به نام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

۱- الف)

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\x&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\frac{5}{3}\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\3&y\end{pmatrix}=\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\x&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}}_{U}\times\frac{5}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\3&y\end{pmatrix}}_{V^T}$$

$\xrightarrow[\text{است}]{\text{تجزیه به فرم svd}}$ ستون‌های راستی و سطرهای چپی orthonormal هستند.

$$\Rightarrow (2,2,-1)\cdot(x,2,2)=0 \longrightarrow \boxed{x=-1}$$
$$(2,-1,2)\cdot(x,2,2)=0$$

$$(4,-3)\cdot(3,y)=0 \longrightarrow \boxed{y=4}$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}}_{U}\times\underbrace{\frac{5}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{\Sigma}\times\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}}_{V^T}$$

ب) رنک ماتریس A برابر است با ۲ زیرا، از سمت چپ یک ماتریس full-rank درجه‌ی ۳ در یک ماتریس rank=2 ضرب شده است (Σ) سپس ماتریس ۳x۲ حاصل در یک ماتریس ۲x۲ full-rank، ضرب شده است که رنک نهایی برابر ۲ خواهد بود.

• مقادیر ویژه AA^T و A^TA برابر خواهند بود با توان ۲ اعداد روی قطر Σ یا به عبارتی اعداد روی قطر $\Sigma^T\Sigma$ $\Leftarrow$

$$\lambda_1=25,\ \lambda_2=\frac{25}{9} \leftarrow \frac{25}{9}\begin{pmatrix}9&0\\0&1\end{pmatrix}$$

• بردار ویژه‌های AA^T برابر با u ها یعنی، $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

ب) می دانیم که در فرم $A = U\Sigma V^T$ داریم که $Av_i = \sigma_i u_i$ همچنین u_i، ستون iام U و v_i ستون iام V یعنی سطر iام V^T است ← $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ ۵ برابر سطر اول V^T است ←

$$A\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = 5\sigma_1 u_1 = 5(5)\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \boxed{\frac{25}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}$$

ت)

$$A = U\Sigma V^T \longrightarrow \|Av\| = \sqrt{v^T V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T v} = \sqrt{v^T V \Sigma^T \Sigma V^T v}$$

$$= \sqrt{(V^T v)^T \Sigma^T \Sigma (V^T v)} = \sqrt{\sum_{i=1} (V^T v)^T \sigma_i \sigma_i (V^T v)} = \sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i (V^T v)^T (V^T v)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i v_i \underbrace{V V^T}_{I} v_i} = \sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i v_i v_i} \le \sqrt{\lambda_{max} \sum_{i=1} v_i^2} = \sqrt{\lambda_{max}}\, \|v\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av\|}{\|v\|} \le \sqrt{\lambda_{max}} = |\sigma|_{max}$$

حالا در صورتی که درایه مربوط به λ_{max} ناصفر باشد و ضرایب بقیه λها صفر باشند، $|\sigma|_{max}$ حاصل می شود، $\frac{\sqrt{c\,\lambda_{max}}}{\sqrt{c}} = \sqrt{\lambda_{max}}$ ⇐ بردار $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و ضرایب ناصفر آن جواب هستند و به ازای آنها ۵ حاصل می شود.

ج

$$A^{t} = V\Sigma^{+}U^{T} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^{T}$$

$$\Rightarrow A^{t} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} \frac{26}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{27}{5} & -\frac{18}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{t} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} \frac{26}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{27}{5} & -\frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

۲- باید چهارتا ویژگی را بررسی کنیم:

① $ABA = A$

② $BAB = B$

③ $(AB)^{*} = AB$

④ $(BA)^{*} = BA$

اگر این خواص را تعریف کنیم چون Pseudo inverse هر ماتریسی یکتاست پس ثابت می‌شود که B همان A^{+} است. حالا خواهیم داشت که:

① AB یک Projection روی A است پس هر بردار x که عضو $R(A)$ باشد داریم که $(AB)x = x$ ←

ستون‌های A هر عضو Range(A) هستند ← $(AB)A_i = A_i$ ← $(AB)A = A$

② به طور مشابه برای BA هر داریم که یک Projection روی B^{*} است ← به طور مشابه بدست می‌آید که $(BA)B = B$

③ حالا چون گفته AB یک orthogonal Projection روی A هست ⇐ $(AB)^{*} = AB$

④ به طور مشابه مورد سوم ⇐ $(BA)^{*} = BA$

⇐ B همان A^{+} است.

اثبات یکتایی صفحه بعدی

Subject.

Date.

اثبات یکتایی شبه وارون :

فرض کنیم دوتا شبه وارون B و C برای ماتریس A داشته باشیم. حالا نشان می‌دهیم که $AB = AC$:

$ABA = A$

$ACA = A \longrightarrow ABAC = AC$

$\boxed{ACAB = AB}$

$(AC)^* = AC , (AB)^* = AB$

$$\Rightarrow ACAB = (AC)^*(AB)^* = C^*A^*B^*A^*$$

$$= C^*(\underbrace{ABA}_{A})^* = C^*A^* = (AC)^* = AC$$

$$\Rightarrow AB = AC$$

به طور مشابه $BA = CA$.

حالا داریم که!

$$B = BAB = B(AC) = BAC = (BA)C =$$

$$(CA)C = CAC = C \Rightarrow B = C$$

لذا شبه وارون هر ماتریس یکتاست.

PAPCO

Scanned with CamScanner

۳- بردار ویژه‌ی دلخواه v را در نظر بگیرید، می‌دانیم که داریم

$$Qv = \lambda' v$$

$$\underline{\lambda}\|v\|^2 \le v^T Q v \le \bar{\lambda}\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda}\|v\|^2 \le v^T \lambda' v \le \bar{\lambda}\|v\|^2 \Rightarrow \underline{\lambda}\|v\|^2 \le \lambda' \underbrace{v^T v} \le \bar{\lambda}\|v\|^2 \Rightarrow$$

$$\underline{\lambda}\|v\|^2 \le \lambda' \|v\|^2 \le \bar{\lambda}\|v\|^2 \xrightarrow[\|v\|>0]{} \boxed{\underline{\lambda} \le \lambda' \le \bar{\lambda}}$$

چون Q مثبت معین است همواره $v^TQv > 0 \xrightarrow{\|v\|>0}$

هر بردار ویژه دلخواهی را بگیریم، مقدار ویژه‌اش بین $\underline{\lambda}$ و $\bar{\lambda}$ است

۴- الف) $S \leftarrow$ بزرگترین σ

$\hat{S} \leftarrow$ کوچکترین σ

$$\|Tv\| = \sqrt{(Tv)^T(Tv)} = \sqrt{v^T \underbrace{T^T T}_{Q} v} = \sqrt{v^T Q v} =$$

$T = U\Sigma V^T$ ، $Q \leftarrow$ متقارن

به صورت svd:

$$V\Sigma^T\Sigma V^T$$

$$\sqrt{v^T V \Sigma^T \Sigma V^T v} = \sqrt{(V^T v)^T \Sigma^T \Sigma (V^T v)} = \sqrt{\sum_{i=1} (V^T v)^T \sigma_i \sigma_i (V^T v)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i (V^T v)^T (V^T v)} = \sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i v_i V V^T v_i} = \sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i v_i^2}$$

$$\|Tv\| = \sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i v_i^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda_{min}} \le \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \le \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i v_i^2} \le \sqrt{\lambda_{max} \sum_{i=1} v_i^2} = \sqrt{\lambda_{max}}\ \|v\|$$

$$\sqrt{\sum_{i=1} \lambda_i v_i^2} \ge \sqrt{\lambda_{min} \sum_{i=1} v_i^2} = \sqrt{\lambda_{min}}\ \|v\|$$

$$\Rightarrow \overset{\hat{s}}{\sqrt{\lambda_{min}}} \le \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \le \overset{s}{\sqrt{\lambda_{max}}} \Longrightarrow \boxed{\hat{s}\|v\| \le \|Tv\| \le s\|v\|}$$

ب) نشان دادیم که به ازای هر بردار v داریم که $\hat{s}\|v\| \le \|Tv\| \le s\|v\|$

حالا به ازای هر بردار u که بردار ویژه T باشد، داریم که :

بردار ویژه آنرا λ بگیریم

$$\hat{s}\|u\| \le \|\underbrace{Tu}_{\lambda u}\| \le s\|u\|$$

$$\Longleftrightarrow \hat{s}\|u\| \le \|\lambda u\| \le s\|u\| \Leftrightarrow \hat{s}\|u\| \le |\lambda| \times \|u\| \le s\|u\| \Leftrightarrow$$

$$\hat{s} \le |\lambda| \le s$$