بنام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۴۳۳۹

۱- متغیرهای $X_1,\dots,X_n \sim N(0,\sigma^2)$ به صورت i.i.d هستند، حالا می‌خواهیم نشان دهیم که،

$$E[\max X_i] \le \sigma\sqrt{2\ln n}$$

می‌دانیم که تابع exp تابعی convex است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\exp\left(E\left(t\max_i X_i\right)\right) \le E\left[\exp\left(t\max_i X_i\right)\right] \xrightarrow{\ln}$$

$$E\left(t\max_i X_i\right) \le \ln E\left[\exp\left(\max_i tX_i\right)\right] \longrightarrow$$

$$E\left[\max_i X_i\right] \le \frac{1}{t}\ln E\Big[\overbrace{\exp\left(\max_i tX_i\right)}^{\max_i \exp(tX_i)}\Big] \le \frac{1}{t}\ln E\left[\sum_i \exp(tX_i)\right]$$

$$\Rightarrow E\left[\max_i X_i\right] \le \frac{1}{t}\ln E\left[\sum_i \exp(tX_i)\right] \Rightarrow$$

$$E\left[\max_i X_i\right] \le \frac{1}{t}\ln\left(\sum_i E\left[\exp(tX_i)\right]\right)$$

$$\sqrt{2\pi\sigma^2}\,E\left[\exp(tX_i)\right] = \int e^{tx_i} e^{-\frac{(x_i-0)^2}{2\sigma^2}} dx_i = \int e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2} + tx_i} dx_i =$$

$$\int e^{-\frac{(x_i^2 - 2t\sigma^2 x_i + t^2\sigma^4)}{2\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^4}{2\sigma^2}} dx_i = \int e^{-(x_i - t\sigma^2)^2/2\sigma^2 + \frac{t^2\sigma^2}{2}} dx_i =$$

$$\Rightarrow E\left[\exp(tX_i)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int e^{-\frac{(x_i - t\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2}{2}} dx_i =$$

$$e^{t^2\sigma^2/2}\,\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_i - t\sigma^2)^2/2\sigma^2} dx_i}^{1} = e^{t^2\sigma^2/2}$$

پس خواهیم داشت که:

$$E[\max_i x_i] \le \frac{1}{t} \ln\left(n e^{t^2\sigma^2/2}\right)$$

$$\rightarrow E[\max_i x_i] \le \underbrace{\frac{1}{t}\ln n + \frac{\sigma^2 t}{2}}$$

مشتق به t می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{t^2}\ln n = 0 \rightarrow \boxed{t^2 = \frac{2\ln n}{\sigma^2}} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\ln n}{\sigma^2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{t}\left(\ln n + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \frac{1}{t}\left(\ln n + \frac{\sigma^2\, 2\ln n}{2\sigma^2}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\ln n}}\,(2\ln n) = \sqrt{\sigma^2\, 2\ln n} \rightarrow \boxed{E[\max_i x_i] \le \sigma\sqrt{2\ln n}}$$

-۲

$$P(M=m) = \frac{1}{(e-1)m!} \quad m \in N \rightsquigarrow$$

$$P(M \geq m^*) = \sum_{m=m^*}^{\infty} \frac{1}{(e-1)m!} \longrightarrow$$ احتمال موفق بودن در یک پرش

$$P(M_1 \geq m^*, \dots, M_k \geq m^*) = \left(\frac{1}{e-1}\sum_{m=m^*}^{\infty} \frac{1}{m!}\right)^k$$

احتمال اینکه یک روز، روز خوبی برای ورزشکار باشد با $P(A_i)$ نشان می دهیم. پس خواهیم داشت که:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$ احتمال اینکه یک ورزشکار موفق باشد

حالا اگر M را متغیر تصادفی در نظر بگیریم، خواهیم داشت که:

$$E[M] = \sum_{m=1}^{\infty} P(M=m)\, m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(e-1)m!} m =$$

$$\frac{1}{e-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} = \frac{1}{e-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \boxed{\frac{e}{e-1}}$$

همچنین خواهیم داشت که:

$$Var(M) = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_{m=1}^{\infty} P(M=m)\, m^2 - \left(\sum_{m=1}^{\infty} P(M=m)\, m\right)^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(e-1)m!} m^2 - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(e-1)(m-1)!} - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{e-1} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\frac{m-1}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!}\right\} = \frac{1}{e-1}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}}_{e}\right\} =$$

$$\frac{1}{e-1}\left\{\frac{0}{0!} + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m!}}_{e} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}}_{e}\right\} = \frac{1}{e-1}\{2e\} = \frac{2e}{e-1}$$

$$\Rightarrow Var(M) = \frac{2e}{e-1} - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 = \frac{2e(e-1) - e^2}{(e-1)^2} = \frac{e(e-2)}{(e-1)^2}$$

پس داریم که،

$$E[M]=\frac{e}{e-1} \quad , \quad Var(M)=\frac{e(e-2)}{(e-1)^2}$$

حالا با استفاده از نامساوی chebyshev داریم که:

$$P(|M-\mu_M| \geq k\sigma_M) \leq \frac{1}{k^2}$$

از طرفی داریم که، $P(M-\mu_M \geq k\sigma_M)$ کوچکتر از عبارت سمت چپ هست، پس

خواهیم داشت،

$$P(M-\mu_M \geq k\sigma_M) \leq P(|M-\mu_M| \geq k\sigma_M) \leq \frac{1}{k^2} \longrightarrow$$

$$P(M \geq \mu_M + k\sigma_M) \leq \frac{1}{k^2}$$

حالا برای $P(M \geq m^*)$ خواهیم داشت که:

$$m^* = \mu_M + k\sigma_M \Leftrightarrow \frac{m^*-\mu_M}{\sigma_M} = k \longrightarrow \frac{1}{k} = \frac{\sigma_M}{m^*-\mu_M} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\sigma_M^2}{(m^*-\mu_m)^2} = \frac{Var(M)}{(m^*-\mu_m)^2} = \frac{\frac{e(e-2)}{(e-1)^2}}{\left(m^*-\frac{e}{e-1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{e(e-2)}{(e-1)^2\left(m^*-\frac{e}{e-1}\right)^2} = \frac{e(e-2)}{(m^*(e-1)-e)^2} \Rightarrow$$

$$P(M \geq m^*) \leq \frac{e(e-2)}{(m^*(e-1)-e)^2}$$

حالا احتمال موفقیت در یک روز عبارت است از:

$$\prod_{i=1}^{k} P(M_i \geq m^*) \leq \left(\frac{e(e-2)}{(m^*(e-1)-e)^2}\right)^k = \frac{e^k(e-2)^k}{(m^*(e-1)-e)^{2k}}$$

حالا داریم که،

$$P(A_i) \leq \frac{e^k(e-2)^k}{(m^*(e-1)-e)^{2k}}$$

همچنین داریم که،

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

پس خواهیم داشت که،

$$P(\text{موفق بودن یک ورزشکار}) \leq n P\left(\begin{array}{c}\text{موفق بودن ورزشکار}\\ \text{در یک روز}\end{array}\right)$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{موفق بودن ورزشکار}\\ \text{در یک روز}\end{array}\right) \leq \frac{e^k(e-2)^k}{(m^*(e-1)-e)^{2k}} \longrightarrow$$

$$P(\text{موفق بودن یک ورزشکار}) \leq n\left(\frac{e^k(e-2)^k}{(m^*(e-1)-e)^{2k}}\right) = \frac{ne^k(e-2)^k}{(m^*(e-1)-e)^{2k}}$$

$$\longrightarrow \boxed{P(\text{موفق بودن یک ورزشکار}) \leq \frac{ne^k(e-2)^k}{(m^*(e-1)-e)^{2k}}}$$

۳- داریم که:

$$(X_i - \bar{X})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X_i^j (-X)^{k-j}$$

همچنین داریم که:

$$(X_i - \mu)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X_i^j (-\mu)^{k-j}$$

همچنین با میانگین گیری داریم که:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-\bar{X})^{k-j} X_i^j =$$

$$\mu_{k} = E[(X_i - \mu)^k] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^k] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} E[X_i^j](-\mu)^{k-j}$$

$$\Rightarrow M_k - \mu_{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left((-\bar{X})^{k-j} X_i^j - E[X_i^j] (-\mu)^{k-j} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^j (-\bar{X})^{k-j} - E[X_i^j] (-\mu)^{k-j} \right) \right)$$

به ازای یک j فیکس ترم داخل پرانتز برابر است با:

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^j (-\bar{X})^{k-j} - E[X_i^j] (-\mu)^{k-j} \right)$$

همچنین داریم که این عبارت به ازای $n \to \infty$، به صفر میل می‌کند.

به ازای $n \to \infty$، $\bar{X}$ به μ میل می‌کند، همچنین داریم که،

$$(-\bar{X})^{k-j} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^j \right) - E[X_1^j] (-\mu)^{k-j} \overset{a.s.}{\approx}$$

$$(-\mu)^{k-j} \left(\frac{1}{n} \sum X_i^j \right) - E[X_1^j] (-\mu)^{k-j} \overset{a.s.}{\approx}$$

همچنین از طرفی داریم که $\frac{1}{n}\sum X_i^j \xrightarrow{n\to\infty} E[X_i^j]$ پس خواهیم داشت که ،

$$(-\bar{X})^{k-j}\left(\frac{1}{n}\sum X_i^j\right) - (-\mu)^{k-j} E[X_i^j] \overset{a.s.}{\approx} 0$$

در نتیجه عبارت داخل جمع ($\sum$) به صفر میل می‌کند و خواهیم داشت که جمع یک سری عبارت که به صفر میل می‌کند به صفر میل می‌کند. $\Leftarrow$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left((-\bar{X})^{k-j}\left(\frac{1}{n}\sum X_i^j\right) - (-\mu)^{k-j}\, E[X_i^j]\right) \overset{a.s.}{\approx} 0$$

Subject

Date : Year: Month: Day: Σ

۴- (الف)

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix}\mu_x\\\mu_y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{bmatrix}\right)$$

$$|\Sigma| = \sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2) \quad , \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|}\begin{bmatrix}\sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y\\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2\end{bmatrix}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2|\Sigma|}\begin{pmatrix}\overset{\bar{x}}{x-\mu_x} & \overset{\bar{y}}{y-\mu_y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y\\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-\mu_x\\ y-\mu_y\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}}\exp\left(\frac{-1}{2|\Sigma|}\left(\bar{x}^2\sigma_y^2 + \bar{y}^2\sigma_x^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y}\right)\right)$$

دو حالت داریم:

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2|\Sigma|}\begin{cases} (1)\ \bar{x}^2\sigma_y^2 + \bar{y}^2\sigma_x^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y} + \rho^2\sigma_y^2\bar{x}^2 - \rho^2\sigma_y^2\bar{x}^2 \\ (2)\ \bar{y}^2\sigma_x^2 + \bar{x}^2\sigma_y^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y} + \rho^2\sigma_x^2\bar{y}^2 - \rho^2\sigma_x^2\bar{y}^2 \end{cases}\right)$$

به دو طریق می‌توانیم عبارت را بنویسیم که برای f_Y , f_X هر سری یک کدام بهتر است و راحت‌تر محاسبه می‌شود:

با استفاده از (۲) خواهیم داشت که:

$$f_Y(y) = \int f_{XY}(x,y)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}}\exp\left(\frac{-1}{2|\Sigma|}\left(\bar{x}^2\sigma_y^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y} + \rho^2\sigma_x^2\bar{y}^2 + \bar{y}^2\sigma_x^2(1-\rho^2)\right)\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}}\exp\left(\frac{-1}{2|\Sigma|}\left((\bar{x}\sigma_y - \rho\sigma_x\bar{y})^2 + \bar{y}^2\sigma_x^2(1-\rho^2)\right)\right)dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}}\exp\left(\frac{-1}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2))}\left((\bar{x}\sigma_y - \rho\sigma_x\bar{y})^2 + \bar{y}^2\sigma_x^2(1-\rho^2)\right)\right)dx$$

$$= \exp\left(\bar{y}^2\sigma_x^2(1-\rho^2)\right) \int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{(\bar{x}\sigma_y - \rho\sigma_x\bar{y})^2}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2))}\right) dx$$

$$= \exp\left(\frac{\bar{y}^2\sigma_x^2(1-\rho^2)}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right) \int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{(\bar{x} - \overbrace{\rho\sigma_x\bar{y}/\sigma_y}^{\mu})^2}{\underbrace{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}}\right)$$

$$= \frac{\exp\left(\bar{y}\sigma_x^2(1-\rho^2)/2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\underbrace{\sigma_x^2(1-\rho^2)}_{\sigma^2}}} \exp\left(\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\underbrace{\sigma_x^2(1-\rho^2)}_{\sigma^2}}\right) dx$$

$\bar{x} = x - \mu_x \longrightarrow d\bar{x} = dx$

$$= \frac{\exp\left(\bar{y}\sigma_x^2(1-\rho^2)/2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\bar{x}}_{1} =$$

$$\frac{\exp\left(\bar{y}\sigma_x^2(1-\rho^2)/2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} = \frac{\exp\left(\bar{y}^2/2\sigma_y^2\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \longrightarrow N(\mu_y, \sigma_y^2) \longleftarrow f_Y(y)$$

به طور مشابه بخاطر تقارن x و y بدست می‌آید که توزیع x هم مشابه y است، یعنی

داریم که:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Subject

Date : Year Month Day

ب)
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

حالا با نشستن f_{XY} و f_X را پس داریم که:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{\bar{x}^2\sigma_y^2 + \bar{y}^2\sigma_x^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y}}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{\bar{y}^2\sigma_x^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y} + \bar{x}^2\sigma_y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)} - \frac{\bar{x}^2}{2\sigma_x^2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{\overbrace{-\bar{x}^2\left(\sigma_y^2(1-\rho^2)\right) + \bar{x}^2\sigma_y^2}^{\rho^2\bar{x}^2\sigma_y^2} - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2\sigma_x^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{\rho^2\bar{x}^2\sigma_y^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2\sigma_x^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{(\rho\bar{x}\sigma_y - \bar{y}\sigma_x)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{\left(\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\bar{x} - \bar{y}\right)^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_x}(x-\mu_x) - (y-\mu_y))}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right)$$

ج)

$Z = aX + bY$

$$E[Z] = aE[X] + bE[Y] = a\mu_x + b\mu_Y$$

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(aX + bY) = a^2\,\mathrm{var}(X) + b^2\,\mathrm{var}(Y) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y)$$

$$= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_Y$$

X و Y توزیع joint guassian دارند ← هر ترکیب خطی شان هم گاوسی است

$$\boxed{Z \sim N\left(a\mu_x + b\mu_Y\,,\ a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_Y\right)}$$

۵- می دانیم که در توزیع پواسون داریم که: $pmf = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

حالا فرض کنیم $\lambda=1$ باشد، می دانیم که پواسون جمع پذیر است پس اگر n تا توزیع پواسون با $\lambda=1$ در نظر بگیریم خواهیم داشت که $Y_1 ... Y_n \sim Poisson(1)$

$$X = Y_1 + ... + Y_n$$

پس خواهیم داشت که:

$$Z = \frac{X - n}{\sqrt{n}} = \frac{Y_1 + ... + Y_n - n(1)}{\sqrt{n}}$$

داریم که می دانیم میانگین توزیع های پواسون برابر ۱ است پس داریم که:

$$Z = \frac{\sum Y_i - n\mu^{\to 1}}{\sqrt{n}}$$

طبق قضیه حد مرکزی داریم که Z در $n \to \infty$ به سمت توزیع نرمال میل می کند

پس داریم که:

$$P(X \leq n) = P(X - n \leq 0) = P\left(\frac{X-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) =$$

$$\underbrace{P(Z \leq 0)}_{} = \frac{1}{2}$$

توزیع نرمال $(0, \sigma^2)$ هست

که $P(Z \leq 0)$ برابر نیم است.

Scanned with CamScanner

۶- الف)

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \longrightarrow \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx =$$

$$\lambda \left(\frac{1}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \Big|_0^\infty \right) = \frac{\lambda}{t-\lambda} \left(\begin{array}{ll} \text{if } t>\lambda : & \infty \\ \text{if } t=\lambda : & 0 \\ \text{else } t<\lambda : & \frac{-\lambda}{t-\lambda} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{for} \quad t < \lambda}$$

ب)

$$E[X] = M'_X(0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)\Big|_0 = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \xrightarrow{t=0}$$

$$E[X] = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda}}$$

$$Var(X) = M''_X(0) - (M'_X(0))^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \right) - \left(\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \right)^2$$

$$= \frac{-2\lambda}{(t-\lambda)^3} - \frac{\lambda^2}{(\lambda-t)^4} \xrightarrow{t=0} \frac{-2\lambda}{-\lambda^3} - \frac{\lambda^2}{\lambda^4} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

ج) می‌خواهیم از یک توزیع یونیفرم، توزیع نمایی ایجاد کنیم:

فرض کنیم $U = unif(0,1)$ باشد و $X = F_X^{-1}(U)$ باشد و بخواهیم که

X توزیع نمایی داشته باشد، F_X هم CDF، X باشد، خواهیم داشت که

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \longrightarrow u = 1 - e^{-\lambda x} \longrightarrow$$

$$1 - u = e^{-\lambda x} \longrightarrow -\lambda x = \ln(1-u) \longrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(\underbrace{1-u}) \longrightarrow$$

باز هم توزیعی یونیفرم است،

$$\Rightarrow \boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \ln(U)} \quad , \quad U \sim unif(0,1)$$

حالا داریم که،

$$P(X \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(U) \leq x\right) = P(\ln(U) \geq -\lambda x) =$$

$$P(U \geq e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{for } e^{-\lambda x} < 1$$

expected تعداد مشاهدات لازم برای دیدن اولین مهره برابر است با $\frac{n}{n}=1$ ، در سری بعدی

expected تعداد مشاهدات لازم برای دیدن دومین مهره جدید برابر است با $\frac{n}{n-1}$ ، در سری بعدی

expected 〃 〃 〃 $\frac{n}{n-2}$ ، . . . .

هر سری احتمالمون $\frac{n-i}{n}$ است $\Leftarrow$ expected مان $\frac{n}{n-i}$ است.

حالا برای ~~[illegible]~~ اگر بخواهیم همه‌ی مهره ها دیده شوند، داریم که:

$$E(\text{تعداد مشاهدات لازم دیده شدن تمام مهره ها}) = \frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\dots+\frac{n}{1} = n\sum \frac{1}{i}$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}}$$

۸- اگر توزیع مان نمایی باشد خواهیم داشت که،

$$P(X>s+t)=e^{-\lambda(s+t)}=e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}=P(X>s)P(X>t)$$

حالا طرف دیگر عبارت را نشان می دهیم یعنی اگر داشته باشیم که ،

$P(X>s+t)=P(X>s)P(X>t)$ خواهیم داشت که توزیع X حتماً نمایی است.

در نظر می گیریم که $P(X>s)=g(s)$, $P(X>t)=g(t)$ ، $P(X>s+t)=g(s+t)$

خواهیم داشت که ، $g(t+s)=g(t)g(s)$ ، $t,s>0$

حالا در نظر می گیریم که ، $f(t)=\ln g(t)$, ______

خواهیم داشت که ،

$$\underbrace{f(t+s)=f(t)+f(s)}$$

این عبارت هم Cauchy's functional equation هست،

برای حالت پیوسته تنها جواب آن عبارت است از $f(t)=-\lambda t$

for some constant $\lambda\in R$

$$\Longrightarrow g(t)=e^{-\lambda t}$$

از طرفی داریم که ،

$$\forall s\ ,\quad g(s+0)=g(s)g(0)\longrightarrow g(0)=1$$

$$g(t)=P(X>t)=1-F_X(t)\longrightarrow g(0)=1-F_X(0)=1\longrightarrow$$

$$\boxed{F_X(0)=0}\longrightarrow g(t)=e^{-\lambda t}=1-F_X(t)\longrightarrow$$

$$F_X(t)=1-e^{-\lambda t}$$

همچنین به ازای $\lambda > 0$، $t \to \infty$، آنگاه $F_X(t) = 1$ ، $S(t) = 0$

که منطقی است. پس خواهیم داشت که:

$$X \sim Exp(\lambda) \quad , \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

* راه دیگر:

همچنین برای حالت اعداد طبیعی داریم که: (در نظر می‌گیریم $g(t) = 1 - F_X(t)$)

$g(s)\,g(t) = g(s+t)$

فرض می‌کنیم $g(1) = \alpha$ داریم خواهیم داشت که:

$$\forall n, \ g(n) = g(n-1)\,g(1) = g(n-2)\,g(1)\,g(1) = \cdots = g(1)^n = \alpha^n$$

$$\Rightarrow \forall n, \ g(n) = \alpha^n$$

اعداد گویا $\forall \frac{p}{q} \in Q, \ g(\frac{p}{q}) = ?$

$$g(p) = g\left(\sum_{i=1}^{q} \frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{p}{q}\right)^q \longrightarrow g\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{g(p)}$$

$$\Rightarrow g(p) = g(p-1)\,g(1) = \cdots = g(1)^p = \alpha^p \Rightarrow$$

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha^{p/q}$$

حالا فرض کنیم برای اعداد گنگ این رابطه برقرار نباشد، برای مثال:

$$\overset{\in Q'}{g(b)} \neq \alpha^b$$

حالا دو حالت داریم، $g(b) = \alpha^{b'}$; $\alpha^b < \alpha^{b'}$ یا $\alpha^b > \alpha^{b'}$

در نتیجه خواهیم داشت که عدد گویایی بین b و b' وجود دارد $\leftarrow$ ⓒ

حالا خواهیم داشت که $g(c) = \alpha^c$ ، همچنین هرکدام از حالات

$\alpha^b > \alpha^{b'}$ ، $\alpha^b < \alpha^{b'}$ را داشته باشیم، خواهیم داشت که

(۱) $\alpha^b < \alpha^{b'} \longrightarrow b' < c < b \longrightarrow \alpha^b < \alpha^c < \underbrace{\alpha^{b'}}_{g(b)}$

(CDF-1 نزولی است.)

~~$g(b) > g(c)$~~ $\quad g(c)$

پس یعنی داریم که $g(c) < g(b)$, $c < b$ و g تابعی نزولی است ✕

به تناقض می خوریم $\longleftarrow$ $\alpha^b < \alpha^{b'}$ نمی تواند برقرار باشد.

(۲) $\alpha^b > \alpha^{b'} \longrightarrow b < c < b' \longrightarrow \underbrace{\alpha^{b'}}_{g(b)} < \underbrace{\alpha^c}_{g(c)} < \alpha^b$

پس یعنی داریم که $g(b) < g(c)$, $b < c$ و g تابعی نزولی است ✕

به تناقض می خوریم

$\Rightarrow$ هیچ کدام از حالت $\alpha^b < \alpha^{b'}$, $\alpha^b > \alpha^{b'}$ قابل قبول نیستند و خواهیم داشت که $\alpha^b = \alpha^{b'}$ تنها حالتی است که باقی می ماند $\Rightarrow$ برای اعداد گنگ هم داریم که $g(b) = \alpha^b$

$\leftarrow$ تابع $1 - CDF(x) = \alpha^x$ برقرار است یعنی داریم که ،

$* \; F_X(x) = 1 - \alpha^x \qquad F_X(\infty) = 1 \longrightarrow \alpha^\infty = 0 \longrightarrow \alpha < 1$

* α هم باید مثبت باشد تا بتواند توزیع باشد عبارت

از طرفی گفتیم که $F_X(0) = 0$ که در اینجا برقرار است.

$$F_X(x) = 1 - (e^{\ln \alpha})^x = 1 - e^{\ln\alpha \, x}$$

از آنجایی که $0 < \alpha < 1 \longrightarrow \ln\alpha < 0$ پس $-\ln\alpha > 0$ خواهیم داشت که ،

$$1 - e^{-\overbrace{(-\ln\alpha)}^{\lambda > 0} x} = \boxed{1 - e^{-\lambda x}}$$

پس توزیع ما حتماً نمایی است.

الف)

۹- X و Y متغیرهای تصادفی مستقل از هم دیگر هستند، حالا توزیع $X+Y$ را بدست می‌آوریم.

$$Z = X+Y \longrightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \exp\left(-\frac{(z-x-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\,\sigma_x\sigma_Y} \exp\left(-\frac{\sigma_x^2(z-x-\mu_Y)^2 + \sigma_Y^2(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2\sigma_Y^2}\right) dx =$$

$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_Y^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma_x\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left(-\frac{x^2(\sigma_x^2+\sigma_Y^2) - 2x\left(\sigma_x^2(z-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_x\right) + \sigma_x^2(z^2+\mu_Y^2-2z\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_x^2}{2\sigma_Y^2\sigma_x^2}\right) dx =$$

$\div\ \sigma_x^2+\sigma_Y^2$

این فقط داخلش x داره

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma_x\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\sigma_x^2(z-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_x}{\sigma_Z^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x^2(z-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_x}{\sigma_Z^2}\right)^2 + \frac{\sigma_x^2(z-\mu_Y)^2+\sigma_Y^2\mu_x^2}{\sigma_Z^2}}{2\left(\frac{\sigma_x\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)}\right) dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Z} \exp\left(-\frac{(z-(\mu_x+\mu_Y))^2}{2\sigma_Z^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma_x\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\sigma_x^2(z-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_x}{\sigma_Z^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_x\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right) dx$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Z} \exp\left(-\frac{(z-(\mu_x+\mu_Y))^2}{2\sigma_Z^2}\right) \quad \text{where } \sigma_Z = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_Y^2}$$

به حکم لم برقرار است.

ب) همانطور که گفته شده است، W_1 از توزیع گاوسی آمده است ←

از طرفی داریم که:

$$Z = aX$$

$$\forall a > 0$$

$$P(Z \le x) = P(aX \le x) = P(X \le \ ) = F_X\left(\frac{x}{a}\right)$$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow$ PDF برای Z عبارت است از $\frac{1}{a} f_X\left(\frac{x}{a}\right)$

حالا داریم که

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(aX \le z) = P\left(X \le \frac{z}{a}\right) = F_X\left(\frac{z}{a}\right) \longrightarrow$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(\frac{-\left(\frac{z}{a} - \mu_x\right)^2}{2\sigma_x}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(\frac{-(z - a\mu_x)^2}{2a^2\sigma_x^2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\underbrace{a\sigma_x}_{\sigma_z}} \exp\left(-\frac{(z - \overbrace{a\mu_x}^{\mu_z})^2}{2\underbrace{a^2\sigma_x^2}_{\sigma_z = a\sigma_x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \exp\left(-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right)$$

$$\Rightarrow Z \sim Normal(\mu_z, \sigma_z^2) \longrightarrow$$

$$\boxed{Z \sim N(a\mu_x, a^2\sigma_x^2)}$$

← aW هم از توزیع گاوسی می‌آید ←

از بخش قبل هم داریم که جمع دوتا گاوسی، بازهم توزیعی گاوسی می‌دهد.

$$aw_1 \sim N(a\mu_{w_1}, a^2\sigma^2_{w_1}) \longrightarrow aw_1 \sim N(0, a_1^2)$$

$$aw_2 \sim N(0, a_2^2)$$

پس خواهیم داشت که:

$$Z = aw_1 + aw_2 \sim N(0, a_1^2 + a_2^2)$$

ج) می دانیم که ترکیب خطی توزیع های نرمال شده i.i.d گاوسی یعنی

$$Z = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \text{———}$$

w_1 — توزیع های نرمال شده گاوسی اند

حالا از بالا داشتیم که جمع هر دو توزیع گاوسی مستقل از هم، توزیعی گاوسی است،

پس باید استقرا مان برقرار است، حالا اگر به ازای k تا توزیع نرمال رابطه مان برقرار باشد، خواهیم داشت که:

$$Z_k = a_1 w_1 + \text{———} + a_k w_k \sim N\left(0, \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

به ازای Z_{k+1} داریم که:

$$Z_{k+1} = \overbrace{Z_k}^{\text{گاوسی}} + \overbrace{a_{k+1} W_{k+1}}^{\text{گاوسی}} \xrightarrow[\text{بازهم گاوسی است مانند بخش الف}]{\text{جمع دوتا گاوسی}} N(0, \sigma^2_{Z_k} + \sigma^2_{k+1} a^2_{k+1})$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{k+1} \sim N\left(0, \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \sigma_i^2\right)}$$

۱۰- expected تعداد گره‌ها به‌ازای n تیغ را با E_n نشان می‌دهیم.

داریم که: اگر دوسر یک تیغ به هم بسته شوند، $n-1$ تیغ با یک حلقه داریم پس

$1+E_{n-1}$، expected تعداد حلقه‌هایمان است، همچنین اگر

این اتفاق نیفتد یعنی دو سر دو تیغ را به هم ببندیم، دو تیغ انگار تبدیل به یک تیغ شده‌اند و

ما expected تعداد حلقه‌هایمان عبارت است از E_{n-1}.

حالا هر کدام از این حالت‌ها با احتمال $\frac{1}{n}$, $\frac{n-1}{n}$ اتفاق می‌افتند، پس

داریم که:

$$E_n = \frac{1}{n}(E_{n-1}+1) + \frac{n-1}{n} E_{n-1} = \frac{1}{n} + E_{n-1}$$

و از طرفی داریم $E_1=1$، تنها حالت برای یک تیغ این است که

دو سرش را به هم گره بزنیم ← $E_1=1$.

$$\Rightarrow E_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \text{———} + \frac{1}{1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow \text{Expected \# حلقه} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$