فرایندهای تصادفی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری اول

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۱۰ نمره)

متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ را در نظر بگیرید که i.i.d. هستند. نشان دهید:

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i\right] \leqslant \sigma\sqrt{2 \ln n}$$

راهنمایی: استفاده از Moment Generating Function و Jensen به ازای تابع محدب $f(x)$:

$$\mathbb{E}[f(x)] \geqslant f(\mathbb{E}[x])$$

مسئله‌ی ۲. (۱۰ نمره)

در المپیک امسال، مسابقه پرش طول در طی n روز برگزار می شود. در هر روز از این مسابقه، هر کدام از شرکت کنندگان باید k بار پرش خود را انجام بدهند. طول هر پرش یک ورزشکار بر حسب متر که آن را با متغیر تصادفی M نمایش می دهیم، از توزیع زیر پیروی می کند:

$$P(M = m) = \frac{1}{(e-1)m!} \quad (m \in \mathbb{N})$$

دقت کنید که پرش های انجام شده توسط ورزشکار، مستقل از یکدیگرند.

گوییم یک روز از مسابقه برای ورزشکار روز **خوبی** است، اگر در آن روز تمامی پرش هایی که انجام می دهد طولی بیشتر یا مساوی m^* داشته باشد. همچنین یک ورزشکار **موفق** است، در صورتی که حداقل یک روز خوب در مسابقه داشته باشد. نشان دهید که نامساوی زیر برقرار می باشد:

$$P(\text{موفق بودن یک ورزشکار}) \leqslant \frac{ne^k(e-2)^k}{(m^*(e-1)-e)^{2k}}$$

مسئله‌ی ۳. (۱۰ نمره)

بنویسید $\mu_k := \mathbb{E}[X^k]$، $\mu_{k,0} := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^k]$ برای kام moment و moment مرکزی یک متغیر تصادفی X. moment های مرکزی نمونه را تعریف کنید و نشان دهید که این moment ها به moment های مرکزی (جمعیت) همگرا می‌شوند (زمانی که اندازه نمونه n افزایش می‌یابد).

مسئله‌ی ۴. (۱۰ نمره)

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع توأم نرمال دو بعدی با پارامترهای $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ باشند. توزیع‌های زیر را به دست آورید:

الف) توزیع حاشیه‌ای X (marginal) و توزیع حاشیه‌ای Y

ب) توزیع شرطی Y به شرط $X = x$

ج) به ازای مقادیر ثابت a و b، توزیع $aX + bY$

مسئله‌ی ۵. (۱۰ نمره)

رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

مسئله‌ی ۶. (۱۰ نمره)

متغیر تصادفی X از توزیع نمایی پیروی می‌کند.

الف) تابع مولد گشتاور X را محاسبه کنید.

ب) به کمک تابع مولد گشتاور محاسبه‌شده در قسمت قبل، میانگین و واریانس X را بیابید.

ج) چگونه می‌توان از یک توزیع یکنواخت توزیع نمایی را ایجاد کرد؟

مسئله‌ی ۷. (۱۰ نمره)

ما n مهره با شماره‌های ۱ تا n در یک کیسه داریم. در هر مرحله، فرد به‌طور تصادفی یک مهره را از کیسه بیرون می‌آورد (با احتمال برابر برای مهره‌های مختلف)، شماره‌ای که روی آن است را نگاه می‌کند و دوباره آن را به کیسه می‌اندازد. مقدار مورد انتظار تعداد مراحل برای مشاهده تمام شماره‌ها چقدر است؟

مسئله‌ی ۸. (۱۰ نمره)

ثابت کنید که یک متغیر تصادفی بدون حافظه است اگر و تنها اگر توزیع نمایی داشته باشد.

تعریف (خاصیت بدون حافظه): یک متغیر تصادفی X دارای خاصیت بدون حافظه است اگر برای هر $s, t \geqslant 0$ داشته باشیم:

$$P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t)$$

(نیازی به اثبات جواب معادله کوشی بدست آمده نیست.)

مسئله‌ی ۹. (۱۰ نمره)

الف) فرض کنید $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ و $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند. نشان دهید که $X + Y$ توزیع $\mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ را دنبال می‌کند.

ب) فرض کنید W_1, W_2 متغیرهای تصادفی گاوسی نرمال‌شده مستقل و هم‌توزیع (.i.i.d) هستند. نشان دهید که $a_1W_1 + a_2W_2$ گاوسی است و توزیع آن $\mathcal{N}(0, a_1^2 + a_2^2)$ می‌باشد.

ج) با استفاده از نتیجه قسمت (ب)، نشان دهید که تمام ترکیب‌های خطی متغیرهای تصادفی گاوسی نرمال‌شده i.i.d. گاوسی هستند.

مسئله‌ی ۱۰. (۱۰ نمره)

فرض کنید که n نخ داریم. می‌دانیم که هر نخ دو سر دارد؛ لذا کل نخ ها $2n$ سر خواهند داشت. به صورت تصادفی n زوج از سرهای این نخ ها را در نظر می‌گیریم و دو سر تشکیل دهنده هر زوج را به هم گره می‌زنیم. اگر تعداد حلقه های ایجاد شده را با متغیر تصادفی L نمایش دهیم، مطلوب است $\mathbb{E}(L)$.

موفق باشید :)