به نام خدا

# تئوری تخمین (۱-۲۵۱۶۳)

## تمرین سری دوم

بهار ۱۴۰۴-۱۴۰۳

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

اساتید: روح الله امیری و محمّدمهدی مجاهدیان

موعد تحویل: دوشنبه ۱۸ فروردین

## ۱ تخمین‌گر MVU در آستانه تکینگی

در یک مدل خطی، ماتریس مشاهده زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1+\epsilon \end{bmatrix}$$

که در آن $\epsilon$ مقدار کوچکی است. $(\mathbf{H}^\top\mathbf{H})^{-1}$ را محاسبه کنید و بررسی کنید که وقتی $\epsilon \to 0$ چه اتفاقی می‌افتد. اگر $\mathbf{x} = [2\ 2\ 2]^\top$ باشد، تخمین‌گر MVU[1] را پیدا کنید و توضیح دهید که وقتی $\epsilon \to 0$ چه اتفاقی می‌افتد.

## ۲ تخمین توابع خطی: کاهش ابعاد

در این مسئله، تخمین یک تابع خطی از $\boldsymbol{\theta}$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید پارامتر جدید $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$ باشد، که در آن $\mathbf{A}$ یک ماتریس معلوم $r \times p$ $(r < p)$ با رنک $r$ است. نشان دهید که تخمین‌گر MVU به صورت زیر است:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ تخمین‌گر MVU برای $\boldsymbol{\theta}$ است. همچنین، ماتریس کوواریانس را پیدا کنید.

**راهنمایی:** $\mathbf{x}$ را با

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{H}^\top\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{x}$$

جایگزین کنید که در آن $\mathbf{x}'$ دارای ابعاد $r \times 1$ است. می‌توان نشان داد $\mathbf{x}'$ تمام اطلاعات $\boldsymbol{\theta}$ را شامل می‌شود و لذا می‌توانیم تخمین‌گر را بر اساس یک دیتاست با ابعاد پایین‌تر به دست آوریم (مدل خطی کاهش یافته).

## ۳ تخمین دامنه سیگنال سینوسی و واریانس نویز با توزیع گاوسی

یک سیگنال سینوسی با فرکانس مشخص که با نویز سفید گاوسی (WGN) ترکیب شده را در نظر بگیرید:

$$x[n] = A\cos(2\pi f_0 n) + w[n] \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

که در آن $w[n]$ نویز سفید گاوسی با واریانس $\sigma^2$ است. تخمین‌گر MVU را برای موارد زیر پیدا کنید:

۱. دامنه $A$، با فرض اینکه $\sigma^2$ معلوم است.

۲. دامنه $A$ و واریانس نویز $\sigma^2$.

می‌توانید فرض کنید که آماره‌های کافی، شرط کامل بودن را دارند.

[1] Minimum Variance Unbiased Estimator

## ۴ خانواده نمایی

خانواده توزیع نمایی را با تابع چگالی احتمال زیر در نظر بگیرید:

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = c(\boldsymbol{\theta})h(\mathbf{x})\exp\left[\sum_{i=1}^{m} w_i(\boldsymbol{\theta})T_i(\mathbf{x})\right]$$

### ۱.۴

بر اساس قضیه تجزیه نیمن فیشر، نشان دهید که $\mathbf{T} = [T_1(\mathbf{x}), \dots, T_m(\mathbf{x})]^\mathsf{T}$ یک آماره کافی برای $\boldsymbol{\theta}$ است.

### ۲.۴

مطابق قضیه ارائه‌شده در کلاس، نشان دهید که یک شرط کافی برای اینکه آماره فوق کامل باشد، این است که فضای $\{w_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, w_m(\boldsymbol{\theta})\}$ شامل یک مستطیل $m$-بعدی باشد.

### ۳.۴

برای خانواده نمایی نشان دهید که اگر یک آماره، کافی و کامل باشد، لزوما یک آماره کمینه است.

### ۴.۴

در کلاس دیدیم که برای تخمین پارامترهای اسکالر، شرط حصول کران کرامر-رائو معادل این است که توزیع مشاهدات از خانواده نمایی باشد و در این صورت تخمین‌گر کارا همان آماره کافی خانواده نمایی است. این گزاره را اثبات نمایید. آیا این نتیجه در حالت تخمین پارامتر برداری نیز برقرار است؟

### ۵.۴

فرض کنید $\theta$ یک پارامتر مثبت و غیرتصادفی باشد. همچنین فرض کنید دنباله‌ای از مشاهدات $X_1, X_2, \dots, X_n$ داریم که به شرط $\theta$، این مشاهدات مستقل و هم‌توزیع هستند و هر کدام تابع چگالی احتمال زیر را دارند:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x^M e^{-x/2\theta}}{(2\theta)^{M+1}M!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

که در آن $M$ یک عدد صحیح مثبت معلوم است. تخمین MVU برای $\theta$ را پیدا کنید و واریانس تخمین را محاسبه کنید.

## ۵ توزیع یکنواخت

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ مشاهدات مستقل و هم‌توزیع از یک متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی یکنواخت در بازه $(0, \theta)$ باشند، که در آن $\theta > 0$ یک پارامتر مجهول است.

### ۱.۵

نشان دهید که آماره $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ یک آماره کافی و کمینه برای $\theta$ است. آیا آماره فوق، یک آماره کامل است؟ تخمین‌گر MVU برای $\theta$ را به دست آورید.

### ۲.۵

در صورتی‌که هر یک از مشاهدات به صورت مستقل با توزیع یکنواخت در بازه $(\theta, \theta+1)$ باشند، یک آماره کافی و کمینه برای $\theta$ بیابید و شرط کامل بودن را بررسی کنید.

## ۶ توزیع نمایی شیفت‌یافته

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ مشاهدات مستقل و هم‌توزیع از یک متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی زیر باشند:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{(x-\lambda)}{\lambda}}, & x \geq \lambda \\ 0, & x < \lambda \end{cases}$$

که در آن $\lambda > 0$ یک پارامتر مجهول است. یک آماره کافی و کمینه برای $\lambda$ پیدا کنید. آیا این آماره کامل است؟