بنام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

① الف)
$$\text{Nullity}\{ABC\} \leq \text{Nullity}\{A\} + \text{Nullity}\{B\} + \text{Nullity}\{C\}$$

$$\text{Nullity}\{\underbrace{ABC}_{A}\} = \underbrace{\{x \mid x \in N(C)\}}_{N_1} \cup \underbrace{\{y \mid Cy \in N(B)\}}_{N_2} \cup \underbrace{\{z \mid BCz \in N(A)\}}_{N_3}$$

$$N_2 \rightarrow (\leq \text{Nullity}\{B\}) \qquad N_3 \rightarrow (\leq \text{Nullity}(A))$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \longrightarrow |A| \leq |A_1| + |A_2| + |A_3| \longrightarrow$$

$$\text{Nullity}\{ABC\} \leq \text{Nullity}\{A\} + \text{Nullity}\{B\} + \text{Nullity}\{C\}$$

ب)

$$\text{Rank}\{ABC\} \leq \min\{\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\}, \text{Rank}\{C\}\}$$

طبق اسلایدها $\text{Rank}\{AB\} \leq \text{Rank}\{A\}$, $\text{Rank}\{A^T\} = \text{Rank}\{A\}$ ← پس داریم

$$\text{Rank}\{AB\} = \text{Rank}\{(AB)^T\} = \text{Rank}\{B^T A^T\} \leq \text{Rank}\{B^T\} = \text{Rank}\{B\}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \text{Rank}\{AB\} \leq \text{Rank}\{A\} \\ \text{Rank}\{AB\} \leq \text{Rank}\{B\} \end{matrix} \Rightarrow \text{Rank}\{AB\} \leq \min(\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\})$$

$$\rightarrow \text{Rank}\{A\overset{D}{BC}\} = \text{Rank}\{AD\} \leq \min(\text{Rank}\{A\}, \underbrace{\text{Rank}\{D\}}_{\leq \min(\text{Rank}\{B\}, \text{Rank}\{C\})})$$

$$\Rightarrow \text{Rank}\{ABC\} \leq \min(\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\}, \text{Rank}\{C\})$$

پ) بین A و B و C فرض کنیم A بیشترین Nullity را دارد ، همچنین چون ABC = 0 است
پس Nullity{ABC}=n است . که بدون کم شدن از کلیت مسئله

می‌دانیم که داریم ، Rank + Nullity = n پس کسی که بیشترین

Nullity را دارد کمترین Rank را دارد همچنین داریم که

$$\text{Nullity}\{ABC\} \leq \text{Nullity}\{A\} + \text{Nullity}\{B\} + \text{Nullity}\{C\}$$

و $Nullity\{A\}$ از دوتای دیگه بزرگتر است $\leftarrow$ $n \leq ۳ Nullity\{A\}$

$\leftarrow \frac{n}{۳} \leq Nullity\{A\} \leftarrow Rank(A) \leq \frac{۲n}{۳} \leftarrow$

$Rank\{CBA\} \leq min\{Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\}) \leq Rank\{A\} \leq (\frac{۲n}{۳})$

ت) $N(A) = N(A^۲) \longleftrightarrow R(A) = R(A^۲)$ اثبات:

طرف اول: $R(A) = R(A^۲) \rightarrow N(A) = N(A^۲)$:

فرض کنیم $N(A) \neq N(A^۲)$ پس چون می‌دانیم که به ازای هر x ای که $Ax = 0$ باشد، $A^۲x = 0$

پس $N(A) \subset N(A^۲)$ است و اگر بخواهد $N(A) \neq N(A^۲)$ باشد، باید $N(A^۲)$ عضوی داشته باشد که

$N(A)$ نداشته باشد $\leftarrow$

$$\dim N(A^۲) > \dim N(A)$$
$$\dim N(A^۲) + \dim R(A^۲) = n \longrightarrow \dim R(A^۲) < \dim R(A) \longrightarrow$$
$$\dim N(A) + \dim R(A) = n$$

$R(A^۲) \neq R(A)$ ✗

حالا طرف دیگه را ثابت می‌کنیم: $N(A) = N(A^۲) \rightarrow R(A) = R(A^۲)$

فرض کنیم چنین نباشد، می‌دانیم که برای هر x ای که $Ax \neq 0$ باشد، Ax عضوی از $R(A)$ است

حالا اگر $Ax \in D_A$، آنگاه $A^۲x$ تعریف می‌شود و حداکثر به یک عضو در Range A

می‌رود. می‌دانیم که: A: $\dim range(A) + \dim null(A) = n$

$A^۲$: $\dim range(A^۲) + \dim null(A^۲) = n$

همچنین می‌دانیم که: $N(A) = N(A^۲)$.

حالا طرف دیگر را اثبات می‌کنیم: $N(A)=N(A^2) \rightarrow R(A)=R(A^2)$

فرض کنیم که $R(A) \neq R(A^2)$ باشد، پس یعنی وجود دارد x ای در $R(A)$ یا $R(A^2)$ که در یکی نیست. ~~همچنین~~ ~~$R(A^2) \subseteq R(A)$~~ ~~چرا که~~ پس u ای وجود داشته که این x را تبدیل کند. حال این u در یکی به Range رفته و در دیگری به Null space رفته است ← در یکی عضو Null space است و در دیگری نه ← $N(A) \neq N(A^2)$ X. ← حکم برقرار است.

$R(A)\cap N(A)=\{0\} \leftrightarrow N(A)=N(A^2)$

ابتدا طرف اول را ثابت می‌کنیم: $R(A)\cap N(A)=\{0\} \rightarrow N(A)=N(A^2)$:

فرض کنیم چنین نباشد یعنی $N(A)\neq N(A^2)$ پس $\exists x$ به طوری که $Ax\neq 0$ ولی $AAx=0$، حال داریم که

$Ax\in N(A)$ و ~~$Ax\in R(A)$~~ $Ax\in R(A)$ ← چون $Ax\neq 0$ پس $R(A)\cap N(A)\neq\{0\}$

طرف دیگر را اثبات می‌کنیم: $N(A)=N(A^2) \rightarrow R(A)\cap N(A)=\{0\}$

فرض کنیم چنین نباشد یعنی $\exists x\neq 0 \in R(A)\cap N(A)$، آنگاه خواهیم داشت که $x\in N(A)$

پس $Ax=0$ و $x\in R(A)$، حالا یک u ای وجود دارد که $Au=x$، u در $N(A)$ قرار ندارد ولی در $N(A^2)$ قرار دارد زیرا $Au\neq 0$ ولی $A^2u=0$ ← $N(A)\neq N(A^2)$ X. حکم ثابت می‌شود

چون ~~$R(A)$~~ $R(A^2) \subseteq R(A)$ ، هر جایی که An ها بتوانند بروند، A با آنها به $R(A^2)$ می‌رود

اگر کل دامنهٔ A را An ها بپوشانند که $R(A^2)=R(A)$ وگرنه $R(A^2) \subset R(A)$ پس اگر بخواهیم x ای

داشته باشیم که $x \in R(A)$ باشد ولی $x \notin R(A^2)$ ، u ای در A داشته ایم که $Au=x$ شود،

[redacted] و $\nexists v ; A^2 v = x$ وجود نداشته باشد v [redacted]

پس $\dim R(A) \neq \dim R(A^2) \leftarrow$ ~~$R(A) \neq R(A^2)$~~ $R(A) \neq R(A^2)$ طبق قبل $\Leftarrow$

اثبات می‌شود که $N(A) \neq N(A^2)$.

طرف دیگر $R(A)=R(A^2) \rightarrow N(A) \cap R(A)=\{0\}$

فرض کنیم چنین نباشد ← یعنی یک u ای عضو اشتراک داشته باشیم ←

$u \in R(A)$, $u \in N(A) \longrightarrow Au=0$, $u \in R(A)$

هم ارزی $R(A) = R(A^2) \leftrightarrow R(A) \cap N(A) = \{0\}$

① و ③ معادل بودند،

① و ② معادل بودند ← ۱ و ۲ و ۳ معادل اند.

۲ـ الف) $u \notin \text{Null}\,\varphi \longrightarrow \overset{\alpha \neq 0}{\alpha u} \notin \text{Null}\,\varphi$

اشتراک این دو {0} است → $\Rightarrow \text{Null}\,\varphi \cap \{\alpha u, \alpha \in F\} = \{0\}$

حالا باید بررسی کنیم که کل V را پوشش دهند، چون داریم: $\varphi: V \longrightarrow F$

بعدمان از n به یک کاهش می‌یابد ← $\dim \text{Null}\,\varphi = n-1$ چون داریم که $\dim \text{im}\,\varphi = 1$ و

طبق قضیه rank داریم که $\dim V = \dim \underbrace{\cancel{\oplus}\,\text{Null}\,\varphi}_{n-1} + \underbrace{\dim \text{im}\,\varphi}_{1}$ پس

یک ~~[illegible]~~ پایه u داریم که به F می‌رود و بقیه عضو null φ ~~[illegible]~~ هستند.

$\Longrightarrow V = \text{Null}\,\varphi \oplus \{\alpha u : \alpha \in F\}$

چون اجتماع u و null φ برابر V می‌شود و اشتراک این دو $\{0\}$ است ⇐

$V = \text{Null}\,\varphi \oplus \{\alpha u : \alpha \in F\}$

ب) اول ثابت می‌کنیم که اگر $A_{jk} = c_j d_k$ بوده، ماتریس ما دارای رنک یک است،

$$A = \begin{bmatrix} c_1d_1 & c_1d_2 & \text{—} & c_1d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_md_1 & c_md_2 & \text{—} & c_md_n \end{bmatrix} \longrightarrow$$

هر سطر مضربی از سطر دیگر است

$\leftarrow \text{Rank}(A) = 1$

حالا اگر داشته باشیم $\text{Rank}(A) = 1$ باید ثابت کنیم رابطه گفته شده برقرار است،

چون $\text{rank}(A) = 1$ پس با انجام rref، فقط یک سطر باقی خواهد ماند ← بقیه سطرها مضرب

$$\begin{bmatrix} d_1 & \text{—} & d_n \\ \alpha d_1 & \text{—} & \alpha d_n \\ \vdots & & \\ \gamma d_1 & \text{—} & \gamma d_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ d_i = d_i \end{matrix}$$

سطر اول خواهد بود،

$c_2 = \alpha \;, \text{—}\; c_m = \gamma$

۳- الف) به فرم $\begin{bmatrix} \text{عدد ثابت} \\ \text{ضریب } x \\ \text{ضریب } x^2 \end{bmatrix}$ می‌نویسیم، داریم:

$$\alpha_1 = x^2+x+1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = x^2+1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = x-1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P_\alpha^\beta = \Big[[\alpha_1]_\beta \quad [\alpha_2]_\beta \quad [\alpha_3]_\beta \Big]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=0,\ c=-\frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a=2,\ b=-3,\ c=-1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=0,\ c=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ب) $P_\beta^\alpha = (P_\alpha^\beta)^{-1} \longleftarrow$

$$P[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3] \rightarrow$$

$$P^{-1}[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3] = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$$

$$\Rightarrow P_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

ج) کافی است در P_{β}^{α} ضرب کنیم این مختصات را

$$\begin{bmatrix} ۲ & \frac{۵}{۲} & ۱ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۱ & \frac{۱}{۲} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲۵}{۲} \\ -\frac{۲}{۲} \\ \frac{۱۴}{۲} \end{bmatrix}$$

۴ـ $T_1 = T_2S$ ، اگر رابطه‌ی معکوس‌پذیر S وجود داشته باشد $T_1 = T_2S$ آنگاه باید نشان دهیم که

$Range(T_1) = Range(T_2)$:

از آنجایی که $T_1 = T_2S$ پس به‌ازای هر $u \in T_1$ داریم که : $T_1u = T_2S(u)$ همچنین $S(u)$ یک نمای

که همه‌ی T_2 را [illegible] می‌پوشاند پس $T_2S(u)$ نهایتاً کل $Range(T_2)$ را می‌پوشاند $\leftarrow$ $Range(T_1)$

$\subseteq Range(T_2)$

به طور مشابه داریم که $T_1S^{-1} = T_2$ $\leftarrow$ به طور مشابه $Range(T_2) \subseteq Range(T_1)$.

$Range(T_1) = Range(T_2) \Leftarrow$ حال طرف دیگر را اثبات می‌کنیم

حالا اگر $Range(T_1) = Range(T_2)$ آنگاه یک S وارون‌پذیر داریم که $T_1 = T_2 S$ که S را

قرار می‌دهیم تبدیلی که پایه‌های T_2 را به پایه‌های T_1 می‌برد ← چون Range ها برابر اند

← Rank ها هم برابر اند ←

در اینگونه تعریف می‌کنیم که به ازای هر پایه $e_1 ——— e_n$ در T_1 داشته باشیم

$Se_i = e'_i \longrightarrow$ که e'_i ها پایه‌های T_2 هستند.

بدین ترتیب هر عنصر موجود در T_2 ساخته می‌شود

$$\alpha \in T_2 \longrightarrow \alpha = \alpha_1 e'_1 + ——— + \alpha_n e'_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1 Se_1 + ——— + \alpha_n Se_n =$$

$$S\alpha_1 e_1 + S\alpha_2 e_2 + ——— + S\alpha_n e_n = S(\alpha_1 e_1 + ——— + \alpha_n e_n)$$

⇐ یک ترکیب خطی از e_i ها هستند که S آنها به α برود.

همچنین این تبدیل S وارون پذیر است چون یک به یک و پوشا است، پوشا بودنش را که بالا گفتیم. حالا برای یک به یک بودن هم داریم:

$$S(u) = S(v) \longrightarrow u = v$$

فرض کنیم چنین نباشد یعنی $u \neq v$ پس داریم که

$$S(u-v) = 0 \qquad S(0) = 0$$

یعنی S چیزی غیر از صفر، صفر شده است،

$$S(u) = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + ——— + \alpha_n e'_n = S(\alpha_1 e_1 + ——— + \alpha_n e_n)$$

$$S(v) = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + ——— + \beta_n e'_n = S(\beta_1 e_1 + ——— + \beta_n e_n)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) e'_1 + --- + (\alpha_n - \beta_n) e'_n = 0$$

چون e'_i ها پایه‌اند پس تمامی ضرایب صفر اند ← $V = U$

۵

$\boxed{A^{۲} = AB + ۲I}$ ① $\longrightarrow A(A-B) = ۲I \longrightarrow$ ~~dim range~~ $\text{range}(A(A-B)) = \text{range}(۲I)$

$\longrightarrow \dim \text{range}(A(A-B)) = \underbrace{\dim \text{range}(۲I)}_{۳}$

$\dim \text{range}(A(A-B)) \leq \underbrace{\dim \text{range}(A)}_{\text{ماتریس } ۳\times۳} \leq ۳ \longrightarrow \dim \text{range}(A) = ۳$

$\longrightarrow \text{rank}(A) = ۳ \longrightarrow$ A وارون پذیر است $\longrightarrow A^{۲}A^{-1} = A^{-1}AB + ۲A^{-1}I \longrightarrow A = \cancel{I}B + ۲A^{-1}$

$\xrightarrow{\times A} AA = BA + ۲A^{-1}A \Rightarrow \boxed{A^{۲} = BA + ۲I} \xrightarrow{①} \boxed{AB = BA}$

حالا داریم که

$Y = ۲A - B \longrightarrow Y^{۲} = ۴A^{۲} - ۴AB + B^{۲} = ۴(AB + ۲I) - ۴AB + B^{۲}$

$\Longrightarrow Y^{۲} = ۸I + B^{۲} \Rightarrow Y^{۲} = \begin{bmatrix} ۸ & -۴ & ۳ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۳ & -۵ & ۱۱ \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Det}(Y^{۲}) = ۹(۸\times۱۱ - ۳(-۳))$

$= ۹ \times (۹۷) = ۸۷۳$

$\downarrow$

$\text{Det}(Y) = \sqrt{۸۷۳}$

حالا فرض کنیم تمام درایه‌های A صحیح باشند در این صورت تمام درایه‌های ۲A-B یعنی Y هم صحیح بود و دترمینال Y صحیح خواهد بود

X پس چنین ماتریسی وجود ندارد