به نام خدا

علی قاسم زاده   ۴۰۱۱۰۹۳۳۹

تمرین سری ۵ تئوری تخمین

-۱

$$X(n) = w(n) + 0.8\, w(n-1) + 1.5\, w(n-2)$$

$w(n)$ is White stationary noise with mean-zero

$$R_w(m) = \delta(m)$$

observation: $Y(n) = X(n) + v(n)$

$v(n)$ is white stationary noise with mean-zero

$$R_{xv}(m) = 0 \qquad R_v(m) = 0.1\, \delta(m)$$

۱.۱ حالا می‌خواهیم MMSE $x(n)$ براساس مشاهدات $Y(k)$ برای $-\infty < k < \infty$ بدست آوریم، همچنین فیلتر لازم برای تخمین آن.

$$
* \begin{cases}
r_x(0) = E\{x(n)\, x(n)\} = 1^2 + 0.8^2 + 1.5^2 = 3.89 \\
r_x(1) = E\{x(n)\, x(n+1)\} = 0.8 + 1.2 = 2 \\
r_x(2) = E\{x(n)\, x(n+2)\} = 1.5 \\
r_x(m) = 0 \quad \text{for } |m| > 2
\end{cases}
$$

$$r_y(m) = r_x(m) + r_v(m) = r_x(m) + 0.1\, \delta(m)$$

$$\longrightarrow r_y(0) = 3.89 + 0.1 = 3.99 \qquad r_y(1) = 2 \qquad r_y(2) = 1.5$$

$$r_y(m) = 0 \quad \text{for } |m| > 2$$

$$r_{xy}(m) = E\{x(n+m)\, y(n)\} = r_x(m)$$

حالا طراحی که ۱

$$R_X(z) = \sum_{m=-۲}^{m=۲} r_X(m)\, z^{-m} = ۱/۵(z^{۲}+z^{-۲}) + ۲(z+z^{-۱}) + ۳/۸۹$$

$$R_Y(z) = R_X(z) + ۰/۱ = ۱/۵(z^{۲}+z^{-۲}) + ۲(z+z^{-۱}) + ۳/۹۹$$

$$G(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_m z^{-m} = \frac{R_X(z)}{R_Y(z)}$$ فیلتر غیر casual وینر

$$\rightarrow \quad H(e^{-jw}) = ۱ + ۰/۸ e^{-jw} + ۱/۵ e^{-۲jw}$$

$$S_X(e^{jw}) = |H(e^{-jw})|^{۲}, \quad S_v(e^{jw}) = ۰/۱$$

$$G(e^{jw}) = \frac{S_X(e^{jw})}{S_X(e^{jw}) + S_v(e^{jw})} = \frac{|H(e^{-jw})|^{۲}}{|H(e^{-jw})|^{۲} + ۰/۱}$$

$$MMSE_\infty = r_X(0) - \frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{S_X^{۲}(e^{jw})}{S_X(e^{jw}) + S_v(e^{jw})}\, dw =$$

$$\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{S_X(e^{jw})\, S_v(e^{jw})}{S_X(e^{jw}) + S_v(e^{jw})}\, dw$$

۱_۲.

$$\hat{X}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, y(n-k)$$

$$R_Y(z) = C_Y(z)\, C_Y(z^{-1})$$

$C_Y(z)$ ، casual ، minimum-phase است ،

$$R_Y(z) = ۳/۹۹ + ۲(z+z^{-۱}) + ۱/۵(z^{۲}+z^{-۲}) = \cancel{C_Y(z)}\ C_Y(z)\, C_Y(z^{-1})$$

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} = z^{-1}\, \frac{\{R_{XY}(z)/C_Y(z^{-1})\}_+}{C_Y(z)}$$

$\{\cdot\}_+ \longrightarrow$ فقط توان‌های غیرمثبت z^{-1} را در نظر بگیرید.

همچنین داریم که $R_{xy}(z) = R_x(z)$

$$MMSE_{pred} = r_x(0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_x(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_x(e^{jw})S_v(e^{jw})}{S_x(e^{jw})+S_v(e^{jw})}dw - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jw}\frac{S_x^2(e^{jw})}{S_x(e^{jw})+S_v(e^{jw})}dw$$

۱-۳.

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=-1}^{\infty} u_k\, y(n-k)$$

$$MMSE_{lookahead-1} = r_x(0) - \sum_{k=-1}^{\infty} u_k r_x(-k)$$

$$S_x(e^{jw}) = \left|1 + 0.8e^{-jw} + 1.5e^{-2jw}\right|^2 \qquad S_v(e^{jw}) = 0.1$$

$$S_y = S_x + S_v$$

$$\Longrightarrow MMSE = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{S_x(e^{jw})S_v(e^{jw})}{S_x(e^{jw})+S_v(e^{jw})}\left|1+e^{jw}\right|^2 dw$$

۱-۴.

$$S(n) = \begin{bmatrix} w(n-1) \\ w(n-2) \end{bmatrix}, \quad S(n+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} S(n) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{G} w(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.5 \end{bmatrix} S(n) + w(n) + v(n)$$

$$w(n) \sim N(0,1), \quad v \sim N(0, 0.1)$$

Scanned with CamScanner

$$\hat{s}(1|0) = 0 \,, \quad P(1|0) = \operatorname{cov}(s(1) - \hat{s}(1|0)) = \Sigma_0$$

$$\Rightarrow \hat{s}(n+1|n) = F\,\hat{s}(n|n) \,, \quad P(n+1|n) = F\,P(n|n)\,F^T + GQG^T, \quad Q = 1$$

update with $y(n)$,

$$S_n = H\,P(n|n-1)\,H^T + R, \qquad R = 1/1$$

$$K_n = P(n|n-1)\,H^T S_n^{-1}$$

$$\hat{s}(n|n) = \hat{s}(n|n-1) + K_n\left(y(n) - H\,\hat{s}(n|n-1)\right)$$

$$P(n|n) = (I - K_n H)\,P(n|n-1)$$

$$\hat{x}(n|n) = \mathbb{E}\{x(n)\,|\,y(1:n)\} = H\,\hat{s}(n|n) + \underbrace{\mathbb{E}\{w(n)\,|\,y(1:n)\}}_{0}$$

$$\Rightarrow \mathrm{MMSE}(n) = \operatorname{Var}(x(n) - \hat{x}(n|n)) = H\,P(n|n)\,H^T + \underbrace{\operatorname{Var}(w(n))}_{1}$$

$$n \to \infty \,, \quad P(n|n) \to P_\infty \,, \quad P_\infty = F P_\infty F^T + GQG^T - F P_\infty H^T (H P_\infty H^T + R)^{-1} H P_\infty F^T$$

$$\mathrm{MMSE}_\infty = H P_\infty H^T + 1$$

۵- اگه ـ lookahead اجازه بدیم در تخمین $y(1), \ldots, y(n+1)$

برای تخمین $x(n)$.

$$\hat{s}(n|n+1) = \hat{s}(n|n) + L_n\left(\hat{s}(n+1|n+1) - \hat{s}(n+1|n)\right)$$

$$L_n = P(n|n)\, F^T \left(P(n+1|n)\right)^{-1}$$

$$MMSE_{smooth} = H\, P(n|n+1)\, H^T + 1$$

۳- داریم که ،

$$f_0[n] = \alpha f_0[n-1] + u[n] \qquad n \geq 0$$

$$u[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$$

$$f_0[-1] \sim \mathcal{N}(\mu_{f_0}, \sigma_{f_0}^2) \quad \text{independent of } u[n]$$

$$x[n] = \cos(2\pi f_0[n]) + w[n], \quad n \geq 0$$

$$w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{independent of } u[n], f_0[-1]$$

حالا داریم که ،

prediction step:

$$\hat{f}_0[n|n-1] = \alpha \hat{f}_0[n-1|n-1]$$

$$P[n|n-1] = \alpha^2 P[n-1|n-1] + \sigma_u^2$$

Linearization of the observavation model.

$$h(f_0[n]) = \cos(2\pi f_0[n])$$

Jacobian —

$$H[n] = \left.\frac{\partial h}{\partial f_0[n]}\right|_{\hat{f}_0[n|n-1]} = -2\pi \sin(2\pi \hat{f}_0[n|n-1])$$

Update step:

$$K[n] = \frac{P[n|n-1]\, H[n]}{H[n]^2 P[n|n-1] + \sigma^2}$$

$$\hat{f}_0[n|n] = \hat{f}_0[n|n-1] + K[n]\left(X[n] - \cos(2\pi \hat{f}_0[n|n-1])\right)$$

$$P[n|n] = (1 - K[n]H[n])\, P[n|n-1]$$

۴- داریم که،

$$x_t = c_t^T \theta + n_t \qquad (t=0,1,\ldots)$$

$$\underline{x}_t = H_t \theta + \underline{n}_t , \quad H_t = \begin{bmatrix} H_{t-1} \\ c_t^T \end{bmatrix}, \underline{x}_t = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix}, \underline{n}_t = \begin{bmatrix} n_0 \\ \vdots \\ n_t \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_t \sim \mathcal{N}(0, R_t), \quad R_t = \mathbb{E}\{\underline{n}_t \underline{n}_t^T\} = \begin{bmatrix} R_{t-1} & \underline{r}_t \\ \underline{r}_t^T & r_{tt} \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_t = \mathbb{E}\{\underline{n}_{t-1} n_t\}, \quad r_{tt} = \mathbb{E}\{n_t^2\}$$

داریم که،

$$X_t = H_t \theta + N_t , \quad N_t \sim \mathcal{N}(0, R_t)$$

همان $\underline{x}_t$ همان $\underline{n}_t$

$$\Rightarrow P(X_t|\theta) \propto \exp\left(-\tfrac{1}{2}(X_t - H_t\theta)^T R_t^{-1}(X_t - H_t\theta)\right)$$

$$\Rightarrow P(X_t|\theta) \propto \exp\left(\theta^T \underbrace{(H_t^T R_t^{-1} X_t)} - \tfrac{1}{2}\theta^T (H_t^T R_t^{-1} H_t)\theta\right)$$

طبق تجزیه نیمن فیشر داریم که آمارگان کافی ما عبارت است از:

$$\boxed{T(X_t) = H_t^T R_t^{-1} X_t} \longrightarrow 1\text{-}۴$$

حال داریم که،

$$R_t = \begin{bmatrix} R_{t-1} & \underline{r}_t \\ \underline{r}_t & r_{tt} \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_t = \mathbb{E}\{N_{t-1} n_t\}$$

$$r_{tt} = \mathbb{E}\{n_t n_t\}$$

وارون R_t عبارت است از:

$$R_t^{-1} = \begin{bmatrix} R_{t-1}^{-1} + b_t \gamma_t^{-1} b_t^T & -b_t \gamma_t^{-1} \\ -\gamma_t^{-1} b_t^T & \gamma_t^{-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} b_t &= -R_{t-1}^{-1} r_t \\ \gamma_t &= r_{tt} + r_t^T b_t \end{aligned} \quad .1)$$

$$\Rightarrow T(X_t) = H_t^T R_t^{-1} X_t = [H_t \quad C_t] \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ x_t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(X_t) = H_{t-1}^T R_{t-1}^{-1} X_{t-1} + \gamma_t^{-1} \Big(H_{t-1}^T b_t b_t^T X_{t-1} - H_{t-1}^T b_t x_t - C_t b_t^T X_{t-1} + C_t x_t \Big)$$

$$\Rightarrow T(X_t) = T(X_{t-1}) + \gamma_t^{-1} \Big(C_t x_t + (H_{t-1}^T b_t - C_t b_t^T) X_{t-1} - H_{t-1}^T b_t x_t \Big)$$

$$\Rightarrow T(X_t) = T(X_{t-1}) + \gamma_t^{-1} (C_t + H_{t-1}^T b_t)(x_t - b_t^T X_{t-1})$$

↑ ۲-۴

۳-۴ حالا اگر cov قطری باشد، $b_t = 0$ است و $\gamma_t = r_{tt}$

$$\Rightarrow \boxed{T(X_t) = T(X_{t-1}) + r_{tt}^{-1} C_t x_t}$$

تعبیر این رابطه این است که، هر بار که یک داده جدید می‌آید، آماره‌ی قدیمی با یک تصحیح ساده به روز می‌شود. اگر x_t قوی باشد تأثیر بیشتری روی θ دارد.

اگر نویز قوی باشد r_{tt} بزرگ است و وزن کمتری به x_t داده می‌شود برای آپدیت

در این حالت بدون نیاز به کل آرایه و داده های گذشته، فقط آمارگان کافی را آپدیت می‌کنیم و محاسبات مان هم خیلی سریعتر خواهد بود. از طرفی نویزهای مستقل به صورت خودکار فیلتر می‌شوند ($\frac{1}{r_{tt}}$).

۵-

۵- کل بردار های حالت S_n یک ماتریس $np \times np$ خواهد بود، داریم که $\underline{S_n} = \begin{bmatrix} \underline{S_{n-1}} \\ s_n \end{bmatrix}$

$\underline{S_{n-1}} = vec(s_1, \ldots, s_{n-1})$، حالا ماتریس $p \times p$ پایین سمت راست برامون مهمه و $BCRB_{nn}$ برامون مهمه.

$$J_n = BCRB_{nn}^{-1}$$

ما داریم که،

$$J(s_{n+1}) = -E\left\{ \nabla_{\underline{S_{n+1}}} \nabla_{\underline{S_{n+1}}}^T \ Ln\, P\left(\underline{S_{n+1}}, x_{n+1}\right)\right\} =$$

$$-E\left\{ \nabla_{s_{n+1}} \nabla_{s_{n+1}}^T \left(Ln\, P(\underline{S_n}) + Ln\, P(s_{n+1} | s_n) + Ln\, P(x_{n+1} | s_{n+1}) \right)\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \overset{J(s_n)}{\cancel{B}} + E\{-\nabla_{\underline{S_n}} \nabla_{\underline{S_n}}^T\, Ln\, P(s_{n+1}|s_n)\} & E\{-\nabla_{\underline{S_n}} \nabla_{s_{n+1}}^T\, Ln\, P(s_{n+1}|s_n)\} \\ E\{-\nabla_{s_{n+1}} \nabla_{\underline{S_n}}^T\, Ln\, P(s_{n+1}|s_n)\} & E\{-\nabla_{s_{n+1}} \nabla_{s_{n+1}}^T\, Ln\, P(s_{n+1}|s_n)\} + E\{-\nabla_{s_{n+1}} \nabla_{s_{n+1}}^T\, Ln\, P(x_{n+1}|s_{n+1})\} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J(s_{n+1}) = \begin{bmatrix} J_n + D_n^{11} & D_n^{12} \\ D_n^{21} & D_n^{22} \end{bmatrix}$$

برای ماتریس های بلوکی داشتیم که،

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \longrightarrow M^{-1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}$$

$$\longrightarrow \boxed{J_{n+1} = D_n^{22} - D_n^{21}\left(J_n + D_n^{11}\right)^{-1} D_n^{12}} \longrightarrow ۵-۱$$

۵-۲.

D_n^{11}:

اطلاعات در مورد S_n که توی transition model هست را ارائه میده،
$P(S_{n+1}|S_n)$

اینکه اندازه میگیره که چقدر transition model از S_n استفاده می‌کنه.

D_n^{12}:

cross information بین S_n، S_{n+1} در transition model اندازه میگیره.

این نشون میده تغییرات توی S_n چقدر تأثیر میذاره روی اطلاعات S_{n+1}.

D_n^{22}:

اطلاعات در مورد S_{n+1} از transition model
$P(S_{n+1}|S_n)$

اطلاعات در مورد S_{n+1} با observation model
$P(X_{n+1}|S_{n+1})$

حالا مرتب سازی،

Prediction step:

$$D_n^{22} - D_n^{21}(J_n + D_n^{11})^{-1} D_n^{12}$$

این پیش‌بینی از ماتریس info از زمان n به $n+1$ را ارائه میده.

Update step:

D_n^{22} which is $\mathbb{E}\{-\nabla_{S_{n+1}} \nabla_{S_{n+1}}^T \ln P(X_{n+1}|S_{n+1})\}$

نشون میده آپدیت info matrix را با توجه به Observation X_t.

۵-۳. داریم که:

$$s_{n+1} = F_n s_n + v_n, \quad v_n \sim \mathcal{N}(0, Q_n)$$ transition

$$x_n = C_n s_n + w_n, \quad w_n \sim \mathcal{N}(0, R_n)$$ observation

$$p(s_{n+1} | s_n) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(s_{n+1} - F_n s_n)^T Q_n^{-1} (s_{n+1} - F_n s_n)\right)$$

$$\nabla_{s_n} \ln p(s_{n+1} | s_n) = F_n^T Q_n^{-1} (s_{n+1} - F_n s_n)$$

$$\nabla_{s_n} \nabla_{s_n}^T \ln p(s_{n+1} | s_n) = -F_n^T Q_n^{-1} F_n$$

$$\Rightarrow D_n^{11} = F_n^T Q_n^{-1} F_n$$

$$\nabla_{s_{n+1}} \nabla_{s_{n+1}}^T \ln p(s_{n+1} | s_n) = F_n^T Q_n^{-1}$$

$$\Rightarrow D_n^{12} = -F_n^T Q_n^{-1}, \quad D_n^{21} = -Q_n^{-1} F_n$$

$$\nabla_{s_{n+1}} \nabla_{s_{n+1}}^T \ln p(s_{n+1} | s_n) = -Q_n^{-1}$$

$$\Rightarrow D_n^{22} = Q_n^{-1}$$ (from transition)

$$p(x_{n+1} | s_{n+1}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{n+1} - C_{n+1} s_{n+1})^T R_{n+1}^{-1} (x_{n+1} - C_{n+1} s_{n+1})\right)$$

$$\nabla_{s_{n+1}} \nabla_{s_{n+1}}^T \ln p(x_{n+1} | s_{n+1}) = -C_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} C_{n+1}$$

$$\Rightarrow D^{22} = Q_n^{-1} + C_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} C_{n+1}$$ (total)

$$\Rightarrow J_{n+1} = Q_n^{-1} + C_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} C_{n+1} - (-Q_n^{-1} F_n)(J_n + F_n^T Q_n^{-1} F_n)^{-1} (-F_n^T Q_n^{-1})$$

$$\Rightarrow Q_n^{-1} - Q_n^{-1} F_n \left(J_n + F_n^T Q_n^{-1} F_n\right)^{-1} F_n^T Q_n^{-1} +$$

$$C_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} C_{n+1} \quad \xrightarrow[\text{lemma}]{\text{using inverse matrix}}$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = \left(Q_n + F_n J_n^{-1} F_n^T\right)^{-1} + C_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} C_{n+1}$$

قبلی فیلتر کالمن را داشتیم که،

Pred,

$$P_{n+1|n} = F_n P_{n|n} F_n^T + Q$$

update,

$$P^{-1}_{n+1|n+1} = P^{-1}_{n+1|n} + C_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} C_{n+1}$$

ماتریس اطلاعات فیشر J_n وارون ماتریس کوواریانس P_n است یعنی $J_n = P_n^{-1}$.

Pred,

$$P_{n+1|n} = F_n J_n^{-1} F_n^T + Q_n$$

$$J_{n+1|n} = \left(F_n J_n^{-1} F_n^T + Q_n\right)^{-1}$$

در استپ update هم، $C_{n+1}^T R_{n+1}^{-1} C_{n+1}$ جمع میشه با ترم دوم.

۶- $X \sim N(0,1)$ است و می‌خواهیم $P(X>4)$ را تخمین بزنیم که

$$P(X>4) = \mathbb{E}\{\mathbb{I}_{X>4}\}$$

۶-۱. تخمین مونتی کارلو ساده عبارت است از:

$$\hat{P}_{mc} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{x_i>4}$$

$$\mathbb{E}\{\hat{P}_{mc}\} = P(X>4) \approx 3.17 \times 10^{-5}$$

$$\operatorname{Var}(\hat{P}_{mc}) = \frac{(1-P(X>4))P(X>4)}{N} \approx 3.17 \times 10^{-11}$$

از آنجایی که $X>4$ احتمال خیلی کمی داره، بیشتر سمپل‌ها $X_i>4$ را برقرار نمی‌کنند
هزینه‌ی محاسباتی بالایی باید بپردازیم.

۶-۲. از $Y \sim N(\mu,1)$ سمپل می‌گیریم و وزن‌دهی می‌کنیم (reweight)

$$\hat{P}_{IS} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{Y_i>4} \cdot \frac{\phi(Y_i)}{\phi(Y_i;\mu,1)}$$

$$\phi(Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Y_i^2/2}, \quad \phi(Y_i;\mu,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(Y_i-\mu)^2/2}$$

میاییم $N=10^4$ تا سمپل از گاوسی $N(4,1)$ تولید می‌کنیم،

$$w_i = \mathbb{I}_{Y_i>4} \cdot \frac{e^{-Y_i^2/2}}{e^{-(Y_i-4)^2/2}} = \mathbb{I}_{Y_i>4} \cdot e^{-4Y_i+8}$$

$$\Rightarrow \hat{P}_{IS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w_i$$

برای این حالت $Y_i \geq ۴$ با احتمال $\frac{1}{۲}$ اتفاق می‌افتد برای کمینه کردن واریانس تخمین‌گر هم باید جواب این را پیدا کنیم.

$$\mu^* = \underset{\mu}{\arg\min} \; \mathrm{var}(\hat{P}_{IS}) \longrightarrow$$

با توجه به ران های پایتون که کد آن هم ضمیمه می‌شود،
مقدار μ^* بهینه تقریبا ۴ است.

همچنین واریانس Importance sampling خیلی بیشتر است.

۶_۳.

$$S_n = f(S_{n-1}) + V_n \qquad \text{(state transition)}$$

$$X_n = h(S_n) + W_n \qquad \text{(observation)}$$

particle filter with importance sampling:

proposal distribution:

choose proposal $q(S_n | S_{n-1}, x_n)$ (e.g. prior $p(S_n | S_{n-1})$ or a linearized approx)

importance weights:

$S_n^{(i)} \sim q(S_n | S_{n-1}^{(i)}, X_n)$, compute:

$$W_n^{(i)} = W_{n-1}^{(i)} \cdot \frac{p(x_n | S_n^{(i)}) \, p(S_n^{(i)} | S_{n-1}^{(i)})}{q(S_n^{(i)} | S_{n-1}^{(i)}, X_n)}$$

$P(x_n \mid s_n^{(i)}) \longrightarrow$ likelihood of observation

$P(s_n^{(i)} \mid s_{n-1}^{(i)}) \longrightarrow$ state transition prior

Normalize weights:

$$\tilde{w}_n^{(i)} = \frac{w_n^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N} w_n^{(j)}}$$

resample:

for avoiding weight degeneracy, resample particles with replacement according to $\tilde{w}_n^{(i)}$

$q(\cdot)$ باید جوری انتخاب بشه که واریانس را کاهش بدهد.

importance sampling

باید کمک کنه که هزینه محاسباتی روی نقاط با احتمال بالا متمرکز کنیم.

* وزن ها هم بخاطر mismatch بین proposal و posterior میان.