به نام خدا



علی قاسم‌زاده ۴۰۱۱۶۴۳۳۹

۱_ آ) درست است، فرض کنیم $u$ و $w$ دو بردار عمود هستند و $w$ برداری است که می‌توان به دو صورت $\lambda_1 u + \lambda_2 v$ و $\lambda_1' u + \lambda_2' v$ نوشت:

$$w = \lambda_1 u + \lambda_2 v \qquad , \lambda_1 \neq \lambda_1' , \lambda_2 \neq \lambda_2'$$
$$w = \lambda_1' u + \lambda_2' v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1' w = \lambda_1 \lambda_1' u + \lambda_1' \lambda_2 v \\ \lambda_1 w = \lambda_1 \lambda_1' u + \lambda_1 \lambda_2' v \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1' - \lambda_1)}_{\neq 0} w = (-\lambda_1' \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2') v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2' w = \lambda_1 \lambda_2' u + \lambda_2 \lambda_2' v \\ \lambda_2 w = \lambda_1' \lambda_2 u + \lambda_2 \lambda_2' v \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_2')}_{\neq 0} w = (\lambda_1' \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2') u$$

$$\Rightarrow \quad w = \left(\frac{-\lambda_1' \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_1 - \lambda_1'}\right) v \quad , w = \left(\frac{\lambda_1' \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_2 - \lambda_2'}\right) u$$

$$\Leftarrow$$

$$\left(\frac{-\lambda_1' \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_1 - \lambda_1'}\right) v = \left(\frac{\lambda_1' \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_2 - \lambda_2'}\right) u$$

← چون شرط برابر بودن دو بردار موازی و هم‌اندازه بودن است و $u$ و $v$ بر هم عمودند ⇐ ضرایب دو طرف صفر است.



$$\Rightarrow -\lambda_1' \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2' = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 \longrightarrow$$

یا $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ که در نتیجه فقط به یک طریق توانسته ایم $w$ را بسازیم یا اینکه $\lambda_1$ و $\lambda_2 \neq 0$

و $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 \Leftarrow$ $u = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} v$ ✗ دو بردار غیر هم‌راستا نمی‌توانند ضریبی از هم باشند. چرا؟ دو طرف را در $u$ ضرب داخلی کنیم:

$$\underbrace{u \cdot u}_{} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \underbrace{v \cdot u}_{0} \Rightarrow \|u\|_1^2 = 0 \xrightarrow{\|u\|_1 \neq 0} \text{✗}$$

پس چنین چیزی امکان ندارد ⇐ فقط به یک طریق می‌توان $w$ را نشان داد ⇐ دو بردار عمود، مستقل خطی اند.

ب) درست است. البته اگر $u$ و $v \neq 0$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u^T \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 \rightarrow$$

$u^T \cdot v = 0 \longrightarrow u = 0$ یا $v = 0$ یا $u$ و $v$ بر هم عمودند

پس با شرط $u$ و $v \neq 0$، $u$ و $v$ بر هم عمود اند.

ج) $\measuredangle(a, b) = \arccos\left(\underbrace{\frac{u^T \cdot v}{\|u\| \|v\|}}_{1}\right) = \arccos(1) = 0$

$\Leftarrow$ زاویه بین $a$ و $b$ صفر است $\Leftarrow$ در یک جهت اند، همچنین هر دو یکه اند $\Leftarrow$ هر دو بردار برابر اند.

---

-۲

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[n]{x e^{mx}}\, dx \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

$$\langle f(x), g(x) \rangle \le \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle \times \langle g(x), g(x) \rangle} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) g(x)\, dx \le \sqrt{\int_0^1 f(x) f(x)\, dx \times \int_0^1 g(x) g(x)\, dx}$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[n]{x e^{mx}}\, dx \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

$$I = \langle \sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{e^{mx}} \rangle = \int_0^1 \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{e^{mx}}\,dx = \int_0^1 \sqrt[n]{x e^{mx}}\,dx$$

$$\Rightarrow I \le \int_0^1 \sqrt[n]{x}\,dx \times \int_0^1 e^{mx/n}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\,dx \times \int_0^1 e^{mx/n}\,dx \Rightarrow$$

$$I \le \left(\frac{n}{n+1}\, \underbrace{x^{\frac{n+1}{n}}\Big|_0^1}_{1}\right)\left(\frac{n}{m}\, \underbrace{e^{mx/n}\Big|_0^1}_{e^{m/n}-1}\right) = \frac{n^2}{m(n+1)}\left(e^{m/n}-1\right)$$

۳- فرض کنید دو تا بردار $u$ و $v$ هستند که مینیمم فاصله را از $w$ دارند، آنگاه

چون $u, v \in C$ پس $\frac{u+v}{2} \in C$. حالا فاصلهٔ $\frac{u+v}{2}$ از $w$ را حساب می‌کنیم،

$$\|w-u\|^2 = w.w + u.u - 2w.u$$

$$= \|w-v\|^2 = w.w + v.v - 2w.v$$

$$= w.w + \frac{u.u}{2} + \frac{v.v}{2} - w.u - w.v$$

$$\|w - \underbrace{\frac{u+v}{2}}_{z}\|^2 = w.w + z.z - 2w.z = w.w + \left(\frac{u+v}{2}\right).\left(\frac{u+v}{2}\right) - 2w.\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$= w.w + \frac{u.u + v.v + 2u.v}{4} - w.u - w.v$$

$$u \neq v \rightarrow \|u-v\| \neq 0$$

$$\|u-v\|^2 > 0 \rightarrow u.u + v.v - 2u.v > 0 \Rightarrow u.u + v.v > 2u.v \Rightarrow$$

$$\frac{u.u + v.v}{4} > \frac{2u.v}{4} \xrightarrow{+\frac{u.u}{4} + \frac{v.v}{4}} \frac{u.u + v.v}{2} > \frac{u.u + v.v + 2u.v}{4} \xrightarrow{+w.w}$$

$$w.w + \frac{u.u}{2} + \frac{v.v}{2} > w.w + \frac{u.u + v.v + 2u.v}{4} \xrightarrow{-w.u - w.v}$$

$$w.w + \frac{u.u}{2} + \frac{v.v}{2} - w.u - w.v > w.w + \frac{u.u + v.v + 2u.v}{4} - w.u - w.v$$

$$\Rightarrow \frac{\|w-u\|^2 + \|w-v\|^2}{2} > \|w - \frac{u+v}{2}\|^2$$

می‌دانیم که ، $(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$ ←

$$\left(\|w-u\| + \|w-v\|\right)^2 \geq \|w-u\|^2 + \|w-v\|^2 \Rightarrow$$

$$\|w-u\| = \frac{\|w-u\| + \|w-v\|}{2} \geq \sqrt{\frac{\|w-u\| + \|w-v\|}{2}} > \|w - \frac{u+v}{2}\|$$

← چون $\|w-u\|$ و $\|w-v\|$ طبق فرض کمترین فاصله بودند ولی $\|w - \frac{u+v}{2}\|$ کمتر است که این تناقض است

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 |
| T | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 |
| W | 3 | 10 | 17 | 24 | |
| T | 4 | 11 | 18 | 25 | |
| F | 5 | 12 | 19 | 26 | |
| S | 6 | 13 | 20 | 27 | |
| S | 7 | 14 | 21 | 28 | |

⟸ حداکثر یک $v$ با فاصله مینیمم وجود دارد.

۴- طرف اول را نابسته‌ی کنیم یعنی اگر وابسته خطی باشند، با اجرای گرام اشمیت، حداقل یک بردار صفر ایجاد می‌شود، فرض کنیم چنین نشود یعنی با اجرای فرایند گرام اشمیت، هیچ بردار صفری ایجاد نشود، پس یعنی $m$ بردار غیر صفر (و مستقل خطی) ایجاد می‌شود که پایه هستند، طبق فرض $v_1 — v_m$ وابسته‌ی خطی‌اند پس وجود دارد $v_i$ که از روی $v_1 — v_{i-1}$ و $v_{i+1} — v_m$ بدست آید ⟸ با حذف $v_i$، باز هم بقیه‌ی بردارها فضایمان را span می‌کنند این تناقض است چون در فرایند گرام اشمیت $m$ بردار مستقل خطی بدست آمد که پایه بودند و می‌دانیم حداقل تعداد بردار برای span کردن یک فضا برابر است با تعداد اعضای پایه ولی با $m-1$ بردار توانستیم فضایی با تعداد اعضای پایه $= m$ را span کنیم. X

پس در فرایند گرام اشمیت حداقل یک بردار صفر ایجاد می‌شود.

اثبات طرف دوم: می‌دانیم که اگر حداقل یکی از بردارها در فرایند گرام اشمیت صفر شود، یعنی پایه‌ی ما حداکثر $m-1$ عضو دارد و $v_1 — v_m$، $m$ بردار هستند و می‌دانیم که اگر تعداد بردارها بیشتر از تعداد اعضای پایه باشند، حتماً وابسته‌ی خطی‌اند ⟸ $v_1 — v_m$ وابسته‌ی خطی می‌شوند.

⟸ $v_1 — v_m$ وابسته‌ی خطی هستند اگر و تنها اگر با اجرای فرایند گرام اشمیت حداقل یک بردار صفر تولید شود.

۵- خواص ترکیب خطی:

$T(x+y)=T(x)+T(y)\ ,\ T(\alpha x)=\alpha T(x)\ ,\ T(0)=0$

$$T_p=\left(3p(4)+5p'(4)+bp(1)p(2)\ ,\ \int_{-1}^{2}x^3p(x)\,dx+c\sin(p(0))\right)$$

$$\underbrace{T_{p+q}}_{r}=T_r=\Big(\underbrace{3r(4)}_{3(p(4)+q(4))}+\underbrace{5r'(4)}_{5(p'(4)+q'(4))}+b\times r(1)r(2)\ ,\ \int_{-1}^{2}x^3\underbrace{r(x)}_{(p(x)+q(x))}dx+c\times\sin(r(0))\Big)$$

$$T_p+T_q=\Big(3(p(4)+q(4))+5(p'(4)+q'(4))+b\,p(1)p(2)+bq(1)q(2)\ ,\ \int_{-1}^{2}x^3p(x)dx+\int_{-1}^{2}x^3q(x)dx+c(\sin(p(0))+\sin(q(0)))\Big)$$

برای برابری تساوی باید داشته باشیم:

$$b(p(1)+q(1))(p(2)+q(2))=b(p(1)p(2)+q(1)q(2))$$

اگر $b\neq 0$ باید داشته باشیم

$$\cancel{p(1)p(2)+q(1)q(2)}+p(1)q(2)+p(2)q(1)=\cancel{p(1)p(2)+q(1)q(2)}$$

$\Rightarrow P(1)P(2)+q(1)q(2)=0 \rightarrow$ در حالت کلی برقرار نیست

برای هر دو جمله‌ای $p$ و $q$ پس باید $b=0$ ، همچنین باید

$c\sin(p(0)+q(0))=c(\sin(p(0))+\sin(q(0))) \longrightarrow$ اگر $c\neq 0$ ، باید $\sin(p(0)+q(0))=\sin(p(0))+\sin(q(0))$ بشود که در حالت کلی برقرار نیست $\Rightarrow$ باید $c=0$

پس برای اینکه T تبدیل خطی باشد باید $b=c=0$ باشد.

حالا طرف دیگر را اثبات می‌کنیم: یعنی اگر $b=c=0$ ، آنگاه T ترکیب خطی است

شرط اول:

$T0 = 0$ → چندجمله‌ای که همه‌ی ضرایب

پس $0(1), 0(2), 0(4), 0'(4)$ و ... همگی صفراند ، صفراند یعنی هرچی ورودی دهیم صفر خروجی می‌دهد.

→ حاصل کل هم صفر است.

شرط دوم:

$b=c=0$:

$$Tp = \left(3p(4) + 5p'(4), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right)$$

$$T_{\underbrace{p+q}_{r}} = \left(3r(4) + 5r'(4), \int_{-1}^{2} x^3 r(x)\, dx\right) = \left(3(p(x)+q(x)) + 5(p'(x)+q'(x)), \int_{-1}^{2} x^3(p(x)+q(x)\right.$$

$\boxed{r' = p' + q'}$

$$= \left(3p(x) + 5p'(x) + 3q(x) + 5q'(x), \int_{-1}^{2} (x^3p(x) + x^3q(x))\, dx\right) =$$

$$\left(3p(x) + 5p'(x) + 3q(x) + 5q'(x), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx + \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\, dx\right) =$$

$$\underbrace{\left(3p(x) + 5p'(x), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right)}_{} + \underbrace{\left(3q(x) + 5q'(x), \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\, dx\right)}_{} =$$

$$Tp + Tq \implies T_{p+q} = Tp + Tq$$

شرط سوم:

$b=c=0$ $\quad T_{\alpha p} = \alpha Tp$ ، $T_{\underbrace{\alpha p}_{q}} = \left(3q(x) + 5q'(x), \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\, dx\right) =$

$q' = \alpha p'$

$$\left(3\alpha p(x) + 5\alpha p'(x), \int_{-1}^{2} x^3 \alpha p(x)\, dx\right) =$$

$$\alpha\left(3p(x) + 5p'(x), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right) = \alpha Tp \Rightarrow$$ همگن خاصیت برقرار است

⇐ $b=c=0$ اگر و تنها اگر $T_P$ یک ترکیب خطی باشد

۴ سه‌شنبه 23 April