به نام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

۱-آ) ماتریس $A_{n\times n}$ و عدد c را در نظر بگیرید که مجموع درایه‌های هر ستون A برابر است با c. حال اگر بردار ویژه‌ی v را داشته باشیم برای باید صدق کند که ($v \neq 0$)

$$Av=\lambda v \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n &= \lambda v_1 \\ a_{21}v_1 + \cdots + a_{2n}v_n &= \lambda v_2 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n &= \lambda v_n \end{aligned} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{همه را با هم}} \Big(\underbrace{\sum a_{i1}}_{c}\Big)v_1 + \Big(\underbrace{\sum a_{i2}}_{c}\Big)v_2 + \cdots + \Big(\underbrace{\sum a_{in}}_{c}\Big)v_n = \lambda \sum v_i$$

$$\longrightarrow c\sum v_i = \lambda \sum v_i \longrightarrow \boxed{c=\lambda}$$

حالا $A-\lambda I$ برابر است با $A-cI$. داریم که:

$$A-cI = \begin{bmatrix} a_{11}-c & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-c \end{bmatrix} \longrightarrow$$

جمع درایه‌های هر ستون برابر است با صفر $\longrightarrow$

اگر $A-cI$ را B بنامیم در B داریم که مجموع درایه‌های هر ستون برابر است با صفر ←

$$\left.\begin{aligned} B_{11} &= -\sum_{i=2}^{n} B_{i1} \\ B_{12} &= -\sum_{i=2}^{n} B_{i2} \\ &\vdots \\ B_{1n} &= -\sum_{i=2}^{n} B_{in} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

سطر اول از ترکیب خطی سطرهای دیگر بدست می‌آید.

$$\boxed{row1 = -\sum_{i=2}^{n} row\,i}$$

$\longrightarrow$ سطرها مستقل خطی نیستند $\longrightarrow$

$$\det(B)=0$$

$\longrightarrow \det(A-cI)=0 \longrightarrow$ c یک مقدار ویژه برای A است.

ب) فرض کنیم یک ترکیب خطی از $e^{\lambda_i x}$ ها صفر بشود به طوری که حداقل یکی از ضرایب ناصفر باشد ←

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} = 0 \xrightarrow[\text{تبدیل T را تعریف می کنیم که هر f را f' بیرد}]{\text{مشتق هم صفر است}} c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n\lambda_n e^{\lambda_n x} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \cdots \xrightarrow{\text{مشتق}} c_1\lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n\lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}}_{W} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

W ← در واقع این ماتریس رونسکین است

$$\Rightarrow |W| = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdots e^{\lambda_n x} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

طبق اتحاد واندرموند که در تمرین قبلی ثابت شد.* → $\prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i)$

← چون λ_k ها متمایزاند ← حاصل این دترمینان ناصفر است ← فقط وقتی $W\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ صفر است

که $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ صفر باشد ← ترکیب خطی از $e^{\lambda_i x}$ ها با c_i ناصفر نداریم که صفر بشود حاصلش.

* کافی است از سطر آخر تا اول، هر سطر را منهای λ_1 برابر سطر بالایی اش کنیم، سپس از سطر آخر تا دوم، هر سطر را منهای λ_2 برابر سطر بالایی اش کنیم و ..... یک ماتریس بالامثلثی تشکیل می شود که درایه ی روی قطر اصلی آن عبارت اند از $d_i = \prod_{1\le j<i} (\lambda_i - \lambda_j)$.

۲- مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\min_x \|W_1(Ax-b)\|_2^2 + \|W_2(x-c)\|_2^2$$

$$(W_1(Ax-b))^T(W_1(Ax-b)) + (W_2(x-c))^T(W_2(x-c)) =$$

$$(Ax-b)^T W_1^T W_1 (Ax-b) + (x-c)^T W_2^T W_2 (x-c) =$$

$$x^T(A^TW_1^TW_1A)x - x^T(A^TW_1^TW_1b) - (b^TW_1^TW_1A)x + b^TW_1^TW_1b +$$

این دو عبارت یک عدد اند و با ترانهاده شان برابرند

$$x^T(W_2^TW_2)x - x^T(W_2^TW_2c) - (c^TW_2^TW_2)x + c^TW_2^TW_2c$$

این دو عبارت یک عدد اند ← با ترانهاده شان برابرند

$$= x^T(A^TW_1^TW_1A + W_2^TW_2)x - 2(b^TW_1^TW_1A + c^TW_2^TW_2)x + b^TW_1^TW_1b + c^TW_2^TW_2c$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} x^T\left(2(A^TW_1^TW_1A+W_2^TW_2)\right) - 2(b^TW_1^TW_1A + c^TW_2^TW_2) = 0$$

$$\Rightarrow x^T(A^TW_1^TW_1A+W_2^TW_2) = b^TW_1^TW_1A + c^TW_2^TW_2 \xRightarrow{T}$$

$$(A^TW_1^TW_1A+W_2^TW_2)x = A^TW_1^TW_1b + W_2^TW_2c \longrightarrow$$

$$\boxed{x = (A^TW_1^TW_1A+W_2^TW_2)^{-1}(A^TW_1^TW_1b + W_2^TW_2c)}$$

۳- آ)

$\alpha = y^T A x = tr(y^T A x)$

$\rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial tr(y^T A x)}{\partial z} = tr\left(\frac{\partial y^T}{\partial z} A x + y^T A \frac{\partial x}{\partial z}\right) = tr\left(\frac{\partial y^T}{\partial z}\right) + tr\left(y^T A \frac{\partial x}{\partial z}\right)$

یا $\partial tr(y^T A x) = tr(\partial(y^T A x)) = tr\left((\partial(y^T) A x) + (y^T A \partial(x))\right) = tr(\partial(y^T) A x) + tr(y^T A \partial(x))$

$= tr\left(y^T A \partial(x)\right) + tr\left(\left(x^T A^T \partial(y^T)^T\right)^T\right) = tr\left(y^T A \partial(x)\right) + tr\left(x^T A^T \partial(y^T)^T\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} = y^T A \frac{\partial x}{\partial z} + x^T A^T \frac{\partial y}{\partial z} = x^T A^T \frac{\partial y}{\partial z} + y^T A \frac{\partial x}{\partial z}$

ب)

$\frac{\partial tr(AXBXC^T)}{\partial X} = ?$ $\quad \partial tr(AXBXC^T) = tr(\partial(AXBXC^T)) =$

$tr(A(\partial X)BXC^T) + tr(AXB(\partial X)C^T) =$

$tr(BXC^T A(\partial X)) + tr(C^T AXB(\partial X)) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial X}} \frac{\partial tr(AXBXC^T)}{\partial X} = BXC^T A + C^T AXB$

۴- ابتدا ثابت می‌کنیم که $\frac{vv^T}{v^Tv}$ یک ماتریس Projection است:

قرار می‌دهیم $P=\frac{vv^T}{v^Tv}$ ← داریم:

$$P^2 = PP = \frac{vv^T}{v^Tv}\,\frac{vv^T}{v^Tv} = \frac{vv^Tvv^T}{(v^Tv)^2} = \frac{v\overbrace{(v^Tv)}^{\text{اسکالر}}v^T}{(v^Tv)^2} = \frac{(v^Tv)vv^T}{(v^Tv)^2} = \frac{vv^T}{v^Tv} \Rightarrow \boxed{P^2=P}$$

پس $\frac{vv^T}{v^Tv}$ یک ماتریس Projection است، حالا داریم:

$$\left\|E\left(I-\frac{vv^T}{v^Tv}\right)\right\|_F^2 = tr\left(E\left(I-\frac{vv^T}{v^Tv}\right)\left(I-\frac{vv^T}{v^Tv}\right)^TE^T\right) =$$

$$tr\left(E\left(I-\frac{vv^T}{v^Tv}\right)\left(I-\frac{vv^T}{v^Tv}\right)E^T\right) = tr\left(E\left(I-2\frac{vv^T}{v^Tv}+\left(\frac{vv^T}{v^Tv}\right)\left(\frac{vv^T}{v^Tv}\right)\right)E^T\right)$$

$$= tr\left(E\left(I-2P+\overset{P}{P^2}\right)E^T\right) = tr\left(E(I-P)E^T\right) = tr\left(EE^T-EPE^T\right) =$$

$$tr(EE^T) - tr\left(E\frac{vv^T}{v^Tv}E^T\right) = \|E\|_F^2 - tr\left(\frac{1}{v^Tv}Evv^TE^T\right) =$$

$$\|E\|_F^2 - \frac{1}{v^Tv}tr\left((Ev)(Ev)^T\right) = \|E\|_F^2 - \frac{1}{v^Tv}\|Ev\|_F^2 = \boxed{\|E\|_F^2 - \frac{\|Ev\|_F^2}{v^Tv}}$$