به نام خدا

علی قاسم زاده ۴۰۱۱۰۶۳۳۹

۱- a) مجموعه‌ی $\{x \mid \alpha \le a^Tx \le b\}$ ، اشتراک دو نیم‌صفحه‌ی $\{x \mid a^Tx \le b\}$ , $\{x \mid \alpha \le a^Tx\}$ است.

هر نیم‌صفحه نیز یک مجموعه‌ی محدب است ← این مجموعه نیز یک مجموعه‌ی محدب است.

b) مجموعه‌ی $\{x\in R^n \mid \alpha_i \le x_i \le \beta_i, i=1,\dots,n\}$ ، یک مجموعه‌ی محدب است، زیرا اشتراک تعداد متناهی از مجموعه‌های محدب است، در واقع اشتراک این مجموعه‌ها است: $\bigcap_k \underbrace{\{x \in R^n \mid \alpha_k \le x_k \le \beta_k\}}$

اگر از این مجموعه‌ها روی k های ۱ تا n اشتراک بگیریم مجموعه‌ای که صورت سوال داده است حاصل می‌شود، همچنین هرکدام از مجموعه‌ها نیز محدب است (هر کدام از مجموعه‌های $\{x\in R^n \mid \alpha_k \le x_k \le \beta_k\}$ خودش اشتراک دوتا مجموعه‌ی محدب است.) ⇐ $\boxed{\text{در کل مجموعه‌ی } \{x\in R^n \mid \alpha_i \le x_i \le \beta_i, i=1,\dots,n\} \text{ محدب است.}}$

c) مجموعه‌ی $\{x\in R^n \mid a_1^Tx \le b_1, a_2^Tx \le b_2\}$ اشتراک دو مجموعه‌ی $\{x\in R^n \mid a_1^Tx \le b_1\}$ , $\{x \in R^n \mid a_2^Tx\le b_2\}$ است که هرکدام از این دو مجموعه یک نیم‌صفحه است که یعنی هر دوتای این مجموعه‌ها محدب هستند ⇐ اشتراک آنها هم محدب است ← $\boxed{\{x\in R^n \mid a_1^Tx \le b_1, a_2^Tx \le b_2\} \text{ نیز یک مجموعه‌ی محدب است.}}$

d) مجموعه‌ی $\{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2 \text{ for all } y\in S\}$ برابر است با اشتراک تمام مجموعه‌های $\{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2\}$ به ازای یک y فیکس

یعنی اگر y را فیکس کنیم مجموعه‌ی صورت سوال برابر می‌شود با: $\bigcap_{y\in S} \{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2\}$

حالا داریم که:

$$\|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2 \longleftrightarrow \|x-x_0\|_2^2 \le \|x-y\|_2^2 \longleftrightarrow (x^T-x_0^T)(x-x_0) \le (x^T-y^T)(x-y)$$

$$\longleftrightarrow x^Tx - 2x^Tx_0 + x_0^Tx_0 \le x^Tx - 2x^Ty + y^Ty \longleftrightarrow -2x^Tx_0 + x_0^Tx_0 \le -2x^Ty + y^Ty$$

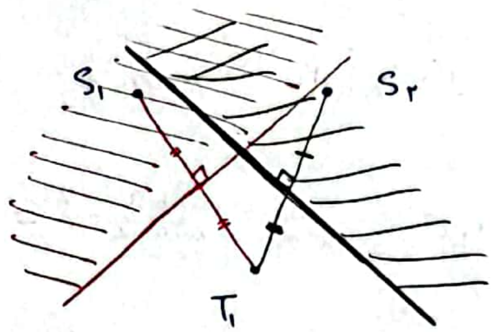
$$\longleftrightarrow 2x^Ty - 2x^Tx_0 \le y^Ty - x_0^Tx_0 \longleftrightarrow \underbrace{2(y-x_0)^T}_{a=2(y-x_0)} x \le \underbrace{y^Ty - x_0^Tx_0}_{b}$$

$x_0$ و $y$ فیکس هستند

$\longleftrightarrow a^Tx \le b \longleftrightarrow$ فرم یک نیم‌صفحه $\longrightarrow$ $\boxed{\text{مجموعه‌ی صورت سوال یک مجموعه‌ی محدب است}}$ زیرا اشتراک نیم‌صفحه‌ها است.

e) مجموعه‌ی $\{X \mid dist(X,S) \le dist(X,T)\}$ به صورت کلی محدب نیست، با یک مثال نقض در $R^2$ این موضوع را نشان می‌دهیم، در نظر بگیرید: $S=\{S_1, S_2\}$ (دوتا نقطه دارد)، و $T=\{T_1\}$ (یک نقطه دارد).

حالا به این شکل دقت کنید،

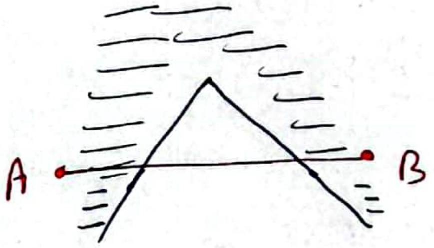



مجموعه نقاطی که فاصله‌شان از $S_1$ کمتر مساوی فاصله‌شان از T است عبارتند از ناحیه‌ی هاشور خورده‌ی قرمز

مجموعه نقاطی که فاصله‌شان از $S_2$ کمتر مساوی فاصله‌شان از T است عبارتند از ناحیه‌ی هاشور خورده‌ی سیاه. نواحی هاشور خورده اینگونه بدست می‌آیند که ما عمود منصف بین $S_1$ و $T_1$، سپس بین $S_2$ و $T_1$ را رسم کنیم و نقاط نزدیک‌تر به $S_1$ و $S_2$ را برداریم، حالا اگر بخواهیم داشته باشیم مجموعه‌ی صورت سوال را یعنی

$$\inf\{dist(X,S_1), dist(X,S_2)\} \le dist(X,T_1)$$

آنگاه اجتماع دو ناحیه‌ی هاشور زده مجموعه‌ی Xهای قابل قبول ما خواهد بود $\Leftarrow$




مجموعه‌ی Xهای قابل قبول به شکل مقابل است: که واضحاً این شکل یک مجموعه‌ی محدب نیست برای مثال با وصل کردن A و B، پاره خط بینشان به صورت کامل در این مجموعه نمی‌افتد ← **مجموعه‌ی صورت سوال convex نیست.**

f) مجموعه‌ی $\{X \mid X+S_2 \subseteq S_1\}$ در صورتی که $S_1$ مجموعه‌ای محدب باشد و $S_1, S_2 \subseteq R^n$ باشند عبارت است از: اشتراک تمام اعضای $S_2$ در صورتی که X + اون عضو، عضو $S_1$ باشد.

$$\bigcap_{Y\in S_2}\{X \mid X+Y \in S_1\} \to \bigcap_{Y\in S_2}(S_1 - Y)$$

به ازای یک Y فیکس $S_1-Y$ تمام ایکس‌هایی را می‌دهد که $X+Y \in S_1$ است، حالا باید روی Y اشتراک بگیریم چون به ازای تمام اعضای $S_2$ باید داشته باشیم که $X+Y \in S_1$ ← حاصل $\bigcap_{Y\in S_2}(S_1-Y)$ است که اشتراک یک سری مجموعه‌ی محدب است $\Leftarrow$ **مجموعه‌ی صورت سوال محدب است.**

و) مجموعه‌ی $\{x \mid \|x-a\|_2 \le \theta \|x-b\|_2\}$ عبارت است از:

$$\{x \mid \|x-a\|_2^2 \le \theta^2 \|x-b\|_2^2\} = \{x \mid (x-a)^T(x-a) \le \theta^2 (x-b)^T(x-b)\}$$

$$= \{x \mid x^Tx - 2a^Tx + a^Ta \le \theta^2 x^Tx - 2\theta^2 b^Tx + \theta^2 b^Tb\} =$$

$$\{x \mid (1-\theta^2)x^Tx - 2(a-\theta^2 b)^T x + a^Ta - \theta^2 b^Tb \le 0\}$$

حالا اگر $\theta = 1$ باشد، معادلهٔ ما یک معادله نیم‌صفحه است: $\{x \mid -2(a-\theta^2 b)^T x \le \theta^2 b^Tb - a^Ta\}$

دگرنه: $1-\theta^2 > 0$ پس خواهیم داشت، مجموعهٔ بالا برابر است با:

$$\{x \mid x^Tx - 2\left(\frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\right)^T x + \frac{a^Ta - \theta^2 b^Tb}{1-\theta^2} \le 0\} =$$

$$\{x \mid (x - \overset{x_0}{\frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}})^T(x - \overset{x_0}{\frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}}) + \frac{a^Ta - \theta^2 b^Tb}{1-\theta^2} - x_0^Tx_0 \le 0\} =$$

$$\{x \mid (x-x_0)^T(x-x_0) \le \underbrace{x_0^Tx_0 - \frac{a^Ta - \theta^2 b^Tb}{1-\theta^2}}_{\|x_0\|_2^2 + \frac{\theta^2\|b\|_2^2 - \|a\|_2^2}{1-\theta^2} \to R^2}\}$$

$$= \{x \mid (x-x_0)^T(x-x_0) \le \underbrace{\left\|\frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\right\|_2^2 + \frac{\theta^2\|b\|_2^2 - \|a\|_2^2}{1-\theta^2}}_{R^2}\}$$

$$= \{x \mid (x-x_0)^T(x-x_0) \le R^2\} \longrightarrow$$ این عبارت هم فرم یک ball است

که محدب است $\Leftarrow$ $\boxed{\text{عبارت صورت سوال یک مجموعهٔ محدب است.}}$

Scanned with CamScanner

۲- a)

$$V=\{x\in R^n \mid \|x-x_0\|_2\le\|x-x_i\|_2,\ i=1,\dots,k\}=$$

$$\{x\in R^n \mid \|x-x_0\|_2^2\le\|x-x_i\|_2^2,\ i=1,\dots,k\}=\{x\in R^n \mid (x-x_0)^T(x-x_0)\le(x-x_i)^T(x-x_i),\ i=1,\dots,k\}$$

$$=\{x\in R^n \mid \cancel{x^Tx}-2x^Tx_0+x_0^Tx_0\le\cancel{x^Tx}-2x^Tx_i+x_i^Tx_i,\ i=1,\dots,k\}=$$

$$=\{x\in R^n \mid \underbrace{(2x_i-2x_0)^T}_{a_i}x\le\underbrace{x_i^Tx_i-x_0^Tx_0}_{b_i},\ i=1,\dots,k\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}2x_1^T-2x_0^T\\ \vdots\\ 2x_k^T-2x_0^T\end{bmatrix}}_{A}x\le\underbrace{\begin{bmatrix}x_1^Tx_1-x_0^Tx_0\\ \vdots\\ x_k^Tx_k-x_0^Tx_0\end{bmatrix}}_{b}\Rightarrow Ax\le b$$

$\Leftarrow$ $\{x|Ax\le b\}$ به شرطی که $A$ و $b$ به ترتیب ماتریس و بردار بالا باشند، جواب‌های مجموعه‌ی Voronoi همان جواب‌های $\{x|Ax\le b\}$ است که $\{x|Ax\le b\}$ اشتراک یک سری نیم‌صفحه است و در واقع یک polyhedron است ← مجموعه جواب‌های مجموعه‌ی Voronoi یک polyhedron است.

b) حالا باید برعکس این را بدست بیاوریم یعنی مجموعه‌ی $\underbrace{\{x|Ax\le b\}}_{S}$ را داریم. باید آنرا به یک مجموعه‌ی Voronoi تبدیل کنیم.

$$S=\{x|Ax\le b\}=\{x \mid a_i^Tx\le b_i\quad i=1,\dots,k\}$$

حالا یک $x_0$ انتخاب می‌کنیم از مجموعه‌ی $\{x|Ax<b\}$، سپس $x_i$ها را از روی آن می‌سازیم:

Voronoi برابر بود با اشتراک نقاطی که فاصله‌شان از $x_0$ کمتر مساوی فاصله‌شان از $x_i$ باشد ← صفحه‌ی $a_i^Tx=b_i$ را در نظر بگیریم، $x_0$ یک سمت آن قرار دارد. حالا اگر نسبت به این صفحه $x_0$ را بازتاب دهیم و نقطه حاصل را $x_i$ بنامیم، $a_i^Tx\le b_i$ شامل نقاطی است که در سمتی که $x_0$ در آن سمت $a_i^Tx=b_i$ قرار دارد، قرار می‌گیرند. نقاط تساوی همان صفحه $a_i^Tx=b_i$ است ← فاصله این نقاط از $x_0$ کمتر مساوی $x_i$ است، زیرا فاصله $x_i$ و $x_0$ از صفحه یکسان است پس نقاطی که در سمتی که $x_0$ نسبت به صفحه $a_i^Tx=b_i$ قرار دارد، هستند، فاصله‌شان از $x_0$ کمتر مساوی فاصله‌شان از $x_i$ است.

Scanned with CamScanner

نقاط گفته شده کل نقاطی هستند که فاصله شان از $x_0$ کمتر از فاصله شان از $x_i$ است.

← برای اینکه $x_i$ بازتاب $x_0$ نسبت به $a_i^Tx=b_i$ باشد، باید داشته باشیم: ($a_i$ بردار نرمال صفحه است)

$$x_i = \lambda a_i + x_0 \quad , \quad b_i - a_i^T x_0 = a_i^T x_i - b_i$$

$$\Rightarrow b_i - a_i^T x_0 = a_i^T(\lambda a_i + x_0) - b_i \Rightarrow 2b_i - 2a_i^T x_0 = \lambda a_i^T a_i$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2(b_i - a_i^T x_0)}{a_i^T a_i} \longrightarrow \boxed{x_i = x_0 + \frac{2(b_i - a_i^T x_0)}{a_i^T a_i} a_i}$$

بدین ترتیب تمام $x_i$ها را می‌سازیم.

$$\|x - x_0\|_2^2 \le \|x - x_i\|_2^2 \leftrightarrow -2x^T x_0 + x_0^T x_0 \le -2x^T x_i + x_i^T x_i \leftrightarrow$$

$$2(x_i - x_0)^T x \le x_i^T x_i - x_0^T x_0 \leftrightarrow 2\lambda a_i^T x \le \cancel{x_0^T x_0} + 2\lambda a_i^T x_0 + \lambda^2 a_i^T a_i - \cancel{x_0^T x_0}$$

$$\leftrightarrow 2\lambda a_i^T x \le 2\lambda a_i^T x_0 + \lambda^2 a_i^T a_i$$

$$\leftrightarrow a_i^T x \le a_i^T x_0 + \frac{\lambda}{2} a_i^T a_i = a_i^T x_0 + \frac{(b_i - a_i^T x_0)}{\cancel{a_i^T a_i}} \cancel{(a_i^T a_i)} = b_i$$

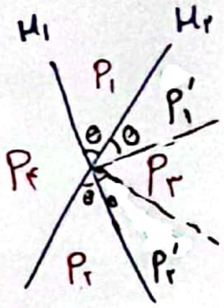
$$\leftrightarrow \boxed{a_i^T x \le b_i}$$

همچنین الان معادل بودن این دو مورد را نیز نشان دادیم.

Scanned with CamScanner

c) به صورت کلی نمی‌توانند برقرار باشند، یعنی $P_1$ —— $P_m$ ای که $int P_i \cap int P_j = \emptyset$ , $\bigcup_{i=1}^{m} P_i = R^n$ for $i \neq j$

همواره نمی‌توانند به صورت مجموعه Voronoi توصیف شوند. برای مثال:




$P_4$ و $P_3$ و $P_2$ و $P_1$ را در نظر بگیرید.

مجموعه‌ی $P_1'$ و $P_2'$ از جدا کردن ناحیه‌هایی با زاویه‌ی θ از $P_3$ بدست می‌آیند، و θ زاویه‌ای است که مجموعه‌ی $P_1$ دارد. حالا θ را طوری انتخاب کنیم که

$$3\theta < 180^\circ \longrightarrow \theta < 90^\circ$$

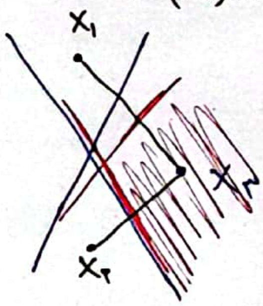
در اینصورت هر نقطه‌ای که در $P_1$ انتخاب کنیم قرینه‌اش نسبت به $H_2$ در $P_1'$ می‌افتد

و هر نقطه‌ای که در $P_2$ انتخاب کنیم قرینه‌اش نسبت به $H_1$ در $P_2'$ می‌افتد ←

قرینه‌های $X_1$ و $X_2$ که به ترتیب در $P_1$ و $P_2$ هستند، در یک نقطه همزمان نمی‌افتند،

← نقطه‌ی $X_3$ ای در $P_3$ نیست که با انتخاب آن فاصله‌ی ($X$ و $X_3$) کمتر مساوی از فاصله‌ی $X_2$ و $X$ و فاصله‌ی $X_1$ و $X$ باشد.

در واقع هر $X_3$ ای که انتخاب کنیم P متناظرش عبارت است از اشتراک یک سمت از دو عمود منصف پاره خط‌های ($X_1$ و $X_3$) و ($X_2$ و $X_3$):




این ناحیه برابر با $P_3$ نیست ← $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ قابل بیان با Voronoi نیستند.

در واقع چون چون $X_3$ نمی‌تواند همزمان آینه‌ی $X_2$ و $X_1$ باشد،

$H_2$ و $H_1$ هم همزمان نمی‌توانند عمود منصف‌های ($X_1$ و $X_3$) و ($X_2$ و $X_3$) باشند ← $P_3$ قابل بیان با Voronoi نیست.

(α -3

The polyhedron $C = \mathrm{conv}\{(v_1,t_1),\dots,(v_k,t_k)\}$ where $v_i \in R^n$, $t_i > 0$:

$P(C) = \mathrm{conv}\{\frac{v_1}{t_1},\dots,\frac{v_k}{t_k}\}$ نشان می‌دهیم:

اعمال P روی C: $\{\frac{v}{t} \mid (v,t)\in C, t>0\} \to \{\frac{v}{t} \mid (v,t)\in \mathrm{conv}\{(v_1,t_1),\dots,(v_k,t_k)\}, t>0\}$

ابتدا نشان می‌دهیم $P(C)\subseteq \mathrm{conv}\{\frac{v_1}{t_1}\dots\frac{v_k}{t_k}\}$ پس سپس برعکس را نشان می‌دهیم

$X=(v,t)\in C$ را در نظر می‌گیریم، داریم که:

$$X = \sum \alpha_i (v_i,t_i) \longrightarrow v = \sum \alpha_i v_i ,\ t = \sum \alpha_i t_i$$

$$\longrightarrow P(X) = \frac{v}{t} = \frac{\sum_i \alpha_i v_i}{\sum_j \alpha_j t_j} ,\quad \sum \alpha_i = 1 ,\ \alpha_i \ge 0 \ \text{for all } i=1-k$$

حالا باید $P(x)$ را به صورت ترکیبی از $\frac{v_i}{t_i}$ ها تعریف کنیم، برای این منظور، داریم:

$$P(x) = \frac{v}{t} = \frac{\sum_i \alpha_i v_i}{\sum_j \alpha_j t_j} = \sum_i \frac{\alpha_i}{\sum_j \alpha_j t_j} v_i = \sum_i \left(\frac{\alpha_i t_i}{\sum \alpha_j t_j}\right) \frac{v_i}{t_i}$$

حالا $\frac{\alpha_i t_i}{\sum_j \alpha_j t_j}$ را $\mu_i$ می‌نامیم، چون $\alpha_i$ ها بزرگتر مساوی صفراند و $t_i$ ها هم بزرگتر از صفراند

پس: $\mu_i \ge 0$، همچنین داریم:

$$\sum_i \mu_i = \sum_i \frac{\alpha_i t_i}{\sum_j \alpha_j t_j} = \frac{\sum_i \alpha_i t_i}{\sum_j \alpha_j t_j} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\sum \mu_i = 1 ,\ 0 \le \mu_i \le 1}$$

پس یک ترکیب محدب از $\frac{v_i}{t_i}$ ها وجود دارد که $P(X)$ را بسازند ← هر عضوی از C را بگیریم،

$P(C)$ در مجموعه‌ی $\mathrm{conv}\{\frac{v_1}{t_1},\dots,\frac{v_k}{t_k}\}$ وجود دارد ← $P(C) \subseteq \mathrm{conv}\{\frac{v_1}{t_1},\dots,\frac{v_k}{t_k}\}$

حالا برعکس این رابطه را نشان می‌دهیم یعنی به ازای هر $\mu_i$ یک $\alpha_i$ پیدا می‌کنیم. یک عضو در $\mathrm{conv}\{\frac{v_1}{t_1},\dots,\frac{v_k}{t_k}\}$

در نظر می‌گیریم، این عضو برابر است با $\sum_{i=1} \mu_i \frac{v_i}{t_i}$ به شرطی که $\sum \mu_i = 1$، $\mu_i \ge 0$

Scanned with CamScanner

باید $\sum \mu_i \frac{v_i}{t_i}$ را به صورت $\frac{\sum \alpha_i v_i}{\sum \alpha_i t_i}$ بنویسیم:

حل)

$$\sum_i \mu_i \frac{v_i}{t_i} = \sum_i \frac{\mu_i}{t_i} v_i = \frac{\sum_i \frac{\mu_i/t_i}{\sum_j \mu_j/t_j} v_i}{1/\sum_j \mu_j/t_j}$$

حالا در نظر میگیریم:

$$\alpha_i = \frac{\mu_i/t_i}{\sum_j \mu_j/t_j} \leftarrow \sum \alpha_i = 1 \,, \alpha_i \geq 0$$

$$\longrightarrow \sum_i \alpha_i t_i = \sum_i \frac{\mu_i/t_i}{\sum_j \mu_j/t_j} t_i = \sum_i \frac{\mu_i}{\sum_j \mu_j t_j} = \frac{\overset{1}{\cancel{\sum_i \mu_i}}}{\sum_j \mu_j t_j} = \frac{1}{\sum_j \mu_j t_j}$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{\mu_i}{t_i} v_i = \frac{\sum_i \frac{\mu_i/t_i}{\sum_j \mu_j/t_j} v_i}{\frac{1}{\sum_j \mu_j/t_j}} = \frac{\sum_i \alpha_i v_i}{\sum_i \alpha_i t_i}$$

$\leftarrow$ هر عضوی در $\operatorname{conv}\{\frac{v_1}{t_1}, \dots, \frac{v_k}{t_k}\}$ در $P(C)$ نیز هست $\leftarrow \operatorname{conv}\{\frac{v_1}{t_1}, \dots, \frac{v_k}{t_k}\} \subseteq P(C)$

از دو عبارت فوق نتیجه می‌شود

$$\Longrightarrow P(C) = \operatorname{conv}\{\frac{v_1}{t_1}, \dots, \frac{v_k}{t_k}\}$$

b)

The hyperplane $C=\{(v,t) \mid f^T v + gt = h\}$ (with $f, g$ not both zero)

باید تابع $P$ را روی این مجموعه اعمال کنیم، خواهیم داشت،

$$P(C)=\left\{\frac{v}{t} \,\middle|\, (v,t)\in C,\ t>0\right\} = \left\{\frac{v}{t} \,\middle|\, f^T v + gt = h,\ t>0\right\} =$$

$$\left\{\frac{v}{t} \,\middle|\, f^T\left(\frac{v}{t}\right)+g=\frac{h}{t},\ t>0\right\}=\left\{z \,\middle|\, f^T z + g = \frac{h}{t},\ t>0\right\}$$

① حالا اگر $0<h$، چون داریم $z$هایی که $f^T z + g = \frac{h}{t}$ و $t$ هم مثبت و متغیر است، مجموعه‌ی ما عبارت است از

$\underline{\{z \mid f^T z + g > 0\}}$

با تغییر $t$، و عدم تغییر $z$ (نسبت $v$ به $t$ ثابت بماند) تمام اعداد مثبت را می‌توان ساخت یعنی $f^T z + g$ باید عبارتی مثبت باشد.

② حالا اگر $h=0$، $\underline{\{z \mid f^T z + g = 0\}}$ حاصل می‌شود.

③ اگر هم $h<0$، مشابه ①، تمام اعداد منفی را می‌توان با $\frac{h}{t}$ تولید کرد $\leftarrow$ $f^T z + g < 0$ $\leftarrow$

$\underline{\{z \mid f^T z + g < 0\}}$ حاصل می‌شود

c)

The halfspace $C=\{(v,t) \mid f^T v + gt \le h\}$ (with $f, g$ not both zero)

باید تابع $P$ را روی این مجموعه اعمال کنیم، داریم،

$$P(C)=\left\{\frac{v}{t} \,\middle|\, (v,t)\in C,\ t>0\right\} = \left\{\frac{v}{t} \,\middle|\, f^T v + gt \le h,\ t>0\right\} =$$

$$\left\{\frac{v}{t} \,\middle|\, f^T\left(\frac{v}{t}\right)+g\le\frac{h}{t},\ t>0\right\}=\left\{z \,\middle|\, f^T z + g \le \frac{h}{t},\ t>0\right\}$$

$\Rightarrow$

- $h>0 \rightarrow$ $\frac{h}{t}$ تمام مقادیر مثبت را تولید می‌کند $\rightarrow$ $f^T z + g$ کل $R^n$ را شامل می‌شود $\rightarrow$ $\underline{R^n}$
- $h=0 \longrightarrow \underline{\{z \mid f^T z + g \le 0\}}$
- $h<0 \longrightarrow$ $\frac{h}{t}$ تمام مقادیر منفی را تولید می‌کند. $\rightarrow$ $f^T z + g$ از هر عدد منفی کوچک‌تر مساوی است $\rightarrow$ $f^T z + g < 0$ را همواره داریم $\rightarrow \boxed{\{z \mid f^T z + g < 0\}}$

The polyhedron $C = \{(v,t) \mid Fv + gt \le h\}$ 

باید تابع P را روی این مجموعه اعمال کنیم:

$$P(C) = \left\{ \frac{v}{t} \;\middle|\; (v,t) \in C,\ t > 0 \right\} =$$

$$\left\{ \frac{v}{t} \;\middle|\; Fv + gt \le h \right\} = \left\{ \frac{v}{t} \;\middle|\; F\frac{v}{t} + g \le \frac{h}{t} \right\} = \left\{ z \;\middle|\; Fz + g \le \frac{h}{t} \right\}$$

$$= \left\{ z \;\middle|\; F_i^T z_i + g_i \le \frac{h_i}{t},\ i = 1 - k \right\}$$

$\longrightarrow$ for each $i$, if
$h_i = 0 \rightarrow F_i^T z_i + g_i \le 0$
$h_i < 0$
$h_i > 0$

مشابه مورد C این سطل

اگر $h_i$ها مثبت باشند باید ببینیم که آیا $h_k$ ای داریم که منفی باشد، اگر $h_k$ منفی داشتیم آنگاه:

$$F_k^T z_k + g_k \le \frac{h_k}{t} \rightarrow \frac{F_k^T z_k + g_k}{h_k} \ge \frac{1}{t}$$

یعنی یک کران بالا برای $\frac{1}{t}$ داریم، پس $\frac{1}{t}$ تا حدی می‌تواند تغییر کند و تمامی مقادیر را نمی‌تواند قبول کند

همچنین این کران برای حالت منفی نیز وجود دارد، حالا بین $h_k$ هایی که منفی هستند، باید اونی که کوچکترین کران $\frac{1}{t}$ را می دهد انتخاب کنیم و بازه‌ی $t$ از ۰ تا آن می‌شود، متغیر $m$ را تعریف می‌کنیم به صورت زیر:

$$m = \min_{h_k < 0} \frac{F_k^T z_k + g_k}{h_k} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{t} \le m} \rightarrow$$ اگر $m < 0$ جواب نداریم

در غیر اینصورت

$$0 < \frac{1}{t} \le m \longrightarrow h_i < 0 \rightarrow F_i^T z_i + g_i \le \frac{h_i}{t}$$

$h_i m \le \frac{h_i}{t} < 0$، با تغییر $t$، $F_i^T z_i + g_i < 0$ حاصل می‌شود

ولی درصورتی که $h_i$ مثبت باشیم $h_i \ge 0 \leftarrow F_i^T z_i + g_i \le \frac{h_i}{t} \leftarrow F_i^T z_i + g_i \le m h_i$

با تغییر مقادیر $t$، بدست می‌آید

حالا فرض کنیم اونی که مینیمم $\frac{F_k^T z_k + g_k}{h_k}$ را تولید می‌کند عنصر $l$ام باشد

یعنی $\dfrac{F_j^T z_j + g_j}{h_j} = m \leftarrow$ $F_i^T z_i + g_i \leq \dfrac{F_j^T z_j + g_j}{h_j} h_i$

$h_i > 0$

$$\Rightarrow \frac{F_i^T z_i + g_i}{h_i} \leq \frac{F_j^T z_j + g_j}{h_j}$$

همچنین اگر هیچکدام از hها منفی نباشند، آنگاه کران بالای برای $\frac{1}{t}$ نداریم و می‌توانیم آنرا دلخواه عوض کنیم ←

جواب ها به صورت زیر اند:

حالا به ازای هر عضو z در $P(C)$ باید در شرایط زیر صدق کند:

$$F_i^T z + g_i \leq 0 \quad \text{if } h_i = 0$$

$$F_i^T z + g_i < 0 \quad \text{if } h_i < 0$$

$$\frac{F_i^T z + g_i}{h_i} \leq \frac{F_j^T z + g_j}{h_j} \quad \text{if } h_i > 0 ,\ h_j < 0$$

اونی که کمترین m را میداد

اگر z ای باشد که در تمام این شرایط صدق کند، جواب مسئله است. در واقع داریم تعدادی مجموعه را اشتراک می‌گیریم. اگر به ازای هر i، zهایی که در سه شرط بالا صدق کند را $S_i$ بنامیم، داریم:

$$\text{جواب‌ها} = \bigcap_{i=1}^{\dim(\text{row}(F))} S_i$$

show that there exists an x satisfying $x \succ 0,\ Ax = b$

iff there exists no $\lambda$ with $A^T\lambda \succeq 0,\ A^T\lambda \neq 0,\ b^T\lambda \leq 0$

ابتدا راهنمایی سوال را اثبات می‌کنیم:

$c^T x = d$ for all x satisfying $Ax = b$ iff there is a vector $\lambda$ such that

$c = A^T\lambda,\ d = b^T\lambda$ :

اگر یک $\lambda$ باشد که $c = A^T\lambda,\ d = b^T\lambda$، آنگاه به ازای هر x عضو جواب‌های $Ax=b$ داریم

$$c^T x = (A^T\lambda)^T x = \lambda^T A x = \lambda^T(Ax) = \lambda^T b = d \Rightarrow \text{for all } x \text{ satisfying } Ax=b,\ c^T x = d$$

حالا طرف دیگر این عبارت را باید نشان دهیم، یعنی اگر $c^T x = d$ برای تمام xهای عضو جواب‌های $Ax=b$ داشته باشیم، آنگاه $\lambda$ای وجود دارد که $c = A^T\lambda$ ، $d = b^T\lambda$ :

اگر $x_0$ یک جواب برای دستگاه $Ax=b$ باشد و $\underbrace{Fz}_{x_N}$ را مجموع بردارهای عضو $Null(A)$ در نظر بگیریم، آنگاه

هر جواب x معادله به صورت $x_0 + Fz$ یا $x_0 + x_N$ است $\Leftarrow$

$$A(x_0 + x_N) = Ax_0 + 0 = b$$

حالا داریم که $c^T x = d$ همواره برقرار است،

$$c^T x = c^T(x_0 + x_N) = c^T x_0 + c^T x_N = c^T x_0 + \underbrace{c^T Fz}_{} = d$$

این عبارت مقداری متغیر است زیرا می‌توانیم یا $Fz$، $2Fz$ قرار دهیم، چون هر دو عضو $N(A)$ هستند

یعنی $A(x_0 + 2Fz) = b$ , $A(x_0 + Fz) = b$ $\leftarrow$

$c^T(x_0 + 2Fz) = c^T(x_0 + 2Fz)$

$\longrightarrow c^T Fz = 0 \longrightarrow$ c بر $N(A)$ عمود است، طبق قضیه اساسی

جبر خطی c عضو $Row(A)$ است، زیرا $Row(A)$ مکمل عمود $N(A)$ است.

← حال که $c \in Row(A)$ ← $c \in col(A^T)$ ← یه ترکیب خطی از ستون های $A^T$ داریم که $c$ را تولید کنند یا به عبارتی $\lambda$ ای داریم که، $A^T\lambda = c$ ، حالا داریم،

$$c^Tx = \lambda^T A x = \lambda^T b = d \rightarrow d = \lambda^T b$$

⇐ $\lambda$ ای وجود دارد که $c = A^T\lambda$ , $d = \lambda^T b$ . ← دو طرف رابطه اثبات شد.

حالا که راهنمای سوال اثبات شد باید از آن برای اثبات حکم سوال استفاده کنیم،

$$x > 0 \longrightarrow B = \{x \mid x > 0\} \text{ or } R^n_{++}$$

$$Ax = b \longrightarrow D = \{x \mid Ax = b\}$$

حکم سوال می‌گوید $x$ ای داریم که $x > 0$ , $Ax = b$ اگر و تنها اگر $\lambda$ ای وجود نداشته باشد که:

$$A^T\lambda \geq 0 , A^T\lambda \neq 0 , b^T\lambda \leq 0$$

در واقع معادل این است که $D$ و $B$ اشتراک دارند، اگر و تنها اگر $\lambda$ ای وجود نداشته باشد که،

$$A^T\lambda \geq 0 , A^T\lambda \neq 0 , b^T\lambda \leq 0$$

حالا می‌دانیم که، $\sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv p \Leftrightarrow q$

پس اگر دو طرف اگر و تنها اگر را نات کنیم به عبارتی معادل حکم سوال می‌رسیم،

اشتراک $D$ و $B$ تهی است اگر و تنها اگر $\lambda$ ای وجود داشته باشد که:

$$A^T\lambda \geq 0 , A^T\lambda \neq 0 , b^T\lambda \leq 0$$

اشتراک نداشتن $D$ و $B$ هم معادل این است که یک hyperplane جدا کننده داشته باشند:

یعنی حکم به این صورت ما شود، $B, D$ hyperplane جدا کننده دارند $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda : A^T\lambda \geq 0 , A^T\lambda \neq 0 , b^T\lambda \leq 0$

اگر D و B، hyperplane جدا کننده داشته باشند، آنگاه یعنی $c \neq 0$ , $h$ ای وجود دارد که:

اعضای B در $c^Tx \geq d$ ، و اعضای D در $c^Tx \leq h$ قرار گیرند و $c \geq 0$ ، $d \leq 0$ است.

حالا در مجموعه‌ی D ، داریم $Ax = b$ ⟵ $x = x_0 + Fz$ ، در نتیجه:

$$\underbrace{c^Tx = c^Tx_0 + c^T Fz}_{\text{عبارت متغیر}} \longrightarrow$$

اگر $c^TFz$ ناصفر باشد، دو حالت دارد: اگر منفی باشد، چون قرینه‌ی آن هم در $Ax = 0$ صدق می‌کند، پس عضو $N(A)$ هست ← قرینه‌ی آن را به جای خودش قرار می‌دهیم و آنرا به شدت اسکیل می‌کنیم ← $c^TFz$ عدد خیلی بزرگی می‌دهد و کران بالا نخواهد داشت.

اگر هم $Fz$ مثبت باشد با اسکیل کردنش $c^TFz$ خیلی بزرگ می‌شود ← کران بالا ندارد ←

تنها حالتی که هست این است که $c^TFz = 0$ ← $c$ بر $N(A)$ عمود است ← $c \in Row(A)$ ← $c \in Col(A^T)$

همچنین مقدار $c^Tx = c^Tx_0$ ثابت است. حال چون $c \in Col(A^T)$ ← $\exists \lambda, \ c = A^T\lambda$

$c \geq 0$ , $c \neq 0$ ← $c^Tx = \lambda^TAx = \lambda^Tb$ . این مقدار را $d$ می‌نامیم

چون $c^Tx \leq h$ , $c^Tx = d$ ← $d \leq h$ , $h \leq 0$

← $d \leq 0$ ←

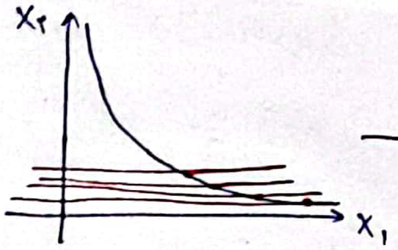
$$\exists \lambda: A^T\lambda \geq 0, \ A^T\lambda \neq 0, \ \lambda^Tb \leq 0$$

دقت شود که تمامی روابط بالا برگشت‌پذیر هستند ← اثبات می‌شود که B و D اشتراک ندارند اگر و تنها اگر $\lambda$ ای وجود داشته باشد که $A^T\lambda \geq 0, A^T\lambda \neq 0, \lambda^Tb \leq 0$ که این عبارت هم معادل حکم صورت سوال است.

a-5

Express the closed convex set $\{x\in R^2_+ \mid x_1x_2\ge 1\}$ as intersection of half spaces :

مجموعه‌ی $\{x\in R^2_+ \mid x_1x_2=1\}$ را در نظر بگیرید، اشتراک تمام supporting hyperplane ها در نقاط مختلف این مجموعه، مجموعه‌ی بالا را تولید می‌کند. در یک نقطه‌ی دلخواه، $x=(t,\frac{1}{t})$ عضو $\{x\in R^2_+ \mid x_1x_2=1\}$ است.




اشتراک این نیم‌صفحه‌ها (منظور نواحی بالای خط‌ها است) $\longrightarrow$ مجموعه‌ی صورت سوال را می‌سازد.

حالا هر نقطه در روی مجموعه‌ی $\{x\in R^2_+ \mid x_1x_2=1\}$ را به صورت $(t,\frac{1}{t})$ می‌توان نوشت،

نقاط بالای این نقطه $(t,\frac{1}{t})$ به این صورت هستند که $x$

نقاط بالای $(t,\frac{1}{t})$ به صورت $\frac{x_1}{t}+tx_2\ge 2$ هستند.

$$\Rightarrow \frac{x_1}{t}+tx_2\ge 2 \qquad t>0$$

$$\Rightarrow \{x\in R^2_+ \mid x_1x_2\ge 1\}=\bigcap_{t>0}\left\{x\in R^2 \,\middle|\, \frac{x_1}{t}+tx_2\ge 2\right\}$$

در واقع در نقطه $t$، ابرصفحه یا خط جداکننده‌مان به صورت $(\frac{1}{t},t)x=1$ است.

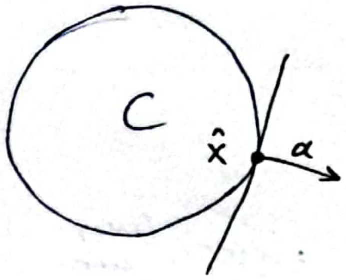
حالا ناحیه بالای آن به صورت $(\frac{1}{t},t)x\ge 1$ است $\Leftarrow \frac{x_1}{t}+tx_2\ge 1$

و عبارت بالا بدست می‌آید.

6)

Let $C=\{x\in R^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$, the $L_\infty$-norm unit ball in $R^n$, and let $\hat{x}$ be a point in the boundary of $C$. Identify the supporting hyperplane of $C$ at $\hat{x}$ explicitly.

می دانیم که اگر یک مجموعه داشته باشیم، supporting hyperplane آن در یک نقطه عبارت است از ابرصفحه مماس در آن نقطه بر مجموعه. حال نقطه مرزی $\hat{x}$ در $C$ را در نظر بگیرید. بردار نرمال $a$ در این نقطه را نیز در نظر بگیرید.




حال برای تمام $x$ های عضو $C$ داریم که:

$$a^T\hat{x} \ge a^T x$$ اگر و تنها اگر

$$a_i > 0 \qquad \hat{x}_i = 1$$
$$a_i < 0 \qquad \hat{x}_i = -1$$
$$a_i = 0 \qquad -1 < \hat{x}_i < 1$$

چون به ازای تمام $x$ در نظر گرفتیم، برای برقرار بودن این نامساوی حتماً این شرایط لازم است و اگر هم برقرار باشند، این شرایط به ازای تمام $x$ ها $a^T\hat{x} \ge a^T x$ برقرار است.

Scanned with CamScanner

The monotone nonnegative cone. we define the monotone nonnegative cone as:

$$K_{m+} = \{x \in R^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$$

i.e., all nonnegative vectors with components stored in nonincreasing order.

a) show that $K_{m+}$ is a proper cone.

باید شرایط proper cone را بررسی کنیم:

* closed هست چون $\geq$ مساوی داریم ← نقاط مرزی را نیز شامل می‌شود.

* convex هست زیرا: در نظر بگیرید $(x_1 \ldots x_n), (\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_n) \in K_{m+}$, $\forall \theta \in [0,1]: \theta(x_1 \ldots x_n) + (1-\theta)(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_n)$

$$\rightarrow (\underbrace{\theta x_1 + (1-\theta)\tilde{x}_1}_{\hat{x}_1}, \ldots, \underbrace{\theta x_n + (1-\theta)\tilde{x}_n}_{\hat{x}_n}) \rightarrow \hat{x}_1 \geq \hat{x}_2 \geq \hat{x}_3 \geq \dots \geq \hat{x}_n$$

زیرا $\underline{\theta x_{i+1}} + \underline{(1-\theta)\tilde{x}_{i+1}} \leq \underline{\theta x_i} + \underline{(1-\theta)\tilde{x}_i}$ $\rightarrow (\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n) \in K_{m+} \rightarrow$ convex، $K_{m+}$ است.

* حالا pointed بودن را بررسی می‌کنیم:

$$x \in K_{m+}, -x \in K_{m+} \rightarrow \forall i: x_i \geq 0, x_i \leq 0 \rightarrow x_i = 0$$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow$ pointed، $K_{m+}$ است.

* حالا solid بودن را بررسی می‌کنیم: نقاط داخلی $K_{m+}$: $x_1 > \dots > x_n$ هستند و به وضوح این مجموعه خالی نیست و تمام نقاط را شامل می‌شود.

$\rightarrow K_{m+}$ یک proper cone است.

b

Find the dual cone $K_{m+}^*$ Use the identity $\sum x_iy_i = (x_1-x_2)y_1+\dots+x_n(y_1+\dots+y_n)$

$$K_{m+}^* = \{y \mid y^Tx \geq 0 \text{ for all } x\in K_{m+}\}$$

$$y^Tx = \sum_{i=1}^n y_ix_i = \underbrace{(x_1-x_2)y_1+(x_2-x_3)(y_1+y_2)+\dots+(x_{n-1}-x_n)(y_1+\dots+y_{n-1})+x_n(y_1+\dots+y_n)}_{t}$$

$$\to K_{m+}^* = \{y \mid t\geq 0 \text{ for all } x\in K_{m+}\}$$

all $x_i \geq x_{i+1} \Rightarrow x_i - x_{i+1}\geq 0 \longrightarrow$

$x_i-x_{i+1}$ ها را $\theta_i$ می نامیم و $\theta_n$ برابر $x_n$ می شود

همچنین $y_1+\dots+y_i$ را $z_i$ می نامیم، آنگاه داریم که،

$$\{y \mid \sum_{i=1}^n \theta_i z_i \geq 0\}$$

همچنین $\theta_i$ها هر عدد بزرگتر مساوی صفری می توانند باشند، با تغییر $x_i$ها بدست می آیند.

حالا اگر تمام $\theta_i$ ها را صفر قرار دهیم و فقط $\theta_1$ را ناصفر انتخاب کنیم یعنی $x_1-x_2\neq 0$ , $x_n=x_{n-1}=\dots=x_2$

$\leftarrow x_1y_1\geq 0 \leftarrow y_1\geq 0$.

حالا اگر تمام $\theta_i$ ها را صفر قرار دهیم و فقط $\theta_2$ را ناصفر انتخاب کنیم، $x_2-x_3\neq 0$ , $x_1=x_2$ , $x_n=x_{n-1}=\dots=x_3$

$\leftarrow (x_2-x_3)(y_1+y_2)\geq 0 \leftarrow y_1+y_2\geq 0$

$\vdots$

$\leftarrow \sum_{i=1}^k y_i \geq 0$ به ازای هر $k=1 \dots n$ باید برقرار باشد، چون به ازای تمام $x$ها $y^Tx$ باید مثبت باشد، از تمامی عبارات بالا باید اشتراک گرفته شود، در نتیجه،

$$K_{m+}^* = \{y \mid \sum_{i=1}^k y_i \geq 0,\ k=1,\dots,n\}$$

polar of a set. The polar of $C \subseteq R^n$ is defined as the set

$$C^\circ = \{ y \in R^n \mid y^T x \le 1 \quad \text{for all } x \in C \}.$$

a) show that $C^\circ$ is convex (even if $C$ is not)

$y_1 \in C^\circ,\ y_2 \in C^\circ \longrightarrow 0 \le \theta \le 1 : \quad \theta y_1 + (1-\theta) y_2 \in C^\circ$ why?

for all $x$ : $y_1^T x \le 1$ , $y_2^T x \le 1 \Rightarrow (\theta y_1 + (1-\theta) y_2)^T x = \theta y_1^T x + (1-\theta) y_2^T x \le$

$\theta \times 1 + (1-\theta) \times 1$

for all $x$:

$\Rightarrow (\theta y_1 + (1-\theta) y_2)^T x \le 1 \longrightarrow \theta y_1 + (1-\theta) y_2 \in C^\circ$

$\Leftarrow$ $\boxed{C^\circ \text{ یک مجموعه‌ای محدب است.}}$

b) what is the polar of a cone?

می‌دانیم که در یک cone ، اگر x عضو آن باشد، به ازای هر $\lambda \ge 0$ داریم که $\lambda x$ هم عضو آن cone است ←

$$\{ y \mid y^T x \le 1 \quad \text{for all } x \}$$

حالا اگر به ازای یک x ، $0 < y^T x \le 1$ باشد، می‌دانیم که به ازای $\lambda x$ هم برقرار باید باشد ←

$\lambda y^T x \le 1$ و می‌توانیم $\lambda$ را زیاد کنیم ← نامساوی برقرار نمی‌شود، حالتی می‌ماند که

$y^T x \le 0$ برقرار باشد، در این صورت $\lambda y^T x \le 0$ به از $\lambda \ge 0$ ، و نتیجه $y^T x \le 1$ به ازای هر x.

پس Polar یک cone عبارت است از ،

$$\boxed{\{ y \mid y^T x \le 0 \quad \text{for all } x \in \text{cone} \}}$$

c) what is the polar of the unit ball for a norm $\|\cdot\|$?

$\|x\| \le 1$

$$C^\circ = \{ y \mid \underbrace{y^T x \le 1 \text{ for all } x \text{ such that } \|x\| \le 1}\}$$

به عبارتی $\sup_{\|x\| \le 1} y^T x \le 1$ باید برقرار باشد

که این هم معادل نرم دوگان y است $\|y\|_\star$

$$\Rightarrow C^\circ = \{ y \in R^n \mid \|y\|_\star \le 1 \}$$

d) what is the polar of the set $C = \{x \mid 1^T x = 1, x \succeq 0\}$?

$$\{ y \in R^n \mid y^T x \le 1 \underbrace{\text{for all } x \in C}_{\text{for all } x\,,\ 1^T x = 1,\ x \succeq 0} \}$$

این مجموعه می‌شود y هایی که در آن

در واقع $y_i$ هایی که ترکیب convex شون کمتر مساوی یک باشه ← تمام $y_i$ ها باید کمتر مساوی یک باشند:

$x_i = 1$ ، بقیه $x_i$ ها صفر ← $y_i \le 1$ ؛ پس تمام $y_i$ ها باید کمتر مساوی ۱ باشند.

$$C^\circ = \{ y \in R^n \mid y_i \le 1 \quad \cancel{\text{for all}}\ i = 1, \dots, n \}$$

e) show that if $C$ is closed and convex, with $0 \in C$, then $(C^\circ)^\circ = C$

$C$ is a convex set such that $0 \in C$.

$$C^\circ = \{ y \mid y^T x \le 1 \quad \text{for all } x \in C \}$$

$$(C^\circ)^\circ = \{ z \mid z^T y \le 1 \quad \text{for all } y \in C^\circ \}$$

if $x \in C \Rightarrow C^\circ = \{y \mid y^T x \le 1 \text{ for all } x \in C\} \rightarrow$ for all $y \in C^\circ$ , $x^T y \le 1$

$(C^\circ)^\circ = \{z \mid z^T y \le 1 \text{ for all } y \in C^\circ\} \rightarrow \boxed{x \in (C^\circ)^\circ}$

$\Rightarrow C \subseteq (C^\circ)^\circ$

حالا نشان می‌دهیم که $(C^\circ)^\circ \subseteq C$ نیز برقرار است:

فرض کنیم این برقرار نباشد، یعنی یه $x$ ای در $(C^\circ)^\circ$ هست که در $C$ نیست،

حالا طبق قضیه supporting hyperplane یک صفحه جدا کننده بین $x$ و $C$ داریم:

یعنی $\exists a : a^T x > 1$ , for all $z$ in $C$ : $a^T z \le 1$ برقرار باشد: (همان حالت عادی است که طرفین
اسکیل شده‌اند.)

حالا به ازای هر عضوی از $C$، داریم که $a^T z \le 1 \leftarrow a \in C^\circ$ است.

for all $z \in C$ , $a^T z \le 1 \rightarrow a \in C^\circ$

حالا می‌دانیم که $x \in (C^\circ)^\circ$ , $a^T x > 1$ درحالیکه $(C^\circ)^\circ$ شامل تمام بردارهایی بود که ضرب داخلی‌شان در تمام بردارهای $C^\circ$ کوچکتر مساوی 1 باشد،

$a^T x > 1$ , $a \in C^\circ$ , $x \in (C^\circ)^\circ$

درصورتی که چون $a \in C^\circ$ , $x \in (C^\circ)^\circ$ برقرار است $ax \le 1$ باید برقرار باشد ولی $a^T x > 1$

پس به تناقض می‌رسیم ← به ازای هر $x \in (C^\circ)^\circ$ ، $x$ عضو $C$ نیز است $\Rightarrow (C^\circ)^\circ \subseteq C$

$\Rightarrow C = (C^\circ)^\circ$

۸-

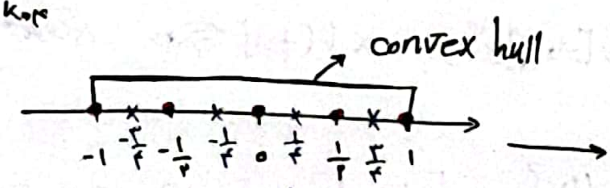
a) $C=\{-1,1\}\subset R$

$$S_2=\frac{1}{2}(C+C)=\{\frac{1}{2}(-1+-1),\frac{1}{2}(1+1),\frac{1}{2}(-1+1),\frac{1}{2}(+1-1)\}=\{-1,0,1\}$$

$$S_3=\frac{1}{3}(C+C+C)=\{\frac{1}{3}(-1-1-1),\frac{1}{3}(-1-1+1),\frac{1}{3}(-1+1+1),\frac{1}{3}(1+1+1)\}=$$

$$\{-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\}$$

$$\underset{k=4}{S_k}=\frac{1}{4}(C+C+C+C)=\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\}$$




فاصلهٔ تمام نقاط یکسان است و بازه‌ها با طول $\frac{1}{2}$ است.

نقاطی که بیشترین فاصله را از $S_4$ دارند.

دورترین نقطه به $S_4$، وسط هر کدام از این بازه‌ها است، چون هر کدام از نقاط دیگر به یکی دیگر از نقاط $S_4$ فاصله‌اش کمتر $\frac{1}{4}$ است ولی وسط بازه $\frac{1}{4}$ است.

حالا نشان می‌دهیم که $\delta(S_n)\to 0$ as $n\to\infty$ : برای $S_n$ داریم که،

① تمام c ها یک باشند، یکی از c ها -۱ و بقیه +۱ باشند، دوتا از c ها -۱ و بقیه +۱ باشند، ...

$\frac{1}{n}(n),\ \frac{1}{n}(n-2),\ \frac{1}{n}(n-4),\ \dots,\ \frac{1}{n}(-n)$ ← تمام c ها -۱ باشند.

$$\longrightarrow S_n=\{\frac{i}{n};\ i=n,n-2,\dots,-n\}$$

as $n\to\infty$ : فاصلهٔ بین دو عدد متوالی در $S_n=\frac{2}{n}$ است، و هنگامی که $n\to\infty$، این فاصله به سمت صفر میل می‌کند ← هیچ عددی بین $\frac{i}{n}$ و $\frac{i+2}{n}$ باقی نمی‌ماند ← کل بازه/ $[-1,1]$ که convex hull هست، پوشیده می‌شود.

$$\longrightarrow \text{as } n\to\infty \quad \delta(S_n)\to 0$$

b) $C=[-1,-\frac12]\cup[\frac12,1]$

$S_2=\frac12(C+C)\longrightarrow$ $\frac12\le x\le 1$, $-1\le y\le-\frac12$ $\longrightarrow -\frac12\le x+y\le\frac12$

به ازای $x$ از $[\frac12,1]$ باید $y$ از $[-1,-\frac12]$ جمع بزنیم،

یا به ازای $x$ از $[\frac12,1]$ باید $y$ از $[\frac12,1]$ جمع بزنیم، $1\le x+y\le 2$

یا به ازای $x$ از $[-1,-\frac12]$ باید $y$ از $[-1,-\frac12]$ جمع بزنیم، $-2\le x+y\le -1$

$$\longrightarrow S_2=\frac12(x+y)=[-1,-\frac12]\cup[-\frac14,\frac14]\cup[\frac12,1]$$

$$S_3=\frac13(C+C+C).$$

فرض کنیم مجموعه‌ی $[\frac12,1]$ را $x$ و مجموعه‌ی $[-1,-\frac12]$ را $y$ در نظر بگیریم

$$S_3=\{x\cup\frac{2x+y}{3}\cup\frac{x+2y}{3}\cup y\}=[-1,-\frac12]\cup[0,\frac12]\cup[-\frac12,0]\cup[\frac12,1]$$
$$=[-1,1]$$

$1\le 2x\le 2$, $-1\le y\le -\frac12$ $\longrightarrow 0\le 2x+y\le\frac32\longrightarrow 0\le\frac{2x+y}{3}\le\frac12$

$\frac12\le x\le 1$, $-2\le 2y\le -1$ $\longrightarrow -\frac32\le x+2y\le 0\longrightarrow -\frac12\le\frac{x+2y}{3}\le 0$

General

ابتدا باید بدانیم که $\frac12([-1,-\frac12]+[-1,-\frac12])=[-1,-\frac12]$،

$$\frac1n(\underbrace{[-1,-\tfrac12]+\cdots+[-1,-\tfrac12]}_{n\ \text{بار}})=[-1,-\tfrac12]$$

$$S_n=\{\frac{nx}{n},\frac{(n-1)x+y}{n},\dots,\frac{x+(n-1)y}{n},\frac{ny}{n}\}.$$

$\frac i2\le ix\le i$, $-(n-i)\le(n-i)y\le-(\frac{n-i}{2})$ $\longrightarrow \frac i2-(n-i)\le ix+(n-i)y\le i-(\frac{n-i}{2})$

$$\longrightarrow \frac{\frac i2-(n-i)}{n}\le\frac{ix+(n-i)y}{n}\le\frac{i-\frac{(n-i)}{2}}{n}$$

$\frac{\frac{i}{2}-n}{n}=\frac{i}{2n}-1$ $\qquad$ $\frac{\frac32 i-n}{n}=\frac{3i}{2n}-1$

$$\longrightarrow \frac{3}{2n} i - 1 \le \frac{in + (n-i)y}{n} \le \frac{3}{2n} i - \frac{1}{2}$$

حالا i را از صفر تا n مقدار می‌دهیم، بازه‌های بدست آمده عبارتند از:

$i=0$ : $[-1, -\frac{1}{2}]$

$i=1$ : $[-1+\frac{3}{2n}, -\frac{1}{2}+\frac{3}{2n}]$

$\vdots$

$i=n$ $[-1+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}] = [\frac{1}{2}, 1]$

$$\left[-1+\frac{3i}{2n}, -\frac{1}{2}+\frac{3i}{2n}\right], \left[-1+\frac{3(i+1)}{2n}, -\frac{1}{2}+\frac{3(i+1)}{2n}\right]$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{3i}{2n} \ge -1+\frac{3(i+1)}{2n} \iff \frac{1}{2} \ge \frac{3}{2n} \iff \frac{3}{n} \le 1$$

$$\iff n \ge 3$$

برای $n \ge 3$، نقاط پایان بازه‌های قبلی جلوتر از نقاط شروع بازه‌های بعدی است ← بازه‌ها همپوشانی دارند و در نتیجه اجتماعشان یک بازه‌ی پیوسته می‌شود (مثلاً دو بازه‌ی را در نظر بگیرید، خروجی نیز یک بازه‌ی پیوسته است. حالا، برای n داریم:

$$S_n = \underset{i=0}{[-1, -\tfrac{1}{2}]} \cup \underset{i=1}{[-1+\tfrac{3}{2n}, -\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2n}]} \cup \cdots \underset{i=n-1}{[-1+\tfrac{3(n-1)}{2n}, -\tfrac{1}{2}+\tfrac{3(n-1)}{2n}]} \cup \underset{i=n}{[-1+\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}]}$$

حالا برای $n \ge 3$ تمامی بازه‌های متوالی همپوشانی دارند ← اجتماعشان یک بازه‌ی واحد می‌دهد که از ۱- تا ۱+ است که همان convex hull مجموعه‌ی C است.

as $n \to \infty$ $\quad \delta(S_n) \to 0$