به نام خدا

علی قاسم‌زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

۱) ۳)

$$C = AB = \begin{bmatrix} -\sigma_1^T- \\ \vdots \\ -\sigma_n^T- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_1^T- \\ \vdots \\ -u_n^T- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^T B \\ \vdots \\ \sigma_n^T B \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\sigma_1^T B + \sigma_2^T B + \cdots + \sigma_n^T B}$$

اگر بخواهد مستقل خطی باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$\lambda_1(\sigma_1^T B) + \lambda_2(\sigma_2^T B) + \cdots + \lambda_n(\sigma_n^T B) = 0$$

فقط وقتی اتفاق می‌افتد که $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ ولی داریم:

$$(\lambda_1\sigma_1^T + \lambda_2\sigma_2^T + \cdots + \lambda_n\sigma_n^T)B = \underbrace{0}_{\text{بردار صفر}}$$

در نظر بگیرید $n \geq 2$ و σ_1^T و σ_2^T طوری باشند که

$$\sigma_1^T = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1n}], \quad \sigma_2^T = [n+1-\sigma_{11}, \ldots, n+1-\sigma_{1n}]$$

همچنین σ_3^T و σ_4^T طوری باشند که،

$$\sigma_3^T = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \ldots, \sigma_{3n}], \quad \sigma_4^T = [n+1-\sigma_{31}, \ldots, n+1-\sigma_{3n}]$$

$$\Rightarrow \sigma_1^T + \sigma_2^T = \sigma_3^T + \sigma_4^T \longrightarrow$$

می‌توانیم ضریب سایر λها را صفر دهیم و ضریب λ_1 و λ_2 را برابر 1 و ضریب λ_3 و λ_4 را برابر -1 قرار دهیم، در اینصورت یک جواب نابدیهی داریم ← سطرهای C مستقل خطی نیستند.

Scanned with CamScanner

ب) درست است، می دانیم که $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_{n+1}) = W$

و $w_{n+1} = -(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \longrightarrow$ w_{n+1} یک ترکیب خطی از $w_1 \dots w_n$ است

پس $\mathrm{Span}(w_1 \dots w_{n+1}) \overset{*}{=} \mathrm{Span}(w_1 \dots w_n)$ $\longleftarrow$ چون W، n بعدی است و $w_1 \dots w_n$، آن‌را span کرده‌اند پس $w_1 \dots w_n$ مستقل خطی هستند، اثبات با برهان خلف: فرض کنیم $w_1 \dots w_n$ مستقل خطی نیستند $\Leftarrow$ داریم،

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$ و جواب نابدیهی دارد! $\Leftarrow$ حداقل یکی از λها نا صفر است

بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنیم $\lambda_1 \neq 0$ $\longleftarrow$

$\lambda_1 w_1 = -\lambda_2 w_2 - \lambda_3 w_3 - \dots - \lambda_n w_n \longrightarrow w_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} w_n \longrightarrow$ w_1 ترکیب خطی از $w_2 \dots w_n$ است $\Leftarrow$

$\mathrm{Span}(w_1 \dots w_{n+1}) = \mathrm{Span}(w_1 \dots w_n) = \mathrm{Span}(w_2 \dots w_n)$

← $w_2 — w_n$، فضای n بعدی W را span می‌کند ولی طبق فرض می‌دانیم که برای span یک فضای
n بعدی، حداقل n بردار لازم است ولی $w_2 — w_n$، $n-1$ بردار هستند پس نمی‌توانند W را span
کنند ✗ ⇐ $w_1 — w_n$ مستقل خطی اند.

-۲ $a_n \neq 0$

$$q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

$$\vdots$$

$$q^n(x) = n! a_n$$

اول نشان می‌دهیم که q^i ها، مستقل خطی اند:

$$\lambda_0 q(x) + \lambda_1 q'(x) + \dots + \lambda_n q^n(x) = 0 \rightarrow$$

ضریب x^n باید صفر شود پس چون $a_n \neq 0$ داریم که $\lambda_0 = 0$، حالا باز ضریب x^{n-1} باید صفر باشد،
که تنها جمله‌ای که x^n دارد، $q(x)$ است
و تنها جمله‌ای که باقی مانده $q'(x)$ است و $n a_n x^{n-1}$ داریم در آن که چون $a_n \neq 0$ پس $\lambda_1 = 0$ و به همین
ترتیب به صورت استقرایی تمام λ_i ها صفر هستند ⇐ این چندجمله‌ای ها
مستقل خطی اند. حالا باید نشان دهیم که $q^i(x)$ ها کل چندجمله‌ای ها با حداکثر درجه‌ی n را span می‌کنند:
چون $q^n(x) = n! a_n \neq 0$ پس ما تمام چندجمله‌ای ها با درجه‌ی صفر را با $\{q(x), \dots, q^n(x)\}$
می‌توانیم بسازیم (پایه‌ی استقرا)، حالا فرض می‌کنیم می‌توانیم تمام چندجمله‌ای های با درجه‌ی کمتر مساوی $n-1$ را با مجموعه‌ی
$\{q(x), \dots, q^n(x)\}$ بسازیم، نشان می‌دهیم که تمام چندجمله‌ای های درجه‌ی n را هم می‌توانیم با مجموعه‌ی
$\{q(x), \dots, q^n(x)\}$ بسازیم: فرض کنیم بخواهیم چندجمله‌ای درجه‌ی n: $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$ را با استفاده از
$\{q(x), \dots, q^n(x)\}$ بسازیم و $b_n \neq 0$، حالا برای این کار $q(x)$ را در $\frac{b_n}{a_n}$ ضرب می‌کنیم و از چندجمله‌ای $b_n x^n + \dots + b_0$
کم می‌کنیم، یک چندجمله‌ای با درجه‌ی کمتر از n بدست می‌آید که طبق فرض استقرا می‌توانیم آن را با استفاده از
$\{q(x), \dots, q^n(x)\}$ بسازیم ⇐ تمام چندجمله‌ای های درجه‌ی n را هم توانستیم با $\{q(x), \dots, q^n(x)\}$ بسازیم.

⇐ تمام چند جمله ای ها با حداکثر درجه ی n را می توانیم با استفاده از $\{q(x), \dots, q^n(x)\}$ بسازیم.

-۳

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} , \quad \forall 1 \le i, j \le n : A_{ij} = A_{ji}$$

پایه ها را در نظر بگیرید: ابتدا n تا ماتریس برای قطر اصلی:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} , \quad \cdots \quad M_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M_i ← فقط درایه ی i ام روی قطر اصلی برابر ۱ باشد و بقیه ی درایه ها صفر. حالا ماتریس های M' را در نظر بگیرید اگر:

$$M'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} , \quad M'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس های M' تنها یکی از خانه های بالای قطر اصلی ۱ است و همه ی خانه های دیگر صفراند ← تمام حالت ها را بگیریم، $(n-1)+(n-2)+\dots+1 = \frac{(n-1)n}{2}$ تا ماتریس M' داریم

حالا در نظر می گیریم: $M'' = M' + M'^T$ ، ماتریس های M و M'' یک پایه برای ماتریس های متقارن هستند چون M'' ها به صورت

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{ji}=1 & 0 \\ \vdots & a_{ij}=1 & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

هستند یعنی فقط دو درایه ی a_{ij} و a_{ji} در هر یک برابر ۱ هستند و بقیه ی درایه ها صفراند بدین صورت این ماتریس ها هیچ درایه ای متعلق به دو ماتریس نیست و هر درایه و قرینه اش نسبت به قطر اصلی متعلق به یک ماتریس است

← هر m_i'' را در λ ضرب کنیم، a_{ij} و a_{ji} با هم در λ ضرب می‌شوند و خاصیت تقارن ماتریس برقرار می‌ماند. ~~...~~ این ها پایه اند چون: ① مستقل خطی اند

که هیچ دو ماتریسی به یک درایه از ماتریس دسترسی ندارند پس اگر بخواهیم ماتریس صفر بسازیم ضریب تمام m_i'' و m_i ها باید برابر صفر باشد.

② چون کل ماتریس های متقارن را پوشش می‌دهند (span می‌کنند):

~~...~~ اگر B یک ماتریس متقارن باشد:

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad \forall_{1\le i<j\le n} \quad B_{ij}=B_{ji}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ b_{31} & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}+\cdots=$$

$$b_{11}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}+\cdots+b_{nn}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}+b_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}+\cdots$$

⇐ یک ترکیب خطی از m_i ها و m_i'' ها وجود دارد که B را بسازند.

⇐ ~~...~~ m_i ها و m_i'' ها مجموعه ماتریس های متقارن را span می‌کنند و همچنین m_i و m_i'' ها مستقل خطی اند پس ~~...~~ مجموعه‌ی m_i ها و m_i'' ها یک پایه برای مجموعه ماتریس های متقارن است.

۴- الف)

$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1y_1| + |x_2y_2|$

$f((y_1,y_2),(x_1,x_2)) = |y_1x_1| + |y_2x_2| \longrightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = f((y_1,y_2),(x_1,x_2))$

$f((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = |x_1x_1| + |x_2x_2| = x_1^2 + x_2^2$

درنتیجه $f(\underbrace{(x_1,x_2)}_{\text{همان } x},(x_1,x_2)) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = 0$ یعنی

$f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = \vec{0}$.

$f(x+y,z) = |(x_1+y_1)z_1| + |(x_2+y_2)z_2|$

$f(x,z) = |x_1z_1| + |x_2z_2| \quad , \quad f(y,z) = |y_1z_1| + |y_2z_2|$

$\Leftarrow$ رابطه روبه‌رو، $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$

همواره برقرار نیست چون می‌دانیم که:

$|x_1z_1 + y_1z_1| \leq |x_1z_1| + |y_1z_1|$

$|x_2z_2 + y_2z_2| \leq |x_2z_2| + |y_2z_2|$

و اگر علامت x_1 و y_1 یکسان نباشد، تساوی اول به نامساوی تبدیل می‌شود همچنین اگر علامت x_2 و y_2 یکسان نباشد، تساوی دوم به نامساوی تبدیل می‌شود $\Leftarrow$

رابطه روبه‌رو همواره برقرار نیست ! $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$

$\Leftarrow$ این عبارت یک ضرب داخلی نیست.

ب)

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$$

خاصیت اول این است که $f(v,v)=0 \Leftrightarrow v=0$ ،

~~$f(x,x)=0 \rightarrow x_1y_1+x_2y_2=0$~~ $f(x,x)=0 \rightarrow x_1^2+x_2^2=0$

اگر بدهیم $x_1=0$ و $x_2=0 \Leftarrow f(x,x)=0$ است ولی می‌توانیم به x_2 هر مقداری

می‌خواهیم بدهیم مثلاً x می‌تواند ، $(0,2,0)$ باشد که در این صورت $x \neq 0$

و $f(x,x)=0$ پس این عبارت یک ضرب داخلی نیست.

ج)

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$$

خاصیت اول ، $f(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ،

$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow$ اگر تنها اگر صفر است که داشته باشیم $x_1=x_2=0$

$$\Rightarrow \quad f(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\vec{0} \checkmark$$

خاصیت دوم ، $f(x,y)=f(y,x)$ ،

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= x_1y_1+x_2y_2 \\ f(y,x) &= y_1x_1+y_2x_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow f(x,y)=f(y,x) \checkmark$$

خاصیت سوم ، $f(x+y,z)=f(x,z)+f(y,z)$ ،

$$\left.\begin{aligned} f(x+y,z) &= (x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2 \\ f(x,z) &= x_1z_1+x_2z_2 \ , \ f(y,z)=y_1z_1+y_2z_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x+y,z)=f(x,z)+f(y,z) \checkmark$$

خاصیت چهارم ، $f(cx,y)=cf(x,y)$ ،

$$f(cx,y) = (cx_1)y_1+(cx_2)y_2 = c(x_1y_1+x_2y_2) = cf(x,y) \Rightarrow f(cx,y)=cf(x,y) \checkmark$$

خاصیت پنجم: $\forall x, f(x,x) \geq 0$

$$f(x,x) = x_1x_1 + x_2x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

⇐ می دانیم که جمع توان دوم دو عدد همواره بزرگتر مساوی صفر است ⇐

$$\forall x, f(x,x) \geq 0$$

⇐ همه ی خاصیت ها برقرار است پس این عبارت یک ضرب داخلی است.

د)

$$f(A,B) = tr(B^TA)$$

$$B^TA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}b_{i1} & \star & \cdots & \star \\ \star & \sum a_{i2}b_{i2} & \cdots & \star \\ \star & \star & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \sum a_{in}b_{in} \end{bmatrix} \Rightarrow tr(B^TA) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

خاصیت اول: $f(A,A) = 0 \iff A = 0$ ،

اگر $A=0$ باشد که $f(A)$ برابر صفر می شود چون که به جای a_{ij} ها همه جا صفر داریم و ~~ضرب~~ جمع یک سری صفر صفر است، همچنین ضرب یک سری صفر هم صفر است.

حالا نشان می‌دهیم که اگر $f(A,A)=0$ آنگاه $A=0$:

$$f(A,A)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2=0 \longrightarrow$$

یعنی حاصل جمع توان دوم تمام درایه‌های A شده صفر، می دانیم که جمع یک سری عبارت توان دوم وقتی صفر است که همگی برابر صفر باشند $\Leftarrow$

$$\forall i,j\ ,\ a_{ij}=0 \longrightarrow A = \text{ماتریس صفر} = 0$$

← خاصیت اول برقرار است.

خاصیت دوم: $f(A,B)=f(B,A)$

$$f(A,B)=tr(B^TA)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

$$f(B,A)=tr(A^TB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ij}$$

هر دو حاصل جمع ضرب a_{ij} در b_{ij} هستند. یعنی هر دو حاصل ← جمع ضرب درایه‌های متناظر دو ماتریس A و B در هم هستند و برابرند.

$$A^TB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}b_{i1} & * & \cdots & * \\ * & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}b_{i2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{f(A,B)}\ f(A,B)=f(B,A)$$ خاصیت دوم هم برقرار است.

خاصیت سوم: $f(\overbrace{A+B}^{D},C)=f(A,C)+f(B,C)$ ، $A+B$ را D می‌نامیم

$$f(D,C)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}c_{ij}+b_{ij}c_{ij})=$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}}_{f(A,C)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{ij}}_{f(B,C)}=f(A,C)+f(B,C)\ \checkmark$$

خاصیت چهارم ، $f(\overset{D}{\widetilde{\lambda A}}, B) = \lambda f(A, B)$ ، λA را D می نامیم

داریم ،

$$f(D, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} b_{ij} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}}_{f(A,B)}$$

$$= \lambda f(A, B) \checkmark$$

خاصیت پنجم ، $f(A, A) \geq 0$

$$f(A, A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

$a_{ij}^2 \geq 0$ به ازای هر درایه ای برقرار است پس جمع یک سری عبارت نامنفی هم ، نامنفی است . ✓

← تمامی ۵ خاصیت برقرار است ← این عملیات یک ضرب داخلی است .