



تمرین سری چهارم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- همکاری و همفکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت همفکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام همفکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله ۱. (۱۵ نمره)

- (آ) نشان دهید که هر زنجیره مارکوف با $M < \infty$ حالت، حداقل یک مجموعه بازگشتی از حالات را شامل می شود.
- (ب) نشان دهید که یک زنجیره مارکوف ارگودیک با M حالت باید چرخه ای با $\tau < M$ حالت داشته باشد.

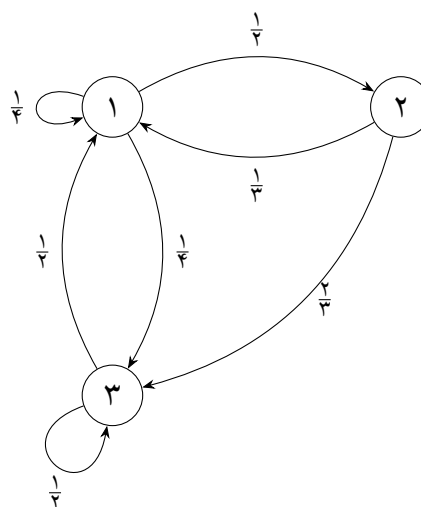
مسئله ۲. (۱۵ نمره)

فرض کنید زنجیره مارکف زیر با فضای حالت $\{1, 2, 3\}$ داده شده است. فرض کنید $X_0 = 1$ باشد و

$$R = \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$$

اولین زمان بازگشت به حالت ۱ است.

$E[R | X_0 = 1]$ را بدست بیاورید.



مسئله‌ی ۳. (۱۵ نمره)

به یک ماتریس احتمال انتقال P از شکل زیر توجه کنید:

$$P = [P_{i,j}]_{0 \leq i,j \leq N} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_N \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_N \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_N \end{bmatrix},$$

که در آن بردار

$$\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N] \in [0, 1]^{N+1}$$

شرط $\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_N = 1$ را ارضا می‌کند.

۱. P^n را برای همه $n \geq 2$ محاسبه کنید.

۲. ثابت کنید که π توزیع پایا (Stationary) است.

۳. ثابت کنید که اگر $\mathbb{P}(Z_0 = i) = \pi_i$ برای $i = 0, 1, \dots, N$ باشد، آنگاه Z_n با $\{Z_k : 0 \leq k < n\}$ مستقل است و هر Z_n i.i.d با توزیع π است.

مسئله‌ی ۴. (۲۰ نمره)

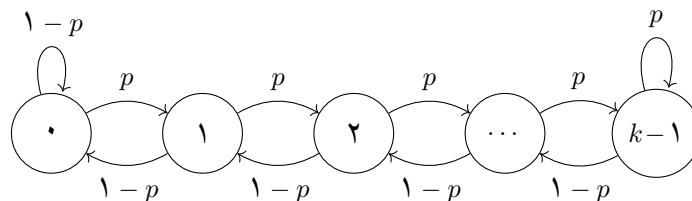
(آ) احتمالات حالت پایدار π_0, \dots, π_{k-1} را برای زنجیره مارکوف زیر بیابید. پاسخ خود را بر حسب نسبت

$$\rho = \frac{p}{q}, \quad q = 1 - p,$$

بیان کنید. به حالت ویژه‌ی $\rho = 1$ توجه داشته باشید.

(ب) نموداری از π_0, \dots, π_{k-1} ترسیم کنید. یک نمودار برای $\rho = \frac{1}{2}$ ، یکی برای $\rho = 1$ و یکی برای $\rho = 2$ رسم کنید.

(ج) حد π_0 را زمانی که $k \rightarrow \infty$ می‌رود بیابید؛ پاسخ‌های جداگانه‌ای برای $\rho < 1$ ، $\rho = 1$ و $\rho > 1$ ارائه دهید. همچنین مقادیر حدی π_{k-1} را برای همین حالات پیدا کنید.



مسئله‌ی ۵. (۲۰ نمره)

$\alpha > 0$ و زنجیره مارکوف با فضای حالت $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ را در نظر بگیرید که ماتریس انتقال آن به صورت زیر است:

$$P_{i,i-1} = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad P_{i,i+1} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad i \geq 1$$

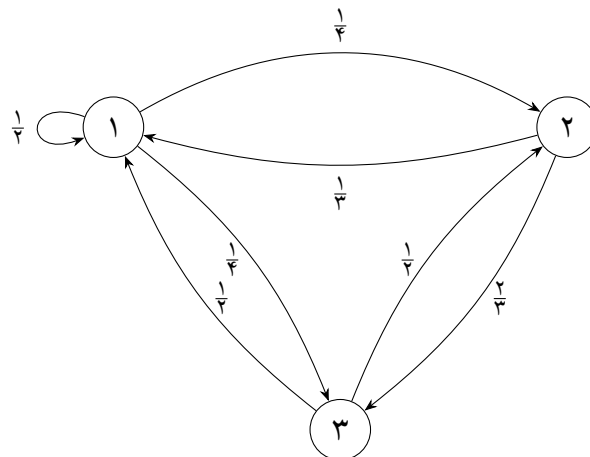
و در حالت ۰ یک مانع بازتاب‌دهنده وجود دارد به طوری که

$$P_{0,1} = 1$$

- زمان بازگشت میانگین $\mathbb{E}[T_k | X_0 = k]$ (زمان بازگشت به حالت k) را برای هر $k \in \mathbb{N}$ محاسبه کنید.
- نشان دهید که این زنجیره بازگشتی مثبت است اگر و تنها اگر $\alpha < 1$.

مسئله ۶. (۱۵ نمره)

زنجیره مارکوف زیر را در نظر بگیرید.



۱. آیا این زنجیره غیرقابل کاهش است؟
۲. آیا این زنجیره بدون دوره (آپر دیویدیک) است؟
۳. توزیع پایای این زنجیره را بیابید.
۴. آیا توزیع پایا یک توزیع حدی برای این زنجیره است؟

(موفق باشید:)