فرایندهای تصادفی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری پنجم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۱۰ نمره)

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $\mathcal{N}(0, \theta)$ باشند. ما می‌خواهیم از آمار

$$Y = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

برای برآورد انحراف معیار $\sqrt{\theta}$ استفاده کنیم.

آ) بگذارید $W = cY$ با یک ثابت c. مقدار c را طوری تعیین کنید که W برآوردگری بدون بایاس برای $\sqrt{\theta}$ باشد.

مسئله‌ی ۲. (۱۰ نمره)

فرض کنید فضای پارامتر طبیعی Θ متناهی باشد.

آ) فرض کنید آمارهٔ $T(X)$ این خاصیت را دارد که برای هر توزیع پیشین روی θ، توزیع پسین θ تنها از طریق $T(X)$ به X وابسته باشد. نشان دهید $T(X)$ کافی است.

ب) بالعکس، نشان دهید که اگر $T(X)$ کافی باشد، آنگاه برای هر توزیع پیشین، توزیع پسین تنها از طریق $T(X)$ به X وابسته خواهد بود.

مسئله‌ی ۳. (۱۰ نمره)

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای از یک جامعه با یکی از چگالی‌های زیر باشد. یک آمارهٔ کافی برای θ بیابید.

آ) چگالی بتا:

$$p_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1,\ \theta > 0.$$

ب) چگالی ویبول:

$$p_\theta(x) = \theta\, a\, x^{a-1} \exp\left(-\theta\, x^a\right), \quad a > 0 \text{ ثابت},\ x > 0,\ \theta > 0.$$

ج) چگالی پارتو:

$$p_\theta(x) \;=\; \frac{\theta\, a^\theta}{x^{\theta+1}}, \quad a > 0 \text{ ثابت}, \; x > a, \; \theta > 0.$$

مسئله‌ی ۴. (۱۰ نمره)

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع از $N(\theta, 1)$ باشند، که $\theta \in \mathbb{R}$ نامعلوم است. بگذارید

$$\psi \;=\; P_\theta(X_1 > 0).$$

آ) برآوردگر درست‌نمایی بیشینه $\hat{\psi}$ برای ψ را بیابید.

ب) بگذارید

$$Y_i = \mathbf{1}\{X_i > 0\} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \tilde{\psi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

نشان دهید $\tilde{\psi}$ برآوردگری همگرا (consistent) به ψ است.

ج) توزیع مجانبی هر دو برآوردگر $\hat{\psi}$ و $\tilde{\psi}$ را بیابید و توضیح دهید کدام یک از نظر آماری ارجح است و چرا.

مسئله‌ی ۵. (۱۰ نمره)

فرض کنید X دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 4$ و $\beta = \theta > 0$ باشد.

آ) اطلاعات فیشر $I(\theta)$ را بیابید.

ب) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $\mathrm{Gamma}(4, \theta)$ باشند. برآوردگر بیشینه‌ی درست‌نمایی $\hat{\theta}$ را برای θ بیابید و نشان دهید که این برآوردگر کارآمد است.

مسئله‌ی ۶. (۱۵ نمره)

آ) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع برنولی و پارامتر p باشند.

(۱) یک آمارهٔ کافی برای p بنویسید.

(۲) یک برآوردگر بدون بایاس برای $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$ با استفاده از فقط X_1 و X_2 پیدا کنید.

(۳) با به‌کارگیری قضیهٔ رائو—بلک‌ول، یک برآوردگر بدون بایاس بهتر برای $p(1-p)$ به‌دست آورید.

ب) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $\mathrm{Exp}(\lambda)$ باشند، که $\lambda > 0$ است.

(۱) یک آمارهٔ کافی برای λ بیابید.

(۲) یک برآوردگر بدون بایاس برای میانگین توزیع $\mathrm{Exp}(\lambda)$ بر اساس تنها X_1 پیدا کنید و سپس با به‌کارگیری قضیهٔ رائو—بلک‌ول آن را بهبود دهید.

(۳) واریانس برآوردگر اولیه و برآوردگر بهبود یافته را مقایسه کنید.

مسئله‌ی ۷. (۱۵ نمره)

فرض کنید $Y_1,\dots,Y_n$ نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع باشند:

$$Y_i = \begin{cases} 0, & \text{with prob.} \quad 1-\theta, \\ X_i, & \text{with prob.} \quad \theta, \end{cases} \qquad X_i \sim \mathrm{Exp}(\beta)\ , \qquad 0<\theta<1.$$

مشاهدات ما شامل همه صفرها و مقادیر مثبت $\{Y_i\}$ است. درباره θ به سوالات زیر پاسخ دهید:

آ) تابع چگالی مشترک $f(y_1,\dots,y_n \mid \theta)$ را بنویسید و با Neyman Factorization، مجموعه‌ای از آماره های کافی برای θ را شناسایی کنید.

ب) نشان دهید

$$N_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{Y_i = 0\}, \qquad S_+ = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

minimal sufficient هستند.

ج) توضیح دهید چرا S_+ هیچ اطلاعات اضافی دربارهٔ θ ارائه نمی‌دهد وقتی N_0 معلوم باشد، اما همچنان باید در آمار حدی کافی ظاهر شود.

د) یک برآوردگر بدون بایاس برای θ^2 بیابید که کرامر—راو کمینه را برآورده کند و تنها به N_0 وابسته باشد.

مسئله‌ی ۸. (۱۵ نمره)

فرض کنید $\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n \sim N_p(\boldsymbol{\mu},\sigma^2 I_p)$ i.i.d. با σ^2 معلوم باشد و تابع

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \|\boldsymbol{\mu}\|^2$$

تعریف شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آ) نشان دهید

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}\|^2$$

آماره کامل (complete) و کافی برای $\boldsymbol{\mu}$ هستند.

ب) برآوردگر naive

$$Q = \|\mathbf{X}_1\|^2 - p\,\sigma^2$$

را در نظر بگیرید و ثابت کنید $\mathbb{E}[Q] = \|\boldsymbol{\mu}\|^2$.

ج) با استفاده از قضیه رائو—بلک‌ول، برآوردگر

$$\hat{g} \;=\; \mathbb{E}\big[Q \mid \bar{\mathbf{X}},\, S\big]$$

را تعریف و نشان دهید که

$$\hat{g} \;=\; \|\bar{\mathbf{X}}\|^2 - \frac{\sigma^2}{n}.$$

د) واریانس‌های $\mathrm{Var}(Q)$ و $\mathrm{Var}(\hat{g})$ را محاسبه کنید و رابطهٔ

$$\mathrm{Var}(\hat{g}) \;<\; \mathrm{Var}(Q)$$

را اثبات کنید.

ه) نتیجه بگیرید که $\hat{g}$ برآوردگر بدون بایاس با واریانس کمینه (UMVUE) برای $g(\boldsymbol{\mu}) = \|\boldsymbol{\mu}\|^۲$ است. (UMVUE به معنای "Uniformly Minimum-Variance Unbiased Estimator" یا برآوردگری است که هم بدون بایاس است و هم واریانس آن در میان همهٔ برآوردگرهای بدون بایاس مینیمم است.) همچنین نشان دهید که برای $p = ۱$، $\hat{g}$ حد کرامر—راو را برآورده می‌کند.

مسئله‌ی ۹. (۱۵ نمره)

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ i.i.d. دارای توزیع $\mathrm{Beta}(\theta, \theta)$ با چگالی

$$f_\theta(x) = \frac{\Gamma(۲\theta)}{\Gamma(\theta)^۲}\, x^{\theta-۱}(۱-x)^{\theta-۱}, \quad ۰ < x < ۱,\ \theta > ۰.$$

در نظر بگیرید

$$L_i = \ln X_i, \quad R_i = \ln(۱ - X_i), \quad \overline{L+R} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(L_i + R_i),$$

همچنین برای هر $x > ۰$ توابع دیگاما و تری‌گاما را به‌ترتیب به صورت

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) \quad \text{و} \quad \psi_۱(x) = \frac{d^۲}{dx^۲}\ln\Gamma(x)$$

تعریف می‌کنیم.

آ) نشان دهید log-likelihood به صورت زیر است:

$$\ell_n(\theta) = n\big[\ln\Gamma(۲\theta) - ۲\ln\Gamma(\theta)\big] + (\theta - ۱)\sum_{i=۱}^{n}(L_i + R_i),$$

و مشتق آن برابر است با

$$\ell_n'(\theta) = n\big[\psi(۲\theta) - ۲\psi(\theta)\big] + \sum_{i=۱}^{n}(L_i + R_i).$$

ب) ثابت کنید $\ell_n'(\theta)$ به‌طور صریح در بازه $(۰, \infty)$ نزولی است و نتیجه بگیرید که معادلهٔ امتیاز یک جواب یکتا دارد:

$$\psi(۲\hat{\theta}) - \psi(\hat{\theta}) = -\overline{L+R}.$$

ج) نشان دهید اگر $\hat{\theta}_n$ برآوردگر بیشینه درست‌نمایی باشد آنگاه $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_۰$.

د) asymptotic normality زیر را نشان دهید:

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta_۰) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(۰,\ [\psi_۱(\theta_۰) - \psi_۱(۲\theta_۰)]^{-۱}\Big).$$

ه) با توجه به اینکه $\mathbb{E}[X] = \frac{۱}{۲}$ و $\mathrm{Var}(X) = \frac{۱}{۴(۲\theta+۱)}$، تخمین MOM زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{\theta}_n = \frac{۱}{۸\,\widehat{V}_n} - \frac{۱}{۲}, \quad \widehat{V}_n = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\Big(X_i - \tfrac{۱}{۲}\Big)^۲.$$

نشان دهید

$$\sqrt{n}\,(\tilde{\theta}_n - \theta_۰) \xrightarrow{d} N(۰,\ ۱۲۸\,(۲\theta_۰ + ۱)^۳).$$

و) واریانس‌های هر دو برآوردگر را مقایسه کرده و نشان دهید $\hat{\theta}_n$ از نظر آماری به صورت asymptotically کاراتر از $\tilde{\theta}_n$ است.

مسئله‌ی ۱۰. (۱۵ نمره)

فرض کنید $\{N_t : t \geqslant ۰\}$ فرآیند پواسون غیرهمگن روی بازهٔ $[۰, T]$ باشد با شدت

$$\lambda(t; \alpha, \beta) = \alpha\, e^{\beta t}, \quad \alpha > ۰,\ \beta \in \mathbb{R},$$

و فرض کنید زمان‌های وقوع رویداد تا افق ثابت $T > ۰$ عبارت باشند از $(T_۱, \dots, T_{N_T})$. برای استنباط پارامتر $\theta = (\alpha, \beta)$ مسئله‌های زیر را حل کنید:

آ) تابع درست‌نمایی مشترک $L(\alpha, \beta)$ برای دادهٔ مشاهده‌شده را بدست آورید و نشان دهید log-likelihood آن در پارامترهای بازتبدیل‌شده $(\ln\alpha, \beta)$ به‌طور صریح مقعر است.

ب) برآوردگر بیشینهٔ درست‌نمایی $(\hat{\alpha}_T, \hat{\beta}_T)$ را محاسبه کنید و ثابت کنید که این برآوردگرها بیشینه‌کننده‌های یکتای درست‌نمایی هستند.

ج) با فرض $T \to \infty$، همگرا بودن و asymptotic normality $(\hat{\alpha}_T, \hat{\beta}_T)$ را اثبات کنید. به‌ویژه ماتریس اطلاعات فیشر $I(\alpha, \beta; T)$ را محاسبه کرده و نشان دهید

$$\sqrt{T}\left[(\hat{\alpha}_T, \hat{\beta}_T) - (\alpha, \beta)\right] \xrightarrow{d} N(۰,\ I(\alpha, \beta)^{-۱}).$$

مسئله‌ی ۱۱. (۱۵ نمره)

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی باشند با مشخصات زیر:

$$P(Y = ۰) = ۱ - P(Y = ۱) = \alpha, \quad \alpha \in (۰, ۱),$$

$$X \mid Y = ۰ \sim N(۰, \sigma^۲), \qquad X \mid Y = ۱ \sim N(\mu, \sigma^۲).$$

آ) توزیع شرطی Y را با توجه به X بیابید، یعنی $P(Y = ۱ \mid X = x)$.

ب) فرض کنید از این جمعیت، نمونه‌ای .i.i.d به صورت

$$(X_i, Y_i), \quad i = ۱, \dots, n$$

در اختیار دارید. تابع درست‌نمایی را بنویسید و برآوردگرهای بیشینه‌ی درست‌نمایی $\hat{\alpha}_n$، $\hat{\mu}_n$ و $\widehat{\sigma}^۲_n$ را بیابید.

ج) توزیع‌های مجانبی $\hat{\alpha}_n$، $\hat{\mu}_n$ و $\widehat{\sigma}^۲_n$ را بیان کنید.

موفق باشید :)