به نام خدا
علی قاسم زاده
۴۰۱۱۰۹۲۳۹

۱- آ) می‌دانیم که در زنجیره‌ی مارکوف باید همواره در یکی از حالات باشیم، از طرفی تعداد حالات مان محدود است و برابر $M<\infty$ است. حالا اگر استیت‌ها را S_1 — S_M بنامیم، وقتی N تا Transition بزنیم و $N>M$ باشد، با استفاده از اصل لانه کبوتر داریم که حداقل یکی از State ها هست که دوبار تکرار شده، یعنی یک دور بوده که اجرا شده است ← حداقل یک مجموعه‌ی بازگشتی از حالات داریم.

ب) می‌خواهیم نشان دهیم که یک زنجیره‌ی مارکوف ارگودیک با M حالت باید چرخه‌ای با $T<M$ حالت داشته باشد. داشتیم که ergodic markov chain عبارت است از: Irreducible , Aperiodic.

• باید نشان دهیم که یک زنجیره‌ی مارکوف با این خواص، چرخه‌ای با $T<M$ باید داشته باشد:

با توجه به خاصیت Irreducible حداقل یک n داریم که $0<P_{ii}^n$ ، حالا کوچکترین n را T می‌نامیم، خواهیم داشت که T طول مینیمال مسیر است. یعنی مسیری با طول کمتر از T نداریم. حالا این مسیر $T+1$ راس دارد و تنها شرطش $S_0 = S_T$ را داریم و حالا دو حالت پیش می‌آید،

$M<T$: کلا فقط M عضو دارد پس T عضو در آن جا نمی‌شود مگر اینکه یکی از آنها تکرار شده باشد. پس توی مسیرمان دور داریم و به تناقض می‌خوریم چرا که با حذف دور، مسیر کوتاه‌تری خواهیم داشت از i به i.

اگر هم $T=M$ باشد یعنی طول کوتاه‌ترین مسیر از i به i برابر است با M تنها وقتی رخ می‌دهد که هیچ طولی غیر از مضرب‌های M در دسترس نباشد ← خاصیت Aperiodic نخواهیم داشت ✗

← یک زنجیره مارکوف ارگودیک با M حالت، حتماً چرخه‌ای با $T<M$ حالت دارد.

۲- داریم که ۱

$P_{11} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P_{12} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P_{13} = \frac{1}{4}$

$P_{21} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P_{23} = \frac{2}{3}$

$P_{31} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P_{33} = \frac{1}{2}$

می‌خواهیم E این را بدست آوریم که از ① شروع کنیم و به ① برگردیم چندتا Tranision به صورت Expected لازمه؟

$$E_1 = \mathbb{E}\{R \mid X_0 = 1\} = \overbrace{\frac{1}{4} \times 1}^{\text{self loop}} + \overbrace{\frac{1}{2} \times (E_2 + 1)}^{\text{به ۲ بریم بعد به ۱}} + \overbrace{\frac{1}{4}(E_3 + 1)}^{\text{به ۳ بریم بعد به ۱}}$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} E_2 + \frac{1}{4} E_3 + \frac{1}{4} \times 1 = 1 + \frac{1}{2} E_2 + \frac{1}{4} E_3$$

$$E_2 = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3}(1 + E_3) \longrightarrow E_2 = \frac{7}{3}$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2}(1 + E_3) \longrightarrow E_3 = 2$$

$$\Rightarrow E_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{4}(2) = 1 + \frac{7}{6} + \frac{1}{2} = \frac{8}{3}$$

۳-۱. در نظر می‌گیریم که $\pi = [\pi_0, \ldots, \pi_N]$ حالا خواهیم داشت که $P = 1\pi$ پس داریم که ۱

$$P^2 = 1\pi 1\pi = 1(\pi 1)\pi = 1\pi = P \longrightarrow P^n = P \quad \forall n \geq 2$$

۲. داریم که $\pi P = \pi 1 \pi = (\overset{1}{\pi 1})\pi = \pi$ ← π یک توزیع ایستا است.

۳. داریم که ۱

$$Pr(Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n) = \overbrace{Pr(Z_0 = i_0)}^{\pi_{i_0}} \prod_{k=1}^{n} \overbrace{P_{i_{k-1}, i_k}}^{\pi_{i_k}} = \prod_{k=0}^{n} \pi_{i_k} \longrightarrow$$

$Z_0, \ldots, Z_n$ ها مستقل اند و chain ما iid است با توزیع π.

۴- آ) داریم که،

$$\forall i,\ k-1 \geq i \geq 1 : \quad \pi_i = q\pi_{i+1} + p\pi_{i-1}, \qquad \pi_0 = q\pi_0 + q\pi_1 \rightarrow p\pi_0 = q\pi_1$$

حالا به صورت استقرایی فرض می‌کنیم که داریم: $p\pi_{i-1} = q\pi_i$

پایه که برقرار است، حالا برای i فرض می‌کنیم برقرار است، داریم که

$$\pi_i = q\pi_{i+1} + \underbrace{p\pi_{i-1}}_{q\pi_i} = q\pi_{i+1} + q\pi_i \Rightarrow (1-q)\pi_i = q\pi_{i+1} \Rightarrow$$

$$p\pi_i = q\pi_{i+1} \longrightarrow$$ این رابطه همواره برقرار است.

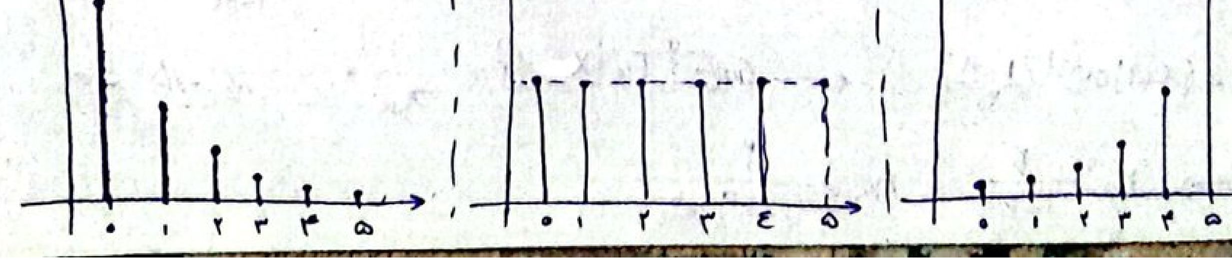
$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{p}{q}\pi_i = \rho\pi_i \rightarrow \pi_i = \rho^i\pi_0 \rightarrow \sum \pi_i = 1, \quad \pi_0 \sum_{i=0}^{k-1} \rho^i = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0\left(\frac{1-\rho^k}{1-\rho}\right) = 1 \rightarrow \pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^k}, \quad \pi_i = \frac{1-\rho}{1-\rho^k}\rho^i \quad 0 \leq i \leq k-1$$

اگر $p=q$ باشد یعنی $\rho=1$، داریم که، $\pi_0 \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k\pi_0 = 1 \rightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{1}{k}}$.

$$\rightarrow \pi_i = \frac{1}{k}$$

ب) داریم که: $\pi_i = \frac{1-\rho}{1-\rho^k}\rho^i$، حالا $\frac{1}{1-\rho^k}$ که برای همه ثابت است، داریم $(1-\rho)\rho^i$ انگار یه توزیع Geom داریم با پارامتر $1-\rho$. حالا، بالاتر دیدیم که اگر $\rho=1$، $\pi_i = \frac{1}{k}$ است و unif خواهد بود توزیعمان. اگر $0<\rho<1$ باشد، توزیع Geom هست و به صورت Geometric کاهش می‌یابد. اگر هم $\rho>1$ باشد π_i به صورت Geom افزایش می‌یابد. نمودار آن نیز به صورت:



ج) داریم که ،

$$\pi_0(K) = \frac{1-\rho}{1-\rho^K}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \text{if } \rho<1 , & \rho^K \to 0, \text{ so } \pi_0(K) \to 1-\rho \\ \text{if } \rho=1 , & \pi_0(K) = \frac{1}{K} \to 0 \\ \text{if } \rho>1 , & \rho^K \to \infty, \text{ so } \pi_0(K) \to 0 \end{cases}$$

حالا $\pi_{K-1}(K)$ را می‌خواهیم بدست آوریم، داریم که :

$$\pi_{K-1}(K) = \pi_0(K)\rho^{K-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^K}\rho^{K-1} = \frac{\rho^{-1}(1-\rho)}{\rho^{-K}-1}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \text{if } \rho<1 , & \rho^{-K} \to \infty \Rightarrow \pi_{K-1}(K) \to 0 \\ \text{if } \rho=1 , & \frac{1}{K} \to 0 \Rightarrow \pi_{K-1}(K) \to 0 \\ \text{if } \rho>1 , & \rho^{-K} \to 0, \text{ so } \pi_{K-1}(K) \to -\rho^{-1}(1-\rho) = 1-\frac{1}{\rho} \end{cases}$$

۵-۱) تعریف می‌کنیم

$$\leftarrow \pi_i = \lim_{n\to\infty} P(X_n=i \mid X_0=i)$$

$$\pi_0 = \pi_1 \times \frac{1}{\alpha+1} \to \pi_1 = (\alpha+1)\pi_0$$

$$\pi_1 = \pi_0 + \frac{1}{\alpha+1}\pi_2 \to \alpha\pi_0 = \frac{1}{\alpha+1}\pi_2 \to \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+1}\pi_0$$

به طور مشابه داریم که $\pi_i = (\alpha+1)\alpha^{i-1}\pi_0$ ، حال خواهیم داشت که ،

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1 \longrightarrow \pi_0 + \pi_0\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha+1)\alpha^{i-1} = 1$$

$$\longrightarrow \pi_0\left(1+(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i\right) = 1 \to \pi_0 = \frac{1}{1+\frac{\alpha+1}{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{2}$$

حالا داریم که $r_K = E\{T_K \mid X_0=K\} = \frac{1}{\pi_K} \longleftarrow \pi_i = (\alpha+1)\alpha^{i-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{2}{1-\alpha} , \quad r_K = \frac{2}{(1-\alpha^2)\alpha^{K-1}}$$

Scanned with CamScanner

۵-۲) اگر $\alpha \leq 1$ باشد $\sum \pi_i$ واگرا خواهد شد، در نتیجه به توزیعی همگرا نخواهد شد ←
باید $\alpha > 1$ باشد تا $\pi_i > 0$ باشد، و تعریف شود. از طرفی اگر $\alpha > 1$ باشد، نشان داده شد که همگرا است.

۶- داریم که ۱

$$P_{11} = \frac{1}{2}, \quad P_{12} = \frac{1}{4}, \quad P_{13} = \frac{1}{4}$$

$$P_{21} = \frac{1}{3}, \quad P_{23} = \frac{2}{3}$$

$$P_{31} = \frac{1}{2}, \quad P_{32} = \frac{1}{2}$$

۱. از آنجایی که از ۱ به ۲ و ۳ می‌توان رفت، از ۲ به ۳ می‌توان رفت، از ۳ به ۱ و ۲ می‌توان رفت
⇐ irreducible است.

۲. از آنجایی که self-loop داریم، و همه‌ی حالت‌ها communicate دارند Aperiodic هستیم.

۳. داریم که ۱

$$\left.\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \rightarrow \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2 + \pi_3 \\
\pi_2 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \\
\pi_3 &= \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_1 \\
\pi_1 &+ \pi_2 + \pi_3 = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi_1 = \frac{16}{35}, \ \pi_2 = \frac{9}{35}, \ \pi_3 = \frac{10}{35}$$

۴. بله اگر زنجیره‌ای غیرقابل کاهش ۱ و بدون دوره ۲ باشد، آنگاه برای هر توزیع اولیه، توزیع حالت‌ها
در زمان $t \to \infty$ به سمت توزیع پایا میل می‌کند ← توزیع پایا یک توزیع حدی نیز هست.