به نام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

۱- داریم که $Y = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ و می‌خواهیم از این برای تعیین $\sqrt{\theta}$ استفاده کنیم، داریم که:

$$E\{Y\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n} |X_i|\right\} = \sum_{i=1}^{n} E\{|X_i|\} = n\,E\{|X_1|\}$$

وچون $X_1 \sim N(0,\theta)$ داریم که $Z = \frac{X_1}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1)$ $\leftarrow$ $X_1 = \sqrt{\theta} Z$

$$\Rightarrow E\{Y\} = n\,E\{|\sqrt{\theta} Z|\} = n\sqrt{\theta}\,\underbrace{E\{|Z|\}}_{2\int_0^\infty z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}} = n\sqrt{\theta}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) =$$

$$n\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = n\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} \Rightarrow$$

حالا داریم که $W = cY$,

$$E\{W\} = c\,E\{Y\} = c\,n\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} = \sqrt{\theta} \longrightarrow$$

$$cn\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\theta} = \sqrt{\theta} \longrightarrow cn\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1 \rightarrow c = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{n} \Rightarrow$$

$$W = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{n} Y \longrightarrow \text{is unbiased estimator}$$

۲- می‌دانیم که طبق قانون بیز داریم:

$$P(x|\theta) = \frac{P(x)\,P(\theta|x)}{P(\theta)} = P(x) \cdot \frac{P(\theta|x)}{P(\theta)}$$

حالا طبق فرض داریم که posterior تنها به $T(x)$ وابسته است $\Leftarrow$

$$P(\theta|x) = P(\theta|T(x)) \rightarrow P(x|\theta) = P(x) \cdot \frac{P(\theta|T(x))}{P(\theta)}$$

تابعی از $\theta, T(x)$ است $\leftarrow g(T(x),\theta)$, $P(x)$ هم همان $h(x)$ ماست

$\Leftarrow$ طبق قضیه نیمن فیشر داریم که $T(x)$ یک آماره کافی است.

ب) داریم که:

$$P(\theta|x) = \frac{P(\theta)\,P(x|\theta)}{P(x)} = \frac{P(\theta)\,P(x|\theta)}{\int P(x|\theta')\,P(\theta')\,d\theta'}$$

از آنجایی که $T(x)$ آماره کافی است داریم که:

$$P(x|\theta) = h(x)\cdot g(T(x),\theta) \implies$$

$$P(\theta|x) = \frac{P(\theta)\,\cancel{h(x)}\,g(T(x),\theta)}{\int \cancel{h(x)}\,g(T(x),\theta')\,P(\theta')\,d\theta'} =$$

$$\frac{P(\theta)\,g(T(x),\theta)}{\int P(\theta')\,g(T(x),\theta')\,d\theta'} \longrightarrow$$ این تابع فقط به θ و $T(x)$ وابسته است و تنها از طریق $T(x)$ به x وابسته است $\Longleftarrow$

$$P(\theta|x) \longrightarrow$$ تنها از طریق $T(x)$ به x وابسته است.

۳- a)

$$P_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta}$$

و باید داشته باشیم

$$\theta > 0 \quad , \quad \min_i x_i > 0 \,, \; \max_i x_i < 1$$

$T(x)$ در نظر می‌گیریم

$$\Rightarrow P_\theta(x) = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} \mathbb{I}\left(\min_i x_i > 0,\; \max_i x_i < 1\right)}_{h(x)} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta} \mathbb{I}(\theta > 0)}_{g(T(x),\theta)}$$

طبق قضیه نیمن فیشر $T(x)$ آماره کافی است.

b)

$$P_\theta(x) = \theta \alpha x^{\alpha-1} \exp(-\theta x^{\alpha}) , \quad \overset{\text{const}}{\alpha > 0} \quad x > 0 \quad \theta > 0$$

$$\Rightarrow P_\theta(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \theta \exp(-\theta x^{\alpha})$$

حالا برای $x_1 \text{---} x_n$ داریم که،

$$P_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \alpha x_i^{\alpha-1} \theta \exp(-\theta x_i^{\alpha}) =$$

$$\alpha^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} \cdot \theta^n \prod_{i=1}^{n} \exp(-\theta x_i^{\alpha}) =$$

اعمال شرط‌ها

$$\underbrace{I(x>0)\alpha^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}}_{h(x)} \underbrace{\theta^n \exp\Big(-\theta \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}_{T(x)}\Big) \, I(\theta>0)}_{g(T(x),\theta)}$$

طبق قضیه نیمن فیشر $T(x)$ آماره کافی است.

c)

$$P_\theta(x) = \frac{\theta a^{\theta}}{x^{\theta+1}} , \quad x > a , \quad \theta > 0$$

$$P_\theta(x_1 \text{---} x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta a^{\theta}}{x_i^{\theta+1}} \, I(x>a) \, I(\theta>0) =$$

$$\frac{\theta^n a^{n\theta}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta} \prod_{i=1}^{n} x_i} I(x>a) \, I(\theta>0) = \overset{h(x)}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) I(x>a)} \cdot \theta^n a^{n\theta} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta} I(\theta>0)$$

$$= h(x) \underbrace{\theta^n a^{n\theta} \exp\big(\theta \overset{T(x)}{\sum \ln x_i}\big) \, I(\theta>0)}_{g(T(x),\theta)}$$

طبق قضیه نیمن فیشر $T(x)$ آماره کافی است.

۴- آ) داریم که،

$$\Psi = P_\theta(X_1 > 0)$$

حالا متغیرهای تصادفی $X_1 — X_n$ را داریم و می خواهیم تخمین ml را برای θ پیدا کنیم و سپس $P_{\hat\theta_{mL}}(X_1>0)$ را حساب کنیم،

$$\ell(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)$$

$$\longrightarrow \ln \ell(\theta) = \text{const} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 \xrightarrow{\partial/\partial\theta}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta) = 0 \longrightarrow \hat\theta_{mL} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

حالا داشتیم که،

$$\Psi = P_\theta(X_1 > 0)$$

در نظر می گیریم $X_1 = \theta + Z$ که $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \Psi = P_\theta(X_1 > 0) = P(Z+\theta > 0) = P(Z > -\theta) \overset{\text{گاوسی متقارن}}{=} P(Z < \theta)$$

$$\Rightarrow \hat\Psi_{mL} = P(Z < \hat\theta_{mL}) = \Phi(\hat\theta_{mL}) = \Phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

ب) داریم که Y_i ها یک متغیر باینری هستند با پارامتر Ψ ← داریم که طبق قانون ضعیف اعداد بزرگ

$$\tilde\Psi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{P} E\{Y_i\} = \Psi \quad \text{as } n \to \infty$$

← $\tilde\Psi$ یک تخمین گر consistent است.

ج) داریم که طبق قضیه حد مرکزی ،

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

حالا در نظر می گیریم که $g(\theta) = \Phi(\theta)$

$$\Rightarrow \hat{\Psi} = g(\bar{X}_n) = \Phi(\underbrace{\bar{X}_n}_{T_n}) \Rightarrow$$

if $\sqrt{n}\left(T_n - \theta\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, g is differentiable at θ

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(g(T_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} N(0, [g'(\theta)]^2 \underbrace{\sigma^2}_{1})$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\Phi(\bar{X}_n) - \Phi(\theta)\right) \xrightarrow{d} N(0, \phi(\theta)^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n}\left(\hat{\Psi} - \Psi\right) \xrightarrow{d} N(0, \phi(\theta)^2)}$$

حالا برای $\tilde{\Psi}$ می خواهیم توزیع مجانبی را بررسی کنیم،

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\text{قضیه حد مرکزی}} \boxed{\sqrt{n}\left(\tilde{\Psi} - \Psi\right) \xrightarrow{d} N(0, \Psi(1-\Psi))}$$

$$\left.\begin{array}{l} * \ \phi(\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\theta^2/2}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\theta^2} \\ * \ \Psi(1-\Psi) = \Phi(\theta)\left(1 - \Phi(\theta)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi(1-\Phi(\theta)) \geq \phi(\theta)^2$$

⇐ تعریف assymp ~~[illegible]~~ $\hat{\psi}$ بهتر از $\tilde{\Psi}$ است. (در حالت مجانبی)

⇐ چرا که (در حالت مجانبی) واریانس کمتری دارد و هر دو در حالت مجانبی واریانس کمتر هم دارد

Scanned with CamScanner

(آ-۵

$X \sim \Gamma(\alpha=4,\ \beta=\theta>0)$

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\underbrace{\Gamma(4)}_{6}\,\theta^{4}}\,x^{4-1}e^{-x/\theta}\qquad x>0\ \longrightarrow$$

$$\ln f(x;\theta) = -\ln 6+3\ln x-4\ln\theta-\frac{x}{\theta}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}=-\frac{4}{\theta}+\frac{x}{\theta^{2}}\ \xrightarrow{\partial/\partial\theta}\ \frac{\partial^{2}\ln f(x;\theta)}{\partial\theta^{2}}=\frac{4}{\theta^{2}}-\frac{2x}{\theta^{3}}$$

$$\Longrightarrow\ I(\theta)=-\mathop{\mathbb{E}}_{x}\left\{\frac{\partial^{2}\ln f(x;\theta)}{\partial\theta^{2}}\right\}=-\mathop{\mathbb{E}}_{x}\left\{\frac{4}{\theta^{2}}-\frac{2x}{\theta^{3}}\right\}=$$

$$=2\frac{\mathbb{E}\{x\}}{\theta^{3}}-\frac{4}{\theta^{2}}=\frac{2(4\theta)}{\theta^{3}}-\frac{4}{\theta^{2}}=\frac{4}{\theta^{2}}$$

(ب

$$f(x_1-x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\ \xrightarrow{\ln}$$

$$\ln f(x_1-x_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)\ \xrightarrow{\partial/\partial\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}-4\ln\theta-\frac{x_i}{\theta}\right)=0$$

$$\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{4}{\theta}+\frac{x_i}{\theta^{2}}\right)=0\longrightarrow\frac{4n}{\theta}=\frac{\sum x_i}{\theta^{2}}\longrightarrow 4n\theta=\sum x_i\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\hat\theta_{mL}=\frac{\sum x_i}{4n}\ \rightsquigarrow\ \mathbb{E}\{\hat\theta_{mL}\}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{x_i\}}{4n}=\frac{n\,\mathbb{E}\{x_1\}}{4n}$$

$=\frac{4\theta}{4}=\theta\longrightarrow$ $\hat\theta_{mL}$ بدون بایاس است.

$$Var(\hat\theta_{mL})=\frac{1}{(4n)^{2}}\sum_{i=1}^{n}Var(x_i)=\frac{1}{16n^{2}}\times(n\cdot4\theta^{2})=\frac{\theta^{2}}{4n}$$

می دانیم که وقتی سمپل‌ها iid اند $\ln f(x_1 \dots x_n;\theta)$ جمعی می شود چرا که

$$f(x_1 \dots x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \longrightarrow \ln f(x_1 \dots x_n;\theta) = \sum \ln f(x_i;\theta)$$

← با مشتق گیری هم حالت جمعی داریم و با E گرفتن داریم که ،

$$I_n(\hat\theta_{ml}) = n \cdot I_1(\hat\theta_{ml}) \longrightarrow I_n(\hat\theta_{ml}) = \frac{4n}{\theta^2}$$

← برای n سمپل

← برای ۱ سمپل

و طبق باند کرامر رائو داریم که ،

$$\forall \hat\theta ,\quad Var(\hat\theta) \geq 1/I_n(\theta)$$

$I_n(\theta) = \frac{4n}{\theta^2}$ داریم که $1/I_n(\theta) = \frac{\theta^2}{4n}$ و واریانس هم همان است

⟸ این تخمینگر کارا است.

۶- ۳. داریم که ،

① $$P(X_1 \dots X_n;P) = P^{\sum x_i}(1-P)^{n-\sum x_i} =$$

$$(1-P)^n \cdot \left(\frac{P}{1-P}\right)^{\sum x_i} = \underbrace{(1-P)^n \exp\left(\left(\ln\frac{P}{1-P}\right)\overset{T(x)}{\sum x_i}\right)}_{g(T(x);\theta)} \times \underbrace{1}_{h(x)}$$

طبق قضیه نیمن فیشر داریم که $T(\underline{x}) = \sum x_i$ آماره کافی ما است.

② ساده ترین فکری که برای تخمین واریانس داریم، گرفتن واریانس نمونه‌ای است:

$$\left(\left(X_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right) = 2\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)^2$$

حالا می خواهیم ببینیم که آیا این تخمین گر بدون بایاس است یا خیر:

$$2\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2\right\} = 2\mathbb{E}\left\{\frac{X_1^2+X_2^2-2X_1X_2}{4}\right\} = \frac{4(p(1-p)+p^2)-4(p)(p)}{4} =$$

$$p(1-p)+p^2-p^2 = p(1-p) \longrightarrow$$ بدون بایاس است.

← واریانس نمونه‌ای تخمین‌گر بدون بایاس برای Var است.

(۳) از الف بدست آمد که $T(x)=\sum x_i$ و از ب یک تخمین گر بدون بایاس داریم، حالا با استفاده از قضیه رائو بلک ول یک تخمینگر بهتر می خواهیم پیدا کنیم،

$$\hat{\theta} = \underset{\theta|T}{\mathbb{E}}\{\check{\theta} \mid T(x)\} \quad , \quad p(X_1=x_1, X_2=x_2 \mid \overset{T(x)}{S}=k) = \frac{\binom{n-2}{k-(x_1+x_2)}}{\binom{n}{k}}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \mathbb{E}\left\{2\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \mid S=k\right\} = \sum_{x_1=0}^{1}\sum_{x_2=0}^{1} 2\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \frac{\binom{n-2}{k-x_1-x_2}}{\binom{n}{k}} =$$

$$\frac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\cancel{\frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}}}{\cancel{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \Rightarrow \hat{\theta}(k) = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

حالا خواهیم داشت که:

$$\hat{\theta}(S) = \frac{S(n-S)}{n(n-1)} = \frac{S}{n}\,\frac{n-S}{n-1} = \frac{S}{n}\cdot\frac{n-S}{n}\cdot\frac{n}{n-1} =$$

$$\frac{n}{n-1}\left(\overset{\hat{p}}{\frac{S}{n}}\right)\left(1-\frac{S}{n}\right) = \frac{n}{n-1}\hat{p}(1-\hat{p})$$

ب) (۱) داریم که $X_1 \_\_ X_n$ متغیرهای تصادفی iid از توزیع $Exp(\lambda)$ هستند، در نتیجه داریم که

$$P(X_1 \_\_ X_n ; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \underbrace{\lambda^n e^{-\lambda \overset{T(x)}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}}_{g(T(x);\lambda)} \times \underbrace{1}_{h(x)}$$

← طبق قضیه نیمن فیشر $T(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i$ یک آماره کافی برای λ است.

Scanned with CamScanner

۲) می دانیم که میانگین توزیع نمایی با پارامتر λ عبارت است از $\frac{1}{\lambda}$ ، داریم که،
برآورد میانگین بر اساس X_1 ، خود X_1 می گیریم و بدون بایاس است چراکه داریم،

$$\mu = E\{X_i\} = E\{X_1\} = \frac{1}{\lambda} \checkmark$$

حالا می خواهیم قضیه رائو بلک ول را استفاده کنیم، خواهیم داشت که،

$T = X_1 + \cdots + X_n$ ، چون $X_1 \cdots X_n$ به صورت iid اند، خواهیم داشت که،

$$E\{X_1|T=\tau\} = E\{X_2|T=\tau\} = \cdots = E\{X_n|T=\tau\}$$

$$\Rightarrow E\{X_1 + \cdots + X_n|T=\tau\} = n\,E\{X_1|T=\tau\} \Rightarrow$$

$$E\{X_1|T=\tau\} = \frac{1}{n} E\{T|T=\tau\} = \frac{\tau}{n} \Rightarrow$$

$$E\{X_1|T\} = \frac{T}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \longrightarrow$$ به میانگین نمونه ای رسیدیم.

۳) حالا می خواهیم واریانس ها را مقایسه کنیم، داریم که:

$$Var(X_1) = \frac{1}{\lambda^2} \longleftarrow$$ تخمین گر اولی

برای T داریم که جمع یک سری exp مستقل و هم توزیع است ← $Gamma(n, rate=\lambda)$

$$\Rightarrow Var(T) = \frac{n}{\lambda^2} \Longrightarrow var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{n\lambda^2}$$

← واریانس تخمین گر بهبود یافته $\frac{1}{n\lambda^2}$ است ولی در حالت عادی $\frac{1}{\lambda^2}$ بود واریانس حال.

۷

داریم که $Y_i = \begin{cases} 0 & \text{with prob } 1-\theta \\ X_i & \text{with prob } \theta \end{cases}$, $X_i \sim \exp(\beta)$ ، حالا می‌توانیم بنویسیم که،

$$Y_i = Z_i X_i \quad \text{where } Z_i \sim Bern(\theta), \; X_i \sim \exp(\beta) \;, \; Z_i \perp X_i$$

حالا داریم که،

$$P(Y_i = 0) = P(Z_i = 0) = 1-\theta$$
$$P(Y_i > 0) = P(Z_i = 1) = \theta \quad , \quad Y_i \mid Y_i > 0 \sim Exp(\beta)$$

حالا باز داریم که،

$$N_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{Y_i = 0\}$$
$$N_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{Y_i > 0\} = n - N_0$$
$$S_+ = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \mathbb{1}\{Y_i > 0\}$$

۱) داریم که برای یک Y_i مشخص،

$$f_{Y_i}(y|\theta) = P(Y_i = y \mid Y_i > 0) P(Y_i > 0) = \beta e^{-\beta y} \cdot \theta \qquad y > 0$$

$$\Rightarrow f_{Y_i}(y|\theta) = \begin{cases} 1-\theta & y = 0 \\ \theta\beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \Rightarrow f_{Y_i}(y|\theta) = (1-\theta)\mathbb{1}_{\{y=0\}} + (\theta\beta e^{-\beta y})\mathbb{1}_{\{y>0\}}$$

حالا برای $f(Y_1 — Y_n|\theta)$ داریم که،

$$f(y_1 — y_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\theta) = (1-\theta)^{N_0} \prod_{i, y_i > 0} \theta\beta e^{-\beta y_i} =$$

← اونجاهایی که Y_i صفره

$$(1-\theta)^{N_0} (\theta\beta)^{n-N_0} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} y_i} = (1-\theta)^{N_0} (\theta\beta)^{N_+} \exp(-\beta S_+)$$

$$= \underbrace{(1-\theta)^{N_0} \theta^{N_+}}_{g(N_0, N_+; \theta)} \underbrace{\beta^{N_+} \exp(-\beta S_+)}_{h(N_+, S_+)}$$

می‌توانیم N_0 هم فقط بگیریم چون $N_+ = n - N_0$

طبق قضیه تفکیک نیمن فیشر داریم که N_0, N_+، آماره‌های کافی ما هستند.

Scanned with CamScanner

ب) برای اینکه ببینیم یک آماره کافی مینیمال و کافی است کافیه برای مینیمال بودن چک کنیم که،

$$\frac{f(y|\theta)}{f(y'|\theta)} \text{ is dependent on } \theta \text{ iff } T(y) \neq T(y')$$

$T(y)=T(y') \leftrightarrow$ یا به عبارتی مستقل از θ است

پس داریم که،

$$\frac{f(y|\theta)}{f(y'|\theta)} = \frac{(1-\theta)^{N_0(y)}\ \theta^{N_+(y)}\ \beta^{N_+(y)}\ e^{-\beta S_+(y)}}{(1-\theta)^{N_0(y')}\ \theta^{N_+(y')}\ \beta^{N_+(y')}\ e^{-\beta S_+(y')}} =$$

برای اینکه ترم مان به θ وابستگی نداشته باشد، باید داشته باشیم که،

$$\boxed{N_0(y) = N_0(y')\ ,\ N_+(y) = N_+(y')}$$

$\Rightarrow$ شرط آماره مینیمال برقرار است از طرفی کافی بودن این آماره در بخش آ هم اثبات شد $\Rightarrow$ آماره مان مینیمال و کافی است.

ج) همان طور که بدست آمده است داریم که،

$$f(y_1 — y_n|\theta) = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{N_0}\ \theta^{n}\ e^{-\beta S_+}\ \beta^{N_+} \rightarrow$$

ما اگر N_0 را بدانیم، هیچ اطلاعات اضافه‌ای S_+ به ما نمی‌دهد چراکه اگر در نظر بگیریم

$$\frac{f(y_1 — y_n|\theta)}{f(y'_1 — y'_n|\theta)} = \frac{\cancel{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{N_0}}\ \cancel{\theta^{n}}\ e^{-\beta S_+}\ \cancel{\beta^{N_+}}}{\cancel{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{N_0}}\ \cancel{\theta^{n}}\ e^{-\beta S'_+}\ \cancel{\beta^{N_+}}}$$

به شرطی که N_0 ثابت باشد در هر دو

تقسیم این دو تابع با S_+ و S'_+ هیچ وابستگی به θ ندارد یعنی ما هر S_+ ای بذاریم اطلاعات جدید نسبت به θ نمی‌دهد و فقط داره راجب نسبت نسبت چگالی سمپل ها اطلاعات بهمون میده.

د) داریم که، $Var(N_+) = \mathbb{E}\{N_+^2\} - \mathbb{E}\{N_+\}^2 = n\theta(1-\theta)$

$$\mathbb{E}\{N_+\} = n\theta \longrightarrow$$

$$\mathbb{E}\{N_+^2\} - n^2\theta^2 = \underbrace{n\theta}_{\mathbb{E}\{N_+\}} - n\theta^2 \longrightarrow$$

$$\mathbb{E}\{N_+^2 - N_+\} = n^2\theta^2 - n\theta^2 = n\theta^2(n-1) \longrightarrow$$

$$\theta^2 = \frac{\mathbb{E}\{N_+^2 - N_+\}}{n(n-1)} = \mathbb{E}\left\{\frac{N_+^2 - N_+}{n(n-1)}\right\}$$

حالا تخمین که θ^2 را $\frac{N_+^2 - N_+}{n(n-1)}$ بگیریم، $\mathbb{E}$ آن خود θ^2 خواهد بود ⟵ بدون بایاس است، حالا داریم که $N_+ = n - N_0$ ⟸ داریم،

$$\boxed{\hat{(\theta^2)} = \frac{(n-N_0)^2 - (n-N_0)}{n(n-1)}}$$

حالا فیشر را برای برنولی حساب می‌کنیم، داریم که،

$$f_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} \longrightarrow \ln P(x;\theta) = x\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta) \xrightarrow{\partial/\partial\theta}$$

$$\frac{\partial \ln P(x;\theta)}{\partial\theta} = \underbrace{\frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta}}_{\frac{x-\theta}{\theta(1-\theta)}} \longrightarrow I(\theta) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \ln P(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right\} =$$

$$\mathbb{E}\left\{\frac{x^2 - 2\theta x + \theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\right\} = \frac{\theta^2 + \theta(1-\theta) - \theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

حالا n تا برنولی مستقل داریم ⟵ فیشر ها با هم جمع می‌شوند ⟸ $\frac{n}{\theta(1-\theta)}$

طبق کرامر، $Var(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$ که $g(\theta) = \theta^2$ ←

$$\forall \hat{\theta} \text{ ، } Var(\hat{\theta^2}) \geq \frac{4\theta^2}{I_n(\theta)} = \frac{4\theta^3(1-\theta)}{n}$$

حالا یک تخمین‌گر بدون بایاس باید بدهیم که به این باند برسد:

۸- داریم که:

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$ with known σ^2, $g(\mu) = \|\mu\|^2$

آ) حالا می‌خواهیم نشان دهیم که $\bar{X}$ و S آماره کافی و کامل برای μ هستند:

$$f(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{P/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x_i - \mu\|^2\right) = (2\pi\sigma^2)^{-nP/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - \mu\|^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i - \mu\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i - \bar{x}\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\|\bar{x} - \mu\|^2 + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^T(\bar{x} - \mu)}_{0}$$

$$= n\|\bar{x} - \mu\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\|x_i - \bar{x}\|^2 \Longrightarrow$$

$$f(x_1, \ldots, x_n; \mu) = (2\pi\sigma^2)^{-nP/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\|\bar{x} - \mu\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\|x_i - \bar{x}\|^2\right)\right)$$

$$= \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-nP/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - \bar{x}\|^2\right)}_{h(x)} \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} n \|\underbrace{\boxed{\bar{x}}}_{T(X)} - \mu\|^2\right)}_{g(T(x);\mu)}$$

طبق قضیه‌ی نیمن فیشر ← $T(x)$ یک آماره‌ی کافی است، برای دانستن μ.

حالا باید کامل بودن آن را اثبات کنیم. می‌دانیم که خانواده‌ی نمایی شامل توزیع گاوسی نیز می‌شود ⟸ و برای خانواده نمایی آماره‌ی مینیمال کافی همان آماره‌ی کامل کافی است ⟸ کافیه نشون بدیم این آماره مینیمال است،

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_n; \mu)}{f(Y_1, \ldots, Y_n; \mu)} = \frac{h(x) \exp\left(-\frac{n_x}{2\sigma^2}\|\bar{x} - \mu\|^2\right)}{h(y) \exp\left(-\frac{n_y}{2\sigma^2}\|\bar{Y} - \mu\|^2\right)} \Longleftrightarrow$$

~~مستقل~~

مستقل از μ است اگر و تنها اگر $\bar{Y} = \bar{X}$ برقرار باشد (تعداد شون برابر باشه $n_y = n_x$)

← این آماره‌ی مینیمال کافی است ← کامل و کافی است.

ب)

$$Q = \|X_1\|^2 - p\sigma^2 = \sum_{j=1}^{p} x_{1j}^2 - p\sigma^2 \longrightarrow$$

$$\mathbb{E}\{Q\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^{p} x_{1j}^2\right\} - p\sigma^2 = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}\{x_{1j}^2\} - p\sigma^2$$

$$= \sum_{j=1}^{p}(\mu_j^2 + \sigma^2) - p\sigma^2 = \sum_{j=1}^{p} \mu_j^2 = \|\mu\|^2$$

ج)

$$\hat{g} = \mathbb{E}\{Q \mid \bar{X}, s\}$$

$\bar{X}$ آماره کافی است

و Q هم یک تخمینگر بدون بایاس است ← اولی که قضیه رائو-بلک‌ول استفاده کنیم،

$$\mathbb{E}\{Q \mid \bar{X}, s\} = \mathbb{E}\{\|X_1\| - p\sigma^2 \mid \bar{X}, s\} =$$

$$\mathbb{E}\{\|X_1\|^2 \mid \bar{X}, s\} - p\sigma^2 = \|\mathbb{E}\{X_1 \mid \bar{X}, s\}\|^2 + var(X_1 \mid \bar{X}, s) =$$

$$\|\bar{X}\|^2 + var(X_1 \mid \bar{X}, s), \quad var(X_1 \mid \bar{X}, s) = \frac{(n-1)X_1 - \sum_{i \neq 1} X_i}{n}$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} \|X_i - \bar{X}\|^2,$$

$$var(X_1 - \bar{X}) = var(X_1) + var(\bar{X}) - 2cov(X_1, \bar{X}) =$$

$$\sigma^2 I_p + \frac{\sigma^2}{n} I_p - 2\frac{\sigma^2}{n} I_p = \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) I_p = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} I_p$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{\|X_1 - \bar{X}\|^2\} = tr(var(X_1 - \bar{X})) = p\,\frac{(n-1)\sigma^2}{n},$$

چونکه $\mathbb{E}\{X_1 \mid \bar{X}, s\} = \bar{X}$ را داریم ⇐

$$\mathbb{E}\{\|X_1\|^2 \mid \bar{X}, s\} = \|\bar{X}\|^2 + \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$$

Scanned with CamScanner

$$\rightarrow \hat{g} = E\{Q \mid \bar{X}, S\} = \|\bar{X}\|^2 - \frac{p\sigma^2}{n}$$

د)

$$Q = \|X_1\|^2 - p\sigma^2 \,, \quad var(Q) = var(\|X_1\|^2) \,, \quad X_1 \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$$

$$\Rightarrow var(Q) = var(\|X_1\|^2) = 2p\sigma^2 + 4\sigma^2\|\mu\|^2$$

$$var(\hat{g}) = var(\|\bar{X}\|^2) \,, \quad \bar{X} \sim N_p(\mu, \frac{\sigma^2}{n} I_p) \rightarrow$$

$$\Rightarrow var(\hat{g}) = var(\|\bar{X}\|^2) = 2p\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)\|\mu\|^2 = \frac{2p\sigma^4}{n^2} + \frac{4\sigma^2\|\mu\|^2}{n}$$

$\Leftarrow$ پس داریم که

$$var(\hat{g}) < var(Q)$$

ه) آمارهٔ ما کافی بودن ← طبق قضیه RBLS داریم که $\hat{g}$ ، تخمین‌گر UMVUE است برای $\|\mu\|^2$ و داریم که

$$I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}$$

$$\rightarrow var(\hat{g}) \geq \frac{(g'(\mu))^2}{I(\mu)} = \frac{(2\mu)^2}{n/\sigma^2} = \frac{4\mu^2\sigma^2}{n} \,,$$

$$var(\hat{g}) = \frac{4\sigma^2\mu^2}{n} + \frac{2\sigma^4}{n^2} \qquad \text{for } p=1$$

← در حد ترم $\frac{2\sigma^4}{n^2}$ به صفر میل می‌کند ⇐ در حالت مجانبی $var(\hat{g})^{p=1}$ به کران کرامر رائو می‌رسد.

Scanned with CamScanner

۹- داریم که،

$$f_\theta(x) = \frac{\Gamma(2\theta)}{\Gamma(\theta)^2} x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1} \qquad 0<x<1\,,\ \theta>0$$

$$L_i = \ln X_i\,,\quad R_i = \ln(1-X_i) \qquad \overline{L+R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L_i+R_i)$$

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)\,,\qquad \Psi_1(x) = \frac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x)$$

آ) داریم که،

$$\ln f(x;\theta) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(2\theta)}{\Gamma(\theta)^2}\, x_i^{\theta-1}(1-x_i)^{\theta-1}\right) =$$

$$n\ln\frac{\Gamma(2\theta)}{\Gamma(\theta)^2} + (\theta-1)\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i + \ln 1-x_i)\right) =$$

$$n\left[\ln\Gamma(2\theta) - 2\ln\Gamma(\theta)\right] + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + \ln 1-x_i =$$

$$n\left[\ln\Gamma(2\theta) - 2\ln\Gamma(\theta)\right] + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}(L_i+R_i)$$

حالا مشتق این عبارت را می‌گیریم، خواهیم داشت که،

$$\frac{d}{d\theta}\left(\ln f(x;\theta)\right) = n\Big(\underbrace{\frac{d}{d\theta}\ln\Gamma(2\theta)}_{\Psi(2\theta)} - 2\underbrace{\frac{d}{d\theta}\ln\Gamma(\theta)}_{\Psi(\theta)}\Big) + \sum_{i=1}^{n}(L_i+R_i)$$

$$\Longrightarrow \ell_n'(\theta) = n\left(\Psi(2\theta) - 2\Psi(\theta)\right) + \sum_{i=1}^{n}(L_i+R_i)$$

ب) برای نشان دادن تزولی بودن $\ell_n'(\theta)$ باید مشتق آن را نشان دهیم که منفی است.

$$\ell_n''(\theta) = 2n\left(\Psi'(2\theta) - \Psi'(\theta)\right),$$ و داریم که trigamma تابعی اکیدا نزولی است

پس $\Psi'(2\theta) - \Psi'(\theta)$ برای $\theta>0$ منفی خواهد بود.

← حالا که الگ ~~...~~ ترولی پس ماکزیمم آن در $\theta \to 0^+$ اتفاق می‌افتد.
در بازه $(0,+\infty)$

جواب تغییر لگ ml نیز عبارت است از :

$$n\left(\psi(2\theta)-2\psi(\theta)\right)+\sum_{i=1}^{n}(L_i+R_i)=0 \longrightarrow$$

$$\psi(2\theta)-2\psi(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L_i+R_i)=-\overline{L+R}$$

← تنها جواب یکتای مال است.

ج) از Consistency mle داریم که :

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0 .$$

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left\{\ell_n'(\theta_0)\right\}=n\left(\psi(2\theta_0)-2\psi(\theta_0)\right)+n\,\mathbb{E}_{\theta_0}\left\{L_i+R_i\right\}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i+R_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{\theta_0}\left[L_i+R_i\right]$$

← $\hat{\theta}_n$ به جواب $\mathbb{E}_{\theta_0}\{\ell_n'(\theta)\}=0$ که θ_0 است میرسیم.

د) از mle داریم که :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\approx\frac{\sqrt{n}\,\ell_n'(\theta_0)}{-\ell_n''(\theta_0)}$$ قضیه حد مرکزی

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ell_n'(\theta_0)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,I(\theta_0)\right)$$

$$I(\theta_0)=\mathrm{Var}_{\theta_0}\left[\ell_1'(\theta_0)\right]=\psi'(2\theta_0)\pm2\psi'(\theta_0)$$

با استفاده از قانون اعداد بزرگ

$$-\frac{1}{n}\ell_n''(\theta_0)\xrightarrow{P}I(\theta_0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,\ I(\theta_0)^{-1}\right)$$

ه)

$$\mathbb{E}\{X_i\} = \frac{1}{2}\ ,\quad Var(X_i) = \frac{1}{4(2\theta_0+1)}$$

$$V_n \approx \frac{1}{4(2\theta+1)} \longrightarrow \tilde{\theta}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4V_n} - 1\right) .$$

$$\text{CLT:}\ \sqrt{n}\left(V_n - \mathbb{E}\{V_n\}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,\ Var\left((X_i - \tfrac{1}{2})^2\right)\right)$$

$$Var\left((X_i - \tfrac{1}{2})^2\right) = \mathbb{E}\left\{(X_i - \tfrac{1}{2})^4\right\} - \mathbb{E}\left\{(X_i - \tfrac{1}{2})^2\right\}^2 = \frac{1}{32(2\theta_0+1)^3}$$

$\rightsquigarrow$ تعریف: $g(V_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4V_n} - 1\right) \rightarrow g'(V_n) = -\frac{1}{8V_n^2}\ ,$

$$\cancel{g(V_n)}\ g'(\mathbb{E}\{V_n\}) = \frac{-1}{8\left(\frac{1}{4(2\theta_0+1)}\right)^2} = -2(2\theta_0+1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\tilde{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,\ (-2(2\theta_0+1))^2 \cdot \frac{1}{32(2\theta_0+1)^3}\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{128(2\theta_0+1)^3}\right)$$

و)

$$\text{MLE:}\quad Var(\hat{\theta}_n) = \left[\psi'(2\theta_0) - 2\psi'(\theta_0)\right]^{-1}$$

$$\text{MOM:}\quad Var(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{128(2\theta_0+1)^3}$$

باید نشان دهیم که

$Var(\hat{\theta}_n) < Var(\tilde{\theta}_n)$ یا به عبارتی

$$\psi'(2\theta_0) - 2\psi'(\theta_0) > 128(2\theta_0+1)^3 \longrightarrow$$

به ازای هر $\theta_0 > 0$ این رابطه باید برقرار باشد.

۱۰- آ) داریم که،

$$L(\alpha, \beta) = \left[\prod_{i=1}^{N} \lambda(T_i; \alpha, \beta)\right] \exp\left(-\int_0^T \lambda(s; \alpha, \beta) ds\right)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N} \alpha e^{\beta T_i}\right] \exp\left(-\int_0^T \alpha e^{\beta s} ds\right), \quad \int_0^T \alpha e^{\beta s} ds = \alpha\left(\frac{e^{\beta T}-1}{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow l(\alpha, \beta) = \alpha^N e^{\beta \sum_{i=1}^{N} T_i} \exp\left(-\alpha \frac{e^{\beta T}-1}{\beta}\right) \quad \text{if } \beta \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln L(\alpha, \beta) = N \log \alpha + \beta \sum_{i=1}^{N} T_i - \alpha \frac{e^{\beta T}-1}{\beta}$$

حالا قرار می‌دهیم $\theta = \ln \alpha$ ، خواهیم داشت که،

$$\ln L(\theta, \beta) = N\theta + \beta \sum_{i=1}^{N} T_i - e^{\theta} \frac{e^{\beta T}-1}{\beta}$$

حالا باید بررسی کنیم که چرا strictly concave است،

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \beta)}{\partial \theta} = N - e^{\theta} \underbrace{\left(\frac{e^{\beta T}-1}{\beta}\right)}_{A(\beta)}$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{N} T_i - e^{\theta}\left(\frac{\beta T e^{\beta T} - (e^{\beta T}-1)}{\beta^2}\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} T_i\right) - e^{\theta} \underbrace{\frac{1 + e^{\beta T}(\beta T - 1)}{\beta^2}}_{A'(\beta)}$$

حالا باز مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت که،

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta, \beta)}{\partial \theta^2} = -e^{\theta} A(\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta, \beta)}{\partial \theta \partial \beta} = -e^{\theta} A'(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \ln L(\theta, \beta)}{\partial \beta^2} = A''(\beta)$$

$$\Rightarrow H = -e^{\theta}\begin{bmatrix} A(\beta) & A'(\beta) \\ A'(\beta) & A''(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\det(H) = \left(-e^{\theta}\,\frac{e^{\beta T}-1}{\beta}\right)\left(\frac{e^{\theta}}{\beta^{3}}\left(2(e^{\beta T}-1)-2\beta T e^{\beta T}+\beta^{2}T^{2}e^{\beta T}\right)\right) -$$

$$\left(-\frac{e^{\theta}}{\beta^{2}}\left(\beta T e^{\beta T}-(e^{\beta T}-1)\right)\right)^{2} = \frac{e^{2\theta}}{\beta^{4}}\left\{e^{\beta T}\left(\underbrace{e^{\beta T}-1-\beta T}\right)\right\} > 0$$

می دانیم که همواره $e^{\beta T} > 1+\beta T$ برقرار است.

از طرفی هم داریم که $\frac{\partial^{2}\ell}{\partial\theta^{2}}$ عبارتی منفی است به ازای $\beta \neq 0$ $\Leftarrow$ ماتریس H strictly concave است.

ب) داریم که،

$$\ell(\alpha,\beta) = N\ln\alpha + \beta\sum_{i=1}^{N}T_i - \frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta T}-1\right)$$

حالا به α و β هر سری مشتق می‌گیریم به ترتیب،

$$\frac{N}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\left(e^{\beta T}-1\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \frac{N\beta}{e^{\beta T}-1}}$$

$$\Rightarrow N\ln\left(\frac{N\beta}{e^{\beta T}-1}\right) + \beta\sum_{i=1}^{N}T_i - \frac{N\beta}{e^{\beta T}-1}\left(e^{\beta T}-1\right) \xrightarrow{\partial/\partial\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(N\ln(N\beta) - N\ln(e^{\beta T}-1) + \beta\sum_{i=1}^{N}T_i - N\beta\right) =$$

$$\frac{N}{\beta} - N\left(\frac{Te^{\beta T}}{e^{\beta T}-1}\right) + \sum_{i=1}^{N}T_i - N = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}T_i = \frac{Te^{\beta T}}{e^{\beta T}-1} - \frac{1}{\beta} = T + \frac{1}{e^{\beta T}-1} - \frac{1}{\beta}$$

$$\longrightarrow \boxed{T - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}T_i = \frac{1}{e^{\beta T}-1} - \frac{1}{\beta}} \longrightarrow$$

جواب این معادله $\hat{\beta}_{ml}$ را به ما می‌دهد.

از آنجایی که strictly concave بودیم تنها یک جواب برای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ پیدا می‌شود

← $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ یکتا هستند.

ج) می‌خواهیم ماتریس فیشر را بدست آوریم داریم که:

$$I(\alpha,\beta;T) = -\mathbb{E}\{H\}$$

$$\mathbb{E}\{N\} = \int_0^T \alpha e^{\beta t} dt = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta T}-1)$$

$N = N_T$

$$I_{11} = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2}\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{N}{\alpha^2}\right\} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta T}-1) = \frac{e^{\beta T}-1}{\alpha\beta}$$

$$I_{22} = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2}\right\} = \frac{\alpha}{\beta^3}\left(2(e^{\beta T}-1) - 2\beta T e^{\beta T} + \beta^2 T^2 e^{\beta T}\right)$$

$$I_{12} = I_{21} = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right\} = \frac{1}{\beta^2}\left(\beta T e^{\beta T} - (e^{\beta T}-1)\right) \xrightarrow{T\to\infty}$$

وقتی $T\to\infty$ طبق شرایط regularity، mle ها consistent است،

$$\sqrt{T}\left(\hat{\alpha}_T-\alpha, \hat{\beta}_T-\beta\right) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, I(\alpha,\beta)^{-1}\right)$$

← وقتی که $T\to\infty$، عبارت بالا اتفاق می‌افتد.

داریم که ۱۶-

$$P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = \alpha \quad , \quad \alpha \in (0,1)$$

$$X|Y=0 \sim N(0,\sigma^2) \qquad X|Y=1 \sim N(\mu,\sigma^2)$$

آ) توزیع شرطی Y به شرط X را می‌خواهیم،

$$P(Y=1|X=x) = \frac{P(Y=1, X=x)}{f_X(x)} = \frac{P(Y=1)\, f_{X|Y=1}(x)}{P(Y=1)\, f_{X|Y=1}(x) + P(Y=0)\, f_{X|Y=0}(x)}$$

$$= \frac{(1-\alpha)\cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}{(1-\alpha)\cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) + \alpha \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)} =$$

$$\frac{\cancel{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)} \left((1-\alpha)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2-2x\mu)\right)\right)}{\cancel{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)} \left((1-\alpha)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2-2x\mu)\right)\right) + \alpha} =$$

$$1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2-2x\mu)\right) + \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + (1-\alpha)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2-2\mu x)\right)}$$

ب) می‌خواهیم mle بزنیم و $\hat{\alpha}_n$ و $\hat{\mu}_n$ ، $\hat{\sigma}^2_n$ را بدست آوریم،

داریم که:

$$f_{X|Y}(x_i|y_i) = \mathbb{I}(Y_i=1)\, N(\mu,\sigma^2) + \mathbb{I}(Y_i=0)\, N(0,\sigma^2)$$

حالا خواهیم داشت که این را به فرم $N(Y_i\mu, \sigma^2)$ می‌توانیم بنویسیم ⇐

$$P(X_1 \ldots X_n, Y_1 \ldots Y_n; params) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, Y_i; params) =$$

$$f_{X|Y}(X_i|Y_i)\, f_Y(Y_i)$$

$$(1-\alpha)^{Y_i}\, \alpha^{1-Y_i}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - Y_i\mu)^2\right) f_Y(Y_i) \Rightarrow \ln P(x_1 \ldots x_n, Y_1 \ldots Y_n; params) =$$

$$\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - Y_i\mu)^2 + \sum_i Y_i \ln(1-\alpha) + \sum_i (1-Y_i)\ln\alpha$$

$$= \frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i\mu)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(1-\alpha) + \ln(\alpha)\sum_{i=1}^{n}(1-y_i)$$

$$\xrightarrow{\partial/\partial\alpha} -\frac{\sum y_i}{1-\alpha} + \frac{\sum 1-y_i}{\alpha} \to -\left(\frac{\sum y_i}{\alpha} + \frac{\sum y_i}{1-\alpha}\right) + \frac{n}{\alpha} = 0$$

$$\to \frac{\sum y_i}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{n}{\cancel{\alpha}} \to 1-\alpha = \frac{\sum y_i}{n} \to \boxed{\hat{\alpha} = 1 - \frac{\sum y_i}{n}}$$

حالا می‌خواهیم به μ و σ^2 مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم.

$$\partial/\partial\mu \to \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i\mu)y_i = 0 \to \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mu\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \to$$

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}}$$

$\Leftarrow$ حالا به σ^2 مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت که:

$$\frac{n}{2}\left(\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}\sigma^2}\right) - \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{j}\left(x_j - y_i\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\frac{\sum x_j y_j}{\sum y_j^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\frac{\sum x_j y_j}{\sum y_j^2}\right)^2}$$

ج) می‌دانیم که تخمین mle در حالت مجانبی به $N(\mu, I(\theta)^{-1})$ میل می‌کند

μ ها را که داریم، باید $I(\cdot)$ ها را حساب کنیم.

Scanned with CamScanner

برای $\hat{\alpha}$ می خواهیم $I(.)$ حساب کنیم،

$$I(\hat{\alpha}):$$

$$-\mathbb{E}_y\left\{\frac{\partial^2 \ln p(x;\alpha)}{\partial\alpha^2}\right\} = -\mathbb{E}_y\left\{\frac{\sum y_i}{\alpha^2} - \frac{\sum y_i}{(1-\alpha)^2} - \frac{n}{\alpha^2}\right\} =$$

$$-\left(\frac{n(1-\alpha)}{\alpha^2} - \frac{n(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2} - \frac{n}{\alpha^2}\right) = -\left(\frac{n(1-\alpha)}{\alpha^2} - \frac{n}{1-\alpha} - \frac{n}{\alpha^2}\right) =$$

$$-\left(\frac{n}{\alpha^2} - \frac{n}{\alpha} - \frac{n}{1-\alpha} - \frac{n}{\alpha^2}\right) = -\left(-\frac{n}{\alpha} - \frac{n}{1-\alpha}\right) \longrightarrow$$

$$\boxed{I(\hat{\alpha}) = \frac{n}{\alpha(1-\alpha)}} \Longrightarrow \boxed{\hat{\alpha}_{ml} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n}\right)}$$

$$I(\hat{\mu}) = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln p(x;\mu)}{\partial\mu^2}\right\} = -\mathbb{E}\left\{\sum_{i=}^{n} -\frac{y_i^2}{\sigma^2}\right\} = n\,\mathbb{E}\left\{\frac{y_1^2}{\sigma^2}\right\} =$$

$$n\left(\frac{(1-\alpha)^2+(1-\alpha)\alpha}{\sigma^2}\right) = \frac{n(1-\alpha)}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow I(\hat{\mu}) = \frac{n(1-\alpha)}{\sigma^2} \rightarrow \boxed{\hat{\mu}_{ml} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu(1-\alpha), \frac{\sigma^2}{n(1-\alpha)}\right)}$$

$$I(\hat{\sigma^2}) = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i\mu)^2\right)\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{-\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i\mu)^2\right\} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\mathbb{E}\left\{\sum(x_i - y_i\mu)^2\right\}$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\underbrace{x_i^2}_{\alpha\sigma^2 + (1-\alpha)(\mu^2+\sigma^2)} + \underbrace{y_i^2\mu^2}_{\mu^2(1-\alpha)} - \underbrace{2x_i y_i\mu}_{-2\mu(1-\alpha)\mu}\right\}$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{n}{\sigma^6}\left(\alpha\sigma^2 + (1-\alpha)(\mu^2+\sigma^2) + \mu^2(1-\alpha) - 2\mu^2(1-\alpha)\right)$$

$$\Rightarrow \quad I(\hat{\sigma}^{2}) = -\frac{n}{2\sigma^{4}} + \frac{n}{\sigma^{6}}\left(\sigma^{2} + 2\mu^{2}(1-\alpha) - 2\mu^{2}(1-\alpha)\right) \Rightarrow$$

$$I(\hat{\sigma}^{2}) = \frac{n}{2\sigma^{4}} \longrightarrow \boxed{\hat{\sigma}^{2} \overset{a}{\sim} N\left(\sigma^{2}, \frac{2\sigma^{4}}{n}\right)}$$