به نام خدا

علی قاسم‌زاده ۴۰۱۱۰۶۲۳۹۵ تمرین دوم تئوری تخمین

۱- ابتدا H^TH را حساب می‌کنیم، داریم که،

$$H^TH = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3+\varepsilon \\ 3+\varepsilon & 2+(1+\varepsilon)^2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(H^TH) = 3(2+(1+\varepsilon)^2) - (3+\varepsilon)^2$$

$$\rightarrow \det(H^TH) = 9+6\varepsilon+3\varepsilon^2-9-6\varepsilon-\varepsilon^2 = 2\varepsilon^2 \rightarrow (H^TH)^{-1} = \cancel{\frac{1}{\det(H^TH)}}$$

$$\frac{1}{\det(H^TH)}\begin{bmatrix} 2+(1+\varepsilon)^2 & -3-\varepsilon \\ -3-\varepsilon & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 2+(1+\varepsilon)^2 & -3-\varepsilon \\ -3-\varepsilon & 3 \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که اگر $\varepsilon \rightarrow 0$ تمامی درایه‌ها به بی‌نهایت میل می‌کند، آنگاه خواهیم داشت که ماتریس تمام درایه‌هایش به بی‌نهایت میل می‌کند.

داشتیم که،

$$X = H\theta + w \rightarrow w = X - H\theta \rightarrow \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \|w\|_2^2 \rightarrow$$

$$\underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \|X - H\theta\|_2^2 \rightsquigarrow (X-H\theta)^T(X-H\theta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}(X-H\theta)^T(X-H\theta) =$$

$$-2H^T(X-H\theta) = 0 \rightarrow 2H^TX = 2H^TH\theta \rightarrow \hat{\theta} = (H^TH)^{-1}H^Tx \rightarrow$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 2+(1+\varepsilon)^2 & -3-\varepsilon \\ -3-\varepsilon & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\varepsilon^2}\begin{bmatrix} \varepsilon+\varepsilon^2 & \varepsilon+\varepsilon^2 & -2\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 4\varepsilon^2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\theta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از طرفی داشتیم که $\det(H^TH) = 2\varepsilon^2$ پس با $\varepsilon \rightarrow 0$ رنک ماتریس نیز کم خواهد شد.

مشاهده می‌شود که θ به ε وابستگی ندارد

۲- داشتیم که

$x = H\theta + w \longrightarrow w = x - H\theta \longrightarrow$ for minimizing $\|w\|_2^2 \longrightarrow$

minimize $\|x - H\theta\|_2^2 \longrightarrow \hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T x$

حالا از راهنمایی سوال استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت که :

$$x' = A(H^T H)^{-1} H^T x = A(H^T H)^{-1} H^T (H\theta + w) = \underbrace{A\theta}_{\alpha} + \underbrace{A(H^T H)^{-1} H^T w}_{w'}$$

$\longrightarrow x' = \alpha + w' \rightsquigarrow$ می‌خواهیم نویز w' را کمینه کنیم،

$\hat{\alpha} = x' \longleftarrow \min_{\alpha} \|x' - \alpha\|_2^2$, که داریم که

پس خواهیم داشت که : $\hat{\alpha} = A(H^T H)^{-1} H^T x \rightarrow$ از قبل هم داشتیم که $(H^T H)^{-1} H^T x$

برابر است با $\hat{\theta} \leftarrow$ خواهیم داشت که $\hat{\alpha} = A\hat{\theta}$

حالا داریم که :

$$\mathrm{cov}(\hat{\alpha}) = \mathrm{cov}(A\hat{\theta}) = A\,\mathrm{cov}(\hat{\theta})\,A^T$$

برای $\mathrm{cov}(\hat{\theta})$ و ساده‌تر شدن مسئله فرض می‌کنیم نویز ما گاوسی $(0, \sigma^2)$ باشند

خواهیم داشت که ،

$$p(x;\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - H\theta)^T (x - H\theta)\right) \longrightarrow$$

$$\boxed{\Sigma = \sigma^2 I \rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I}$$

می‌دانیم که این تخمین‌گر خطی در حالت نویز گاوسی efficient است پس به باند کرامر رائو می‌رسد

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(x;\theta) = \frac{1}{2\sigma^2} 2H^T (x - H\theta) \rightarrow \frac{1}{\sigma^2}(H^T x - H^T H\theta) \rightarrow$$

$$I(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{\sigma^4}(H^T (x - H\theta))(H^T (x - H\theta))^T\right\} =$$

$$\frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}\{H^T (x - H\theta)(x - H\theta)^T H\} = \frac{1}{\sigma^4} H^T \underbrace{\mathbb{E}\{(\overbrace{x - H\theta}^{w})(\overbrace{x - H\theta}^{w^T})^T\}}\, H$$

$$\frac{1}{\sigma^4} H^T \mathbb{E}\{w w^T\} H = \frac{1}{\sigma^4} H^T (\sigma^2 I) H = H^T H / \sigma^2 \rightarrow$$

~~$\mathrm{cov}(\hat{\alpha}) = A$~~

$$\rightarrow \operatorname{cov}(\hat{\theta}) = I^{-1}(\theta) = \sigma^2 (H^T H)^{-1}$$

$$\rightarrow \operatorname{cov}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 A (H^T H)^{-1} A^T$$

۳- داریم که:

$$x[n] = A\cos(2\pi f_0 n) + w[n] \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

می خواهیم تخمین گر MVU پیدا کنیم:

۱. دامنه A، با فرض که معلوم است:

$$f(x;A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_n (x[n] - A\cos(2\pi f_0 n))^2\right)\right) =$$

$$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_n x[n]^2\right)}_{h(x)} \exp\left(-\frac{9A}{\sigma^2}\underbrace{\sum_n x[n]\cos(2\pi f_0 n)}_{T(x)} - \frac{A^2}{2\sigma^2}\sum \cos(2\pi f_0 n)\right)$$

$$= h(x)\, g(T(x);A) \checkmark \longrightarrow$$ $T(x)$ یک آمارگان کافی است

← طبق فرض سوال آمارگان کامل نیز هست.

$$\mathbb{E}\{T(x)\} = \mathbb{E}\left\{\sum_n x[n]\cos(2\pi f_0 n)\right\} = A\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)$$

← برای اینکه تخمین گر ما بدون بایاس باشد، باید داشته باشیم که:

$$\hat{A} = \frac{1}{\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)}\, T(x) \longrightarrow \mathbb{E}\{\hat{A}\} = A$$

← طبق کامل بودن ← این عبارت یکتا است و $\hat{A}$، MVU است.

۲. حالا $\theta = \begin{bmatrix} A \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$ خواهیم داشت که:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_n (x[n] - A\cos(2\pi f_0 n))^2\right)\right) =$$

$$\rightarrow \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\underbrace{\sum_n x[n]^2}_{T_2(x)} - 2A\underbrace{\sum_n \cos(2\pi f_0 n)\, x[n]}_{T_1(x)} + A^2\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)\right)\right)$$

$h(x)=1$ $\quad g(T(x);\theta) \rightarrow$ بقیه عبارت

حالا باید تابعی یکتا پیدا کنیم که $g(T(x))=\hat{\theta}$ برای $T_1(x)$ مثل بخش قبلی خواهیم داشت که

$$\hat{A} = \frac{\sum_n x[n]\cos(2\pi f_0 n)}{\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)}$$

حالا باید برای $T_2(x)$ بدست آوریم،

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}, \quad T_2(x) = \sum_n x[n]^2 \Rightarrow \mathbb{E}\left\{\sum_n x[n]^2\right\} \Rightarrow$$

$$E\{T_2(x)\} = \sum_n \mathbb{E}\{x[n]^2\} = \sum_n \left(\mathrm{var}(x[n]) + \mathbb{E}\{x[n]\}^2\right) =$$

$$\boxed{\sum_n \left(\sigma^2 + A^2\cos^2(2\pi f_0 n)\right)}$$

$$\mathbb{E}\{\hat{A}^2\} = \frac{\mathbb{E}\left\{\left(\sum_n x[n]\cos(2\pi f_0 n)\right)^2\right\}}{\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_n \underbrace{x[n]}_{A\cos(2\pi f_0 n)+w[n]} \cos(2\pi f_0 n)\right)^2\right\} = A^2\left(\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)\right)^2 + \sigma^2\left(\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)\right)$$

$$\boxed{\rightarrow \mathbb{E}\{\hat{A}^2\} = A^2 + \frac{\sigma^2}{\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)}}$$

Scanned with CamScanner

$$\longrightarrow \cancel{T_2(x)}\ \mathbb{E}\left\{T_2(x) - \hat{A}^2 \sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)\right\} =$$

$$(N-1)\sigma^2 \longrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{N-1}\mathbb{E}\left\{T_2(x) - \left(\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)\right)\hat{A}^2\right\}$$

$$\longrightarrow g(T) = \begin{bmatrix} T_1(x) \Big/ \sum_n \cos^2(2\pi f_0 n) \\ \\ \frac{1}{N-1}\left(T_2(x) - \frac{\left(\sum_n x[n]\cos(2\pi f_0 n)\right)^2}{\sum_n \cos^2(2\pi f_0 n)}\right) \end{bmatrix}$$

طبق می دانیم که این بدون بایاس است و طبق فرض آمارگان کافی و کامل یکتاست ←
تخمین گر MVU ما همین است.

۴- داریم که،

$$f(x;\theta) = \frac{h(x)}{h(x)}\ \underbrace{c(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^{m} w_i(\theta)T_i(x)\right)}_{g(T(x);\theta)}$$

۴.۱.

LoTi که

$$f(x \mid T(x)=T;\theta) = \frac{f(x;\theta)\ \delta(T(x)=T)}{f(T(x)=T;\theta)} = \frac{h(x)\ g(T(x);\theta)\ \delta(T(x)=T)}{\int f(x;\theta)\ \delta(T(x)=T)\, dx}$$

$$= \frac{h(x)\ g(T(x)=T;\theta)\ \delta(T(x)=T)}{\int h(x)\ g(T(x)=T;\theta)\ \delta(T(x)=T)\, dx} = \frac{\cancel{g(T(x)=T;\theta)}\ h(x)\ \delta(T(x)=T)}{\cancel{g(T(x)=T;\theta)}\int h(x)\ \delta(T(x)=T)\, dx} =$$

$$= \frac{h(x)\ \delta(T(x)=T)}{\int h(x)\ \delta(T(x)=T)\, dx} \longrightarrow$$

به θ بستگی ندارد

T یک آمارگان کافی است.

۲-۴. می‌دانیم که برای کامل بودن یک آماره باید داشته باشیم که،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(T)\, p(T;\theta)\, dT = 0 \quad \forall\theta \rightarrow v(T) = 0$$

اگر این انتگرال برای خانواده نمایی g صفر باشد، خواهیم داشت که،

$$\mathbb{E}\{g(T)\} = \int g(T) f(x;\theta)\, dx = \int g(T)\, h(x)\, c(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^{m} w_i(\theta) T_i(x)\right) dx$$

$$= \int g(T)\, h(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{m} w_i(\theta) T_i(x)\right) dx = 0 \quad \forall\theta \rightarrow$$

حالا اگر فضایی که توسط توابع $w_i(\theta)$ گسترده می‌شود به صورت مستطیل دو بعدی باشد، داریم که،

$$\int g(T)\, h(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{m} w_i(\theta) T_i(x)\right) dx = 0 \quad \forall\theta \in \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} = \{w_1(\theta), \ldots, w_m(\theta) : \theta \in \Theta\}, \quad \forall i : \alpha_i \leq w_i(\theta) \leq \beta_i$$

$$B = \{(w_1, \ldots, w_m) : \alpha_i \leq w_i(\theta) \leq \beta_i ; i = 1 \ldots m\}$$

~~[illegible]~~ روی B تبدیل لاپلاس $F(T) = \int_{T = [T_1 \ldots T_m]^T} g(T)\, h(x)\, dx$ را می‌نویسیم خواهیم داشت که،

$$\mathbb{E}\{g(T)\} = \int \cdots \int F(T) \exp\left(\sum_{i=1}^{m} w_i(\theta) T_i(x)\right) dT(x) = 0$$

$$\forall (w_1 \ldots w_m) \in B$$

Scanned with CamScanner

از خواص تبدیل لاپلاس یک تابع روی یک مجموعه غیر تهی داریم که اگر صفر باشد خود تابع تقریباً همه جا باید صفر باشد.

۴-۳۰. فرض کنیم U یک آماره‌ی کافی باشد، نشان می‌دهیم که آمارگان کافی و کامل T تابعی از U خواهد بود. قرار دهید $T=(T_1(n),\ldots,T_n(n))$ ، $S_i(T)=[1+e^{-T_i}]^{-1} \leftarrow S_i$ محدود است و bijective ، قرار دهید،

$$X_i(u)=\mathbb{E}_\theta\{S_i(T)|U=u\} \qquad Y_i(t)=\mathbb{E}_\theta\{X_i(U)|T=t\}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $S_i(T)=X_i(U)$ برای هر θ ← چون S_i ، bijective است خواهیم داشت که $T_i=S_i^{-1}(X_i(U))$ ← ادعای ما اثبات می‌شود

1 نشان می‌دهیم که $S_i(T)=Y_i(T)$ است به صورت a.s. برای هر θ.

$$\mathbb{E}_\theta\{Y_i(T)\}=\mathbb{E}_\theta[E_\theta[X_i(U)|T]]=\mathbb{E}_\theta(X_i(U))=\mathbb{E}_\theta[E_\theta[S_i(T)|U]]=$$

$$\mathbb{E}_\theta\{S_i(T)\}$$

چونکه به ازای تمام θ داریم که $E_\theta\{Y_i(T)-S_i(T)\}=0$ ← چون S_i باند هست Y_i نیز باند هست از completeness داریم که $P_\theta(S_i(T)=Y_i(T))=1$ برای تمام θها.

2 نشان می‌دهیم که $X_i(U)=Y_i(T)$ به صورت a.s. P برای تمامی θها.

از گام قبلی داریم که $\mathbb{E}_\theta\{Y_i(T)|U\}=X_i(U)$ به صورت a.s. P پس کافی است نشان دهیم که $Var_\theta(Y_i(T)|U)=0$ به صورت a.s. P

داریم که،

$$Var_\theta(Y_i(T))=E_\theta[Var_\theta(Y_i(T)|U)]+Var_\theta(X_i(U))=$$

$$\mathbb{E}_\theta\{Var_\theta(Y_i(T)|U)\}+\mathbb{E}_\theta\{Var_\theta(X_i(U)|T)\}+Var_\theta(S_i(T))$$

پس شرط رسیدن به CRLB عبارت است:

$$\eta'(\theta)\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - nA'(\theta) = K(\theta)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T(x_i)}{n} - \theta\right)$$

$$\eta'(\theta)\, n\hat{\theta} - nA'(\theta) = K(\theta)(\hat{\theta} - \theta) \longrightarrow K(\theta) = n\eta'(\theta) \,,\, \theta K(\theta) = nA'(\theta)$$

$$\longrightarrow \theta\, n\,\eta'(\theta) = nA'(\theta) \longrightarrow \underline{A'(\theta) = \theta\,\eta'(\theta)}$$

حالا برعکس این هم داریم اگر کران کرامر رائو حاصل شود، آنگاه

$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta) = a(\theta)(T(x) - b(\theta))$ و با انتگرال گیری به فرم خانواده نمایی می رسیم

ولی برای حالت برداری باید داشته باشیم که

$$\nabla_\theta \log f(x;\theta) = J(\theta)(\hat{\theta}(x) - \theta)$$

و خانواده نمایی چند پارامتری به صورت زیر است:

$$f(x;\theta) = h(x)\exp\left(\sum_{j=1}^{k} \eta_j(\theta) T_j(x) - A(\theta)\right)$$

باید ساختار ماتریس فیشر و خانواده نمایی با هم بخوره و تطبیق داشته باشه تا نتیجه برای خانواده نمایی در حالت برداری برقرار باشد.

از گام ① داریم که $Var_\theta(Y_i(T)) = Var_\theta(S_i(T))$, $\mathbb{E}_\theta\{Var_\theta(X_i(U)|T)\} = 0$

چون $X_i(U)$ = معلوم است، T هم معلوم است ←

با ترکیب اینها داریم که $Var_\theta(Y_i(T)|U) = 0$ به صورت P a.s.

۳-۱۴. داشتیم که شرط وصول به کران کرامر رائو عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_1 - x_n;\theta) = I(\theta)\left(g(x) - \theta\right)$$

داریم که،

$$f(x;\theta) = h(x)\exp\left(\eta(\theta)T(x) - A(\theta)\right)$$

$T(x)$ آماره کافی، $A(\theta)$ تابع پارتیشن لگاریتمی هستند.

$$\ln f(x;\theta) = \ln h(x) + \eta(\theta)T(x) - A(\theta) \longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta) = \eta'(\theta)T(x) - A'(\theta)$$

حالا اگر مشاهدات $x_1 — x_n$ را داشته باشیم، خواهیم داشت که،

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_i;\theta) = \eta'(\theta)\left(\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - nA'(\theta)\right)$$

پس اگر $\hat\theta$ یک تخمین گر کارا آماره کافی خانواده نمایی باشد ←

$\hat\theta = \frac{\sum_i T(x_i)}{n}$ ② یا تابعی از این مقدار است.

$$\theta = \mathbb{E}\{T(X)\} = \frac{A'(\theta)}{\eta'(\theta)}$$

۴-۵. داریم که

$$X_1 \text{——} X_n \mid \theta \sim \text{Gamma}(m+1, 2\theta)$$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x^m e^{-x/2\theta}}{(2\theta)^{m+1}\, m!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

for samples x_1 —— x_n,

$$f(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^m e^{-x_i/2\theta}}{\left((2\theta)^{m+1} m!\right)^n} I(\min x_i \geq 0)$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^m\right) I(\min(x_i) \geq 0)}{(2^{m+1} m!)^n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} e^{-x_i/2\theta}\right) \Big/ (\theta^{m+1})^n =$$

$$\underbrace{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^m\right) I(\min(x_i) \geq 0)}{(\quad m!)^n}}_{h(x)} \cdot \underbrace{\exp\left(\frac{-1}{2\theta} \overbrace{\sum x_i}^{T(x)}\right) \cdot \frac{1}{(\theta^{m+1})^n}}_{g(T(x);\theta)} \Rightarrow$$

طبق قضیه نیمن فیشر داریم که $T(x) = \sum x_i$ آماره کافی است.

هر X_i از توزیع Gamma آمده است ←

$$Y = \sum X_i \sim \text{Gamma}(n(m+1), 2\theta) \longrightarrow$$

$$f_Y(y;\theta) = \frac{y^{nm} e^{-y/2\theta}}{(2\theta)^{n(m+1)} (nm)!}, \quad y \geq 0$$

Scanned with CamScanner

این توزیع نیز متعلق به خانواده نمایی است و آماره کافی Y یک آماره کامل است.

$$\mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\{\sum X_i\} = nm\theta$$

برای یافتن تخمین‌گر unbiased برای θ، ~~ابتدا خانواده نمایی را داریم~~ ~~استفاده می‌کنیم~~

$$\theta = \frac{1}{nm}\mathbb{E}\{Y\} \longrightarrow \theta = \mathbb{E}\{\frac{1}{nm}Y\}$$

$\leftarrow$ $\frac{1}{nm}Y$ یک تخمین‌گر بدون بایاس برای θ است.

چون Y یک آماره کامل و کافی بود $\leftarrow$ $\frac{1}{nm}Y$، MVU است.

$$\longrightarrow \hat{\theta}_{MVU} = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(\sum X_i) = nm\theta^2$$

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}_{MVU}) = \mathrm{var}(\frac{1}{nm}\sum X_i) = (\frac{1}{nm})^2 nm\theta^2 = \frac{\theta^2}{nm}$$

$\leftarrow$ تخمین‌گر MVU ما $\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n} X_i$ است و واریانس آن θ^2/nm است.

۵-۱. داریم که،

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}I(x_i\le\theta)=\frac{1}{\theta^n}I(\underbrace{\max x_i}_{T(X)}\le\theta) \qquad h(x)=1$$

پس خواهیم داشت که $T(x)$ یک آمارگان کافی است چرا که تجزیه/ نیمن فیشر نوشته شد برقرار است.

حالا داریم که،

$$\frac{f(X;\theta)}{f(Y;\theta)}=\frac{\frac{1}{\theta^n}I(\max X_i\le\theta)}{\frac{1}{\theta^n}I(\max Y_i\le\theta)} \quad \text{is independent of } \theta \text{ iff } T(x)=T(Y)$$

← آمارگان مینیمال نیز هست. حالا بررسی می‌کنیم که آیا این آمارگان کامل است یا خیر،

$$T=X_{(n)}\longrightarrow f_T(t;\theta)=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\rightarrow E_\theta[g(T)]=0 \quad \text{for all } \theta>0$$

$$\rightarrow\int_0^\theta g(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=0\longrightarrow\int_0^\theta t^{n-1}g(t)\,dt=0,\ \forall\theta>0$$

$$H(\theta)=\int_0^\theta t^{n-1}g(t)\,dt\rightarrow H'(\theta)=\frac{d}{d\theta}\int_0^\theta t^{n-1}g(t)\,dt=\theta^{n-1}g(\theta)$$

$\theta>0$

چون $H(\theta)=0 \leftarrow H'(\theta)=0$ پس خواهیم داشت که،

$$\theta^{n-1}g(\theta)=0\longrightarrow g(\theta)=0 \quad \text{for every } \theta$$

یا به عبارتی دیگر $g(t)=0$ به ازای $t\in(0,\infty)$

$$\cancel{E_\theta[T]=\int_0^\infty \theta\frac{1}{\theta^n}I(\max x_i\le\theta)d\theta=\int_0^\theta \theta'\frac{1}{\theta^n}d\theta'=\theta}$$

$$E(T) = \int_0^\theta t \cdot f_{T}(t)\,dt = \int_0^\theta t\,\frac{n t^{n-1}}{\theta^n}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n\,dt = \frac{n}{n+1}\theta$$

تخمین‌گر بدون بایاس برای θ عبارت است از $\frac{n+1}{n}T$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow \theta = \mathbb{E}\left\{\frac{n+1}{n}T\right\}$

همچنین چون کامل است ← تخمین‌گر بدون بایاس همین بدونه را داریم و UMVU است.

.۲

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta+1-\theta} = 1 & \theta \le x \le \theta+1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \longrightarrow$$

$$P(X|\theta) = \prod 1 \cdot I(\theta \le x_i \le \theta+1) = I\Big(\underbrace{\overset{X_{(1)}}{\min x_i}}_{T_1(x)} \ge \theta,\ \underbrace{\overset{X_{(n)}}{\max(x_i)}}_{T_2(x)} \le \theta+1\Big)$$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min x_i \\ \max x_i \end{bmatrix}$$

حالا داریم که،

$$g(T(x)) = \phi(X_{(1)}-\theta,\ X_{(n)}-\theta) = \phi(Y_{(1)}, Y_{(n)}),\quad Y_i \sim \mathrm{Unif}(0,1)$$

for a fixed θ

$$\mathbb{E}\{g(X_{(1)}, X_{(n)})\} = \mathbb{E}_\theta\{\phi(X_{(1)}-\theta, X_{(n)}-\theta)\} = \mathbb{E}\{\phi(Y_{(1)}, Y_{(n)})\} = 0$$

همچنین $\phi(u,v)=+1$ برابر نصف ناحیه و $\phi(u,v)=-1$ برابر نصف دیگر ناحیه در نظر می‌گیریم

⇐ g مخالف صفر است و a.s. صفر نیست ولی $\mathbb{E}$ اش صفر است ← کامل نیست.

۶_ داریم که،

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\lambda}\right) & x\geq\lambda\\ 0 & x<\lambda\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x_i-\lambda}{\lambda}\right)I(x_i\geq\lambda)=\frac{e^n}{\lambda^n}\exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)I(\min x_i\geq\lambda)$$

$$=e^n\underbrace{\frac{1}{\lambda^n}\exp\Big(-\frac{1}{\lambda}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i}^{T_1(x)}\Big)I\Big(\overbrace{\boxed{\min x_i}}^{T_2(x)}\geq\lambda\Big)}_{g(T(x);\lambda)}\qquad T(x)=(T_1(x),\ T_2(x))$$

حالا داریم که،

$$\frac{f(X;\lambda)}{f(Y;\lambda)}=\frac{\cancel{\frac{1}{\lambda^n}}\cancel{e^n}\exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)I(\min x_i\geq\lambda)}{\cancel{\frac{1}{\lambda^n}}\cancel{e^n}\exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)I(\min y_i\geq\lambda)}$$

حالا درصورتی این عبارت مستقل از λ است که $T(x)=T(Y)$ ، و برعکس ← این آماره

مینیمال است. ← $T(x)$ یک آماره کافی و مینیمال است.

حالا بررسی می‌کنیم که آیا کامل است یا خیر،

$T(x)$ کامل نامیده می‌شود اگر به ازای هر measurable func g داشته باشیم که،

$$\mathbb{E}_\lambda[g(T(x))]=0 \quad \text{for all } \lambda \Rightarrow \cancel{g(T(x))=0} \quad P_\lambda(g(T)=0)=1$$

چون T جمع n تا $\exp(\theta)$ ، iid هست پس داریم که، $T\sim\Gamma(n,\theta)$

$$f_T(t;\theta)=\frac{1}{\Gamma(n)\theta^n}t^{n-1}\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right),\quad t\geq 0$$

باید اثبات کنیم،

$$\Rightarrow \int_0^\infty g(t)f_T(t;\theta)\,dt=0\quad \forall\theta>0 \Rightarrow g(t)=0 \text{ almost everywhere}$$

Laplace transform:

$$f_T(t;\theta) = \frac{1}{\Gamma(n)\theta^n} t^{n-1} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \qquad \phi(\theta) = \int_0^\infty g(t) f_T(t;\theta)\, dt$$

$$\phi\left(\frac{1}{u}\right) = \int_0^\infty g(t) \frac{1}{\Gamma(n)\,(1/u)^n} t^{n-1} \exp(-ut)\, dt =$$

$$\int_0^\infty g(t) \frac{u^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} \exp(-ut)\, dt = \frac{u^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty g(t)\, t^{n-1} e^{-ut}\, dt$$

چونکه $\phi(\frac{1}{u})$ به ازای هر $u>0$ صفر است، خواهیم داشت که:

$$\int_0^\infty g(t)\, t^{n-1} e^{-ut}\, dt = 0 \quad \text{for all } u>0 \longrightarrow$$

$$G(u) = \int_0^\infty g(t)\, t^{n-1} e^{-ut}\, dt = 0$$

$G(u)$ تبدیل لاپلاس تابع $t^{n-1} g(t)$ با یک constant factor هست.

طبق قضیه‌ی لاپلاس داریم که، اگر تابع $h(t)$ برای هر $v>0$، تبدیل لاپلاس صفر داشته باشد $\longleftarrow$ $h(t)=0$ برقرار است almost everywhere.

$\longleftarrow$ $g(T)=0$ تقریباً همه‌جا برقرار است $\longleftarrow$ T یک آماره‌ی کامل است.

$\Leftarrow$ T یک آماره‌ی کافی، کامل و کمینه است.