به نام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

تمرین سوم فرایندهای تصادفی

۱-آ) باید نشان دهیم فرایند گاوسی $\{X(t), t \geq 0\}$، ایستا است اگر و تنها اگر

$\mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = C(t-s)$, $\mathbb{E}(X(t)) = c$.

- ابتدا فرض می‌کنیم که فرایند گاوسی $\{X(t), t \geq 0\}$ ایستا هست و نشان می‌دهیم که $\mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = C(t-s)$, $\mathbb{E}\{X(t)\} = c$ برقرار است.

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \overset{i.d}{=} (X(t_1+a), \dots, X(t_n+a))$$

چون به ازای هر a ای این دو دارای توزیع مشترک هستند، پس خواهیم داشت که:

بردار μ در هردو باید یکسان باشد $\Leftarrow$ $\mu(t_1)$ و $\mu(t_1+a)$ به ازای هر a ای برابر است

پس خواهیم داشت که $\mu(t)$ باید عددی ثابت باشد $\leftarrow$ $\mathbb{E}\{X(t)\} = c$

همچنین به ازای هر n، هر $t_1 \text{---} t_n$ این رابطه برقرار است، پس خواهیم داشت که به ازای $n=2$:

$$\forall a, \quad (X(t), X(s)) \overset{i.d}{=} (X(t+a), X(s+a))$$

$\leftarrow$ کوواریانس فقط به اختلاف زمانی بستگی دارد چرا که:

$$\forall a: \quad \mathrm{Cov}(X(t), X(s)) \overset{i.d}{=} \mathrm{Cov}(X(t+a), X(s+a)) \Rightarrow$$

کوواریانس فقط به اختلاف زمانی بستگی دارد و به عبارتی $C(t-s)$ خواهد شد.

$\Leftarrow$ اگر فرایند گاوسی $\{X(t), t \geq 0\}$ ایستا باشد $\leftarrow$ $\mathbb{E}\{X(t)\} = c$; $\mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = C(t-s)$.

حالا باید طرف دیگر این را نشان دهیم:

فرض کنیم، $E\{X(t)\}=c$ ، $cov(X(t),X(s))=C(t-s)$ ، خواهیم داشت که،

$$X=(X(t_1),\dots,X(t_n)) \quad , \quad \mu=(c,\dots,c)$$

$$\Sigma_{ij}=C(t_i-t_j) \qquad cov(X(t_i+\alpha),X(t_j+\alpha))=$$
$$C(t_i+\alpha-(t_j+\alpha))=C(t_i-t_j)$$

برای هر دو زمان t_i ، t_j داریم که cov برابر است با $t_i+\alpha$ ، $t_j+\alpha$

پس خواهیم داشت که:

$$cov(X)=cov(X')$$

X ای که α واحد شیفت خورده است.

همچنین می‌دانیم که برای یک فرایند گاوسی قانون تمام بردارهای چند بعدی توسط میانگین و ماتریس کوواریانس آنها کاملاً تعیین می‌شود ←

$$(X(t_1),\dots,X(t_n)) \overset{i.d}{=\!=} (X(t_1+\alpha),\dots,X(t_n+\alpha))$$

← حکم اثبات می‌شود.

ب) می‌دانیم که داریم،

$$\mathbb{E}\{V(t)\}=\mathbb{E}\{e^{-at/2}X(ae^{at})\}=e^{\frac{-at}{2}}\mathbb{E}\{X(ae^{at})\}=0 \checkmark$$

همچنین داریم که،

$$cov(V(t),V(s))=\mathbb{E}\{e^{-at/2}X(ae^{at})\,e^{-as/2}\overline{(ae^{as})}\}$$

$$= e^{-\frac{a}{2}(s+t)}\, \mathbb{E}\{X(ae^{at}), X(ae^{as})\} = e^{-\frac{a}{2}(t+s)} \min\{ae^{at}, ae^{as}\}$$

$= a e^{-\frac{a}{2}|t-s|} \longrightarrow$ $Cov(X(t),X(s))$ تنها به تفاوت t و s بستگی دارد

پس داریم که $Cov(X(t),X(s)) = X(t-s)$, $\mathbb{E}\{V(t)\}=0$

همچنین داریم که ، $(V(t_1),\dots,V(t_n)) = \left(e^{-\frac{at_1}{2}}X(ae^{at_1}),\dots,e^{-\frac{at_n}{2}}X(ae^{at_n})\right)$

تبدیل خطی روی یک بردار گاوسی هست، پس بازهم برداری گاوسی است.

$\Leftarrow$ باتوجه به ۲ بخش بالا و استفاده از نتایج بخش الف این سوال $V(t)$ یک فرایند گاوسی است.

۲- داریم که $w(t)$ یک فرایند گاوسی سفید حقیقی با چگالی طیف توان دوطرفه $S_w(f)=3$ است و برای تمامی فرکانس ها.

$$Y = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi(t)\,dt \qquad \phi(t) = \begin{cases} 1 & 5 \le t \le 7 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

.1

$$\mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\,\phi(t)\,dt\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E\{w(t)\}}_{0}\,\phi(t)\,dt = 0$$

zero-mean white-guassian noise

$$Var(Y) = \mathbb{E}\{Y^2\} = \mathbb{E}\left\{\iint w(t)\,w(s)\,\phi(t)\,\phi(s)\,dt\,ds\right\} =$$

$$\iint \underbrace{\mathbb{E}\{w(t)\,w(s)\}}_{R_w(t-s) = S_w\,\delta(t-s)}\,\phi(t)\,\phi(s)\,dt\,ds$$

$$\to Var(Y) = S_w \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)^2\,dt = S_w \int_5^7 1\,dt = 2S_w = 6$$

$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(0, 6)$$

$$R_w(\tau) = \mathbb{E}\{w(t)\,w(t+\tau)\}$$

$$S_w(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_w(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$R_w(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, d\tau$$

۲. داشتیم که:

$$\mathrm{Var}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\phi(s)\, R_w(t-s)\, dt\, ds$$

$$= \iint \phi(t)\,\phi(s)\left[\int S_w(f)\, e^{2\pi j f(t-s)}\, df\right] dt\, ds$$

$$= \int S_w(f)\,\underbrace{\left[\iint \phi(t)\,\phi(s)\, e^{2\pi j f(t-s)}\, dt\, ds\right]}_{|\Phi(f)|^2} df$$

where $\Phi(f) = \int \phi(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\,|\Phi(f)|^2\, df = ۳\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(f)|^2\, df$$

طبق تغییر Parseval عبارت بالا برابر است با:

$$۳\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2\, dt = ۳\int_{0}^{۲} 1\, dt = ۶$$

← رابطه $\mathrm{Var}(Y)$ و چگالی طیفی $S_w(f)$ به صورت زیر است:

$$\mathrm{Var}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\,|\Phi(f)|^2\, df$$

۳- داریم که $\mathbb{E}\{X(t)\}=\mu_X$, $Var\{X(t)\}=\sigma_X^2$ و سیگنال مان وارد یک سیستم خطی می‌شود و خروجی آن در دو زمان t_1 و t_2 عبارت است از:

$$Y(t_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)X(t_1-\tau)\,d\tau\ ,\quad Z(t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(u)\,X(t_2-u)\,du$$

الف) برای بدست آوردن توزیع مشترک بین Y و Z باید μ_Y , μ_Z , $Var(Y)$, $Var(Z)$, $cov(Y,Z)$ را بدست بیاوریم.

$$\mathbb{E}\{Y(t_1)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)\,\mathbb{E}\{X(t_1-\tau)\}\,d\tau=\mu_X\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)\,d\tau$$

$$\mathbb{E}\{Z(t_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau)\,\mathbb{E}\{X(t_2-\tau)\}\,d\tau=\mu_X\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(u)\,du$$

$$\tilde{X}(t)\triangleq X(t)-\mu_X\ ,\quad \tilde{Y}(t_1)\triangleq Y(t_1)-\mu_Y\ ,\quad \tilde{Z}(t_2)\triangleq Z(t_2)-\mu_Z$$

$$Var(Y(t_1))=Var(\tilde{Y}(t_1))=$$

$$\mathbb{E}\left\{\iint h_1(\tau)h_1(\sigma)\tilde{X}(t_1-\tau)\tilde{X}(t_1-\sigma)\,d\tau\,d\sigma\right\}=$$

$$\iint h_1(\tau)h_1(\sigma)\underbrace{\mathbb{E}\{\tilde{X}(t_1-\tau)\tilde{X}(t_1-\sigma)\}}_{R_X(\sigma-\tau)}\,d\tau\,d\sigma$$

به طور مشابه برای $Z(t_2)$ هم داریم و درنهایت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Var(Y(t_1))=\iint h_1(\tau)h_1(\sigma)R_X(\sigma-\tau)\,d\tau\,d\sigma \\ Var(Z(t_2))=\iint h_2(\tau)h_2(\sigma)R_X(\sigma-\tau)\,d\tau\,d\sigma \end{cases}$$

حالا باید cov بین $Y(t_1)$, $Z(t_2)$ را بدست آوریم،

$$\text{cov}(Y(t_1), Z(t_2)) = \mathbb{E}\{\tilde{Y}(t_1)\,\tilde{Z}(t_2)\} = E\left\{\iint h_1(\tau)h_2(u)\,\tilde{X}(t_1-\tau)\,\tilde{X}(t_2-u)\,d\tau\,du\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)h_2(u)\,R_X\big((t_1-\tau)-(t_2-u)\big)\,d\tau\,du$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Y(t_1) \\ Z(t_2) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_X \int h_1 \\ \mu_X \int h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Var}(Y) & \text{cov}(Y,Z) \\ \text{cov}(Y,Z) & \text{Var}(Z) \end{pmatrix}\right)$$

ب) حالا باید ببینیم تحت چه شرایطی $Y(t_1)$ و $Z(t_2)$ وابستگی ندارند؟ چون Y و Z مشترکاً گاوسی هستند درنتیجه باید زمانی را پیدا کنیم که $\text{cov}(Y,Z)=0$ برقرار است.

اگر h_1 , h_2 نسبت به $R_X(\cdot)$ متعامد باشند، $\text{cov}(Z,Y)$ برابر صفر خواهد بود

★ اگر $X(t)$ نویز سفید باشد $R_X(\tau)=\sigma_X^2\,\delta(\tau)$ ، درنتیجه خواهیم داشت که:

$$\text{cov}(Y,Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)\,h_2(\tau - t_1 + t_2)\,d\tau = 0$$

دوتا فیلتر باید zero-overlap داشته باشند.

۴- داریم که $B(t)$ یک فرایند وینر با واریانس واحد است. حال می‌خواهیم رفتار آماری فرایند های زیر را تحلیل کنیم و مشخص کنیم آیا هریک، یک فرایند گاوسی است یا خیر.

الف)

i) $X_t := e^{-t} B(e^{2t}) \qquad t \geq 0$

$B(.)$ یک فرایند وینر است، هر ترکیب خطی از نمونه‌های آن نیز گاوسی است درنتیجه X_t یک فرایند گاوسی است.

* $\mathbb{E}\{X_t\} = \mathbb{E}\{e^{-t} B(e^{2t})\} = e^{-t}\, \mathbb{E}\{B(e^{2t})\} = 0$

* $cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}\{e^{-t} e^{-s} B(e^{2t}) B(e^{2s})\} = e^{-t-s} \min(e^{2s}, e^{2t})$
$= e^{-|t-s|}$

میانگین عدد ثابت صفر است و کوواریانس تنها تابع اختلاف $|t-s|$ است.

پس X_t یک فرایند گاوسی ایستا است.

ii) $X_t = B_t - tB_1, \qquad t \in [0,1]$

X_t ترکیب خطی از B_t، tB_1 است درنتیجه خودش نیز فرایند گاوسی است.

* $\mathbb{E}\{X_t\} = \mathbb{E}\{B_t\} - t\,\mathbb{E}\{B_1\} = 0$

* $cov(X_t, X_s) = cov(B_t - tB_1, B_s - sB_1) = cov(B_s, B_t) - t\,cov(B_1, B_s)$
$- s\,cov(B_1, B_t) + st\,Var(B_1) = \min(s,t) - ts - st + st = \min(s,t) - st$

$\begin{cases} \text{if } s \leq t: & s(1-t) \\ \text{else}: & t(1-s) \end{cases}$

میانگین صفر است ولی cov تابعی از $t-s$ نخواهد بود.

$\Leftarrow$ X_t غیرایستا است.

ب) $B(s)$ یک فرایند گاوسی است ← هر ترکیب خطی از مقادیرش نیز گاوسی

است ← $U_n = \sum_{k=1}^{n} B(t_k^*) \frac{T}{n}$ where: $0=t_0<t_1<\dots<t_n=T$

یک ترکیب خطی از بردار مشترکاً گاوسی $(B(t_1^*), \dots, B(t_n^*))$ هست، در

نتیجه وقتی $n\to\infty$ ، U_n برابر خواهد شد با $\int_0^T B(s)\,ds$.

حالا داریم که:

$$\mathbb{E}\{U\} = \int_0^T \mathbb{E}\{B(s)\}\,ds = 0$$

$$Var(U) = \mathbb{E}\{U^2\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^T\int_0^T B(s)\cdot B(t)\,ds\,dt\right\} =$$

$$\int_0^T\int_0^T \mathbb{E}\{B(s)B(t)\}\,ds\,dt = \int_0^T\int_0^T \min\{s,t\}\,ds\,dt =$$

$$2\int_{0\le s\le t\le T} s\,ds\,dt = 2\int_0^T\left[\int_0^t s\,ds\right]dt = 2\int_0^T \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{T^3}{3}$$

$$\Rightarrow U \sim N\left(0, \frac{T^3}{3}\right)$$

پ) می‌خواهیم $P(B_1+B_2 \ge 2 \mid B_1 = 1)$ را حساب کنیم در صورتی که

$B(t)$ فرایندی وینر با انحراف معیار یک باشد:

$$B_2 = B_1 + (B_2 - B_1) = 1 + W, \quad W := B_2 - B_1 \sim N(0, 2-1) = N(0,1)$$

$$\Rightarrow B_2 + B_1 = 1 + 1 + W = 2 + W \longrightarrow$$

$$P(B_1+B_2 \geq 2 \mid B_1=1) = P(2+W \geq 2) = P(W \geq 0) = \frac{1}{2}$$

حالا می خواهیم مقدار امید ریاضی شرطی $\mathbb{E}\{B_2|U\}$ را حساب کنیم،

چون B_2 و U مشترکاً گاوسی هستند $\leftarrow$ $\mathbb{E}\{B_2|U=u\} = \dfrac{Cov(B_2,U)}{Var(U)}u$ ،

$$Cov(B_2,U) = \mathbb{E}\left\{B_2\int_0^T B(s)ds\right\} = \int_0^T \mathbb{E}\{B_2 B(s)\}\,ds = \int_0^T \min(2,s)\,ds$$

$$= \begin{cases} \int_0^T s\,ds = T^2/2 & T\leq 2 \\ \int_0^2 s\,ds + \int_2^T 2\,ds = 2+2(T-2) = 2T-2 & T\geq 2 \end{cases}$$

$$= \mathbb{E}\{B_2|U=u\} = \frac{Cov(B_2,U)}{Var(U)}u = \begin{cases} \dfrac{T^2/2}{T^3/3}u = \dfrac{3}{2T}u & T\leq 2 \\ \dfrac{2T-2}{T^3/3}u = \dfrac{6(T-1)}{T^3}u & T\geq 2 \end{cases}$$

۵- الف) می خواهیم نشان دهیم که اگر X یک بردار تصادفی گاوسی باشد، هر زیربرداری از آن نیز بردار تصادفی گاوسی خواهد بود.

می دانیم که یک بردار متغیر تصادفی گاوسی است اگر و تنها اگر هر ترکیب خطی از اعضایش گاوسی باشد. داریم که $\forall b,\ b^TX \sim N(b^T\mu_x, b^T\Sigma b)$

$$X = (X(t_1), \ldots, X(t_n))$$

حالا اگر هر زیربردار Y ای بگیریم، می دانیم که به ازای هر b، b^TX یک توزیع گاوسی است

کافی است b را طوری انتخاب کنیم که عناصری که در Y نیستند، ضریب صفر بگیرند و به ازای تمامی این بردارها داریم که b^TX توزیع گاوسی است.

حالا می دانیم که اگر اعضای بردار b متناظر با X_i هایی که در Y هستند را برداریم و بردار c بنامیم، داریم که: $b^TX = c^TY$ و اعضای c هرچیزی می توانند باشند و این یک متغیر گاوسی خواهد بود ←

$$\forall c: \ c^TY \sim \mathcal{N}(c^T\mu_Y, c^T\Sigma_Y c)$$

← به ازای هر زیربردار Y خواهیم داشت که Y یک بردار تصادفی گاوسی است.

ب) می خواهیم نشان دهیم هر ترکیب Affine ای از بردار تصادفی گاوسی خودش بردار تصادفی گاوسی است و سپس توزیع آن را (pdf) را می خواهیم بدست آوریم. اگر X یک بردار گاوسی تصادفی باشد، آنگاه $\forall a: a^TX$ is gaussian

حالا به ازای $Y = Ax+b$ نیز داریم که:

$$\forall c: \ c^TAx + c^Tb = d^Tx + c^Tb = d^Tx + e$$

باز هم ترکیب خطی مقادیر بردار X را داریم + جمع یک بردار ثابت با آن

← باز هم گاوسی است ← $Y = AX+b$ نیز یک بردار متغیر تصادفی گاوسی است. حالا داریم که:

$$\mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\{AX+b\} = A\,\mathbb{E}\{X\}+b = A\mu_X + b$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(AX+b) = \mathrm{var}(AX) = \mathbb{E}\{(AX - A\mathbb{E}\{X\})(AX - A\mathbb{E}\{X\})^T\}$$

$$= A\,\mathbb{E}\{(X-\mathbb{E}\{X\})(X-\mathbb{E}\{X\})^T\}A^T = A C_X A^T$$

$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(A\mu_X + b,\ A C_X A^T)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|C_Y|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu_Y)^T \Sigma_Y^{-1}(y-\mu_Y)\right) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|A C_X A^T|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\underbrace{\mu_Y}_{A\mu_X+b})^T(\underbrace{A C_X A^T}_{C_Y})^{-1}(y-\mu_Y)\right)$$

ج) تمامی z_iها از هم و از هر مجموعه‌ای از z_jها مستقل اند پس خواهیم داشت که:

$$Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \to a^T Z = a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n$$

می دانیم که برای $\underbrace{a_1Z_1 + a_2Z_2}_{Z_{12}}$ داریم که یک متغیر گاوسی است به ازای هر a_1, a_2

چرا که Z_1 و Z_2 مستقل اند، حالا $a_1Z_1+a_2Z_2+a_3Z_3$ نیز متغیر گاوسی است

چرا که Z_{12} , Z_3 مستقل اند و گاوسی ← به همین ترتیب پیش برویم

a^TZ به ازای هر a ای گاوسی است ← Z یک بردار گاوسی، و z_iها

توزیع مشترک گاوسی دارند.

ما می‌دانیم که طبق قضیه تجزیه طیفی هر ماتریس متقارن با مقادیر حقیقی را می‌توان به صورت $Q\Lambda Q^T$ نوشت که $Q^TQ=QQ^T=I$.

از آنجایی که ماتریس کوواریانس عبارت است از:

$$C_X = \mathbb{E}\{(X-\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{0})(X-\mathbb{E}(X))^T\}$$

بخاطر $\mathbb{E}$

جمع یه سری ماتریس متقارن است ← متقارن است و در نتیجه می‌توان نوشت $C_X = Q\Lambda Q^T$، حالا اگر انتخاب کنیم، $Y=Q^TX$، خواهیم داشت که:

ماتریس U ←

$$C_Y = \mathbb{E}\{(Y-\mathbb{E}(Y))(Y-\mathbb{E}(Y))^T\} = \mathbb{E}\{YY^T\} =$$

$$\mathbb{E}\{Q^TXX^TQ\} = \mathbb{E}\{\overset{I}{\cancel{Q^TQ}}\Lambda \overset{I}{\cancel{Q^TQ}}\Lambda^T\overset{I}{\cancel{Q^TQ}}\} =$$

$$\underbrace{\mathbb{E}\{\Lambda\Lambda^T\}}_{\text{ماتریس D قطری}} \longrightarrow$$ یک ماتریس قطری است.

$$\Rightarrow Y = UX \sim \mathcal{N}(0, D)$$

از آنجایی که $Y \sim \mathcal{N}(0,D)$ می‌آید و D ماتریسی قطری است ⇐

Yها مستقل متقابل اند و در نتیجه گاوسی توأم هستند

۶- (الف) می‌خواهیم [A] را بیابیم که: $Y=[A]W$ و W ماتریس کوواریانس مشترکشان [K] بشود. (Y هم zero-mean است.)

$$cov(W,Y) = \mathbb{E}\{WY^T\} = \mathbb{E}\{WW^TA^T\} = \mathbb{E}\{WW^T\}A$$

از آنجایی که W گاوسی IID بود در نتیجه خواهیم داشت که: $\mathbb{E}\{WW^T\} = I$

$$\Rightarrow [K] = cov(W,Y) = [A] \Rightarrow [K] = [A^T] \Rightarrow$$

کافی است A را K^T انتخاب کنیم.

ب) می‌خواهیم [B] ای را بیابیم که به ازای $Y = BZ$ ، $\mathbb{E}\{ZY^T\}$ برابر باشد با $[K']_{n\times m}$ به شرطی که $cov(Z) = K_Z$ برقرار باشد، K_Z non-singular باشد.

$$\mathbb{E}\{ZY^T\} = \mathbb{E}\{ZZ^TB\} = \mathbb{E}\{ZZ^T\}B^T = K_ZB^T = K' \longrightarrow$$

$B^T = K_Z^{-1}K' \longrightarrow$ با انتخاب این مقدار برای B، این اتفاق می‌افتد

ج) در بخش قبلی داشتیم که K_Z^{-1} ولی وقتی K_Z ماتریسی singular باشد، این وارون وجود ندارد،

داریم که چون K_Z ماتریسی متقارن است: $K_Z = U\Lambda U^T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$$

$u_1 \dots u_r$ بردار ویژه‌های متناظر $\lambda_1 \dots \lambda_r$ هستند،

$n-r$ بردار ویژه دیگر فضای پوچی C_Z را مدل می‌کنند.

شرط لازم و کافی برای وجود جواب عبارت است از :

$$\forall i \quad \text{if } \lambda_i = 0 \Rightarrow u_i^T k = 0$$

یعنی هر ستونی از k باید در Range بردار ویژه‌های متناظر با مقادیر ویژه‌ی [illegible] قرار بگیرد $\Leftarrow$ با استفاده از شبه وارون می‌توان بیشمار ماتریس β پیدا کرد

یا حالا حل دستگاه معادلات می‌توان جوابش را یافت.

۷- الف)

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{pmatrix}\right)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right)$$

$$y = v^{1/3}$$

$$\left|\frac{dy}{dv}\right| = \frac{1}{3}|v|^{-2/3}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

$$f_V(v) = f_Y(v^{1/3})\left|\frac{dy}{dv}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(v^{1/3})^2}{2\sigma_y^2}\right) \frac{1}{3}|v|^{-2/3}$$

$$f_{X,V}(x,v) = f_{X,Y}(x, y=v^{1/3})\left|\frac{dy}{dv}\right| = f_{X,Y}(x,v^{1/3})\,\frac{1}{3}|v|^{-2/3}$$

$$\Rightarrow f_{X|V}(x|v) = \frac{f_{X,V}(x,v)}{f_V(v)} = \frac{f_{X,Y}(x,v^{1/3})\,\frac{1}{3}|v|^{-2/3}}{f_Y(v^{1/3})\,\frac{1}{3}|v|^{-2/3}} =$$

$$\cancel{f_{X,Y}}\ \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\Bigg|_{y=v^{1/3}} = f_{X|Y}(x|y=v^{1/3})$$

می دانیم که: $X|Y=y \sim N\left(\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y,\ \sigma_x^2(1-\rho^2)\right)$

$$\Rightarrow f_{X|V}(x|v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{(x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}v^{1/3})^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right)$$

به طور مشابه اینبار داریم که:

$$f_{X|U}(x|u) = \overset{1/2}{P(Y=\sqrt{u}\,|U=u)}\, f_{X|Y}(x|\sqrt{u}) + \overset{1/2}{P(Y=-\sqrt{u}\,|U=u)}\, f_{X|Y}(\sqrt{u})$$

$$\rightarrow f_{X|U}(x|u) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{(x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{u})^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{(x+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{u})^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right)\right)$$

۸-۱.

$$\mathbb{E}\{Y(t)\} = \mathbb{E}\{(h * X)(t)\} = (h * \mathbb{E}\{X\})(t) = 0$$

چرا که $\mathbb{E}\{X\}=0$ است.

۲. طراحی که ۱

$$R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$

$$|H(f)| = \begin{cases} \sqrt{1+4\pi f^2} & |f|<2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \begin{cases} \frac{1+4\pi f^2}{1+(2\pi f)^2} \times 2 = 2\,\frac{1+4\pi f^2}{1+4\pi^2 f^2} & |f|<2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

حالا برای Y طراحی که ۱

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\, e^{i2\pi f\tau}\, df = \int_{-2}^{2} 2\, \frac{1+4\pi f^2}{1+4\pi^2 f^2}\, e^{i2\pi f\tau}\, df$$

$$\Rightarrow R_Y(\tau) = 2\int_{-2}^{2} \frac{e^{i2\pi f\tau}}{1+4\pi^2 f^2}\, df + 8\pi \int_{-2}^{2} \frac{f^2 e^{i2\pi f\tau}}{1+4\pi^2 f^2}\, df$$

۳. حالا می‌خواهیم مقدار $E\{Y(t)^2\}$ را حساب کنیم. داریم که:

$$E\{Y(t)^2\} = E\{Y(t).Y(t+0)\} = R_Y(0) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\, df = \int_{-2}^{2} 2\,\frac{1+4\pi f^2}{1+4\pi^2 f^2}\, df =$$

$$2\int \frac{df}{1+4\pi^2 f^2} + 8\pi \int \frac{f^2\, df}{1+4\pi^2 f^2} = \frac{8}{\pi} + 2\,\frac{\pi-1}{\pi^2}\arctan(4\pi)$$

شهادت حضرت امام محمد باقر علیه‌السلام (۱۱۴ هـ ق)