به نام خدا

علی قاسم‌زاده ۴۰۱۱۰۹۳۳۹

(۱) الف)

$$\left.\begin{aligned} 3x-6y+z+2t&=-4\\ 4x-2y-z-2t&=-3\\ 9x+6y-z-8t&=5\\ 6x+3y+z+3t&=8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ماتریس افزایش یافته:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 & -4\\ 4 & -2 & -1 & -2 & -3\\ 9 & 6 & -1 & -8 & 5\\ 6 & 3 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 *= 3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 & -4\\ 12 & -6 & -3 & -6 & -9\\ 9 & 6 & -1 & -8 & 5\\ 6 & 3 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 -= 2R_1]{R_2 -= 4R_1,\ R_3 -= 3R_1} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 18 & -7 & -14 & 7\\ 0 & 24 & -4 & -14 & 17\\ 0 & 15 & -1 & -1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 *= 6]{R_1 *= 3,\ R_3 *= 3}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -18 & 3 & 6 & -12\\ 0 & 18 & -7 & -14 & 7\\ 0 & 72 & -12 & -42 & 51\\ 0 & 90 & -6 & -6 & 96 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 -= 5R_2]{R_1 += R_2,\ R_3 -= 4R_2} \begin{bmatrix} 9 & 0 & -4 & -8 & -5\\ 0 & 18 & -7 & -14 & 7\\ 0 & 0 & 16 & 14 & 23\\ 0 & 0 & 29 & 64 & 61 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 *= 16]{R_1 *= 4,\ R_2 *= 16}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & 0 & -16 & -32 & -20\\ 0 & 288 & -112 & -224 & 112\\ 0 & 0 & 16 & 14 & 23\\ 0 & 0 & 464 & 1024 & 976 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 -= 29R_3]{R_1 += R_3,\ R_2 += 7R_3} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -18 & 3\\ 0 & 288 & 0 & -126 & 273\\ 0 & 0 & 16 & 14 & 23\\ 0 & 0 & 0 & 618 & 309 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 /= 3,\ R_4 /= 309}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6 & 1\\ 0 & 288 & 0 & -126 & 273\\ 0 & 0 & 16 & 14 & 23\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 -= 7R_4]{R_1 += 3R_4,\ R_2 += 63R_4} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 288 & 0 & 0 & 336\\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 /= 16,\ R_4 /= 2]{R_1 /= 12,\ R_2 /= 288} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \quad x=\frac{1}{3} \quad z=1 \quad y=\frac{7}{6} \quad t=\frac{1}{2}$$

← ماتریس های مقدماتی عبارتند از:

1)

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-4&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-3&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$E_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_5=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_6=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$E_7=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&6\end{bmatrix},\quad E_8=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_9=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-4&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{10}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-5&0&1\end{bmatrix},$$

$$E_{11}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{12}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&16&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{13}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&16\end{bmatrix},\quad E_{14}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$E_{15}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&7&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{16}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-29&1\end{bmatrix},\quad E_{17}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{18}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{209}\end{bmatrix},$$

$$E_{19}=\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{20}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&63\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-7\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{22}=\begin{bmatrix}\frac{1}{12}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{288}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{24}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{16}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{25}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ب)

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 -= 7R_1]{R_2 -= 8R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -20 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 *= 7]{R_2 *= 8} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -56 & -160 & -64 & 8 & 0 \\ 0 & -56 & -112 & -49 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 -= R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -56 & -160 & -64 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 15 & -8 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 /= 8} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -20 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 15 & -8 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 *= 2]{R_1 *= 7} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 21 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -40 & -16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 15 & -8 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 += R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & -19 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & -40 & -16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 15 & -8 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 + \frac{40}{48} R_3]{R_1 + \frac{19}{48} R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -\frac{45}{16} & -\frac{7}{6} & \frac{133}{48} \\ 0 & -14 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{14}{3} & \frac{35}{6} \\ 0 & 0 & 48 & 15 & -8 & 7 \end{array}\right]$$

$\frac{5}{6}$

$$\xrightarrow[R_3 /= 48]{R_1 /= 7,\ R_2 /= -14} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{45}{112} & -\frac{1}{6} & +\frac{19}{48} \\ 0 & 1 & 0 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{48} \end{array}\right]$$

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-8&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-7&0&1\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&8&5\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{bmatrix},$$

$$E_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix},\ E_6=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{8}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_7=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_8=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$E_9=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_{10}=\begin{bmatrix}1&0&\frac{19}{48}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{5}{6}\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$,E_{13}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{14}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_{14}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{48}\end{bmatrix}$$

۲-۳) درست است باید مجموعه توابع با دوره تناوب T تحت عمل ضرب اسکالر و جمع بسته باشند:

فرض کنیم f و g دو تابع از مجموعه توابع با دوره تناوب T باشند $\to f(n+T)=f(n),\ g(n+T)=g(n)$ و داشته باشیم $h(n)=f(n)+g(n)$. حال باید نشان دهیم $h(n)$ هم تابعی با دوره تناوب T است یعنی باید نشان دهیم $h(n)=h(n+T)$.

$$\left.\begin{aligned}h(n+T)&=f(n+T)+g(n+T)=f(n)+g(n)\\h(n)&=f(n)+g(n)\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(n+T)=h(n)\to h(n)\in \text{مجموعه توابع با دوره تناوب } T$$

$\Rightarrow$ این مجموعه توابع نسبت به عمل جمع بسته‌اند.

حال در نظر می‌گیریم تابع متناوب $f(n)$، حال فرض کنیم $h(n)=af(n)$ (که ضریب ثابت). حال باید نشان دهیم $h(n)$ هم متناوب است:

$$\left.\begin{aligned}h(n)&=af(n)\\h(n+T)&=af(n+T)\\f(n+T)&=f(n)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}h(n)&=af(n)\\h(n+T)&=af(n)\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(n+T)=h(n)$$

$\to$ این مجموعه نسبت به عمل ضرب اسکالر هم بسته است. $\Leftarrow$ مجموعه توابع با دوره تناوب T عضو R^R هست.

ب) غلط است: تابع های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos \pi x$ هردو متناوب هستند.

در نظر می‌گیریم $h(x)=f(x)+g(x)$ حال باید نشان دهیم که $h(x)$ متناوب نیست:

فرض کنیم $h(x)$ متناوب باشد، پس باید داشته باشیم:

$$h(0)=1$$

$$\exists T : \forall x \quad h(x\pm T)=h(x) \longrightarrow h(0)=h(T)=h(-T)=1 \longrightarrow$$

$$\sin(T)+\cos(\pi T) = -\sin(T)+\cos(\pi T)=1 \longrightarrow \sin(T)=0 \rightarrow T=K\pi \quad K\in\mathbb{Z}$$

$$\cos(\pi T)=1 \rightarrow \pi T=2K\pi \quad K\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi(K\pi)=2K'\pi \quad K,K'\in\mathbb{Z} \longrightarrow K\pi=2K' \longrightarrow \pi=\frac{2K'}{K}\in\mathbb{Q} \quad \times$$

عدد π عضو اعداد گویا نیست.

ج) درست است:

اگر تابع f را داشته باشیم، آنگاه داریم:

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \longrightarrow h(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=h(x)$$

$h\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$h(x)$ یک تابع زوج است.

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \longrightarrow g(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-g(x)$$

$g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$g(x)$ یک تابع فرد است.

$$h(x)+g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{-f(-x)+f(x)}{2}=f(x) \Rightarrow f(x)=h(x)+g(x)$$

فرض کنیم $h(x)\in U_h$, $g(x)\in U_g$ $\leftarrow$ $f=g+h\in U_g+U_h$ چون f یک تابع دلخواه است

$\leftarrow$ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=U_h\oplus U_g$ فقط باید نشان دهیم: $U_h\cap U_g=\{0\}$: فرض کنیم $L\in U_h\cap U_g$ $\leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} L(x)&=L(-x)\\ L(x)&=-L(-x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow L(-x)=-L(-x) \longrightarrow L(-x)=0 \longrightarrow L(x)=0$$

$$\xrightarrow{\forall x} L(x)=0 \longrightarrow U_g\cap U_h=\{0\}$$

Scanned with CamScanner

۲) اثبات اینکه اجتماع دو زیرفضا W_1 و W_2 از فضای برداری V، اگر و فقط اگر یک زیرفضا از V هستند که $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ باشد:

اگر $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ باشد، اجتماع آنها هر یکی از آنهاست پس باز هم زیرفضا است یعنی اگر $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ آنگاه $W_2 \cup W_1$ یک زیرفضا از V است.

* حال طرف دیگر را با برهان خلف ثابت می‌کنیم و اثبات می‌کنیم که اجتماع دو زیرفضا می‌تواند یک زیرفضا نباشد:

اگر $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ هیچکدام برقرار نباشد، پس W_1 و W_2 به صورت

هستند. حالا عنصر u در $W_1 - W_2$ و عنصر v در $W_2 - W_1$ را در نظر بگیرید اگر $W_1 \cup W_2$ بخواهد زیرفضا باشد، باید $u+v$ عضو آن باشد.

$u+v$ سه حالت دارد:

$u+v \in W_1 - W_2$: در این صورت چون u هم عضو این زیرفضا است در نتیجه $-u$ هم عضو این زیرفضا است $\Leftarrow$ $(-u) + (u+v)$ هم باید عضو این زیرفضا باشد یعنی $v \in W_1 - W_2$ باشد که چنین چیزی تناقض است زیرا $v \in W_2 - W_1$ بود. X

$u+v \in W_2 - W_1$: در این صورت چون v هم عضو این زیرفضا است در نتیجه $-v$ هم عضو این زیرفضا است $\Leftarrow$ $(-v)$ و $(u+v)$ هم باید عضو این زیرفضا باشد یعنی $u \in W_2 - W_1$ باشد که چنین چیزی تناقض است زیرا $u \in W_1 - W_2$ بود. X

$u+v \in W_1 \cap W_2$: این حالت هم مانند دو تای بالا تناقض دارد با جمع کردن با $-u$ یا $-v$ به تناقض می‌رسیم

$$\begin{matrix} v \in W_1 \\ u \in W_2 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} u+v \in W_1 \\ u+v \in W_2 \end{matrix} \quad X$$

Scanned with CamScanner

۳- طبق قضیه می دانیم که اجتماع دو زیرفضا، زیرفضا است اگر و تنها اگر یکی شامل دیگری باشد.
اگر بین سه زیرفضا یکی شامل دوتای دیگر باشد، اجتماعشان برابر یکی از آنها است و سه زیرفضا است.
اگر یکی از زیرفضاها شامل دیگری باشد، آنگاه زیرفضای بزرگتر و زیرفضا سوم، باز طبق قضیه یکی باید شامل دیگری باشد که یعنی یکی از زیرفضاها شامل دوتای دیگر می شود.
اگر یکی از زیرفضاها در اجتماع دوتای دیگر باشد، مثلاً سه زیرفضای A و B و C داشته باشیم و $C \subseteq A \cup B$
آنگاه: C را می توانیم به دو بخش مجزا تبدیل کنیم: $\underbrace{A\cap C}_{E}, \underbrace{C-A}_{D}$:

$A \cup B \cup C \to A \cup B \cup D \cup E$

$\to D \cup E = C$, $D \cap E = \emptyset$

$E \subseteq A$, $D \subseteq B$ ← چون C زیرمجموعه $A \cup B$ بود و $A\cap C$ در A است پس $C-A$ هم باید در B باشد.

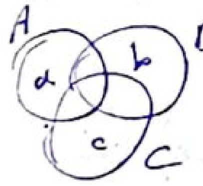
$= (A \cup E) \cup (B \cup D) = A \cup B$

⇐ باز با اجتماع دو مجموعه سروکار داریم و طبق قضیه یکی باید شامل دیگر باشد.
بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنیم A شامل B باشد ⇐

$B \subseteq A$ $\quad A \cup B = A$, $C \subseteq A \cup B \to C \subseteq A$

← A شامل دو زیرفضای دیگر است.

حالتی می ماند که سه زیرفضا هرکدام اعضایی داشته باشند که دوتای دیگر ندارند، مانند شکل زیر:



حال در نظر می گیریم: $\begin{cases} a \in A-(B\cup C) \\ b \in B-(A\cup C) \\ c \in C-(A\cup B) \end{cases}$

حال $a+b$ اگر عضو A باشد، چون a هم عضو A است ⇐ $(a+b)-a \in A \to b$ هم عضو A است ✗. ← به طور مشابه $a+b$ نه عضو A است و نه عضو B. تنها حالتی که می ماند این است که $a+b$ عضو C باشد.
حال $a-b$ هم باز اگر عضو A باشد، چون a هم عضو A است ⇐ b- عضو A است ⇐ خواص زیرفضاها ← b هم عضو A است ✗. به طور مشابه $a-b$ نه عضو A است و نه عضو B. تنها حالتش این است که عضو

c باشد. حالا داریم که:

$$a+b \in C$$
$$a.b \in C \Rightarrow 2a \in C \xrightarrow[\text{ضرب اسکالر}]{\text{خواص}} a \in C \quad \times$$

چون a عضوی بود که فقط در مجموعه‌ی A بود و در دو مجموعه‌ی دیگر نبود.

$\Leftarrow$ اجتماع سه زیرفضا از V یک زیرفضا از V است اگر و تنها اگر یکی از زیرفضاها شامل دوتای دیگر باشد.

۱-۳-۴) خواص جمع:

خاصیت جابجایی:

$$(a+b)_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \cdots + a_j b_0$$

$$(b+a)_j = \sum_{i=0}^{j} b_i a_{j-i} = a_j b_0 + a_{j-1} b_1 + \text{———} + a_0 b_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \text{———} + a_j b_0$$

$$\longleftarrow \quad \star\ (a+b)_j = (b+a)_j$$

خاصیت شرکت‌پذیری:

$$(a+b)+c \stackrel{?}{=} a+(b+c)$$

$$(a+b)_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} \longrightarrow$$ $(a+b)_j$ را d_j می‌نامیم. به این طریق $a+b$ هم d می‌نامیم.

$$(b+c)_j = \sum_{i=0}^{j} b_i c_{j-i} \longrightarrow$$ $(b+c)_j$ را e_j می‌نامیم. به این طریق $b+c$ را هم e می‌نامیم.

$$d = a+b \longrightarrow \quad (d+c)_j = \sum_{i=0}^{j} d_i c_{j-i} = \sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) c_{j-i}$$

$$e = b+c \longrightarrow \quad (a+e)_j = \sum_{i=0}^{j} a_i e_{j-i} = \sum_{i=0}^{j} a_i \left(\sum_{k=0}^{j-i} b_k c_{j-i-k}\right)$$

حال اگر بخواهیم جمله mام را در هرکدام از عبارات $(a+b)+c$ و $a+(b+c)$ حساب کنیم، خواهیم داشت:

Scanned with CamScanner

$$\sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \times \left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) \longleftarrow (a*b)*c$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \times \left(\sum_{k=0}^{m-i} b_k c_{m-i-k}\right) \longleftarrow a*(b*c)$$

در اولی: جمله‌ی m، c_{m-i} ها در سیگمای $a_k b_{i-k}$ ها ضرب می‌شود یعنی، c_{m-i}، در تمام سیگمای تمام $a_l b_t$ هایی ضرب می‌شود که $l+t=i$ و روی این ها سیگما زده ایم (از صفر تا m) یعنی تمام $a_l b_n c_p$ هایی که $l+n+p=m$ است.

اولی: $\forall i$: c اندیس $= m-i$ $\forall k$: a اندیس $=k$ ، b اندیس $= i-k$ $\longrightarrow$

$\boxed{\forall k: \ a \text{ اندیس} + b \text{ اندیس} = i}$

در جمله m ام $\Longrightarrow$ $\forall i$: $\underbrace{c \text{ اندیس}}_{m-i} + \underbrace{a \text{ اندیس} + b \text{ اندیس}}_{i} = m$ $\longrightarrow$ $(a*b)*c = \displaystyle\sum_{\substack{i, j, k \\ i+j+k=m}} a_i b_j c_k$

در دومی: جمله‌ی m، جمله‌ی a_i در سیگمای $b_k c_{m-i-k}$ ها ضرب می‌شود یعنی، a_i در سیگمای تمام $b_l c_t$ هایی که $l+t=m-i$ و روی این ها سیگما زده ایم (از صفر تا m) یعنی تمام $a_l b_n c_p$ هایی که $l+n+p=m$ است.

دومی: $\forall i$: a اندیس $=i$ $\forall k$: b اندیس $=k$ ، c اندیس $= m-i-k$ $\longrightarrow$

$\forall k$: b اندیس + c اندیس $= m-i$

در جمله m ام $\Longrightarrow$ $\forall i$: $\underbrace{a \text{ اندیس}}_{i} + \underbrace{b \text{ اندیس} + c \text{ اندیس}}_{m-i} = m$

$\Leftarrow$ این دوتا سیگما برابر اند $\leftarrow$ خاصیت شرکت پذیری هم برقرار است.

وجود بردار صفر یا خنثی: این بردار را z می‌نامیم:

$$a*z = (a_0 z_0 , a_1 z_0 + a_0 z_1 , a_2 z_0 + a_1 z_1 + a_0 z_2 , \dots)$$

اگر z را بردار: $(1,0,0,0,\dots)$ درنظر بگیریم، فقط درایه اول 1 و بقیه درایه‌ها صفرند

$$\forall j : (a*z)_j = \sum_{i=0}^{j} a_i z_{j-i} \xrightarrow[z_k=0 \ k>0]{z_0=1} \boxed{z_0 a_j} \longrightarrow (a*z)_j = a_j \checkmark$$

$$\longrightarrow (a*z) = a$$

وجود بردار قرینه: با توجه به اینکه $a_0 \neq 0$ برای هر بردار a باید برداری مثل b داشته باشیم که

$$a*b = z$$

بردار صفری که بالا تعریف کردیم.

$$\Longrightarrow a*b=z \longrightarrow (a_0 b_0 , a_0 b_1 + a_1 b_0 , \dots) = (1,0,0,\dots)$$

$$\Longrightarrow \boxed{b_0 = \frac{1}{a_0}} \qquad a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \longrightarrow \boxed{b_1 = \frac{-a_1 b_0}{a_0}}$$

$$\forall j>0 : \underbrace{\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}}_{(a*b)_j} = 0 \longrightarrow a_0 b_j + \sum_{i=1}^{j} a_i b_{j-i} = 0 \Longrightarrow$$

$$a_0 b_j = -\sum_{i=1}^{j} a_i b_{j-i} \longrightarrow \boxed{b_j = \frac{-\sum_{i=1}^{j} a_i b_{j-i}}{a_0}}$$

پس دنباله b به این صورت که $b_0 = \frac{1}{a_0}$ و $b_j = \frac{-\sum_{i=1}^{j} a_i b_{j-i}}{a_0}$: $\forall j>0$ تعریف می‌شود و درنتیجه

این فضا

$a*b$ برابر با بردار صفر V خواهد بود.

در خواص ضرب، ضرب ~~ضرب~~ k_{00} برقرار نیست زیرا

$$0 \cdot a = (\overset{a_0}{\uparrow}{0}, 0, \ldots)$$

و می دانیم که $0 \neq a_0$ است در نتیجه این دنباله عضو ~~ ~~ V نیست.

خواص ضرب اسکالر:

ب) خاصیت شرکت پذیری:

$$\alpha(\beta a) = \alpha \underbrace{(\overset{b_0}{\beta a_0}, \overset{b_1}{\beta a_1}, \overset{b_2}{\beta a_2}, \ldots)}_{\text{خود یک دنباله است، آن را b می نامیم}} = \alpha b = (\alpha b_0, \alpha b_1, \alpha b_2, \ldots)$$

$$= \underbrace{(\alpha\beta a_0, \alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2, \ldots)}$$

$$\underbrace{(\alpha\beta)}_{\gamma \text{ می نامیم}} a = \gamma a = (\gamma a_0, \gamma a_1, \gamma a_2, \ldots) = \underbrace{(\alpha\beta a_0, \alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2, \ldots)}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a \longrightarrow$$ خاصیت شرکت پذیری برقرار است.

خاصیت Scalar identity:

$$1a = (1 \times a_0, 1 \times a_1, 1 \times a_2, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = a$$

این خاصیت هم برقرار است.

خاصیت پخشی:

$$① \; (\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X$$

$$② \; \alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$$

ابتدا ① را بررسی می کنیم:

$$\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\gamma \text{ می نامیم}} X = \gamma X = (\gamma X_0, \gamma X_1, \gamma X_2, \ldots) = ((\alpha+\beta)X_0, (\alpha+\beta)X_1, \ldots)$$

$$\underbrace{\alpha X}_{a \text{ می نامیم}} + \underbrace{\beta X}_{b \text{ می نامیم}} = a + b = (\overset{\alpha X_0}{a_0} \overset{\beta X_0}{b_0}, a_1 b_0 + a_0 b_1, a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \ldots) =$$

$$((\alpha X_0)\beta X_0, \alpha X_1 \beta X_0 + \alpha X_0 \times \beta X_1, \ldots) = (\alpha\beta X_0^2, 2\alpha\beta X_0 X_1, \ldots)$$

$$\neq \overbrace{((\alpha+\beta)X_0, (\alpha+\beta)X_1, \ldots)}^{(\alpha+\beta)X} \Rightarrow (\alpha+\beta)X \neq \alpha X + \beta X$$

⇐ خاصیت پخشی برقرار نیست.

حالا ② را هم بررسی می‌کنیم:

$$\alpha(\underbrace{X+Y}_{Z\text{ می‌نامیم}}) = \alpha(\overbrace{X_0Y_0,\ X_1Y_0+X_0Y_1,\ ---}^{Z}) = \alpha Z = (\alpha Z_0, \alpha Z_1, \alpha Z_2, --)$$

$$= (\alpha X_0Y_0,\ \alpha(X_1Y_0 + X_0Y_1),\ .\ ---)$$

$$\alpha X + \alpha Y = \overbrace{(\alpha X_0, \alpha X_1, ---)}^{Z\text{ می‌نامیم}} + \overbrace{(\alpha Y_0, \alpha Y_1, ---)}^{W\text{ می‌نامیم}} \Longrightarrow$$

$$Z_0 \quad Z_1 \quad --- \qquad W_0 \quad W_1 \quad --$$

$$Z+W = (Z_0W_0,\ Z_1W_0 + Z_0W_1,\ ---) = (\alpha X_0\alpha Y_0,\ \alpha X_1\alpha Y_0 + \alpha X_0\alpha Y_1,\ ---)$$

$$= (\alpha^2(X_0Y_0),\ \alpha^2(X_1Y_0+X_0Y_1),\ .\ ---) \neq (\alpha X_0Y_0,\ \alpha(X_1Y_0+X_0Y_1),\ --)$$

$$\Longrightarrow \alpha(X+Y) \neq \alpha X + \alpha Y$$

⇐ خاصیت پخشی برای ضرب اسکالر وجود ندارد.

⇐ خواص ضرب اسکالر برای اینکه V فضای برداری باشد، وجود ندارد ⇐

V یک فضای برداری نیست چون خاصیت پخشی برای ضرب اسکالر آن برقرار نیست.

همچنین ضرب اسکالر صفر در بردار صفر برای آن برقرار نیست.

Scanned with CamScanner