بنام خدا

علی قاسم زاده 401106239 تمرین دوم فرایند تصادفی

۱- از تعریف اول داریم که،

$$N(0)=0 \;,\; P(N(h)=0)=\underbrace{1-\lambda h+o(h)}_{1-P(N(h)=1)-P(N(h)\geq 2)} \;,\; P(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$$

$$P(N(h)\geq 2)=o(h)$$

حالا داریم که:

$$P_n(t+h)=\sum_{m=0}^{n} P(N(t+h)=n \mid N(t)=n-m)\,P(N(t)=n-m)$$

$$\rightarrow P_n(t+h)=P_n(t)\,P(N(h)=0)+P_{n-1}(t)\,P(N(h)=1)+\sum_{m\geq 2}^{n} P_{n-m}(t)\,P(N(h)=m)$$

$$\Rightarrow P_n(t+h)=P_n(t)[1-\lambda h+o(h)]+P_{n-1}(t)[\lambda h+o(h)]+\sum_{m\geq 2}^{n} P_{n-m}(t)\,o(h)$$

$$\longrightarrow \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\sum_{m\geq 2}^{n} P_{n-m}(t)\,\frac{o(h)}{h}$$

$$\xrightarrow{as\ h\to 0} \frac{d}{dt}P_n(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) \qquad n\geq 1$$

همچنین برای $n=0$ داریم که $\underbrace{\frac{d}{dt}P_0(t)=-\lambda P_0(t)}$ ، داریم که $\underbrace{P_0(0)=1}$

$$\Longrightarrow P_0(t)=e^{-\lambda t}$$ از معادلات دیفرانسیل ؛

حالا به صورت استقرایی بدست می‌آید که $P_n(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$

فرض کنیم به ازای تمام $m<n$ این رابطه برقرار باشد حال می‌خواهیم برای $P_n(t)$ هم نشان دهیم برقرار است.

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = -\lambda\left(P_n(t)\right)+\lambda P_{n-1}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \underbrace{\lambda\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{\lambda P_{n-1}(t)}$$

برای $n=0$ که برقرار است: پایه‌مان هست.

$$\xrightarrow{\times e^{\lambda t}} \quad e^{\lambda t}\frac{d}{dt}P_n(t) + \lambda e^{\lambda t}P_n(t) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \xrightarrow[\text{از 0 تا t}]{\text{انتگرال به t بگیریم}}$$

$$e^{\lambda t}P_n(t) - e^{-\lambda 0}P_n(0) = \lambda\int_0^t e^{\lambda s}P_{n-1}(s)\,ds \qquad , P_n(0)=0$$

$$\longrightarrow e^{\lambda t}P_n(t) = \lambda\int_0^t e^{\lambda s}P_{n-1}(s)\,ds = \lambda\int_0^t \cancel{e^{\lambda s}}\left(\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\cancel{e^{-\lambda s}}\right)ds =$$

$$\lambda^n\int_0^t \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\,ds = \lambda^n \left.\frac{s^n}{n!}\right|_{s=0}^{t} = \frac{\lambda^n t^n}{n!} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\longrightarrow e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \longrightarrow P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

به ازای هر بازه‌ی زمانی t داریم که: $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ که یعنی در هر بازه‌ی زمانی t یا به عبارتی $N(t+s)-N(s)$، توزیع پواسون با پارامتر λt است و می‌دانیم که در توزیع پواسون پارامتر همان میانگین نیز هست $\leftarrow$ $N(t+s)-N(s)$ از یک پواسون با پارامتر λt است.

Scanned with CamScanner

همچنین از def1 داشتیم که $N(0)=0$ و دارای خاصیت Independent Increment هستیم

← دو شرط دیگر def2 نیز برآورده می‌شوند از def1 ←

توانستیم از def1 به def2 برسیم.

حالا باید از def2 نیز به def1 برسیم تا نشان دهیم که این دو معادل اند.

طبق تعریف 2 داریم که،

$$N(t+s)-N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(N(h)=n) = \frac{(\lambda h)^n}{n!} e^{-\lambda h} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\rightarrow P(N(h)=0) = e^{-\lambda h} \overset{\text{بسط تیلور}}{=} 1-\lambda h + \underbrace{\frac{(\lambda h)^2}{2!} - \ldots}$$

این ترم ها از $o(h)$ هستند چراکه حاصل تقسیم‌شان بر h زمانی که $h\to 0$ برابر است با،

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \ldots}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda^2}{2!}h - \frac{\lambda^3}{3!}h^2 + \ldots = 0 \ \checkmark$$

$$\Rightarrow P(N(h)=0) = 1-\lambda h + o(h)$$

همچنین داریم که،

$$P(N(h)=1) = \frac{\lambda h}{1!} e^{-\lambda h} = \lambda h\left(1-\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \ldots\right)$$

$$= \lambda h \underbrace{- (\lambda h)^2 + \frac{(\lambda h)^3}{2!} - \ldots}_{\text{این عبارت از } o(h) \text{ است چراکه،}} = \lambda h + o(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-(\lambda h)^2 + (\lambda h)^3/2! - \ldots}{h} = \lim_{h\to 0} -\lambda^2 h + \frac{\lambda^3}{2!}h^2 - \ldots = 0$$

Scanned with CamScanner

پس داریم که ۱

$$P(N(h)=1) = \lambda h + o(h)$$

حالا برای $N(h) \geq 2$ داریم که ۲

$$P(N(h) \geq 2) = 1 - P(N(h)=0) - P(N(h)=1) =$$

$$1 - (1 - \lambda h + o(h)) - (\lambda h + o(h)) = o(h)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P(N(h)=1) = \lambda h + o(h) \\ P(N(h) \geq 2) = o(h) \end{array}}$$

همچنین در def2 داشتیم که $N(0)=0$ ✓ از طرفی داشتیم که خاصیت Independant increment نیز برقرار است.

فقط باید نشان دهیم که اگر def2 برقرار بود، خاصیت Stationary Increment هم برقرار است،

از بند آخر def2 داریم که $N(t+s) - N(s)$ از توزیع پواسون با پارامتر λt می‌آید به‌ازای هر s,t ای. که این یعنی به‌ازای هر t_2, t_1 که $t_2 > t_1$ باشد، داریم که

$$N(t_2) - N(t_1) = N(t_2 - t_1) = N(t_2 - t_1) - \underbrace{N(0)}_{0}$$

که این هم نتیجه می‌دهد که خاصیت Stationary Increment برقرار است.

$\Leftarrow$ نشان دادیم که اگر تعریف اول برقرار باشد، تعریف دوم نیز برقرار است و برعکس $\leftarrow$ حکم مسئله اثبات می‌شود

Scanned with CamScanner

۲-۱. باید تا لحظه t_1 هیچ arrival ای نداشته باشیم یعنی $N(t_1)=0$ و باید arrival اول بیفتد

بین t_1, t_2 یعنی $t_1 < X_1 < t_2 \leftarrow N(t_2) \geq 1$ معادل هستند

یعنی می‌خواهیم بدست آوریم که :

$$P(N(t_1)=0,\ N(t_2)\geq 1) = P(N(t_1)=0)\,P(N(t_2)\geq 1 \mid N(t_1)=0) =$$

$$\underbrace{P(N(t_1)=0)}_{1-CDF(t_1)}\ \underbrace{P(N(t_2-t_1)\geq 1)}_{CDF(t_2-t_1)} \overset{\text{Stationary Increment خواص}}{=} e^{-\lambda t_1}\cdot\left(1-e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right) =$$

$$e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}$$

۲-۲.

$$P(X_1 < Y_1) = \int_0^{\infty} \underbrace{P(Y_1 > t)}_{\int_t^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u}\,du = e^{-\lambda_2 t}} f_{X_1}(t)\,dt = \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t}\cdot e^{-\lambda_1 t}\,dt$$

$$= \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \Rightarrow P(X_1 < Y_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

و X_1 عبارت است از اولین arrival در فرایند پواسون با پارامتر λ_1 و

Y_1 عبارت است از اولین arrival در فرایند پواسون با پارامتر λ_2.

۲-۳. می‌خواهیم بدست آوریم $P(N_1+N_2=k)$ را ،

$$P(N_1+N_2=k) = (P_{N_1} * P_{N_2})(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t)^i}{i!} e^{-\lambda_1 t}\ \mathbb{1}(i\geq 0)\ \frac{(\lambda_2 t)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2 t}\ \mathbb{1}(k-i\geq 0)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{t^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}\cdot \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} k! \qquad \binom{k}{i}\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$$

$$= \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \qquad \forall t>0,\ k=0,\ldots$$

پس احتمال اینکه در بازه زمانی t، k تا arrival در مجموع داشته باشیم عبارت است از:

$$\frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

۲-۴. باید حساب کنیم:

$$P\left(N_1(t)=n \mid N_1(t)+N_2(t)=n\right) =$$

$$\frac{P(N_1(t)=n,\ N_1(t)+N_2(t)=n)}{P(N_1(t)+N_2(t)=n)} =$$

$$\frac{P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=0)}{P(N_1(t)+N_2(t)=n)} = \frac{P(N_1(t)=n)\,P(N_2(t)=0)}{P(N_1(t)+N_2(t)=n)} =$$

$$\frac{\left(\frac{(\lambda_1 t)^n}{\cancel{n!}} \cancel{e^{-\lambda_1 t}}\right)\left(\cancel{e^{-\lambda_2 t}}\right)}{\frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{\cancel{n!}} \cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}} = \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n$$

۲-۵. در واقع فرض کنیم تا لحظه t، اولی بخواهد N تا arrival داشته باشد و پس از آن اولین arrival دومی زودتر اتفاق بیفتد، که بخش اول می‌شود $N_1(t)+N_2(t)=N$
$N_2(t)=$

و بخش دوم به خاطر خاصیت بدون حافظه بودن می‌شود که انگار از زمان صفر

می خواهیم اولین arrival دومی زودتر از اولین arrival اولی باشد.

$Y_1 < X_1$

و این دو بخش از همدیگر مستقل اند ← خواهیم داشت که،

$$\underbrace{P(N_1(t)+N_2(t)=N,\ N_1(t)=N)}\ \underbrace{P(Y_1<X_1)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^N \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

بخش قبلی بدست آمد ← $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^N$.

مشابه بخش های قبلی فقط با کمی تفاوت $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ می شود

به ازای N که تعداد failure های دومی می تواند باشد، خواهیم داشت که

$$Geom(N=n) = \left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}_{1-p}\right)^N \left(\underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}_{p}\right) = (1-p)^N p \qquad n=0,\ldots$$

← از توزیع Geom میاد.

۲-۶. برای t_n متغیر تصادفی $unif(0,t)$ که $U_1 \ldots U_n$ هستند و $U_1 < \cdots < U_n$ برقرار است، توزیع توامان شان عبارت است از:

$$f_{U_1,\ldots,U_n}(u_1,\ldots,u_n) = \frac{n!}{t^n} \qquad 0<u_1<\cdots<u_n<t$$

داریم که با فرض اینکه در $t_1 \ldots t_n$ اتفاق ها افتاده باشند خواهیم داشت که،

$$f_{s_1,\ldots,s_n}(s_1,\ldots,s_n) = \underbrace{f_{s_1,s_2}(s_1,s_2)}_{f_{s_1}(s_1)f_{s_2|s_1}(s_2|s_1)} \underbrace{f_{s_3|s_2,s_1}(s_3|s_2,s_1)}_{f_{s_3|s_2}(s_3|s_2)} = \lambda^n e^{-\lambda s_n} u(s_1)u(s_2-s_1)\cancel{\ } u(s_3-s_2)\cdots u(s_n-s_{n-1})$$

$$\Rightarrow \lambda^n e^{-\lambda s_n}$$

با فرض $0<s_1<s_2<\cdots<s_n<t$

همچنین از زمان s_n تا t هم نباید arrival داشته باشیم و چون مستقل است نسبت به حالت فعلی ← خواهیم داشت که

$$\lambda^n e^{-\lambda s_n} \cdot \left(e^{-\lambda(t-s_n)}\right) = \lambda^n e^{-\lambda t}$$

حالا خواهیم داشت که: به شرط اینکه n تا رویداد در فرایند در بازه $[0,t]$ رخ داده باشد

زمان‌های ورود به عنوان order statistics یک متغیر تصادفی مستقل $Unif(0,t)$ توزیع می‌شود

$$\rightarrow \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n} \rightarrow$$

$P(N(t)=n)$

زمان‌های ورودی به عنوان ordered statistics یک متغیر تصادفی مستقل $Unif(0,t)$ توزیع می‌شوند.

۳-۱. باید داشته باشیم که احتمال اینکه اولین سرویس زمانش بیشتر از h شود

یعنی، (X_1 همان S_1 است.) چون توزیع مان نمایی است در این فرایند:

$$P(X_1>h) = e^{-\mu h}$$

۳-۲. فرض کنیم $N-1$ بار سرویس داشته‌ایم و سپس خرابی اتفاق افتاده است،

می‌دانیم که بعد از هر بار سرویس اطلاعات قبلی پاک خواهد شد و در واقع بدون حافظه خواهیم بود $\leftarrow$ داریم که،

$$\forall i \quad P(X_i>h) = e^{-\mu h}$$

$$P(X_i \le h) = 1-e^{-\mu h}$$

حالا در واقع برای $N-1$ بار سرویس و سپس خرابی داریم که،

$$T = T_1 + \text{---} + T_{N-1} + h$$

و این عبارت است از یک توزیع Geom با پارامتر $P = 1-e^{-\mu h}$

$$P(M=k) = (1-e^{-\mu h})^k e^{-\mu h} \leftarrow$$

که M در واقع تعداد سرویس ها تا قبل از خرابی است که با یک متغیر تصادفی مدل می شود. زمانمان هم عبارت است از $\sum_{k=1}^{M} T_k + h$ ، T_k از توزیع نمائی با پارامتر μ می آید به شرط $\leq h$ بودن.

$$\longrightarrow E[M] = \frac{1-P}{P} = \frac{1-e^{-\mu h}}{e^{-\mu h}} = e^{\mu h} - 1$$

که چون ایندکس از صفر شروع می شود

۱ که M تا سرویس، بعد خرابی

$$\text{کل زمان} = (T_1 + \text{———} + T_M) + h \rightarrow \underbrace{\mathbb{E}\{\text{کل زمان}\}}= E[M]E[X|X\leq h] + h$$

$$\mathbb{E}\{T_1\} = \int_0^\infty x\, f_{X|X\leq h}(x)\, dx \quad \text{یا} \quad \mathbb{E}\{X_1 | X_1 \leq h\}$$

$$= \int_0^h \frac{x \mu e^{-\mu x} dx}{1-e^{-\mu h}} = \frac{1}{1-e^{-\mu h}} \int_0^h x \mu e^{-\mu x} dx =$$

$$\frac{1}{1-e^{-\mu h}} \left(\int_0^h e^{-\mu x} dx + \left[-x e^{-\mu x}\right]_0^h \right) = \frac{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu h}) - h e^{-\mu h}}{1-e^{-\mu h}} =$$

$$\frac{1}{\mu} - \frac{h e^{-\mu h}}{1-e^{-\mu h}} \longrightarrow \mathbb{E}\{\text{کل زمان}\} = (e^{\mu h}-1)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{h e^{-\mu h}}{1-e^{-\mu h}}\right) + h$$

$$-\frac{h}{e^{\mu h}-1}$$

$$= \frac{e^{\mu h}-1}{\mu} - h + h = \boxed{\frac{e^{\mu h}-1}{\mu}}$$

۳-۳. نسبت زمانی که ماشین روشن است عبارت است از:

$$\longleftarrow \mathbb{E}\{\text{تعمیر خودرو}\} = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \mathbb{E}\{\text{زمان تا اولین خرابی}\} = \frac{e^{\mu h}-1}{\mu}$$

نسبت زمان روشن بودن

$$= \frac{\mathbb{E}\{\text{زمان تا اولین خرابی}\}}{\mathbb{E}\{\text{زمان تا اولین خرابی}\} + \mathbb{E}\{\text{تعمیر خودرو}\}} = \frac{(e^{\mu h}-1)/\mu}{(e^{\mu h}-1)/\mu + \frac{1}{\lambda}} = \frac{e^{\mu h}-1}{e^{\mu h}-1+\frac{\mu}{\lambda}}$$

←

$$\text{نسبت} = \frac{e^{\mu h}-1}{e^{\mu h}-1+\frac{\mu}{\lambda}}$$

۴-۱. اگر واحد زمانی را یکسال بگیریم ← نیم اول سال $\frac{1}{2}$ خواهد شد و می خواهیم

$$P\left(N\left(\tfrac{1}{2}\right) \geq 2\right)$$

را بدست آوریم که عبارت است از:

$$1 - P\left(N\left(\tfrac{1}{2}\right) < 2\right) = 1 - \left(\overbrace{P_{N(\frac{1}{2})}(0) + P_{N(\frac{1}{2})}(1)}^{\text{PMF برای ۰ و ۱}}\right) =$$

$$1 - \left(\frac{(\lambda t)^0 \exp(-\lambda t)}{0!} + \frac{\lambda t \exp(-\lambda t)}{1!}\right) =$$

$$1 - \exp\left(-5 \times \tfrac{1}{2}\right) - 5 \times \tfrac{1}{2} \exp\left(-5 \times \tfrac{1}{2}\right) =$$

$$1 - \exp(-2.5) - 2.5 \exp(-2.5) = \underline{1 - 3.5 \exp(-2.5)}$$

۴-۲. بخاطر خاصیت Independent increment دانستن اینکه در ۲۰۲۰ (سال اول) حداقل دو زمین لرزه اتفاق افتاده است تأثیری در پیش بینی برای ۲۰۲۱ نخواهد داشت؛

برای ۲۰۲۱ می خواهیم احتمال اینکه هیچ زمین لرزه ای در $\frac{3}{4}$ واحد زمانی (یکسال) اش اتفاق نیفتد را حساب کنیم، باید حساب کنیم:

$$P\left(X_1 > \tfrac{3}{4}\right) = e^{-\lambda t} = \exp\left(-5 \times \tfrac{3}{4}\right) = \exp\left(-\tfrac{15}{4}\right)$$

یعنی احتمال اینکه اولین زمین لرزه بعد از $\frac{3}{4}$ واحد زمانی اتفاق بیفتد که معادل است با خواسته سوال.

۳-۴. در واقع داریم که :

$$\underbrace{P\left(N(\tfrac{۳}{۴}) \geq ۴ \mid N(\tfrac{۱}{۲}) \geq ۲\right)}$$

می خواهیم این عبارت را حساب کنیم

$$P\left(N(\tfrac{۳}{۴}) \geq ۴ ,\ N(\tfrac{۱}{۲}) \geq ۲\right) = P_{N(\frac{۱}{۲})}(۲) . P\left(N(\tfrac{۱}{۴}) \geq ۲\right) +$$

$$P_{N(\frac{۱}{۲})}(۳) . P\left(N(\tfrac{۱}{۴}) \geq ۱\right) + P\left(N(\tfrac{۱}{۲}) \geq ۴\right) \underbrace{P\left(N(\tfrac{۱}{۴}) \geq ۰\right)}_{۱}$$

$$= \frac{(۵ \times \frac{۱}{۲})^۲ \exp(-۵ \times \frac{۱}{۲})}{۲!} . P\left(N(\tfrac{۱}{۴}) \geq ۲\right) +$$

$$1 - P_{N(\frac{۱}{۴})}(۰) - P_{N(\frac{۱}{۴})}(۱) = 1 - \exp(-\tfrac{۵}{۴}) - \tfrac{۵}{۴} \exp(-\tfrac{۵}{۴})$$

$$1 - P_{N(\frac{۱}{۴})}(۰)$$

$$\frac{(۵ \times \frac{۱}{۲})^۳ \exp(-۵ \times \frac{۱}{۲})}{۳!} . P\left(N(\tfrac{۱}{۴}) \geq ۱\right) +$$

$$\left(1 - P_{N(\frac{۱}{۲})}(۰) - P_{N(\frac{۱}{۲})}(۱) - P_{N(\frac{۱}{۲})}(۲) - P_{N(\frac{۱}{۲})}(۳)\right) =$$

$$1 - e^{-۲٫۵} - ۲٫۵ e^{-۲٫۵} - \frac{۲٫۵^۲}{۲} e^{-۲٫۵} - \frac{۲٫۵^۳}{۳!} e^{-۲٫۵}$$

$$\frac{۲٫۵^۲}{۲!} e^{-۲٫۵} . \left(1 - \frac{۹}{۴} \exp(-\tfrac{۵}{۴})\right) + \frac{۲٫۵^۳}{۳!} e^{-۲٫۵} . \left(1 - \exp(-\tfrac{۵}{۴})\right) +$$

$$1 - e^{-۲٫۵}\left(1 + ۲٫۵ + \frac{۲٫۵^۲}{۲!} + \frac{۲٫۵^۳}{۳!}\right) =$$

$$\cancel{\frac{۲٫۵^۲}{۲!} e^{-۲٫۵}} - \frac{۹}{۴} . \frac{۲٫۵^۲}{۲!} e^{-\frac{۱۵}{۴}} + \frac{۲٫۵^۳}{۳!} e^{-۲٫۵} - \frac{۲٫۵^۳}{۳!} e^{-\frac{۱۵}{۴}} + 1$$

$$- e^{-۲٫۵} - ۲٫۵ e^{-۲٫۵} - \cancel{\frac{۲٫۵^۲}{۲!} e^{-۲٫۵}} - \cancel{\frac{۲٫۵^۳}{۳!} e^{-۲٫۵}}$$

$$= ۱ - \left(\frac{۹}{۵} \cdot \frac{۲٫۵^{۲}}{۲!} + \frac{۲٫۵^{۳}}{۳!} \right) \exp\left(-\frac{۱۵}{۴}\right) - (۱ + ۲٫۵) \exp(-۲٫۵)$$

$$\approx ۰٫۴۸۹$$

$$\Rightarrow \underbrace{P\left(N\left(\tfrac{۳}{۴}\right) \geq ۴ \,\middle|\, N\left(\tfrac{۱}{۲}\right) \geq ۲ \right)} = \frac{۰٫۴۸۹}{(۱ - ۳٫۵ e^{-۲٫۵})} \approx ۰٫۷۱۲۷$$

$$\Rightarrow \boxed{P \approx ۰٫۹۸۴}$$

.۵ - ۱

$$P(N(t)=k \mid N(s+t)=n) = \frac{P(N(t)=k, N(s+t)=n)}{P(N(s+t)=n)} =$$

$$\frac{P(\overbrace{N(t)=k, N(s)=n-k}^{\text{مستقل اند}})}{P(N(s+t)=n)} = \frac{\overbrace{P(N(t)=k)}^{PMF}\, \overbrace{P(N(s)=n-k)}^{PMF}}{\underbrace{P(N(s+t)=n)}_{PMF}} =$$

$$\frac{\dfrac{(\lambda t)^{k} e^{-\lambda t}}{k!} \cdot \dfrac{(\lambda s)^{n-k} e^{-\lambda s}}{(n-k)!}}{\dfrac{(\lambda(t+s))^{n} e^{-\lambda t}}{n!}} = \frac{\cancel{\lambda^{k}} t^{k} e^{-\lambda t} \cancel{\lambda^{n-k}} s^{n-k} e^{-\lambda s}\, n!}{\lambda^{n} (t+s)^{n}\, k!\, (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{t^{k} s^{n-k}}{(t+s)^{n}} = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{k} \left(\frac{s}{t+s}\right)^{n-k}$$

$$\Rightarrow P(N(t)=k \mid N(s+t)=n) = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{k} \left(\frac{s}{t+s}\right)^{n-k} \checkmark$$

۲-۵. برای سادگی بیشتر در نظر می‌گیریم t_0 هم داریم و برابر ۰ است ← خواهیم داشت که $N(t_i)-N(t_{i-1})$

$$\overset{PMF}{P}\left(N(t_1)=k_1,\ N(t_2)-N(t_1)=k_2,\ \ldots,\ N(t_{m-1})-N(t_{m-2})=k_{m-1} \,\middle|\, N(t_m)=n\right)$$

$$=\frac{\overset{PMF}{P}\left(\overset{N(t_1-t_0)=k_1}{N(t_1)=k_1},\ N(t_2-t_1)=k_2,\ \ldots,\ N(t_{m-1}-t_{m-2})=k_{m-1},\ N(t_m-t_{m-1})=\underbrace{n-k_{m-1}-\cdots-1}_{k_m}\right)}{P(N(t_m)=n)}$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\overset{PMF}{P}(N(t_i-t_{i-1})) \Big/ P(N(t_m)=n)$$

طبق خواص ① Stationary Increment ② Independant Increment

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{(\lambda(t_i-t_{i-1}))^{k_i}e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}}{k_i!} \Bigg/ \frac{(\lambda t_m)^n e^{-\lambda t_m}}{n!}$$

$$=\frac{\cancel{\lambda^{n}}\ \cancel{e^{-\lambda(t_m-t_0)}}\prod_{i=1}^{m}(t_i-t_{i-1})^{k_i}\ n!}{\left(\prod_{i=1}^{m}k_i!\right)\cancel{\lambda^{n}}\ t_m^{\,n}\ \cancel{e^{-\lambda t_m}}}=$$

$$\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}\prod_{i=1}^{m}\Bigg(\underbrace{\frac{t_i-t_{i-1}}{t_m}}_{p_i}\Bigg)^{k_i} \qquad \text{where } \sum_{i=1}^{m}k_i=n$$

$$=\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}\prod_{i=1}^{m}p_i^{\,k_i} \qquad \text{where } \sum_{i=1}^{m}k_i=n$$

که این عبارت دقیقاً توزیع Multinomial هست با $t_0=0$, $p_i=\dfrac{t_i-t_{i-1}}{t_m}$

←

$$P\left(N(t_1)=k_1,\ \ldots,\ N(t_{m-1})-N(t_{m-2})=k_{m-1} \,\middle|\, N(t_m)=n\right)=\text{Multi-nomial}(p_1,\ldots,p_m)$$

$$\text{where } p_i=\frac{t_i-t_{i-1}}{t_m}$$

۳-۵. همانطور که در بخش ششم سوال دوم داشتیم منظور از یکنواخت بودن

این است که اگر ما n سمپل i.i.d از توزیع $Unif(0, t_m)$ بگیریم

و بخواهیم ببینیم در بازه ها/ $t_i - t_{i-1}$ تای چندتا از اینها خواهند افتاد منظور است

Δt_i

البته برای این بخش تعمیم یافته/ آن است.

فرض کنیم که n تا سمپل i.i.d از $Unif(0, t_m)$ داریم، خواهیم داشت که

احتمال اینکه در هر بازه/ Δt_i ، k_i تا از این سمپل‌ها بیفتند عبارت است از:

← احتمالش هم $\frac{\Delta t_i}{t_m}$ است برای هر سمپل

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-k_1-\cdots-k_{m-2}}{k_{m-1}} \binom{\overbrace{n-k_1-\cdots-k_{m-1}}^{k_m}}{k_m} \left(\frac{\Delta t_1}{t_m}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\Delta t_m}{t_m}\right)^{k_m}$$

$$= \frac{n!\,\cancel{(n-k_1)!} \cdots (n-k_1-\cdots-k_{m-1})!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}\,(n-\cancel{k_1}-k_2)!\,k_2! \cdots (n-k_1-\cdots-k_m)!\,k_m!} =$$

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2! \cdots k_m!} \left(\frac{t_1-t_0}{t_m}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{t_m-t_{m-1}}{t_m}\right)^{k_m}$$

where $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$

← PMF این دو معادل همدیگر است.

یکنواخت بودن توزیع وقایع پواسون به شرط دانستن تعداد وقایع هم

همانی بود که بالا گفته شد که یعنی معادل است با اینکه n تا سمپل از unif بگیریم —

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\Lambda(t)} \longrightarrow P(T_1 \le t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}$$

$$\rightarrow f_{T_1}(t) = \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \qquad \text{for } 0<t<1$$

$$P(T_{k+1} > t \mid T_k = s) = P(\text{no arrival in } (s,t]) = \exp(-[\Lambda(t) - \Lambda(s)])$$

$$\rightarrow P(T_{k+1} \le t \mid T_k = s) = 1 - \exp(-(\Lambda(t) - \Lambda(s))) \longrightarrow$$

$$f_{T_{k+1}|T_k}(t|s) = \frac{d}{dt}\left(1 - \exp(-(\Lambda(t) - \Lambda(s)))\right) = \lambda(t) e^{-(\Lambda(t) - \Lambda(s))}$$

$t>s$

$$f_{T_1, T_2, \ldots, T_n}(t_1, \ldots, t_n) = f_{T_1}(t_1) f_{T_2|T_1}(t_2|t_1) \ldots f_{T_n|T_{n-1}}(t_n|t_{n-1})$$

هرتی به شرط قبلی از قبلی‌ترها مستقل میشه

$$= \lambda(t_1) e^{-\Lambda(t_1)} \cdot \lambda(t_2) e^{-(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))} \ldots \lambda(t_n) e^{-(\Lambda(t_n) - \Lambda(t_{n-1}))} =$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)\right) e^{-\Lambda(t_n)}$$

همچنین خواهیم داشت که:

$$f_{T_1 \ldots T_n | N(1)=n}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)\right) e^{-\Lambda(t_n)} \cdot e^{-1 + \Lambda(t_n)}}{P(N(1) = n)}$$

بعد از t_n تا 1 باید هیچ arrival ای نداشته باشیم

$\rightarrow$

همچنین طبق مطالب کلاس برای مخرج داریم که ،

$$P(N(1)=n) = \frac{e^{-\Lambda(1)} (\Lambda(1))^n}{n!}$$

$$\downarrow$$

$$P(\tilde{N}(0,1)=n)$$

$$\Rightarrow f_{T_1 \cdots T_n | N(1)=n}(t_1, \cdots, t_n) = \frac{e^{-\Lambda(1)} \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)\right)}{\frac{e^{-\Lambda(1)} \Lambda(1)^n}{n!}} =$$

$$\frac{n!}{(\Lambda(1))^n} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) \qquad 0 < t_1 < \cdots < t_n < 1 \longrightarrow$$ حکم اثبات می‌شود.

۲-۶ . می‌دانیم که داریم:

$$E[T_1 | N(1)=n] = \int_0^1 \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} t_1 \cdot f_{T_1 \cdots T_n | N(1)=n}(t_1, \cdots t_n)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n$$

در واقع روی سایر t_iها به جز T_1 داریم مارجینالایز می‌کنیم

$$= \int_0^1 \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} t_1 \underbrace{\frac{n!}{\Lambda(1)^n}}_{1} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda(t_i)}_{\alpha t_i^{\alpha-1}}\, dt_1 \cdots dt_n = n!\, \alpha^n \int\int_{\substack{0 \\ t_n^{\alpha-1}}} \cdots \int_0^{t_2} t_1^{\alpha}\, dt_1 \cdots dt_n$$

$$= n!\, \alpha^n \int_0^1 t_n^{\alpha-1} \int_0^{t_n} t_{n-1}^{\alpha-1} \int_0^{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_3} t_2^{\alpha-1} \underbrace{\int_0^{t_2} t_1^{\alpha}\, dt_1}_{\frac{t_2^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \cdots dt_n =$$

$$\frac{1}{\alpha+1} \int_0^{t_3} t_2^{2\alpha} \longrightarrow \frac{1}{2\alpha+1} t_3^{2\alpha+1}$$

$$= n!\, \alpha^n \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\alpha+1}\right) \int_0^1 t_n^{n\alpha}\, dt_n = n!\, \alpha^n \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k\alpha+1}\right)$$

$$= n! \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{k\alpha+1}\right) \longrightarrow E\{T_1 | N(1)=n\} = n! \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{k\alpha+1}\right)$$

حالا با استفاده از فرم Gamma-func آنرا ساده تر می نویسیم:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k\alpha+1} = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{\alpha}+1)} \quad , \Gamma(n+1) = n! \longrightarrow$$

$$\mathbb{E}\{T_1 \mid N(1)=n\} = \underbrace{\Gamma(n+1)}_{n\Gamma(n)} \cdot \alpha^{n} \cdot \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{\alpha}+1)} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\{T_1 \mid N(1)=n\} = n \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+\frac{1}{\alpha}+1)} = n\, B(\frac{1}{\alpha}+1, n)$$

۷-۱. ابتدا CDF را برای $M(t)$ بدست می آوریم:

$$P(M(t)<x) = P(X_1<x, \ldots, X_{N(t)}<x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=k) \cdot \prod_{i=1}^{k} P(X_i<x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} (1-e^{-\mu x})^k = e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((\lambda t)(1-e^{-\mu x}))^k}{k!} \right) =$$

$$e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t(1-e^{-\mu x})} = \exp(-\lambda t \exp(-\mu x)) \longrightarrow$$

$$\mathrm{CDF}(M(t)) \longrightarrow \boxed{F_{M(t)}(x) = e^{-\lambda t e^{-\mu x}}}$$

۷-۲. از کتاب گلگر داریم که: برای یک توزیع نامنفی Y:

$$\mathbb{E}\{Y\} = \int_0^{\infty} (1-F_Y(x))\,dx \longrightarrow \mathbb{E}\{M(t)\} = \int_0^{\infty} (1-F_{M(t)}(x))\,dx$$

حالا تغییر متغیر می‌دهیم:

$$\longleftarrow \quad y = \lambda t e^{-\mu x}$$

$$x = -\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{y}{\lambda t}\right) \longrightarrow \underline{dx = -\frac{1}{\mu}\frac{1}{y}dy}$$

$$\longrightarrow \mathbb{E}\{M(t)\} = \int_0^{\infty}(1-e^{-y})\,dx = \int_{\lambda t}^{0} -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{y}\cdot(1-e^{-y})\,dy =$$

$\lambda t > 1$ برای t از یه حدی بیشتر اتفاق می‌افتد $\leftarrow$ $t \geq \frac{1}{\lambda}$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^{\lambda t}\frac{1-e^{-y}}{y}dy = \frac{1}{\mu}\left(\int_0^1 \frac{1-e^{-y}}{y}dy + \int_1^{\lambda t}\frac{1-e^{-y}}{y}dy\right) \Rightarrow$$

می‌دانیم که به ازای $0<y<1$ داریم که

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-y}}{y}dy \,،\quad \boxed{1 > \frac{1-e^{-y}}{y} \leftarrow 1-e^{-y} \leq y}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1-e^{-y}}{y}dy \leq \int_0^1 1\,dy = 1$$

همچنین برای $y>1$ داریم که، $\longleftarrow 1-e^{-y} < 1$

$$\int_1^{\lambda t}\frac{1-e^{-y}}{y}dy \leq \int_1^{\lambda t}\frac{1}{y}dy = \ln(\lambda t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{M(t)\} \leq \frac{1}{\mu}\left(1+\ln(\lambda t)\right)$$

به ازای t به اندازه‌ی کافی بزرگ داریم که

$$\longleftarrow \quad 1+\ln(\lambda t) \leq 2\ln(\lambda t)$$

$$\mathbb{E}\{M(t)\} \leq \frac{1}{\mu}2\ln(\lambda t) \quad \text{for } \lambda t \geq e \rightarrow t \geq \frac{e}{\lambda}$$

البته چون نامساوی ممکن است باند دقیق‌تر هم باشد ولی به ازای $t \geq \frac{e}{\lambda}$ این رابطه صورت مسئله برقرار خواهد بود،

$$\mathbb{E}\{M(t)\} \leq \frac{2\ln(\lambda t)}{\mu}$$

۱-۸

$$M_{Y(t)}(s) = \mathbb{E}\{e^{sY(t)}\} = \mathbb{E}\{\exp(s\sum_{i=1}^{N(t)} x_i)\} =$$

$$\mathbb{E}\{\underbrace{\mathbb{E}\{\exp(s\sum_{i=1}^{n} x_i) \mid N(t)=n\}}_{e^{sx_1}\cdots e^{sx_n}}\} = \mathbb{E}\{M_x(s)^{N(t)}\}$$

چون داریم که

و هرکدام اینها مستقل از سایرین است خواهیم داشت که

به‌طور دقیق‌تر i.i.d

داریم که ، $P(N(t)=n) = \dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

$$\mathbb{E}\{z^{N(t)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(N(t)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^n e^{-\lambda t}}{n!} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t z)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t z} =$$

$$e^{\lambda t(z-1)} \longrightarrow \mathbb{E}\{M_x(s)^{N(t)}\} = \exp(\lambda t(M_x(s)-1))$$

۲-۸

$$\mathbb{E}\{Y(t)\} = \frac{d}{ds}(M_{Y(t)}(s))\Big|_{s=0} = \lambda t \underbrace{M_x'(s)}_{\mathbb{E}\{x\}} \underbrace{\exp(\lambda t(M_x(s)-1))}_{M_{Y(t)}(s)}\Big|_{s=0}$$

$$= \lambda t\, \mathbb{E}\{x\}\cdot 1 = \boxed{\lambda t\, \mathbb{E}\{x\}}$$

چرا که $M_{Y(t)}(0) = \mathbb{E}\{\underbrace{e^{0\times Y(t)}}_{1}\} = 1$

حالا برای بدست آوردن واریانس دوبار مشتق می‌گیریم در $s=0$ ، خواهیم داشت

$$Var(Y(t)) = M''_{Y(t)}(0) - (M'_{Y(t)}(0))^2$$

$$M''_{Y(t)}(s) = \frac{d}{ds}\left(M_{Y(t)}(s)\, \lambda t\, M'_X(s)\right) = \lambda t \left(M'_X(s)\, M'_{Y(t)}(s) + M_{Y(t)}(s)\, M''_X(s) \right)$$

$$= \lambda t \left((\lambda t\, M'_X(s)\, M_{Y(t)}(s))\, M'_X(s) + M_{Y(t)}(s)\, M''_X(s) \right) =$$

$$\lambda t \left\{ M_{Y(t)}(s) \left(\underbrace{M'_X(s)^2}_{\mathbb{E}\{X\}^2} + \underbrace{M''_X(s)}_{\mathbb{E}\{X^2\}} \right) \right\} \xrightarrow{s=0}$$

$$= \lambda t \left(\lambda t\, \mathbb{E}\{X\}^2 + \mathbb{E}\{X^2\} \right)$$

$$\Rightarrow Var(Y(t)) = \lambda t \left(\lambda t\, \mathbb{E}\{X\}^2 + \mathbb{E}\{X^2\} \right) - (\lambda t\, \mathbb{E}\{X\})^2 = \lambda t\, \mathbb{E}\{X^2\}$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(Y(t)) = \lambda t\, \mathbb{E}\{X^2\}}$$

۸-۳. از آنجایی که $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$ تعریف می‌کنیم که

$$Z(t) = \frac{Y(t) - \lambda t\, \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\lambda t\, \mathbb{E}\{X_1\}^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \lambda t\, \mathbb{E}\{X_1\}}{\sqrt{\lambda t\, \mathbb{E}\{X_1\}^2}} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - \mathbb{E}\{X_i\}) + (N(t) - \lambda t)\mathbb{E}\{X_1\}}{\sqrt{\lambda t\, \mathbb{E}\{X_1\}^2}} = A(t) + B(t)$$

A(t) B(t)

$$A(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - \mathbb{E}(X_i))}{\sqrt{\lambda t\, \mathbb{E}(X_1^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{N(t)\, Var(X_1)}} \cdot \sqrt{\frac{N(t)}{\lambda t}} \cdot \sqrt{\frac{Var(X_1)}{\mathbb{E}(X_1^2)}}$$

$$B(t) = \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)}} \cdot \left(\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)}} \cdot \frac{\sum_{\tau=0}^{t} \overbrace{N(\tau+1-\tau)}^{N(1)} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \Rightarrow$$

در هر بازه‌ای هم N آن یک توزیع پواسون می‌شود ← $N(1)$ یک توزیع پواسون با پارامتر λ است که λ میانگینش هم هست ← جمع t تا توزیع پواسون داریم منهای t برابر میانگین آن تقسیم بر $\sqrt{t}.\sqrt{\lambda}$ که $\sqrt{\lambda}$ نیز std است و $t \to \infty$ پس طبق CLT خواهیم داشت که،

توزیع پواسون مربوط به $N(1)$

$$B(t) = \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{t} X_i - t\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{Var(X_1)}} \xrightarrow{t\to\infty} N(0,1) \times \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)}} = N\left(0, \left(\frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)}}\right)^2\right)$$

برای $A(t)$ داریم که زمانی که $t \to \infty$ چون $\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t$ به صورت in probability $\frac{N(t)}{\lambda t} \to 1$ اتفاق می‌افتد. همچنین طبق قضیه حد مرکزی

$$\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{N(t)\, Var(X_1)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

چرا که وقتی $t \to \infty$، آنگاه $N(t)$ نیز به ∞ میل می‌کند.

$$\rightarrow A(t) \xrightarrow{t\to\infty} N(0,1) \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{Var(X_1)}{\mathbb{E}(X_1^2)}} = N\left(0, \left(\sqrt{\frac{Var(X_1)}{\mathbb{E}(X_1^2)}}\right)^2\right)$$

← جمع دوتا توزیع نورمال داریم، خواهیم داشت که،

$$N\left(0, \left(\frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{E}(X_1^2)}}\right)^2\right) + N\left(0, \left(\sqrt{\frac{Var(X_1)}{\mathbb{E}(X_1^2)}}\right)^2\right) = N\left(0, \underbrace{\frac{\mathbb{E}(X_1)^2 + Var(X_1)}{\mathbb{E}(X_1^2)}}_{1}\right) = N(0,1)$$

پس زمانی که $t \to \infty$ طبق قضیه حد مرکزی خواهیم داشت که

$$\frac{Y(t) - \mathbb{E}(Y(t))}{\sqrt{\operatorname{var}(Y(t))}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$