به نام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۶۴۳۳۹

۱- می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا $\bar{X}_n$ تخمین‌گر mvu هست یا خیر.

ابتدا بایاس دار بودن آن را بررسی می‌کنیم، داریم که:

$$\mathbb{E}\{\bar{x}_n\} = \mathbb{E}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\{x_i\}$$

$$= n\frac{1}{n}\mu = \mu \longrightarrow$$ بدون بایاس است.

حالا شرط regularity را بررسی می‌کنیم، داریم که:

$$f(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\binom{r+x_i-1}{x_i}(1-\theta)^{x_i}\theta^r \longrightarrow \ln f(x;\theta) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\binom{r+x_i-1}{x_i} + x_i\ln(1-\theta) + r\ln\theta\right\}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{-x_i}{1-\theta}+\frac{r}{\theta}\right\} = \frac{nr}{\theta} - \frac{\sum x_i}{1-\theta}$$

حالا از این عبارت $\mathbb{E}$ می‌گیریم:

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{nr}{\theta} - \frac{\sum x_i}{1-\theta}\right\} = \frac{nr}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(x_i) =$$

میانگین توزیع دوجمله‌ای منفی

$$\frac{nr}{\theta} - \frac{n}{1-\theta}\cdot\frac{r(1-\theta)}{\theta} = \frac{nr}{\theta} - \frac{nr}{\theta} = 0 \longrightarrow$$ regularity برقرار است.

حالا داریم که اگر بخواهیم $I(\theta)$

برای یک نمونه x

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \frac{r}{\theta} - \frac{x}{1-\theta} = \frac{r(1-\theta)-\theta x}{\theta(1-\theta)} = \frac{1}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{\theta}r - x\right)$$

θ ، $g(x)$

$$\longrightarrow (1-\theta)r = \theta x \longrightarrow \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{x}{r} \longrightarrow \frac{1}{\theta} - 1 = \frac{x}{r} \longrightarrow \frac{1}{\theta} = \frac{x+r}{r} \longrightarrow \theta = \frac{r}{x+r}$$

از آنجایی که θ به طور صریح ظاهر نمی‌شود و متغیر سوم r در رابطه داریم. این تخمین‌گر mvu نیست و در نتیجه کارا هم نخواهد بود. حالا باند کرامر رائو را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)}, \quad I(\theta) = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta) = \frac{r}{\theta} - \frac{x}{1-\theta} \longrightarrow \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{r}{\theta^2} - \frac{x}{(1-\theta)^2}$$

$$\longrightarrow I(\theta) = -\mathbb{E}\left\{ \frac{-r}{\theta^2} - \frac{x}{(1-\theta)^2} \right\} = \frac{r}{\theta^2} + \frac{r(1-\theta)/\theta}{(1-\theta)^2} =$$

$$\frac{r}{\theta^2} + \frac{r}{(1-\theta)\theta} = \frac{r(1-\theta+\theta)}{\theta^2(1-\theta)} = \frac{r}{\theta^2(1-\theta)} \longrightarrow$$

$$CRLB(\theta) = \frac{\theta^2(1-\theta)}{r}, \quad \operatorname{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{\theta^2(1-\theta)}{r}$$

Scanned with CamScanner

۲ـ می‌خواهیم کران کرامر رائو را به حالت بایاس دار تعمیم بدهیم:

در نظر می‌گیریم:

$$S(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta^T} \ln f(x;\theta)$$

$$\Rightarrow I(\theta) = \mathbb{E}\{S(\theta) S(\theta)^T\}$$

$$b(\theta) = E\{\hat{\theta}\} - \theta$$

$$C_{\hat{\theta}} = \mathbb{E}\{(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))^T\}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}\{\hat{\theta}\} = \theta + b(\theta)$$

طبق Regularity داریم که:

$$\boxed{\mathbb{E}_x\{S(\theta)\} = 0}$$

$$\mathbb{E}_x\{\hat{\theta}\} = \theta + b(\theta) \xrightarrow{\partial/\partial\theta} \frac{\partial}{\partial \theta^T} \int \hat{\theta} f(x;\theta)\, dx = I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}$$

$$\rightarrow \int \hat{\theta} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta^T} f(x;\theta)}_{f(x;\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^T} \ln f(x;\theta)} dx = I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T} \longrightarrow$$

$$I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T} = \int \hat{\theta} f(x;\theta) S(\theta)\, dx = \mathbb{E}_x\{\hat{\theta} S(\theta)\} \longrightarrow$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_x\{\hat{\theta}\}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_x\{\hat{\theta} S(\theta)\} = I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}}$$

حالا برای ماتریس $C_{\hat{\theta}}$ خواهیم داشت که:

$$E\{(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))^T\} = E\{(\hat{\theta} - \theta - b(\theta))(\hat{\theta} - \theta - b(\theta))^T\} =$$

$$\mathbb{E}\{\hat{\theta}(\hat{\theta} - \theta - b(\theta))^T\} - \overset{(\theta + b(\theta))}{\theta} \underbrace{\mathbb{E}\{\hat{\theta} - \theta - b(\theta)\}}_{0} = \mathbb{E}\{\hat{\theta}(\hat{\theta} - \theta - b(\theta))^T\}$$

از طرفی داریم که: $\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta - b(\theta)) S(\theta)^T] = E\{\hat{\theta} S(\theta)^T\} - (\theta + b(\theta)) \underbrace{\mathbb{E}\{S(\theta)^T\}}_{0} =$

$$E\{\hat{\theta} S(\theta)^T\}$$

Scanned with CamScanner

$$\rightarrow \mathbb{E}\left\{(\hat{\theta}-\theta-b(\theta))\, s(\theta)^T\right\} = I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}$$

حالا cov بین $\hat{\theta}$, $s(\theta)$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\mathrm{cov}(\hat{\theta}, s(\theta)) = \mathbb{E}\left\{(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))(s(\theta)-\underbrace{\mathbb{E}(s(\theta))}_{0})^T\right\} =$$

$$\mathbb{E}\left\{\hat{\theta}\, s(\theta)\right\} - \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}(\hat{\theta})\, s(\theta)\right\} = \mathbb{E}\left\{\hat{\theta}\, s(\theta)\right\} = I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{cov}(\hat{\theta}, s(\theta)) = I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}} \rightarrow \mathrm{cov}(\hat{\theta}-\theta, s(\theta)) = \mathrm{cov}(\hat{\theta}, s(\theta))$$

طبق $\mathbb{E}$ مقدار صفر میده $s(\theta)$

با استفاده از نامساوی covariance خواهیم داشت که:

$$\mathrm{cov}(U,U) \geq \mathrm{cov}(U,V)\left(\mathrm{cov}(V,V)\right)^{-1}\mathrm{cov}(V,U)$$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(\hat{\theta},\hat{\theta}) \geq \mathrm{cov}(\hat{\theta}-\theta, s(\theta))\left(\underbrace{\mathrm{cov}(s(\theta), s(\theta))}_{I(\theta)}\right)^{-1}\mathrm{cov}(s(\theta), \hat{\theta}-\theta)$$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(\hat{\theta},\hat{\theta}) \geq \left(I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}\right) I(\theta)^{-1}\left(I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}\right)^T$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}\left\{(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))^T\right\}}\geq \left(I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}\right) I(\theta)^{-1}\left(I + \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}\right)^T$$

$$\underbrace{\mathbb{E}\left\{(\hat{\theta}-\theta-b(\theta))(\hat{\theta}-\theta-b(\theta))\right\}} \geq \text{-----}$$

$$\mathbb{E}\left\{((\underbrace{\hat{\theta}-\theta}_{\tilde{\theta}})-b(\theta))\,((\hat{\theta}-\theta)-b(\theta))^T\right\} \geq \text{-----}$$

$$\underbrace{\mathbb{E}\left\{\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T - \tilde{\theta}\, b(\theta)^T - b(\theta)\tilde{\theta}^T + b(\theta)b(\theta)^T\right\}} \geq \text{-----}$$

$$\mathbb{E}\{\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T\} \underbrace{- \mathbb{E}\{\tilde{\theta}\}\, b(\theta)^T - b(\theta)\,\mathbb{E}\{\tilde{\theta}\}^T}_{-2b(\theta)b(\theta)^T} + b(\theta)b(\theta)^T \geq \text{-----}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}\{\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T\} - b(\theta)b(\theta)^T \geq \text{-----}$$

پس خواهیم داشت که،

$$\mathbb{E}\left\{(\hat{\theta}-\theta)(\hat{\theta}-\theta)^T\right\} \geq \left(I+\frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}\right) I(\theta)^{-1}\left(I+\frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta^T}\right)^T + b(\theta)b(\theta)^T$$

۳- در ابتدا داریم که،

$$f(\hat{\theta})=0\ ,\ F(\theta)=\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta^T}\ ,\ U^TU=I\ ,\ F(\theta)U=0$$

$\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}$ را Δ می نامیم، خواهیم داشت که،

$$J(\theta)=\mathbb{E}_x\{\Delta\Delta^T\}$$

$$\mathbb{E}\{\hat{\theta}\}=\theta \longrightarrow \mathbb{E}\{\hat{\theta}\Delta^T\}=I$$ (طبق سوال قبلی)

$$\Rightarrow \text{from regularity: } \mathbb{E}\{\theta\Delta^T\}=\theta\,\mathbb{E}\{\Delta^T\}=\theta\cdot 0=0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{(\hat{\theta}-\theta)\Delta^T\}=I \longrightarrow \mathbb{E}\{(\hat{\theta}-\theta)\}UU^T=UU^T$$

$\tilde{\theta}=\hat{\theta}-\theta$ حالا ماتریس دلخواه W و $P_U=UU^T$ را در نظر بگیرید، خواهیم داشت که.

$$\mathbb{E}\left\{(\tilde{\theta}-WP_U\Delta)(\tilde{\theta}-WP_U\Delta)^T\right\}=\mathbb{E}\{\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T\}-\mathbb{E}\{\tilde{\theta}\,\Delta^TP_U^TW^T\}-\mathbb{E}\{WP_U\Delta\tilde{\theta}^T\}$$
$$+\mathbb{E}\{WP_U\Delta\Delta^TP_U^TW^T\}\geq 0$$

ماتریس کوواریانس $\tilde{\theta}-WP_U\Delta$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T\}-P_UW^T-WP_U+WP_UJP_UW^T\geq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T\}\overset{1}{\geq}\underbrace{P_UW^T+WP_U-WP_UJP_UW^T}$$

⇐ حالا با فرض اینکه U^TJU، وارون پذیر است، و همچنین می دانیم که متقارن است، خواهیم داشت که،
$U^TJU=Q\Lambda Q^T$ پس خواهیم داشت که،

$$WP_U+P_UW^T-WUQ\Lambda Q^TU^TW^T$$

$$= UQ\Lambda^{-1}Q^TU^T - (WUQ - UQ\Lambda^{-1})\cdot\Lambda\cdot(WUQ - UQ\Lambda^{-1})^T$$

می دانیم که نامساوی ① همواره برقرار است، پس خواهیم داشت که به ازای هر W ای برقرار است، پس ما W را $UQ\Lambda^{-1}Q^TU^T$ انتخاب می‌کنیم، خواهیم داشت (این W ای است که رابطه‌ی سمت راست نامساوی ① را ماکزیمم می‌کند).

$$P_UW^T + WP_U - WP_UJP_UW^T =$$

$$UU^TUQ\Lambda^{-1}Q^TU^T + UQ\Lambda^{-1}Q^TU^TUU^T - \underbrace{UQ\Lambda^{-1}Q^T\cancel{U^TU}Q\Lambda Q^TU^T}_{UQ\Lambda^{-1}Q^TU^T}$$

$$= UQ\Lambda^{-1}Q^TU^T + UQ\Lambda^{-1}Q^TU^T - UQ\Lambda^{-1}Q^TU^T =$$

$$UQ\Lambda^{-1}QU^T = U(Q\Lambda^{-1}Q^T)U^T =$$

$$U(Q\Lambda Q^T)^{-1}U^T = \underline{U(U^TJU)^{-1}U^T}$$

پس خواهیم داشت که:

$$\mathbb{E}\{(\hat\theta-\theta)(\theta-\hat\theta)^T\} \geq U(U^TJU)^{-1}U^T$$

$$\rightarrow CCRLB(\theta) = U(U^TJU)^{-1}U^T$$

همچنین برای وقتی که $J>0$ می توانیم بنویسیم که:

$$J = J^{T/2} J^{1/2} \;,\quad FU=0 \rightarrow F J^{-1/2} J^{1/2} U = 0 \iff P_{J^{1/2}U} = P^{T}_{J^{-T/2}F^T}$$

ماتریس Projection روی فضای مکمل عمود $J^{-T/2}F^T$ است ← خواهیم داشت که:

$$U(U^TJU)^{-1}U^T = J^{-1/2} \underline{J^{1/2}U(U^TJU)^{-1}U^TJ^{1/2}} J^{-T/2}$$

$$= J^{-1/2} P_{J^{1/2}U} J^{-T/2} = J^{-1/2} \left(P^{\perp}_{J^{-T/2}F^T} \right) J^{-T/2} =$$

$$J^{-1/2}\left(I - J^{-T/2}F^T \left((J^{-T/2}F^T)^T (J^{-T/2}F^T) \right)^{-1} F J^{-T/2} \right) J^{-T/2}$$

$$= J^{-1} - J^{-1}F^T \left(FJ^{-1}F^T \right) F J^{-T} = J^{-1} - J^{-1}F^T \left(FJ^{-1}F^T \right) F J^{-T}$$

⇐ اثبات می شود که در این حالت:

$$U(U^TJU)^{-1}U^T = J^{-1} - J^{-1}F^T(FJ^{-1}F^T)FJ^{-T}$$

$$\mathbb{E}_x(\hat{\theta})=\theta \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}\, f(x;\theta)\, d\vec{x}=\theta \xrightarrow{\partial/\partial\theta}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}\, f(x;\theta)\,\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\, dx = I$$

from regularity, $\mathbb{E}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right\}=0 \xrightarrow{\text{کم کردن از بالایی}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{(\hat{\theta}-\theta)}_{g(x)}\ \underbrace{f(x;\theta)}_{w(x)}\ \underbrace{\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)}_{h(x)}\, dx = I$$

بردار ستونی

$h(x) \longrightarrow$ بردار افقی

$$\Rightarrow\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, w(x)\, h(x)\, dx = I\right)^2 \le \int w(x)\,\underbrace{g(x)^T}_{g(x)g(x)^T}\, dx \int w(x)\,\underbrace{h(x)^T}_{h(x)^T h(x)}\, dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int g(x)\, w(x)\, h(x)\, dx}_{I} \le \underbrace{\int f(x;\theta)\,(\theta-\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^T dx}_{\mathbb{E}_x\{(\theta-\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^T\}} \cdot \int f(x)\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^T dx$$

$$\Rightarrow I \le \mathbb{E}_x\underbrace{\left\{(\hat{\theta}-\theta)(\hat{\theta}-\theta)\right\}}\ \mathbb{E}_x\left\{\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^T \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right\}$$

$$\Rightarrow I \le \mathrm{cov}(\hat{\theta})\ \mathbb{E}_x\left\{\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^T \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right\}$$

بردار افقی

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(\hat{\theta}) \ge \left(\mathbb{E}_x\left\{\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^T \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right\}\right)^{-1}$$

حالا شرط حصول در نامساوی کوشی شوارتز این است که بردارها هم جهت باشند یعنی ضریبی از هم دیگر باشند و چون تابع اند باید ضریبی از همدیگر باشند، پس خواهیم داشت که

Scanned with CamScanner

$$h(n)^T = k\, g(n) \longrightarrow \left(\frac{\partial \ln f(n;\theta)}{\partial \theta}\right)^T = I(\theta)\,(\hat{\theta}-\theta)$$

مستقل از n

تابعی از θ

است.

اینجا Transpose داریم چون از اول فرض کردیم که مشتق به θ بردار سطری بهمان می‌دهد، اگر فرض می‌کردیم ستونی می‌دهد به عبارت بدون Transpose می‌رسیدیم.

مطابق حالت قبلی دقیقاً که سر کلاس اثبات شد، در این حالت هم حالت تساوی در حالت نامقید به همان صورت برقرار است و $I(\theta)$ اینجا ماتریس فیشر ما است و $\hat{\theta}$ تخمین‌گر ما است و برداری است.

این کران برای حالت نامقید است. حالا برای مقید مشابه همین را پیش بردیم شرطها وصلمان می‌شود،

$$\frac{\partial \ln f(n;\theta)}{\partial \theta} = CCRLB(\theta)^{-1}\,(\hat{\theta}-\theta)$$

۳-۲. ابتدا داریم که:

$$r_n = \|s_n - x\|_2 + w_n \quad \text{where} \quad w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad n = 0, \dots, N$$

$$\Rightarrow w_n = r_n - \|s_n - x\|_2 \Rightarrow f(r_n; x) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_n - \|s_n - x\|_2)^2}$$

$$\Rightarrow \ln f(r_n; x) = -\frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (r_n - \|s_n - x\|_2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln f(r_n; x)}{\partial x} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} 2(r_n - \|s_n - x\|_2)\left(-\frac{s_n - x}{\|s_n - x\|_2}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \ln f(r_n; x)}{\partial x}}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (r_n - \|s_n - x\|_2)\left(\frac{s_n - x}{\|s_n - x\|_2}\right)$$

$$I(x) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)^T\right\} = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{(r_n - \|s_n - x\|_2)}^{w_n} \frac{s_n - x}{\|s_n - x\|_2}\right) \times \left(\sum_{n'=0}^{N-1} \underbrace{(r_{n'} - \|s_{n'} - x\|_2)}_{w_{n'}} \frac{s_{n'} - x}{\|s_{n'} - x\|_2}\right)^T\right\}$$

به ازای $n \neq n'$ ، $\mathbb{E}$ برابر صفر می‌شود چون از هم مستقل‌اند و $\mathbb{E}$ هر کدام صفر است.
پس فقط به ازای حالت هایی که $n = n'$ است در سیگمای کلی عبارت ناصفر خواهد بود.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} (r_n - \|s_n - x\|_2)^2 \frac{(s_n - x)(s_n - x)^T}{\|s_n - x\|_2^2}\right\} =$$

$$\frac{1}{\sigma^4} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\mathbb{E}\{(\overbrace{r_n - \|s_n - x\|_2}^{w_n})^2\}}_{\sigma^2} \frac{(s_n - x)(s_n - x)^T}{\|s_n - x\|_2^2} =$$

$$\boxed{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(s_n - x)(s_n - x)^T}{\|s_n - x\|_2^2}} = I(x)$$

حالا داریم که:

$$\text{var}(\hat{x}) \geq I^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \text{var}(\hat{x}) \geq \sigma^2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(s_n - x)(s_n - x)^T}{\|s_n - x\|_2^2}\right)^{-1} \rightarrow \text{باند کرامر رائو}$$

۱-۴. تعریف می‌کنیم:

$$s_i(\theta, x) = \frac{1}{f(x;\theta)} \frac{\partial^i f(x;\theta)}{\partial \theta^i}$$

$$Z = \begin{bmatrix} \hat{\theta} - \theta \\ \frac{1}{f(x;\theta)} \cdot \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta} \\ \vdots \\ \frac{1}{f(x;\theta)} \cdot \frac{\partial^n f(x;\theta)}{\partial \theta^n} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E((\hat{\theta}-\theta)(\hat{\theta}-\theta)) = \mathrm{var}(\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(ZZ^T) = \mathbb{E}\left\{ \begin{bmatrix} (\hat{\theta}-\theta)(\hat{\theta}-\theta) & \cdots & (\hat{\theta}-\theta)\frac{\partial^i f(x;\theta)}{\partial \theta^i} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{E}\left\{(\hat{\theta}-\theta)\frac{1}{f(x;\theta)}\frac{\partial^i f(x;\theta)}{\partial \theta^i}\right\} = \int \hat{\theta} \frac{\partial^i f(x;\theta)}{\partial \theta^i} dx - \theta \underbrace{\int \frac{\partial^i f(x;\theta)}{\partial \theta^i} dx}_{0}$$

$\leftarrow 0$ رگولاریتی، $E\left\{\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right\}$ چندین بار دیگر مشتق گرفته شود

$$= \frac{\partial^{i-1}}{\partial \theta^{i-1}} \underbrace{\int \hat{\theta} \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta} dx}_{1} \longrightarrow$$

اگر $i \neq 1$ باشد این عبارت صفر است

وگرنه 1 است.

پس خواهیم داشت که:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\theta}}^2 & 1 \;\; 0 \;\cdots\; 0 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & J \end{bmatrix} \quad A = \sigma_{\hat{\theta}}^2,\ B = [1\ 0 \cdots 0],\ B^T$$

where $J_{ij} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{f(x;\theta)}\frac{\partial^i}{\partial \theta^i} f(x;\theta) \cdot \frac{1}{f(x;\theta)}\frac{\partial^j}{\partial \theta^j} f(x;\theta)\right\}$

Λ زمانی PD می‌شود که J مثبت معین باشد و $\sigma_{\hat{\theta}}^2 > 0$ و از طرفی مکمل شور نسبت به J هم مثبت معین باشد پس باید داشته باشیم که:

$$J - B^T A^{-1} B > 0 \rightarrow J - \frac{1}{\sigma_{\hat{\theta}}^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} - \frac{1}{\sigma_{\hat{\theta}}^2} & J_{12} & \cdots \\ J_{21} & \cdots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}}_{J'}$$

J' اگر این ماتریس PD باشد، Λ هم PD است و برعکس.

۲-۴. می دانیم که طبق مکمل شور داشتیم که چون،

$$\Lambda \geq 0 \rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^2 - [1\ 0 \text{---} 0]\, J^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \leftarrow \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\theta}}^2 & B \\ B^T & J \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq [1\ 0 \text{---} 0]\, J^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

می دانیم که اگر Λ، PD باشد بجای $\geq$، $>$ خواهیم داشت ← شرط تساوی برقرار نخواهد شد ولی در صورتی که Λ، PSD باشد، همچنین باید داشته باشیم که $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = J^{-1}_{11}$. به عبارت دیگر: اگر Λ، PD نباشد، آنگاه داریم که وجود دارد v ای که،

$$v^T \Lambda v = 0 \longrightarrow v_0^2 \sigma_{\hat{\theta}}^2 + 2 v_0 v_1 + \tilde{v}^T J \tilde{v}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

we call this $\tilde{v}$

حالا اگر داشته باشیم که، $\tilde{v} = kJ^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه خواهیم داشت که،

(k ضریب ثابت)

$$v_0^2 \sigma_{\hat{\theta}}^2 + 2 v_0 k J^{-1}_{11} + k^2 J^{-1}_{11} = 0 \longrightarrow$$

اگر $v_0 = -k$ باشد، آنگاه خواهیم داشت که،

$$k^2 \left(\sigma_{\hat{\theta}}^2 - J^{-1}_{11} \right) = 0 \longrightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^2 = J^{-1}_{11}$$

پس اگر بردار: $k \begin{bmatrix} -1 \\ J^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ عضو $\mathcal{N}(\Lambda)$ (نال اسپیس Λ) باشد

Scanned with CamScanner

۴-۳. برای حالت $N=1$ داریم که

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}) & 1 \\ 1 & I(\theta) \end{bmatrix} \geq 0 \longrightarrow Var(\hat{\theta}) - I(\theta)^{-1} \geq 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)}}$$

که این همان کران کرامر رائو است.

۴-۴.

$$\left[\begin{array}{c|cc} Var(\hat{\theta}) & 1 & 0 \\ \hline 1 & J_{11} & J_{12} \\ 0 & J_{21} & J_{22} \end{array}\right] \geq 0 \longrightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^{2} \geq \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} J^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$J_{12} = J_{21}$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^{2} \geq \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^{2} \geq \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} J_{22} \Rightarrow$$

$$\frac{J_{22}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} = \frac{J_{11}J_{22}}{J_{11}(J_{11}J_{22} - J_{12}^{2})} = \frac{J_{12}^{2} + (J_{11}J_{22} - J_{12}^{2})}{J_{11}(J_{11}J_{22} - J_{12}^{2})} = \frac{1}{J_{11}} + \frac{J_{12}^{2}}{J_{11}(J_{11}J_{22} - J_{12}^{2})}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^{2} \geq \frac{1}{J_{11}} + \frac{J_{12}^{2}}{J_{11}(J_{11}J_{22} - J_{12}^{2})}}$$

۴-۵. داشتیم که:

$$f_M(x_1 \dots x_M;\theta) = \prod_{k=1}^{M} f_1(x_k;\theta)$$

$$J_{ij}(M) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial^i f_M(x;\theta)}{\partial \theta^i}\right)\left(\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial^j f_M(x;\theta)}{\partial \theta^j}\right)\right\}$$

$$\rightarrow J_{11}(M) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial f_M(x;\theta)}{\partial \theta}\right)\left(\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial f_M(x;\theta)}{\partial \theta}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{M} f_1(x_k;\theta)} \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta} \prod_{L\neq k} f_1(x_L;\theta) \rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{11}(M) = \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^{M} \underbrace{\frac{1}{f_1(x_k;\theta)} \frac{\partial f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta}}_{\alpha_k}\right)^2\right\} =$$

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{M}\sum_{L=1}^{M} \alpha_k \alpha_L\right\} = \sum_{k=1}^{M}\sum_{L=1}^{M} \mathbb{E}\{\alpha_k \alpha_L\}$$

از طرفی می دونیم که $\mathbb{E}\{\alpha_k\}=0$ از regularity و می دانیم که سمپلها i.i.d هستند یا حداقل مستقل اند و لزوما توزیع اند ←

$$\text{if } k\neq L \rightarrow \mathbb{E}\{\alpha_k \alpha_L\} = \mathbb{E}\{\alpha_k\} \cdot \mathbb{E}\{\alpha_L\} = 0$$

$$\Rightarrow J_{11}(M) = \sum_{k=1}^{M} \underbrace{\mathbb{E}\{\alpha_k^2\}}_{J_{11}(1)} \Rightarrow J_{11}(M) = M J_{11}(1)$$

حالا برای سایر موارد می نویسیم، خواهیم داشت:

در نظر می گیریم، $\beta_k = \frac{1}{f_1(x_k;\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f_1(x_k;\theta)$، حالا داریم:

$\mathbb{E}\{\alpha_k\} = 0$ from regularity

چونکه $\alpha_k = \frac{1}{f_1(x_k;\theta)} \frac{\partial f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta}$ است که این مقدار برابر است با $\frac{\partial \ln f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta}$

واز regularity نتیجه بالا بدست می‌آید. از طرفی داریم که،

$$\mathbb{E}\{\beta_k\} = \int \cancel{f_1(x_k;\theta)} \cdot \frac{1}{\cancel{f_1(x_k;\theta)}} \cdot \frac{\partial^2 f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta^2}\, dx$$

$$= \int \frac{\partial^2 f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta^2}\, dx = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \underbrace{\int f_1(x_k;\theta)\, dx}_{1} = 0$$

پس: $\forall k : \mathbb{E}\{\alpha_k\} = \mathbb{E}\{\beta_k\} = 0$.

داشتیم که،

$$\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial f_M(x;\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k$$

حالا دوباره مشتق می‌گیریم از f_M، خواهیم داشت که،

$$\frac{\partial^2 f_M(x;\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(f_M(x;\theta) \sum \alpha_k\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{M} f_1(x_l;\theta)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial^2 f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta^2} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{M} f_1(x_l;\theta) + \sum_{k\neq l} \frac{\partial f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f_1(x_l;\theta)}{\partial \theta} \prod_{\substack{m\neq l \\ m\neq k}}^{M} f_1(x_m;\theta)$$

$$\xrightarrow{\div f_M} \frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial^2 f_M(x;\theta)}{\partial \theta^2} = \sum_{k=1}^{M} \underbrace{\frac{1}{f_1(x_k;\theta)} \frac{\partial^2 f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta^2}}_{\beta_k} +$$

$$\underbrace{\sum_{k\neq l}^{M} \frac{1}{f_1(x_k;\theta)} \frac{\partial f_1(x_k;\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{f_1(x_l;\theta)} \cdot \frac{\partial f_1(x_l;\theta)}{\partial \theta}}_{\sum_{k\neq l}^{M} \alpha_k \alpha_l}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial^2 f_M(x;\theta)}{\partial \theta^2} = \sum_{k=1}^{M} \beta_k + \sum_{k \neq l} \alpha_k \alpha_l$$

$$J_{12}(M) = \mathbb{E}\left\{ \left(\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial f_M(x;\theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial^2 f_M(x;\theta)}{\partial \theta^2} \right) \right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k \right) \left(\sum_{k=1}^{M} \beta_k + \sum_{k \neq l} \alpha_k \alpha_l \right) \right\} =$$

$$\mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k \right) \left(\sum_{k=1}^{M} \beta_k \right) \right\} + \underbrace{\mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k \right) \left(\sum_{k \neq l} \alpha_k \alpha_l \right) \right\}}$$

این عبارت صفر است زیرا که برابر است با

$$\mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{l \neq k} \alpha_k^2 \alpha_l \right) \right\} + \mathbb{E}\left\{ \sum_{k \neq l \neq m} \alpha_k \alpha_l \alpha_m \right\} =$$

$$\sum_{k \neq l} \mathbb{E}\{ \alpha_k^2 \alpha_l \} + \sum_{k \neq l \neq m} \mathbb{E}\{ \alpha_k \alpha_l \alpha_m \} =$$

$$\sum_{k \neq l} \mathbb{E}(\alpha_k^2) \underbrace{\mathbb{E}(\alpha_l)}_{0} + \sum_{k \neq l \neq m} \mathbb{E}(\alpha_k) E(\alpha_l) \underbrace{E(\alpha_m)}_{0} = 0$$

پس داریم که،

$$J_{12}(M) = \mathbb{E}\left\{ \left(\sum \alpha_k \right) \left(\sum \beta_k \right) \right\} =$$

از طرفی داریم که،

$$\mathbb{E}\left\{ \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \beta_k \right\} + \overbrace{\underbrace{\mathbb{E}\left\{ \sum_{k \neq l} \alpha_k \beta_l \right\}}_{0}}^{0}$$

زیرا k و l سمبل‌های مستقل اند و این عبارت جدا می‌شود و $\mathbb{E}\{\alpha_k\}$ و $\mathbb{E}\{\beta_l\}$ صفر است.

$$\Rightarrow J_{12}(M) = \mathbb{E}\left\{ \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \beta_k \right\} = \sum_{k=1}^{M} \mathbb{E}(\alpha_k \beta_k) = M J_{12}(1)$$

حالا برای σ_{22} خواهیم داشت که،

$$\sigma_{22}(M) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{f_M(x_i;\theta)} \frac{\partial^2 f_M(x_i;\theta)}{\partial\theta^2}\right)^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{M}\beta_k}_{A} + \underbrace{\sum_{k\neq l}\alpha_k\alpha_l}_{B}\right)^2\right\} = \mathbb{E}\{A^2\} + \mathbb{E}\{B^2\} + 2\mathbb{E}\{AB\}$$

$$\star\ \mathbb{E}\{A^2\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{M}\beta_k^2 + \sum_{k\neq l}\beta_k\beta_l\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{M}\beta_k^2\right\} + \underbrace{\sum_{k\neq l}\mathbb{E}(\beta_k)\mathbb{E}(\beta_l)}_{0}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{M}\beta_k^2\right\} = \sum_{k=1}^{M}\mathbb{E}\{\beta_k^2\} = M\,\sigma_{22}(1)$$

$$\star\ \mathbb{E}\{AB\} = \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^{M}\beta_k\right)\left(\sum_{k\neq l}\alpha_k\alpha_l\right)\right\}$$

چون $k\neq l$ است برای α_k و α_l، فارق از اینِدِس β، ما خواهیم داشت که حداقل یکی از اندیس ها $\beta_m\,\alpha_k\alpha_l$ فرق دارد با سایرین ← Expected ها به صورت ضرب دوتا Expected خواهد شد، خواهیم داشت $\mathbb{E}\{\alpha_i\}$ ای در کل عبارت ضرب می‌شود که این عبارت هم صفر است ←

$$\mathbb{E}\{AB\} = 0$$

حالا $\mathbb{E}\{B^2\}$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathbb{E}\{B^2\} = \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k\neq l}\alpha_k\alpha_l\right)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(\Big(\overbrace{\sum_{k=1}^{M}\alpha_k}^{S_\alpha}\Big)^2 - \sum\alpha_k^2\right)^2\right\} =$$

$$\mathbb{E}\left\{\left(S_\alpha^2 - \sum_{k=1}^{M}\alpha_k^2\right)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{S_\alpha^4 - 2S_\alpha^2\sum_{k=1}^{M}\alpha_k^2 + \Big(\overbrace{\sum\alpha_k^2}^{R}\Big)^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}(S_\alpha^4) - 2\mathbb{E}(S_\alpha^2 R) + \mathbb{E}(R^2)$$

حالا داریم که،

$$\star\ E(S_\alpha^4) = E\Big\{ \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^4 + 3\sum_{k\neq l} \alpha_k^2 \alpha_l^2 + \text{ضریبی} \times \sum \alpha_k^2 \alpha_l \alpha_m$$

$$+ \text{ضریبی} \times \sum \alpha_k \alpha_l \alpha_m \alpha_n \Big\}$$

E دو تا عبارت آخری مشابه قبلی ها صفر است ← فقط دو تا ترم اول باقی می مانند،

$$E\{S_\alpha^4\} = M E\{\overset{\mu_4 \text{ می نامیم}}{\alpha_k^4}\} + 3M(M-1)\, 2\, E(\alpha_k^2) E\{\overset{\mu_2 \text{ می نامیم}}{\alpha_l^2}\}$$

$$= M\mu_4 + 3M(M-1)\,\mu_2^2$$

$$\star\ E(S_\alpha^2 R) = E\Big\{ \Big(\sum_{k=1}^{M}\alpha_k\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^{M}\alpha_k^2\Big)\Big\} =$$

$$E\Big\{ \sum_{k=1}^{M} \sum_{p,q=1}^{M} \alpha_k^2 \alpha_p \alpha_q \Big\} =$$

تنها وقتی که $p=q=k$ یا $p=q\neq k$ داشته باشیم ناصفر میشه مثل بعضی ها

قبل ←

$$E\Big\{\sum_{k=1}^{M} \alpha_k^4\Big\} + E\Big\{\sum_{k\neq l}^{M} \alpha_k^2 \alpha_l^2\Big\} =$$

$$M\mu_4 + M(M-1)\,\mu_2^2$$

$$\star\ E\{R^2\} = E\Big\{ \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^4 + \sum_{k\neq l}^{M} \alpha_k^2 \alpha_l^2 \Big\} =$$

$$M\mu_4 + M(M-1)\,\mu_2^2$$

حالا داشتیم که :

$$\mathbb{E}\{B^2\} = \mathbb{E}\{S_\alpha^4\} - 2\mathbb{E}\{S_\alpha^2 R\} + \mathbb{E}\{R^2\} =$$

$$M\mu_4 + 3M(M-1)\mu_2^2 - 2M\mu_4 - 2M(M-1)\mu_2^2 + M\mu_4 + M(M-1)\mu_2^2 =$$

$$2M(M-1)\mu_2^2 \quad \text{and} \quad \mu_2^2 = \mathbb{E}(\alpha^2)^2 \xrightarrow{} (J_{11}(1))^2 \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(B^2) = 2M(M-1)[J_{11}(1)]^2$$

$$\Rightarrow J_{22}(M) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{f_M(x;\theta)} \frac{\partial^2 f_M(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right)^2\right\} = \mathbb{E}((A+B)^2) =$$

$$\mathbb{E}(B^2) + \underbrace{2\mathbb{E}(AB)}_{0} + \mathbb{E}(A^2) = M J_{22}(1) + 2M(M-1) J_{11}(1)^2$$

پس خواهیم داشت که :

$$\sigma_{\hat\theta}^2 \geq \frac{1}{\underbrace{J_{11}(M)}_{M J_{11}(1)}} + \frac{\overbrace{J_{12}^2(M)}^{M^2 J_{12}(1)}}{\underbrace{J_{11}(M)}_{M J_{11}(M)}\left(J_{11}(M) J_{22}(M) - J_{12}(M)^2\right)} =$$

$$\frac{1}{M J_{11}(1)} + \frac{M^2 J_{12}(1)^2}{M J_{11}(1)\left(\cancel{M} J_{11}(1) J_{22}(M) - M^2 J_{12}(1)^2\right)} =$$

$$\frac{1}{M J_{11}(1)} + \frac{J_{12}(1)^2}{J_{11}(1)\left(J_{11}(1) M J_{22}(1) + J_{11}(1)\, 2M(M-1) J_{11}(1)^2 - M J_{12}(1)^2\right)} =$$

$$\frac{1}{M J_{11}(1)} + \frac{J_{12}(1)^2}{M J_{11}(1)\left(J_{11}(1) J_{22}(1) + 2(M-1) J_{11}(1)^3 - J_{12}(1)^2\right)}$$

$$\frac{J_{12}(1)^2}{M J_{11}(1)\underbrace{\left(J_{11}(1)J_{22}(1) + (M-1)J_{11}(1)^3 - J_{12}(1)^2\right)}}$$

$$\downarrow$$

$$M J_{11}(1)\left(M J_{11}(1)^3 + J_{11}(1)J_{22}(1) - J_{12}(1)^2 - J_{11}(1)^3\right) =$$

$$M^2 J_{11}(1)^4 + M J_{11}(1)\left(J_{11}(1)J_{22}(1) - J_{12}(1)^2 - J_{11}(1)^3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{J_{12}(1)}{M^2 J_{11}(1)^4} \times \frac{1}{1+\frac{1}{M}J_{11}(1)^{-3}\underbrace{\left(J_{11}(1)J_{22}(1) - J_{12}(1)^2 - J_{11}(1)^3\right)}_{O\left(\frac{1}{M}\right)}}$$

از طرفی می دانیم که،

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{M}J_{11}(1)^{-3}\underbrace{\left(J_{11}(1)J_{22}(1) - J_{12}(1)^2 - J_{11}(1)^3\right)}_{O\left(\frac{1}{M}\right)}}$$

$$\approx 1 - O\left(\frac{1}{M}\right) + O\left(\frac{1}{M^2}\right) - \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{J_{12}(1)^2}{M^2 J_{11}(1)^4} \times \frac{1}{1+\frac{1}{M}J_{11}(1)^{-3}\left(J_{11}(1)J_{22}(1) - J_{12}(1)^2 - J_{11}(1)^3\right)} \approx$$

$$\frac{J_{12}(1)^2}{M^2 J_{11}(1)^4} - \underbrace{\frac{J_{12}(1)^2}{M^2 J_{11}(1)^4} \cdot O\left(\frac{1}{M}\right) + \cdots}_{+O\left(\frac{1}{M^3}\right)} \longrightarrow O\left(\frac{1}{M^3}\right) \in O\left(\frac{1}{M^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq \frac{1}{M J_{11}(1)} + \frac{J_{12}(1)^2}{M^2 J_{11}(1)^4} + O\left(\frac{1}{M^2}\right)$$

$$P(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |C(\theta)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu(\theta))^T C(\theta)^{-1}(x-\mu(\theta))\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln P(x;\theta)}_{\mathcal{L}(\theta)} = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln \det(C(\theta)) - \frac{1}{2}(x-\mu(\theta))^T C(\theta)^{-1}(x-\mu(\theta))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln\det C(\theta) = tr\left(C(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}\right) \longrightarrow -\frac{1}{2}tr\left(C(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(-\frac{1}{2}(x-\mu(\theta))^T C(\theta)^{-1}(x-\mu(\theta))\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\mu(\theta)}{\partial\theta_i}\right)^T C(\theta)^{-1}(x-\mu(\theta))$$

$$-\frac{1}{2}(x-\mu(\theta))^T\frac{\partial C(\theta)^{-1}}{\partial\theta_i}(x-\mu(\theta)) - \frac{1}{2}(x-\mu(\theta))^T C(\theta^{-1})\left(-\frac{\partial\mu(\theta)}{\partial\theta_i}\right) =$$

$$(x-\mu(\theta))^T C(\theta)^{-1}\frac{\partial\mu(\theta)}{\partial\theta_i} - \frac{1}{2}(x-\mu(\theta))^T\left[-C(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}C(\theta)^{-1}\right](x-\mu(\theta))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_i} = \left[\frac{\partial\mu(\theta)}{\partial\theta_i}\right]C(\theta)^{-1}\underbrace{(x-\mu(\theta))}_{y} + \frac{1}{2}[x-\mu(\theta)]\,C(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}C(\theta)^{-1}[x-\mu(\theta)]$$

$$-\frac{1}{2}tr\left(C(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}\right)$$

$$I(\theta)_{ij} = \mathbb{E}\left\{\frac{\partial\ln P(x;\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\ln P(x;\theta)}{\partial\theta_j}\right] = \frac{1}{4}tr\left(C(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}\right)tr\left(C(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}tr\left(C^{-1}(\theta)^{-1}\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}\right)\mathbb{E}\left\{y^T\frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial\theta_j}y\right\} +$$

$$\frac{\partial\mu(\theta)^T}{\partial\theta_i}C^{-1}(\theta)\,\mathbb{E}\{yy^T\}\,C^{-1}(\theta)\frac{\partial\mu(\theta)}{\partial\theta_j} +$$

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{y^T\frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial\theta_i}y\,y^T\frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial\theta_j}y\right\}$$

سایر عبارت‌ها صفر اند،

حالا خواهیم داشت که

$$[I(\theta)]_{ij} = \frac{1}{4} tr\left(C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}\right) tr\left(C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j}\right) \Big\} - \frac{1}{4} ---$$

$$*** \quad -\frac{1}{2} tr\left(C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}\right) tr\left(C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j}\right)$$

$$+ \frac{\partial \mu(\theta)^T}{\partial \theta_i} C^{-1}(\theta) \frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_j} + \frac{1}{4} \mathbb{E}\left\{ y^T \frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_i} y y^T \frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_j} y \right\}$$

حالا با استفاده از Porat and Friendlander خواهیم داشت که،

$$\boxed{\mathbb{E}\{ y^T A y y^T B y \} = tr(AC)\, tr(BC) + 2\, tr(ACBC) \quad \text{where} \quad C = \mathbb{E}\{yy^T\}}$$

برای ماتریس‌های متقارن A و B، حالا خواهیم داشت که،

$$* \quad \underbrace{\frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_i}}_{A} C(\theta) = C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} C^{-1}(\theta) C(\theta) = C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}$$

حالا می‌نامیم $A = \frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_i}$, $B = \frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_j}$ خواهیم داشت که،

$$*** \quad -\frac{1}{4} tr\left(C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}\right) tr\left(C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j}\right) = -\frac{1}{4} tr\left(\frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_i} \overset{\mathbb{E}\{yy^T\}}{C(\theta)}\right) tr\left(\frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_j} C(\theta)\right)$$

$$= -\frac{1}{4} tr(AC)\, tr(BC) = \frac{1}{2} tr(ACBC) \underbrace{- \frac{1}{4} \mathbb{E}\{ y^T A y y^T B y \}}_{\text{خط می‌خورند}}$$

پس خواهیم داشت که:

$$C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} \qquad C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{1}{2} tr\left(\frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_i} C(\theta) \frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_j} C(\theta) \right) + \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_i}\right]^T C^{-1}(\theta) \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_j}\right]$$

پس خواهیم داشت که،

$$[I(\theta)]_{ij} = \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_i}\right]^T C^{-1}(\theta) \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_j}\right] + \frac{1}{2} tr\left(C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j} \right)$$

برای حالت گاوسی مختلط خواهیم داشت که ،

$$X \sim \mathcal{CN}(\mu(\theta), C(\theta)) \quad , \quad X, \mu(\theta) \in \mathbb{C}^n \, , \; C(\theta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$ is Hermitian PD for θ

$$\Rightarrow I(\theta)_{ij} = E\left\{ \left(\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_j} \right) \right\}$$

توی حالت complex داریم که ،

$$p(x;\theta) = \frac{1}{\pi^n \det(C(\theta))} \exp\left(-[x-\mu(\theta)]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} [x - \mu(\theta)] \right)$$

$$\rightarrow \ln p(x;\theta) = -n \log \pi - \log \det(C(\theta)) - [x-\mu(\theta)]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} [x-\mu(\theta)]$$

$$\rightarrow \frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_i} = - \frac{\partial \ln \det C(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(-\ln \det(C(\theta)) \right) = -\mathrm{tr}\left(C(\theta)^{-1} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(-[x-\mu(\theta)]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} [x-\mu(\theta)] \right) =$$

$$\left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_i} \right]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} [x-\mu(\theta)] + [x-\mu(\theta)]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_i} \right] +$$

این دو عبارت conjugate همدیگه هستند

$$[x-\mu(\theta)]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} \left[\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} \right] C(\theta)^{-1} [x-\mu(\theta)] =$$

$$2\mathrm{Re}\left\{ [x-\mu(\theta)]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_i} \right] \right\} + [x-\mu(\theta)]^{\dagger T} C(\theta)^{-1} \left[\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} \right] C(\theta)^{-1} [x-\mu(\theta)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_i} = -tr\left[C_{(\theta)}^{-1} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}\right] + 2Re\left\{[x-\mu(\theta)]^{+T} C(\theta)^{-1} \left[\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_i}\right]\right\}$$

$$+ [x-\mu(\theta)]^{+T} C(\theta)^{-1} \left(\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}\right) C(\theta)^{-1} [x-\mu(\theta)]$$

اسم این ترم را $S_i(\theta)$ می گذاریم، خواهیم داشت:

$$[I(\theta)]_{ij} = \mathbb{E}\{S_i(\theta) S_j(\theta)\}$$

از آنجایی که $\mathbb{E}\{x-\mu(\theta)\} = 0$ است پس ترم هایی که می ماند عبارتند از:

(1) $tr\left\{C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}\right\} \cdot tr\left\{C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j}\right\}$

(2) ضرب $2Re\{ \text{———} \}$ در خودش

(3) عبارت آخر ضربدر خودش که می شود

$$\mathbb{E}\left\{[x-\mu(\theta)]^{+T} \underbrace{C(\theta)^{-1} \left(\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i}\right) C(\theta)^{-1}}_{A} [x-\mu(\theta)][x-\mu(\theta)]^{+T} C(\theta)^{-1} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j} C(\theta)^{-1} [x-\mu(\theta)]\right\}$$

$$= tr(ACBC) + tr(AC)\,tr(BC) \quad \text{where } \cancel{c \text{ is } \mathbb{E}\{(x-\mu(\theta))(x-\mu(\theta))^{+}\}}$$

$$c \text{ is } \mathbb{E}\left\{[x-\mu(\theta)][x-\mu(\theta)]^{+T}\right\}$$

(4) ضرب $2Re$ در $-tr$ $\longrightarrow$ $\mathbb{E}(\cdot) = 0$

(5) ضرب $2Re$ در ترم آخر

در نهایت با ساده سازی می رسیم به:

$$[I(\theta)]_{ij} = 2Re\left\{\frac{\partial \mu(\theta)^{+}}{\partial \theta_i} C(\theta)^{-1} \frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta_j}\right\} + tr\left(C(\theta)^{-1} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} C(\theta)^{-1} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j}\right)$$

۲-۵.

$$r[n] = s[n]\,\mu[n] + w[n] \longrightarrow$$

$$r = \operatorname{diag}(s)\,\mu(\eta) + w \longrightarrow$$

$$e(\eta) = r - \operatorname{diag}(s)\,\mu(\eta) = w \longrightarrow e(\eta) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 I) \longrightarrow$$

$$P(r;\eta) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{N+1}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} e(\eta)^\dagger e(\eta)\right) \longrightarrow$$

$$\ln P(r;\eta) = -(N+1)\ln(\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} e(\eta)^\dagger e(\eta) \longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \ln P(r;\eta) = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial \eta_i}\left[e(\eta)^\dagger e(\eta)\right], \quad \frac{\partial}{\partial \eta_i} e(\eta) = -\operatorname{diag}(s)\frac{\partial \mu(\eta)}{\partial \eta_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta_i} \ln P(r;\eta) = -\frac{1}{\sigma^2}\left(-e(\eta)^\dagger \operatorname{diag}(s)\frac{\partial \mu(\eta)}{\partial \eta_i} - \left(\frac{\partial \mu(\eta)}{\partial \eta_i}\right)^\dagger \operatorname{diag}(s)^\dagger e(\eta)\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\Bigg(\underbrace{e(\eta)^\dagger \operatorname{diag}(s)\frac{\partial \mu(\eta)}{\partial \eta_i} + \left(\frac{\partial \mu(\eta)}{\partial \eta}\right)^\dagger \operatorname{diag}(s)^\dagger e(\eta)}_{2\mathcal{R}\left(e(\eta)^\dagger \operatorname{diag}(s)\frac{\partial \mu(\eta)}{\partial \eta_i}\right)}\Bigg)$$

$$J(\eta) = \mathbb{E}\left\{\left(\nabla_\eta \ln P(r;\eta)\right)\left(\nabla_\eta \ln P(r;\eta)\right)^\dagger\right\} = \underline{\qquad\qquad}$$

با ساده سازی‌های رسیده به راهنمایی داده شده و خواهیم داشت که،

$$J(\eta) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=-N/2}^{N/2} \mathcal{R}\left\{\frac{\partial \mu[n]}{\partial \eta^H}\frac{\partial \mu[n]}{\partial \eta}\right\} = \begin{bmatrix} J_{\tau\tau} & J_{\tau\alpha} \\ J_{\alpha\tau} & J_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mu[n]}{\partial \tau_k} = \alpha_k(-j2\pi n \Delta f)\exp(-j2\pi n \Delta f \tau_k)$$

$$\frac{\partial \mu[n]}{\partial \alpha_k} = \exp(-j2\pi n \Delta f \tau_k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial \mu[n]}{\partial \tau_k}\right)^{\dagger}\left(\frac{\partial \mu[n]}{\partial \tau_l}\right) = \underbrace{\alpha_k^* \alpha_l (2\pi n \Delta f)^2 \exp(j2\pi n \Delta f(\tau_k - \tau_l))}_{A[n]_{kl}} \\ \left(\frac{\partial \mu[n]}{\partial \tau_k}\right)^{\dagger}\left(\frac{\partial \mu[n]}{\partial \alpha_l}\right) = \underbrace{-j2\pi n \Delta f \alpha_k^* \exp(j2\pi n \Delta f(\tau_k - \tau_l))}_{B[n]_{kl}} \\ \left[\frac{\partial \mu[n]}{\partial \alpha_k}\right]^{\dagger}\left[\frac{\partial \mu[n]}{\partial \alpha_l}\right] = \underbrace{e^{j2\pi n \Delta f(\tau_k - \tau_l)}}_{C[n]_{kl}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [J_{\tau\tau}]_{kl} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=-N/2}^{N/2} \Re\{A[n]_{kl}\}$$

$$[J_{\tau\alpha}]_{kl} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=-N/2}^{N/2} \Re\{B[n]_{kl}\}, \quad J_{\alpha\tau} = J_{\tau\alpha}^*$$

$$[J_{\alpha\alpha}]_{kl} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=-N/2}^{N/2} \Re\{C[n]_{kl}\}$$

$$\Rightarrow J(\eta) = \begin{bmatrix} J_{\tau\tau} & J_{\tau\alpha} \\ J_{\alpha\tau} & J_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad J(\theta) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)^{\dagger} J(\eta)\left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)$$

we call D

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial x} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow J(\theta) = \begin{bmatrix} D^{\dagger} J_{\tau\tau} D & D^{\dagger} J_{\tau\alpha} \\ J_{\alpha\tau} D & J_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}$$

حال داریم که،

$$D_k = \frac{\partial \tau_k}{\partial x} = \frac{x - x_k}{\|x - x_k\|_2}$$

و داریم که

$$\operatorname{cov}(\hat{x}) \geq \left(D^{\dagger} J_{\tau\tau} D - D^{\dagger} J_{\tau\alpha} J_{\alpha\alpha}^{-1} J_{\alpha\tau} D\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(\hat{x}) \geq \left(D^{\dagger}\left(J_{\tau\tau} - J_{\tau\alpha} J_{\alpha\alpha}^{-1} J_{\alpha\tau}\right) D\right)^{-1}$$

پهنای باند بزرگتر W یعنی δf بیشتر ← سیگنال بیشتر به دیلی حساس خواهد بود

چون که فاز شیفت هر sub carrier مربوط به $n\Delta f T$ هست.

این یعنی ~~...~~ Fisher Information بیشتر می‌شود ← CRLB کاهش می‌یابد.

← هرچه پهنای باند بیشتر، تخمین موقعیت بهتر. البته به شرطی که بر CRLB

برسیم یا خطا ماهر کم شود.

SNR، توان سیگنال ~~...~~ اگر به صورت یکنواخت روی کل پهنای

باند پخش شود که معمولاً این اتفاق می‌افتد، خواهیم داشت که چگالی طیفی توان $= \frac{P}{W}$

و $SNR \propto \frac{P}{\sigma^2 W}$ (اگر واریانس نویز σ^2 باشد.)

با ~~...~~ افزایش SNR یعنی وقتی توان نویز کمتر یا توان سیگنال بیشتر شود

خطای اندازه‌گیری کمتر می‌شود، Fisher Information بیشتر می‌شود ← تخمین موقعیت

دقیق‌تر می‌شود ← SNR بالاتر باعث کاهش CRLB می‌شود و باعث بهبود

عملکرد مکان‌یابی می‌شود.

$\tilde{\tau}_k = \tau_k + b$

۳-۵. مطابق بخش قبل خواهیم داشت که :

$$J(\eta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \mathcal{R}\{ (\nabla_\eta \mu[n])^\dagger (\nabla_\eta \mu[n]) \}$$

$$\mu[n] = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k e^{-j2\pi n \Delta f \tilde{\tau}_k}$$

$$\Rightarrow J(\eta) = \begin{bmatrix} J_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} & J_{\tilde{\tau}\alpha} \\ J_{\alpha\tilde{\tau}} & J_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}$$

طبق ماتریس ژاکوبین خواهیم داشت که :

$$J(\theta) = \left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right)^\dagger J(\eta) \left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right) \quad , \quad \begin{cases} \frac{\partial\tilde{\tau}_k}{\partial\tau} = \frac{\partial\tau_k}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\tilde{\tau}_k}{\partial b} = 1 \quad \text{for all } k \\ \frac{\partial\alpha_k}{\partial\tau} = 0 \, , \, \frac{\partial\alpha_k}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\eta}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \overset{D}{\cancel{\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial\tau}}} & \overset{1}{\cancel{\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial b}}} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$(K+1)\times 2$ $(K+1)\times 1$ $(K+1)(K+1)$

$$\Rightarrow J(\theta) = \begin{pmatrix} D^\dagger & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} J(\eta) \begin{pmatrix} D & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(\theta) = \begin{pmatrix} D^\dagger J_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} D & D^\dagger J_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} \mathbf{1} & D^\dagger J_{\tilde{\tau}\alpha} \\ \mathbf{1} J_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} D & \mathbf{1} J_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} \mathbf{1} & \mathbf{1} J_{\tilde{\tau}\alpha} \\ J_{\alpha\tilde{\tau}} D & J_{\alpha\tilde{\tau}} \mathbf{1} & J_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

۶- یک فرایند WSS را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \quad \text{where } h[0]=1 \,,\; u[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$$

$$P_{xx}(f) = |H(f)|^2 \sigma_u^2 \,,\quad H(f) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \exp(-j\omega k)$$

$$u = \begin{bmatrix} u[0] \\ \vdots \\ u[N-1] \end{bmatrix} \,,\quad X = \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

حالا خواهیم داشت که:

می‌دانیم که

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \cdots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ h[N-1] & \cdots & & h[0] \end{bmatrix} u \,,\quad u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2 I)$$

پس خواهیم داشت که:

$$p(x;\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \underbrace{\det^{1/2}(\sigma_u^2 HH^T)}_{\left((\sigma_u^2)^N \det(HH^T)\right)^{1/2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T (\sigma_u^2 HH^T)^{-1} x\right)$$

از طرفی داریم که:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]\, u[n-k] + \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \approx \sum_{k=0}^{n} h[k]\, u[n-k].$$

برای $n \to \infty$

$$\rightarrow X(f) = H(f)U(f) \,,\quad X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n)$$

$$U(f) = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \exp(-j2\pi f n)$$

← طبق پارسوال خواهیم داشت که:

$$\frac{1}{\sigma_u^2} u^T u = \frac{1}{\sigma_u^2} \sum_{n=0}^{N-1} u^2[n] = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |U(f)|^2 df \approx \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|X(f)|^2}{\sigma_u^2 |H(f)|^2} df$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|X(f)|^2}{P_{xx}(f)} df$$

Scanned with CamScanner

$$\ln \sigma_u^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \ln \sigma_u^2 \, df = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{P_{xx}(f)}{|H(f)|^2}\right) df = \int_{-1/2}^{1/2} \ln P_{xx}(f)\, df - \int_{-1/2}^{1/2} \ln |H(f)|^2 \, df$$

ولی برای قسمت دوم داریم که برابر است با :

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \ln H(f) + \ln H^*(f) \, df = 2\,\mathrm{Re}\int_{-1/2}^{1/2} \ln H(f)\, df =$$

$$2\,\mathrm{Re}\oint_C \ln H(z) \frac{dz}{2\pi j z} = 2\,\mathrm{Re}\Big(\underbrace{Z^{-1}\{\ln H(z)\}\big|_{n=0}}_{\lim_{z\to\infty} \ln H(z) = \ln h[0] = \ln 1 = 0}\Big)$$

پس خواهیم داشت که :

$$\ln \sigma_u^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \ln P_{xx}(f)\, df$$

پس خواهیم داشت که :

$$\longrightarrow \ln p(x;\theta) = -\frac{N}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \ln P_{xx}(f)\, df - \frac{1}{2}\int \frac{|X(f)|^2}{P_{xx}(f)}\, df$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_i} = -\frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{P_{xx}(f)} - \frac{\frac{1}{N}|X(f)|^2}{P_{xx}(f)^2}\right)\frac{\partial P_{xx}(f)}{\partial \theta_i}\, df$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{N}{2}\int \left(\frac{1}{P_{xx}(f)} - \frac{\frac{1}{N}|X(f)|^2}{P_{xx}(f)^2}\right)\frac{\partial^2 P_{xx}(f)}{\partial \theta_i} + \left(\frac{-1}{P_{xx}(f)} + \frac{\frac{2}{N}|X(f)|^2}{P_{xx}(f)^3}\right)\frac{\partial P_{xx}(f)}{\partial \theta_i}\frac{\partial P_{xx}(f)}{\partial \theta_j}\, df$$

حالا باید منفی امید ریاضی این عبارت را حساب کنیم تا $I(\theta)$ بدست آید.

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right\} \longrightarrow$$ می‌خواهیم این را حساب کنیم

ابتدا $\mathbb{E}\left\{\frac{1}{N}|X(f)|^2\right\}$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x[m]\,x[n]\,\exp(-j2\pi f(m-n))\right\} =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\left\{x[m]\,x[n]\,\exp(-j2\pi f(m-n))\right\} =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\left\{x[m]\,x[n]\right\}\exp(-j2\pi f(m-n))$$

همچنین تعریف می‌کنیم،

$$r_{xx}[k] = \sigma_u^2 \sum_{n=0}^{\infty} h[n]\,h[n+k]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} r_{xx}[m-n]\,\exp(-j2\pi f(m-n)) =$$

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \underbrace{\left(1-\frac{|k|}{N}\right) r_{xx}[k]}\,\exp(-j2\pi f k)$$

As $N \longrightarrow \infty$

$\longrightarrow r_{xx}[k]$

we use

$$\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g[m-n] = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|)\,g(k)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N}|X(f)|^2\right\} \approx P_{xx}(f)$$

$$\Rightarrow [I(\theta)]_{ij} = \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{P_{xx}(f)^2}\,\frac{\partial P_{xx}(f)}{\partial\theta_i}\,\frac{\partial P_{xx}(f)}{\partial\theta_j}\,df$$

$$= \frac{N}{2}\int \frac{\partial \ln P_{xx}(f)}{\partial\theta_i}\,\frac{\partial \ln P_{xx}(f)}{\partial\theta_j}\,df$$

۲-۶. با استفاده از بخش ۶-۱ خواهیم داشت که ،

$$[I(\theta)]_{mn} = \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|A(f)|^4}\{A(f)\exp(j2\pi fm) + A(f)^*\exp(-j2\pi fm)\}\{A(f)\exp(j2\pi fn) + A(f)^*\exp(-j2\pi fn)\}\,df$$

$$= \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(A(f)A(f)^*)^2}\Big(A(f)^2\exp(j2\pi f(m+n)) + A(f)A(f)^*\exp(j2\pi f(m-n)) + A(f)^*A(f)\exp(j2\pi f(n-m)) + A(f)^*A(f)^*\exp(-j2\pi f(m+n))\Big)df$$

$$= \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\frac{1}{A(f)^{*2}}\exp(j2\pi f(m+n))}_{} + \frac{1}{|A(f)|^2}\underbrace{(\exp(j2\pi f(m-n)) + \exp(j2\pi f(n-m)))}_{} + \underbrace{\frac{1}{A(f)^2}\exp(-j2\pi f(m+n))}_{}\,df$$

این دو عبارت انتگرال شون برابره.

$$= \underbrace{N\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{A(f)^{*2}}\exp(j2\pi f(m+n))\,df}_{} + \int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{|A(f)|^2}(\qquad)\,df$$

حاصل کانولوشن دنباله غیرعلی است ← صفر است.

$$\Rightarrow [I(\theta)]_{mn} = \frac{N}{\sigma_u^2} r_{xx}[m-n] \quad \text{if } m,n \in \{0,\dots,p\}$$

اگر $m \in \{0,\dots,p\}$, $n = p+1$ باشد

$$[I(\theta)]_{mn} = -N/2\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{\sigma_u^2}\frac{1}{|A(f)|^2}(A(f)\exp(j2\pi fm) + A^*(f)\exp(-j2\pi fm))\,df$$

$$= -N/2\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{A^*(f)}\exp(j2\pi fm) = 0$$

مطابق کانولوشن که بالاتر گفتیم صفر است.

حال اگر $m=p+1$, $n=p+1$ باشد، داریم که

$$[I(\theta)]_{mn} = \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sigma_u^4}\, df = \frac{N}{2\sigma_u^4} \quad \Rightarrow$$

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma_u^2} P_{xx} & & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & \cdots & N/2\sigma_u^4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

خواهیم داشت که θ ،

$$\begin{cases} \operatorname{Var}(\hat{a}[k]) \geq \left(\frac{N}{\sigma_u^2} P_{xx}\right)^{-1}_{kk} \longrightarrow \\ \operatorname{Var}(\hat{a}[k]) \geq \frac{\sigma_u^2}{N} (P_{xx})^{-1}_{kk} \\ \operatorname{Var}(\hat{\sigma}_u^2) \geq \left(\frac{N}{2\sigma_u^4}\right)^{-1} = \frac{2\sigma_u^4}{N} \end{cases}$$