

ب) با استفاده از تابع `normpdf` مقادیر تابع چگالی احتمال را در گسترهٔ $[-5,5]$ با اندازهٔ گام 0.01 به دست آورید و ترسیم کنید. نتیجه را با شکل ترسیم شده در بند الف مقایسه کنید.

راهنمایی:

- برای این منظور، ورودی اول دستور `normpdf` را متغیر x تعریف شده به صورت $x = (-5:0.01:5)$ انتخاب کنید.

ج) با استفاده از تابع `normcdf` مقادیر تابع توزیع جمعی را در گسترهٔ $[-5,5]$ با اندازهٔ گام 0.01 به دست آورید و ترسیم کنید. نتیجه را با شکل ترسیم شده در بند الف مقایسه کنید.

راهنمایی:

- برای این منظور، ورودی اول دستور `normcdf` را متغیر x تعریف شده به صورت $x = (-5:0.01:5)$ انتخاب کنید.

۲- تابع `rand(m,n)` ماتریسی $m \times n$ تولید می‌کند که المان‌های این ماتریس مستخرج از توزیع یکنواخت در بازهٔ 0 و 1 می‌باشد. به بیان دیگر، این تابع، تحقق‌هایی (نمونه‌هایی) از یک متغیر تصادفی با توزیع unif[0,1] را استخراج می‌کند.

الف) با انتخاب $m = 1$ و $n = 5$ برداری متشکل از 5 نمونهٔ استخراج شده از توزیع مذکور تشکیل دهید. مقادیر را ارائه کنید.

ب) فرض کنید این مقادیر درون بردار x قرار داشته باشد. بردار y را چنان تشکیل دهید که اگر مقدار موجود در بردار x بزرگ‌تر از 0.5 باشد مقدار متناظر در y برابر 1 و در غیر این صورت 0 باشد. نتیجه را گزارش کنید.

راهنمایی:

- برای این منظور می‌توانید از دستور y = x > 0.5 استفاده کنید. این دستور جزء دستورات منطقی (logical) متلب است به این ترتیب که اگر عبارت سمت راست تساوی، درست (true) باشد به آن 1 و در غیر این صورت 0 نسبت داده می‌شود. این بررسی به صورت المان به المان انجام می‌شود.

ج) آزمایش پرتاب سکه با برآمدهای شیر و خط را در نظر بگیرید. فرض کنید سنگینی یک سمت سکه بیشتر است به طوری‌که احتمال مشاهدهٔ شیر و خط در یک پرتاب به ترتیب برابر 0.7 و 0.3 می‌باشد. فرض کنید مقادیر 0 و 1 به ترتیب متناظر با برآمدهای شیر و خط باشد. صرفاً با استفاده از تابع `rand` و راهنمایی بند ب چگونه می‌توان با استفاده از متلب، نتیجهٔ آزمایش پرتاب سکه را (بدون انجام واقعی آزمایش) شبیه‌سازی کرد؟ به دقت توضیح دهید.

د) مبتنی بر پاسخ بند ج برداری متشکل از مقادیر 0 و 1 چنان ارائه کنید که نتایج شبیه‌سازی 10 پرتاب سکه را ارائه نماید. با شمارش تعداد 1 ها، تعداد دفعات وقوع پیشامد خط را گزارش کنید.

راهنمایی:

- برای شمارش تعداد 1 ها می‌توانید از دستور `sum` استفاده کنید.

و) بند د را برای 1000 پرتاب سکه تکرار کنید و با شمارش تعداد دفعات وقوع پیشامد خط، تخمینی از احتمال وقوع آن را محاسبه و با مقداری که انتظار دارید مقایسه کنید. مقادیر را گزارش کنید. نیازی به گزارش بردار متشکل از 0 و 1 نیست.

۳– مقدمه: فرض کنید N نمونه از متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ در دست باشد. با استفاده از تابع `hist` از متلب می‌توان فراوانی مقادیر موجود در بازه‌های

$$(x_i\,, x_{i+1})\,, \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

را استخراج کرد. در متلب ورودی‌های این تابع را به دو شکل می‌توان تنظیم کرد:

حالت اول: $\texttt{hist}(y,c)$

که در آن y برداریست محتوی N نمونهٔ متغیر تصادفی مذکور و c برداریست با M المان که مقادیر آن بر مرکز بازه‌های مذکور ($\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$) دلالت دارد.

حالت دوم: $\texttt{hist}(y,M)$

که در آن y توصیفی چون گذشته دارد و M بر تعداد بازه‌ها اشاره دارد. در این حالت تابع `hist` کل گسترهٔ بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین نمونهٔ موجود در y را به M بازهٔ مساوی به طول Δx تقسیم می‌کند. پس داریم $x_{i+1} - x_i = \Delta x$

در این تمرین حالت دوم را مد نظر قرار دهید.

فرض کنید N_i بر فراوانی متناظر بازهٔ $(x_i\,, x_{i+1})$ دلالت داشته باشد. می‌دانیم به ازای مقادیر بزرگ N می‌توان نوشت:

$$P(x_i < X < x_{i+1}) \cong \frac{N_i}{N}$$

از سوی دیگر با فرض کوچک بودن Δx داریم:

$$P(x_i < X < x_{i+1}) \cong f_X(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f_X(x_i)\Delta x$$

پس بر مبنای دو رابطهٔ فوق می‌توان نوشت:

$$f_X(x_i)\Delta x \cong \frac{N_i}{N} \quad \Rightarrow \quad f_X(x_i) \cong \frac{N_i}{N\Delta x}$$

بنابراین PDF متغیر تصادفی به صورت تقریبی با مقادیر فراوانی که توسط هیستوگرام به دست می‌آید متناسب است.

پایان مقدمه.

تعداد $N = 100000$ نمونه از متغیر تصادفی X با توزیع ریلی با پارامتر 1 را تولید کنید و با ترسیم PDF تقریبی و همچنین تابع PDF اصلی، درستی نتیجهٔ فوق را بررسی کنید.

راهنمایی:

- متغیر تصادفی ریلی با پارامتر σ دارای PDF به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- برای تولید متغیر تصادفی ریلی از تابع `raylrnd` استفاده کنید.
- در تابع هیستوگرام تعداد بازه‌ها را $M = 100$ انتخاب کنید.
- در صورت نیاز، حداقل و حداکثر مجموعه‌ای از مقادیر را می‌توانید با توابع `min` و `max` استخراج کنید.
- برای ترسیم تابع PDF تقریبی، با توجه به رابطه $f_X(x_i) \cong \frac{N_i}{N\Delta x}$ لازم است ابتدا N_i ها، x_i ها و همچنین Δx استخراج شده و سپس مقادیر PDF تقریبی محاسبه گردد.