به نام خدا

تئوری تخمین (۲۵۱۶۳-۱)

تمرین سری چهارم

بهار ۱۴۰۳-۱۴۰۴

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

اساتید: روح الله امیری و محمّدمهدی مجاهدیان

موعد تحویل: دوشنبه ۱۲ خرداد

۱ تخمین‌گر MMSE

تابع چگالی احتمال مشترک از دو متغیر تصادفی X و Y برابر است با

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3xy, & 0 < y < -\frac{x}{2} + 1,\ x > 0, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

- تخمین MMSE از Y با مشاهده X را به دست آورید؟
- مقدار اُریبی این تخمینگر MMSE چقدر است؟
- مقدار میانگین مربعات خطای این تخمینگر MMSE چقدر است؟

۲ تخمین‌گر خطی MMSE

با فرض مشاهده متغیر تصادفی X می‌دانیم تخمین‌گر کمینه میانگین مربعات خطا (MMSE) از متغیر Y برابر $\mathbb{E}[Y|X]$ است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید؟

- بهترین تخمین‌گر خطی با معیار MMSE چیست. به عبارت دیگر a^* و b^* را در مسئله بهینه‌سازی زیر پیدا کنید؟

$$(a^*, b^*) = \arg\min_{\mathrm{a,b}} \mathbb{E}\left[(\mathrm{Y} - \mathrm{a} - \mathrm{bX})^2\right].$$

- برای a^* و b^* محاسبه شده در بالا نشان دهید:

$$\mathbb{E}\Big[\,(Y - a^* - b^* X)\,X\Big] = 0.$$

- می‌دانیم برای متغیرهای تصادفی مشترکاً گوسی، ناهمبستگی معادل استقلال است. با توجه به این نکته و قسمت‌های قبل، برای متغیرهای تصادفی مشترکاً گوسی چه ارتباطی بین $\mathbb{E}[Y|X]$ و تخمین خطی مطرح شده در بالا وجود دارد؟

۳ توزیع‌های همزاد و توزیع پسین

در هرکدام از موارد زیر توزیع درستنمایی و توزیع پیشین داده شده است. نشان دهید همزاد هستند و پارامترهای توزیع پسین را محاسبه فرمایید:

- تابع درستنمایی: گوسی با میانگین معلوم μ، پارامتر: عکس واریانس $\theta = \frac{1}{\sigma^2}$، توزیع همزاد: $\mathrm{Gamma}\left(a_0, b_0\right)$
- تابع درستنمایی: لاگ-نرمال با واریانس معلوم σ^2، پارامتر: میانگین $\theta = \mu$، توزیع همزاد: $\mathcal{N}\left(\mu_0, \sigma_0^2\right)$

۴ تخمین بیزی واریانس متغیر تصادفی گوسی با توزیع پیشین بتا

فرض کنید می‌خواهیم واریانس $\theta = \sigma^{۲}$ متغییرتصادفی گوسی با میانگین صفر را تخمین بزنیم. N مشاهده مستقل و با توزیع یکسان $\mathbf{x}$ در اختیار داریم. توزیع پیشین واریانس توزیع بتا است.

$$\pi(\theta) = \mathrm{Beta}\left(a, a\right).$$

به موارد زیر پاسخ دهید:

- تخمین‌گر MAP را به دست آورید.
- کران تخمین بیزی را به دست آورید.
- نمودار میانگین مربعات خطا برای تخمین‌گر MAP و کران تخمین بیزی را برای $a = ۵$ و بر حسب $۲ \leq N \leq ۱۰۰۰۰$ رسم کنید؟
- رفتار حدی میانگین مربعات خطی تخمینگر MAP را با رفتار حدی کران بیزی مقایسه کنید؟

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Bmse}\left(\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}}\right) \stackrel{?}{=} \mathrm{BCRB}.$$

- به‌طور کلی نشان دهید:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Bmse}\left(\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}}\right) = \mathbb{E}_{\theta}\left[\lim_{N\to\infty} \mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}\right)\right] = \mathbb{E}_{\theta}\left[\mathrm{CRB}\right].$$

۵ کران کرامر-رائو بیزی وزن‌دهی شده

در کلاس دیدیم که یک دسته کلی از کران‌های بیزی به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathrm{Bmse}\left(\hat{\theta}\right) \geq \mathbf{T}\mathbf{G}^{-۱}\mathbf{T}^{\mathsf{T}},$$

که ماتریس‌های $\mathbf{T}$ و $\mathbf{G}$ در کلاس معرفی شدند. فرض کنید تابع $g(\mathbf{x}, \theta)$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$g(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}, \theta)\frac{\partial \ln\left(p(\mathbf{x}, \theta)q(\mathbf{x}, \theta)\right)}{\partial \theta}$$

- نشان دهید $g(\mathbf{x}, \theta)$ در شرط $\mathbb{E}_{\theta|\mathbf{x}}\left[g(\mathbf{x}, \theta)\right] = ۰$ صدق کرده و ماتریس‌های $\mathbf{T}$ و $\mathbf{G}$ را محاسبه و کران پایین بیزی وزن‌دهی شده را محاسبه فرمایید.
- کران بیزی وزن‌دهی شده را برای مسئله سوم با فرض تعریف تابع وزن به‌صورت زیر به دست آورید.

$$q(\mathbf{x}, \theta) = q_c(\theta) = \begin{cases} \theta^{c}(۱-\theta)^{c}, & ۰ < \theta < ۱, \\ ۰, & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

- کران تخمین بیزی وزن‌دهی شده که روی پارامتر c بهینه می‌شود را برای $a = ۵$ و بر حسب $۲ \leq N \leq ۱۰۰۰۰$ رسم کنید و مشاهده کنید که کران بهتری نسبت به مسئله سوم خواهیم داشت؟

۶ تخمین پارامتر هیبرید

فرض کنید N مشاهده مستقل از دو پارامتر a و b به‌صورت زیر داریم:

$$x_n = a + b + w_n, \quad w_n \sim \mathcal{N}\left(۰, \sigma^{۲}\right), \quad n = ۰, ۱, \ldots, N-۱.$$

پارامتر a یک پارامتر ثابت و b یک پارامتر تصادفی است.
توزیع پیشین $\pi(b) = \mathcal{N}(۰, \tau^{۲})$ را داریم.

- تخمین ML\ MAP را به دست آورید:

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \arg\max_{a,b}\left\{\ln p(\mathbf{x}|a, b) + \ln \pi(b)\right\}$$

- کران کرامر-رائوی هایبرید به‌صورت زیر محاسبه کنید:

$$[\mathbf{J}_H]_{ij} \triangleq \mathbb{E}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}_r|\boldsymbol{\theta}_{nr}}\left\{\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r|\boldsymbol{\theta}_{nr})}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r|\boldsymbol{\theta}_{nr})}{\partial \theta_j}\right\} = -\mathbb{E}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}_r|\boldsymbol{\theta}_{nr}}\left\{\frac{\partial^{۲} \ln p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r|\boldsymbol{\theta}_{nr})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right\},$$

که در آن $\boldsymbol{\theta}_r$ پارامترهای تصادفی و $\boldsymbol{\theta}_{nr}$ پارامترهای غیرتصادفی هستند.

$$\mathrm{HCRB} = \mathbf{J}_H^{-۱}.$$