فرایندهای تصادفی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۱۵ نمره)

یک فرایند تصادفی $\{X(t),\, t \geqslant ۰\}$ ایستا (stationary) نامیده می‌شود اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، هر $t_۱, \ldots, t_n \geqslant ۰$ و هر جابه‌جایی $a \geqslant ۰$، بردار تصادفی

$$\big(X(t_۱), \ldots, X(t_n)\big)$$

دارای همان توزیع مشترک باشد که

$$\big(X(t_۱+a), \ldots, X(t_n+a)\big).$$

(آ) ثابت کنید برای یک فرایند گوسی، شرط لازم و کافی برای ایستا بودن این است که

$$\mathrm{Cov}\big(X(s), X(t)\big)$$

تنها به اختلاف $t-s$ (برای $s \leqslant t$) وابسته باشد و نیز

$$\mathbb{E}\big[X(t)\big] = c$$

که c ثابت است.

(ب) فرض کنید $\{X(t),\, t \geqslant ۰\}$ حرکت براونی باشد و ضریب $\alpha > ۰$ داده شده باشد. فرایند

$$V(t) \;=\; e^{-\frac{\alpha t}{۲}}\; X\big(a\, e^{\alpha t}\big)$$

را تعریف کنید. نشان دهید $\{V(t),\, t \geqslant ۰\}$ یک فرایند گوسی ایستا است. به این فرایند، فرایند اُرنشتاین–اولن‌بک گفته می‌شود.

(راهنما: حرکت براونی یک فرایند گوسی W_t است که $\mathbb{E}[W_t] = ۰$ و $\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = \min\{t, s\}$.)

مسئله‌ی ۲. (۱۰ نمره)

فرض کنید $W(t)$ یک فرآیند نویز گوسی سفید حقیقی با چگالی طیفی توان دوطرفه

$$S_W(f) = ۳ \quad \text{وات بر هرتز}$$

برای همهٔ فرکانس‌ها باشد. متغیر تصادفی زیر را تعریف کنید:

$$Y \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} W(t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t$$

که در آن

$$\phi(t) = \begin{cases} ۱, & ۵ \leqslant t \leqslant ۷, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

۱. امید ریاضی $\mathbb{E}[Y]$ و واریانس $\mathrm{Var}(Y)$ را محاسبه کنید.

۲. توضیح دهید که چگونه واریانس Y با چگالی طیفی توان $S_W(f)$ ارتباط دارد.

مسئله‌ی ۳. (۱۰ نمره)

فرض کنید سیگنال تصادفی $X(t)$ یک فرآیند گاوسی ایستاست که میانگین آن برابر با μ_X و واریانس آن $\sigma_X^۲$ است. این سیگنال وارد یک سیستم خطی می‌شود که خروجی آن در دو نقطه زمانی متفاوت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$Y(t_۱) = \int_{-\infty}^{\infty} h_۱(\tau)\, X(t_۱ - \tau)\, d\tau, \qquad Z(t_۲) = \int_{-\infty}^{\infty} h_۲(u)\, X(t_۲ - u)\, du.$$

(الف) توزیع احتمال مشترک متغیرهای تصادفی $Y(t_۱)$ و $Z(t_۲)$ را به‌دست آورید.

(ب) برای اینکه بین دو خروجی $Y(t_۱)$ و $Z(t_۲)$ وابسته نباشند، چه شرایطی باید برقرار باشد؟

مسئله‌ی ۴. (۱۲ نمره)

فرض کنید $B(t)$ یک فرآیند وینر با واریانس واحد باشد.

الف. رفتار آماری فرآیندهای زیر را تحلیل کنید. مشخص کنید آیا هر یک از آن‌ها فرآیندهای گاوسی هستند؟ همچنین، میانگین، تابع کوواریانس را تعیین نمایید. در انتها ایستایی هر فرآیند را بررسی کنید.

(i) $X_t := e^{-t} B(e^{۲t}), \quad t \geqslant ۰$

(ii) $X_t := B_t - tB_۱, \quad t \in [۰, ۱]$

ب. نشان دهید که متغیر تصادفی تعریف‌شده توسط انتگرال زیر دارای توزیع نرمال می‌باشد. واریانس آن را نیز بدست آورید.

$$U := \int_۰^T B(s)\, ds$$

پ. با فرض اینکه $B(t)$ فرآیندی وینر با انحراف معیار یک باشد:

- محاسبه کنید:

$$\mathbb{P}(B_۱ + B_۲ \geqslant ۲ \mid B_۱ = ۱)$$

- مقدار امید ریاضی شرطی زیر را به‌دست آورید:

$$\mathbb{E}[B_۲ \mid U]$$

مسئله‌ی ۵. (۱۵ نمره)

الف) نشان دهید که اگر X یک بردار تصادفی گاوسی باشد، آنگاه هر زیر برداری از X (که شامل یک زیر مجموعه از اجزای آن است) نیز یک بردار تصادفی گاوسی خواهد بود. به ویژه، نشان دهید که هر $X_۱, \dots, X_n$ یک متغیر تصادفی گاوسی است.

ب) نشان دهید که یک تبدیل آفینی از یک بردار تصادفی گاوسی، گاوسی است؛ یعنی برای هر ماتریس دلخواه $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و بردار ستونی $b \in \mathbb{R}^m$، نشان دهید که $Y = AX + b$ یک بردار تصادفی گاوسی است. فرض کنید که X دارای بردار میانگین p_X و ماتریس کوواریانس C_X است. بردار میانگین p_Y و ماتریس کوواریانس C_Y را تعیین کنید و تابع چگالی احتمال $f_Y(y)$ را بنویسید.

ج) نشان دهید که اگر $Z_۱, \dots, Z_n$ متغیرهای تصادفی گاوسی مستقل متقابل باشند، آنگاه آنها همچنین متغیر های تصادفی گاوسی توام هستند.

د) یک بردار تصادفی $X = [X_۱, \dots, X_n]^T$ با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس C_X است. نشان دهید که یک ماتریس یکانی $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (به این معنی که $U^TU = UU^T = I$) وجود دارد به طوری که بردار تصادفی $Y := UX$ دارای اجزای بدون همبستگی $Y_۱, \dots, Y_n$ است؛ یعنی ماتریس کوواریانس C_Y قطری است. برای U مشخص شده ، استدلال کنید که اگر X یک بردار تصادفی گاوسی باشد، آنگاه $Y_۱, \dots, Y_n$ مستقل متقابل و گاوسی توام هستند.

مسئله‌ی ۶. (۱۵ نمره)

الف) فرض کنید W یک متغیر تصادفی گاوسی nـ بعدی نرمال‌شده IID باشد و Y یک متغیر تصادفی گاوسی mـ بعدی باشد. فرض کنید می‌خواهیم کوواریانس مشترک $\mathbb{E}[WY^T]$ یک ماتریس حقیقی $n \times m$ دلخواه $[K]$ باشد. ماتریس $[A]$ را طوری پیدا کنید که $Y = [A]W$ به کوواریانس مشترک مورد نظر برسد.

توجه: این نشان می‌دهد که هر ماتریس حقیقی $n \times m$ می‌تواند به عنوان ماتریس کوواریانس مشترک برای برخی متغیرهای تصادفی انتخاب شود.

ب) فرض کنید Z یک متغیر تصادفی گاوسی nـ بعدی با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس **non-singular** $[K_Z]$ باشد و Y یک متغیر تصادفی گاوسی mـ بعدی باشد. فرض کنید می‌خواهیم کوواریانس مشترک $\mathbb{E}[ZY^T]$ یک ماتریس دلخواه $n \times m$ $[K']$ باشد. ماتریس $[B]$ را طوری پیدا کنید که $Y = [B]Z$ به کوواریانس مشترک مورد نظر برسد.

توجه: این نشان می‌دهد که هر ماتریس حقیقی $n \times m$ می‌تواند به عنوان ماتریس کوواریانس مشترک برای برخی متغیرهای تصادفی Z و Y انتخاب شود، جایی که $[K_Z]$ داده شده است (و **non-singular** است).

ج) حال فرض کنید Z در قسمت (b) یک ماتریس کوواریانس **singular** دارد. محدودیت‌هایی که این موضوع بر انتخاب‌های ممکن برای کوواریانس مشترک $\mathbb{E}[ZY^T]$ اعمال می‌کند را توضیح دهید.

راهنمایی: پاسخ شما باید شامل بردارهای ویژه $[K_Z]$ باشد.

مسئله‌ی ۷. (۱۰ نمره)

الف) فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس‌های $\sigma_X^۲$ و $\sigma_Y^۲$ باشند و کوواریانس نرمال‌شده‌ی ρ را داشته باشند. همچنین $V = Y^۳$ تعریف شود. تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|V}(x|v)$ را پیدا کنید.

ب) فرض کنید $U = Y^۲$ باشد. تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|U}(x|u)$ را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۸. (۱۳ نمره)

فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند تصادفی عرض‌ـ پهن (WSS) با میانگین صفر باشد که تابع همبستگی آن به صورت زیر داده شده است:

$$R_X(\tau) \; = \; e^{-|\tau|}$$

این فرآیند به‌عنوان ورودی یک سامانه (LTI) با پاسخ فرکانسی

$$\big|H(f)\big| = \begin{cases} \sqrt{۱ + ۴\pi^۲ f^۲}, & |f| < ۲, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داده می‌شود. خروجی این سامانه را $Y(t)$ در نظر بگیرید.

۱. میانگین $\mu_Y(t) = \mathbb{E}[Y(t)]$ را پیدا کنید.

۲. تابع همبستگی $R_Y(\tau)$ را بیابید.

۳. مقدار $\mathbb{E}[Y(t)^۲]$ را محاسبه کنید.

موفق باشید :)