فرایندهای تصادفی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری دوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۱۵ نمره)

هر دو تعریف زیر فرایندهای پواسون استفاده می‌شوند. ثابت کنید این دو تعریف معادل هستند.

به یک فرایند تصادفی $\{N(t) \,:\, t \geqslant 0\}$، یک فرایند پواسون با نرخ λ گویند اگر:

۱.
- $N(0) = 0$
- فرایند افزایش‌های مستقل و ایستا (Independent and Staitionary Increments) دارد.
- $\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- $\mathbb{P}(N(h) \geqslant 2) = o(h)$

۲.
- $N(0) = 0$
- فرایند افزایش‌های مستقل (Independent Increments) دارد.
- $N(s+t) - N(s)$ دارای توزیع پواسون با امید ریاضی λt باشد.

دقت کنید که تابع $f(h)$ از $o(h)$ است اگر $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. همچنین ایده تبدیل توزیع دوجمله‌ای به پواسون تنها در صورتی قابل قبول است که به صورت کاملا دقیق آن را اثبات کنید!

مسئله‌ی ۲. (۱۳ نمره)

۱. فرض کنید T زمان تا اولین رویداد در یک فرآیند با نرخ λ باشد. یک فرمول برای احتمال اینکه اولین رویداد بین زمان‌های t_1 و t_2 (یعنی $0 \leqslant t_1 < t_2$) رخ دهد به دست آورید.

۲. فرض کنید دو فرآیند Poisson مستقل با نرخ‌های λ_1 و λ_2 وجود داشته باشد. احتمال اینکه اولین رویداد از فرآیند اول قبل از اولین رویداد از فرآیند دوم رخ دهد را محاسبه کنید.

۳. احتمال اینکه جمع تعداد رویدادهای دو فرایند پواسون یاد شده در بخش قبل در یک بازه زمانی به طول t دقیقا برابر n باشد را بدست آورید.

۴. با توجه به اینکه دقیقاً n رویداد در بازه $[0, t]$ رخ داده است، احتمال اینکه تمام n رویداد از فرآیند اول منشاء گرفته باشند را محاسبه کنید.

۵. فرض کنید دو فرآیند Poisson مستقل با نرخ‌های λ_1 و λ_2 وجود دارند. فرض کنید N تعداد رویدادهای فرآیند اول قبل از اولین رویداد فرآیند دوم باشد. نشان دهید که N از توزیع Geometric پیروی می‌کند و پارامتر آن را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید دقیقاً n رویداد در یک فرآیند Poisson در بازه $[۰, t]$ رخ داده باشد. نشان دهید که، به شرط وقوع n رویداد، زمان‌های ورود به عنوان order statistics یک متغیر تصادفی مستقل Uniform(0, t) توزیع می‌شوند. منظور از order statistics این است که تعدادی متغیر تصادفی را به طور مستقل از یک توزیع نمونه‌گیری کنید و سپس آن‌ها را مرتب کنید.

مسئله‌ی ۳. (۱۰ نمره)

راننده‌ای خودروی خود را با زمان‌هایی که به صورت یک فرایند پواسون با نرخ μ مدل شده است سرویس می‌کند. اگر ماشین او برای یک بازه زمانی به طول h هیچ سرویسی دریافت نکند، خراب می‌شود و نیاز به تعمیر خواهد داشت. مدت زمان تعمیر این ماشین از یک توزیع نمایی با نرخ λ پیروی می‌کند.

۱. پس از راه‌اندازی ماشین، احتمال اینکه ماشین قبل از دریافت اولین نگهداری خراب شود را بیابید.

۲. مقدار مورد انتظار زمان تا اولین خرابی را بیابید.

۳. نسبت زمانی که ماشین روشن است را بیابید.

مسئله‌ی ۴. (۱۰ نمره)

زمین‌لرزه‌ها در یک منطقه مشخص مطابق با یک فرآیند پواسون با نرخ ۵ در سال رخ می‌دهند.

۱. احتمال اینکه حداقل دو زمین‌لرزه در نیمه اول سال ۲۰۲۰ رخ دهد چقدر است؟

۲. با فرض وقوع رویداد قسمت (۱)، احتمال اینکه هیچ زمین‌لرزه‌ای در ۹ ماه اول سال ۲۰۲۱ رخ ندهد چقدر است؟

۳. با فرض وقوع رویداد قسمت (۱)، احتمال اینکه حداقل چهار زمین‌لرزه در ۹ ماه اول سال ۲۰۲۰ رخ دهد چقدر است؟

مسئله‌ی ۵. (۱۰ نمره)

۱. فرض کنید که $\{N(t) : t \geqslant ۰\}$ یک فرایند تصادفی پواسون با نرخ λ باشد. فرض کنید دو مقدار $s, t \geqslant ۰$ به ما داده شده است. عبارت زیر را ثابت کنید.

$$\mathbb{P}(N(t) = k \mid N(s+t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^k \left(\frac{s}{t+s}\right)^{n-k}$$

دقت کنید که این عبارت بدین معنی‌ست که $N(t)$ به شرط $N(s+t) = n$ از یک توزیع دوجمله‌ای می‌آید.

۲. در ادامه این ایده را به m زمان مختلف $۰ \leqslant t_۱ < \ldots < t_m$ تعمیم می‌دهیم. ثابت کنید که توزیع توام متغیرهای تصادفی $(N(t_۱), N(t_۲) - N(t_۱), \ldots, N(t_m) - N(t_{m-۱}))$ به شرط $N(t_m) = n$، یک توزیع چندجمله‌ای (Multinomial Distribution) با پارامترهای $\frac{t_۱}{t_m}, \frac{t_۲ - t_۱}{t_m}, \ldots, \frac{t_m - t_{m-۱}}{t_m}$ است.

۳. ارتباط بخش دوم این سوال را با یکنواخت بودن توزیع وقایع یک فرایند پواسون به شرط دانستن تعداد این وقایع را بیان کنید.

مسئله‌ی ۶. (۱۵ نمره)

$N(t)$ یک فرآیند non-homogeneous Poisson روی بازه $[0,1]$ با تابع شدت $\lambda(t)$ و تابع شدت تجمعی زیر باشد:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds.$$

حال فرض کنید که $N(1) = n$ و زمان‌های ورود مرتب‌شده را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < 1.$$

۱. نشان دهید که تابع چگالی احتمال توام (PDF) برای $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ به شرط $N(1) = n$ برابر است با:

$$f_{T_1,\ldots,T_n|N(1)=n}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{n!}{[\Lambda(1)]^n} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i), \quad 0 < t_1 < \cdots < t_n < 1.$$

۲. فرض کنید که:

$$\lambda(t) = \alpha t^{\alpha-1}, \quad t \in [0, 1], \quad \alpha > 0.$$

در این صورت:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha s^{\alpha-1} ds = t^\alpha, \quad \Lambda(1) = 1.$$

به شرط اینکه $N(1) = n$ باشد، مقدار $E[T_1]$ را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۷. (۱۳ نمره)

فرایند بیشینه پواسون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M(t) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{N(t)}\}$$

به صورتی که $N(t)$ یک فرایند پواسون با نرخ λ می‌باشد و $X_1, \ldots, X_{N(t)}$ نمونه‌های مستقل از توزیع نمایی با نرخ μ می‌باشند. دقت کنید که صرفا تعداد نمونه‌های گرفته شده به فرایند پواسون $N(t)$ ربط دارد و هر نمونه به طور مستقل از توزیع نمایی یاد شده گرفته شده است.

۱. تابع توزیع تجمیعی یا CDF فرایند $M(t)$ را محاسبه کنید.

۲. نشان دهید به ازای t به اندازه کافی بزرگ، داریم $\mathbb{E}[M(t)] \leqslant \frac{2\ln(\lambda t)}{\mu}$.

مسئله‌ی ۸. (۱۳ نمره)

فرض کنید:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

که در آن $N(t)$ یک فرآیند homogeneous Poisson با نرخ λ است و مجموعه متغیرهای تصادفی $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ مستقل و هم‌توزیع (i.i.d.) هستند که تابع مولد گشتاور (MGF) آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX_1}],$$

دقت کنید که همانند سوال قبل، صرفا تعداد این متغیرها به فرایند پواسون $N(t)$ ربط دارد و هر متغیر تصادفی دارای تابع مولد گشتاور یاد شده است.

۱. تابع مولد گشتاور $M_{Y(t)}(s) = \mathbb{E}[e^{sY(t)}]$ را بر حسب λ و $M_X(s)$ استخراج کنید.

۲. با استفاده از نتیجه بخش (الف)، امید ریاضی $\mathbb{E}[Y(t)]$ و واریانس $\mathrm{Var}(Y(t))$ را به دست آورید.

۳. با فرض اینکه $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$، اثبات کنید که با میل $t \to \infty$، داریم:

$$\frac{Y(t) - \mathbb{E}[Y(t)]}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y(t))}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

موفق باشید :)