به نام خدا

بهینه‌سازی محدب ۱ (۲۵۷۵۶)

تمرین شماره ۴

نیم‌سال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

سوالات این تمرین از مسائل مرجع اصلی درس و مسائل تکمیلی آن انتخاب شده‌اند. لطفاً از نسخه قرار داده‌شده در *CW* برای کتاب (*Convex Optimization*) و مسائل تکمیلی (*Convex Optimization Additional Exercises*) استفاده کنید.

۱- مسائل شامل نرم ۱ و بی‌نهایت (سوال ۴.۱۱ کتاب، بخش‌های *b* و *e*)

۲- مدل‌سازی مسائل بهینه‌سازی (سوال ۴.۲۰ کتاب)

۳- مساله *QP* مقاوم (سوال ۴.۲۸ کتاب)

۴- بهینه‌سازی مقدار ویژه تعمیم‌یافته (سوال ۴.۴۸ کتاب)

۵- انتخاب نوع *Solver* (سوال ۴.۶ مسائل تکمیلی)

۶- مکمل شور و نمایش *LMI* (سوال ۴.۸ مسائل تکمیلی)

۷- فرآیند محدب-مقعر (سوال ۴.۴۴ مسائل تکمیلی، بخش‌های *a* و *b*)

۸- سوال امتیازی: مساله *QCQP* غیر محدب

مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{x},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{S}^n$ هستند. به وضوح این مساله غیرمحدب است ولی در این تمرین خواهیم دید که می‌توان آن را به صورت معادل به یک مساله محدب تبدیل کرد.

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0\end{aligned}$$

الف) طبق قضیه‌ای در جبرخطی (که در تمرین اول دیدیم)، در صورتی‌که یک ترکیب خطی مثبت معین از دو ماتریس $\mathbf{A},\mathbf{B}$ وجود داشته باشد، می‌توان این دو ماتریس را در یک پایه قطری کرد. فرض کنید که چنین شرایطی برقرار باشد. یعنی داشته باشیم: $\mathbf{A}=\mathbf{P}^T diag(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{P},\ \mathbf{B}=\mathbf{P}^T diag(\boldsymbol{\beta})\mathbf{P}$. با جای‌گذاری نسخه قطری‌شده $\mathbf{A},\mathbf{B}$ در مساله اولیه و تعریف $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{P}^{-T}\mathbf{b}$ و تغییر متغیر $\mathbf{y}=\mathbf{P}\mathbf{x}\odot\mathbf{P}\mathbf{x}$ ($\odot$ ضرب درایه به درایه است)، نشان دهید که مساله فوق معادل مساله محدب زیر بوده و پاسخ مساله اولیه را بر حسب پاسخ این مساله بیان کنید.

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{y}} \quad & \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{y} - 2|\boldsymbol{\gamma}|^T\sqrt{\boldsymbol{y}} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y} = 0 \\ & \boldsymbol{y} \geq 0\end{aligned}$$

ب) مساله ۴.۳۳ از مسائل تکمیلی را حل کرده و ارتباطش را با مساله قسمت الف بیان کنید.