به نام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

SUBJECT: تمرین پنجم جبرخطی

Year: Month: Day: Page : ( )

① فرض کنید وارون پذیر نباشد پس وجود دارد بردار $x \neq 0$ که

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \\ \vdots \\ 2x_1 + 3x_2 + \cdots + x_n = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{sum} \frac{n(n+1)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

جمله دوم : $nx_1 + x_2 + \cdots + (n-1)x_n \xrightarrow{+\sum x_i} \underbrace{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}_{\text{جمله اول}} + nx_1 = 0$

$\Rightarrow nx_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0$

به طور استقرایی تمام x_iها صفر می‌شوند $\Leftarrow$ $x = 0$ $\Leftarrow$ ✗ پس چنین برداری نداریم ←

ماتریس داده شده وارون پذیر است. استقرا هم به این صورت است که برای $n=1$ که بدیهی است

فرض کنید برای هر $n-1 \times n-1$ برقرار باشد ← طبق بالا $x_1 = 0$ شود یک ماتریس $n-1 \times n-1$ باقی

می‌ماند ← که x_iهای دیگر هم صفر هستند ← $x = 0$

Page : (   )

SUBJECT: Year: Month: Day:

۲- سطر آخر را، هر سطر را منهای x_1 برابر سطر بالایی اش می کنیم به ترتیب از پایین ترین سطر تا بالا

داریم ا و دترمینان تغییر نمی کند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{bmatrix}$$

حالا از پایین ترین سطر تا سطر دوم، هر سطر را منهای x_2 برابر سطر بالایی اش می کنیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & (x_n-x_1) \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n^{n-3}(x_n-x_1)(x_n-x_2) \end{bmatrix}$$

حالا باز از پایین ترین سطر تا سطر سوم، هر سطر را منهای x_3 برابر سطر بالایی اش می کنیم

به همین ترتیب پیش می رویم، یک ماتریس بالا مثلثی تشکیل می شود که درایه های روی قطر اصلی اش

هستند $1, x_2-x_1, (x_3-x_2)(x_3-x_1), \ldots$ ← دترمینان برابر است با ضرب عناصر

روی قطر اصلی برابر است با:

$1\times(x_2-x_1)\,(x_3-x_2)(x_3-x_1)\times\ldots$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}(x_i-x_j) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

فرض استقرا: $n-2$ بار فرایند بالا را تکرار کنیم داریم

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & (x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & x_n(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2}) \\ 0 & 0 & \cdots & x_n^{2}(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2}) \\ & & & x_{n-1}^{2}(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2}) \end{matrix}$$

با انجام بار دیگر این فرایند، سطر آخر برابر می شود با

$x_{n-1}^{2}(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2}) - x_{n-1}\left(x_{n-1}(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\right) = 0$

$x_n^{2}(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2}) - x_{n-1}\left(x_n(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})\right) =$

Senobar

$(x_n - x_{n-1}) \ldots (x_n - x_1)$

$\longrightarrow$ سطر آخر : $0 \ldots 0 \quad (x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})$

۳- آ)

$$\|Ax-b\|^2 = \|Ax_0-b\|^2 + \|A(x-x_0)\|^2 \Leftrightarrow$$

$$(Ax-b).(Ax-b) = (Ax_0-b).(Ax_0-b) + (Ax-Ax_0).(Ax-Ax_0) \Leftrightarrow$$

$$(Ax-b)^T(Ax-b) = (Ax_0-b)^T(Ax_0-b) + (Ax-Ax_0)^T(Ax-Ax_0) \Leftrightarrow$$

$$(x^TA^T-b^T)(Ax-b) = (x_0^TA^T-b^T)(Ax_0-b) + (x^TA^T-x_0^TA^T)(Ax-Ax_0) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^TA^TAx} - x^TA^Tb - b^TAx + \cancel{b^Tb} = x_0^TA^TAx_0 - x_0^TA^Tb - b^TAx_0 + \cancel{b^Tb} + \cancel{x^TA^TAx} - x^TA^TAx_0 - x_0^TA^TAx + x_0^TA^TAx_0$$

$A^TAx_0 = A^Tb$ داریم

$$\Leftrightarrow -\cancel{x^TA^Tb} - b^TAx = \cancel{x_0^TA^Tb - x_0^TA^Tb} - b^TAx_0 - \cancel{x^TA^Tb} - x_0^TA^TAx + x_0^TA^Tb$$

$(A^TAx_0)^T = (A^Tb)^T = b^TA$

$$\Leftrightarrow -b^T\cancel{Ax} = -b^TAx_0 - b^T\cancel{Ax} + x_0^TA^Tb \Leftrightarrow b^TAx_0 = x_0^TA^Tb$$

$$\Leftrightarrow (A^Tb)^Tx_0 = x_0^T(A^Tb) \Leftrightarrow (A^Tb).(x_0) = (x_0).(A^Tb)$$

که درست است زیرا ضرب داخلی خاصیت جابجایی دارد ← چون رابطه‌ها

دو طرفه‌اند عبارت اول درست است.

و نزدیک بردار b

$\|Ax-b\|^2$ توان دوم فاصله Ax از b است، فاصله یک نقطه صفحه از نقطه‌ی b،

Ax_0 تصویر عمودی صفحه‌ی A است و Ax_0-b برابر با بردار عمود بر صفحه‌ی A از b است

همچنین $A(x-x_0)$ فاصله نقطه‌ی انتهای Ax از تصویر b بر صفحه‌ی A

است که اینها یک مثلث می‌سازند.

Page : ( )

SUBJECT:
Year: Month: Day:

وتر آن $Ax-b$، اضلاع آن Ax_0-b و $A(x-x_0)$ هستند

ب) داریم

$$A^TAx_0 = A^Tb \longrightarrow (A^TA)^{-1}A^Tb = x_0$$

$$\boxed{pb = Ax_0 = A(A^TA)^{-1}A^Tb} \longrightarrow P = A(A^TA^{-1})A^T$$ قرار می‌دهیم،

بررسی خواص ماتریس P،

$P^2 = P$, P is symetric $\rightarrow P^T = P$

$$P^2 = A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^TA}_{I}(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P \Rightarrow P^2 = P$$

$$P^T = (A(A^TA)^{-1}A^T)^T = A((A^TA)^{-1})^TA^T =$$

$$A((A^TA)^T)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P \Rightarrow P^T = P$$

۴)

قاعده زنجیره،

$$\frac{\partial \det(X^n)}{\partial X} = \frac{\partial \det(X^n)}{\partial \det(X)} \times \frac{\partial \det(X)}{\partial X}$$

$$= \frac{\partial \det(X)^n}{\partial \det(X)} \frac{\partial \det(X)}{\partial X} = n\det(X)^{n-1} \frac{\partial \det(X)}{\partial X}$$

طبق سطر i ام بسط میدهیم

$$\det(X) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} x_{ij} \det(X'_{ij}) \rightarrow \frac{\partial \det(X)}{\partial x_{ij}} = (-1)^{i+j}\det(X'_{ij})$$

سطر i ام و ستون j ام را حذف کنیم ماتریس باقی مانده را X' می‌نامیم

بقیه درایه‌ها نسبت به x_{ij} ثابت است و صفر می‌شوند.

ماتریسی که از حذف ستون j ام و سطر i ام X بدست می‌آید.

Senobar

SUBJECT

Year: Month: Day: Page : ( )

در قاعده کرامر هر داشتیرکه $\det(X'_{ij})$ برابر

$$X^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\det(X'_{ij})}{\det(X)} \longrightarrow$$ درایه‌های adj(X) را می‌سازد

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} \longrightarrow X^{-1} = \frac{adj(X)}{\det(X)} \longrightarrow adj(X) = \det(X)X^{-1}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \det(X^n)}{\partial X} = n\det(X)^{n-1} adj(X) = n\det(X)^{n-1}\det(X)X^{-1} =$$

$$n\det(X)^n X^{-1} = n\det(X^n)X^{-1}$$

ب)

$$\frac{\partial \det A(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial \det(A(t))}{\partial A_{ij}}}_{adj(A)_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = trace\left(adj(A)\frac{\partial A(t)}{\partial t}\right)$$

$$adj(A) \downarrow \det(A)A^{-1} \longleftarrow$$ طبق بالا

$\Rightarrow$ ~~trace(adj(A)~~

$$\Rightarrow trace\left(\det(A(t))A^{-1}_{(t)}\frac{\partial A(t)}{\partial t}\right) =$$

$$\det(A(t))\, trace\left(A^{-1}_{(t)}\frac{\partial A(t)}{\partial t}\right)$$

Senobar