и соответствующий ей мограф $G^M_{\text{т}2}$ (рис. 2.16) имеет коэффициент связности, равный 1, 18:

$$K_{\text{св}}(G^M_{\text{т}2}) = \frac{2+2+2+1+2+2+5+1+3+3+3}{2\cdot 11} = 1,18.$$

Полученные тупиковые ДНФ функции $\widetilde{f}(x_1, x_2, x_3)$ имеют равные сложности.

§ 2.9. Исчисление предикатов

Исчисления высказываний недостаточно для задания более сложных логических рассуждений. По существу k-значная логика позволяет определить наличие того или иного свойства на конечном множестве элементов; в случае бесконечных множеств для установления определенного свойства у рассматриваемого абстрактного понятия необходимо введение функций, аргументы которых пробегают бесконечное число значений во множестве M. Функция P, принимающая одно из значений, 0 или 1, аргументы которой пробегают значение из произвольного множества M, называется *предикатом P в предметной области M*. Число аргументов предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется его *порядком*.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяет n-арное отношение R в M: если $P(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 1$, то $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ находятся в отношении R, определяемом этим предикатом, и если $P(x_1^*, x_2^*, \ldots$ $\ldots, x_n^*) = 0$, то эти элементы не находятся в отношении R, т. е. $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \notin R$.

Для упрощения структуры сложных логических рассуждений введем специальные обозначения для некоторых часто встречающихся выражений. Условимся обозначать выражение "для всякого элемента $x \in M$ свойство R выполнено" как $(\forall x \in M)(R(x) =$ $= 1)$, а выражение "существует по крайней мере один элемент $x \in M$, обладающий свойством R" — как $(\exists x \in M)(R(x) = 1)$. В выражениях $(\forall x \in M)(R(x) = 1)$ и $(\exists x \in M)(R(x) = 1)$ обозначения $\forall x$ и $\exists x$ будем соответственно называть *квантором всеобщности* и *квантором существования*.

Определим индуктивно формулу исчисления предикатов аналогично определению формулы исчисления высказываний. Будем использовать запятые, скобки, символы исчисления высказываний, предметные переменные $x_1, x_2, \ldots$ (переменные, принимающие значения из предметной области), предметные константы a_1, $a_2, \ldots$, предикатные буквы $P_1, P_2, \ldots$ и функциональные буквы $f_1, f_2, \ldots$

Определим понятие терма и элементарной формулы.

Определение *терма*:

1) всякая предметная переменная или предметная константа — терм;

2) если f — функциональная буква и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — термы, то $f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — терм;

3) любое выражение, полученное многократным повторением правил 1), 2), является термом.

Если P — предикатная буква, а $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — термы, то $P(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — элементарная формула.

Определение *формулы*:

1) всякая элементарная формула является формулой;

2) если A и B — формулы и x — предметная переменная, то каждое из выражений $A \circ B$ ($\circ$ — связка исчисления высказываний) и $(\forall x \in M)(A(x))$ является формулой;

3) любое выражение, полученное многократным использованием правил 1), 2), является формулой.

В выражении $(\forall x \in M)(A(x))$ формула $A(x)$ называется *областью действия* квантора $\forall x$.

Предметная переменная, входящая в формулу, называется *свободной*, если она не следует непосредственно за квантором и не входит в область действия квантора по этой переменной; все другие переменные, входящие в формулу, называются *связанными*. В пределе всякая формула без свободных переменных (замкнутая формула) является высказыванием, которое истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными задает некоторое отношение в предметной области, которую иногда называют *областью интерпретации*. Это отношение может быть истинно или ложно в зависимости от значений свободных переменных.

В определении формулы в числе основных символов запись $\exists x$ можно заменить на $\overline{\forall x(\overline{A(x)})}$.

Квантор всеобщности можно рассматривать как обобщение конъюнкции. Если предметная область конечна и состоит из элементов $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то формула $(\forall x)(F(x))$ равносильна конъюнкции $F(m_1) \,\&\, F(m_2) \,\&\ldots\&\, F(m_n)$, а квантор существования можно рассматривать как обобщение дизъюнкции, при этом записи $(\exists x)(F(x))$ и $F(m_1) \vee F(m_2) \vee \ldots \vee F(m_n)$ равносильны.

Для бесконечных предметных областей кванторы играют роль бесконечных дизъюнкций и конъюнкций.

Каждая формула $F(P_1, P_2, \ldots, P_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в исчислении предикатов задает оператор, перерабатывающий систему предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_m$ в предикат P_α от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где все эти переменные в формуле являются свободными. Две формулы, $F_a(P_1, P_2, \ldots, P_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $F_b(P_1, P_2, \ldots, P_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые задают один и тот же оператор, перерабатывающий систему предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_m$ в предикат $P_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, будем называть *эквивалентными* и обозначать $F_a = F_b$.

Переход от формулы F к ее эквивалентной форме будем называть, как и в исчислении высказываний, *тождественным преобразованием.*

Основываясь на введенных понятиях, можно доказать следующие четыре тождества:

тождества двойственности

$$(\exists x)\big(P(x)\big) = \overline{(\forall x)\big(\overline{P(x)}\big)}, \quad (\forall x)\big(P(x)\big) = \overline{(\exists x)\big(\overline{P(x)}\big)};$$

тождества для π-операций (т. е. для конъюнкции и квантора всеобщности)

$$(\forall x)\big(F_a(x) \wedge F_b(x)\big) = (\forall x)\big(F_a(x) \wedge (\forall x)F_b(x)\big),$$

$$(\forall x)(\forall y)\big(F(x,\, y)\big) = (\forall y)(\forall x)\big(F(x,\, y)\big);$$

тождества для σ-операций (т. е. для дизъюнкции и квантора существования)

$$(\exists x)\big(F_a(x) \vee F_b(x)\big) = (\exists x)\big(F_a(x) \vee (\exists x)F_b(x)\big),$$

$$(\exists x)(\exists y)\big(F(x,\, y)\big) = (\exists y)(\exists x)\big(F(x,\, y)\big);$$

тождество вынесения константы

$$(\Sigma x)\big(F_a \circ F_b(x)\big) = F_a \circ (\Sigma x)\big(F_b(x)\big),$$

где $(\Sigma x) = (\exists x)$, $(\forall x)$; $\circ = \wedge,\ \vee$; F_a — подформула, не содержащая связанную предметную переменную x, которая в дальнейшем будет называться *константой относительно квантора* (Σx).

При вынесении константы из области определения квантора существования подкванторное выражение предварительно приводят к виду дизъюнкции конъюнкцией; при вынесении константы из области определения квантора всеобщности выражение приводят к виду конъюнкции.

Рассмотрим, например, вынесение константы $G(y)$:

$$(\forall x)\big((F(x) \nrightarrow G(y)) \vee (H(x) \circ G(y))\big) =$$

$$= (\forall x)\big(F(x) \wedge \overline{G(y)} \vee \overline{H(x) \vee G(y)}\big) = (\forall x)\big(F(x) \wedge \overline{G(y)} \vee$$

$$\vee\ (\overline{H(x)} \wedge \overline{G(y)})\big) = (\forall x)\big(\overline{G(y)} \wedge \overline{H(x)} \vee F(x)\big) =$$

$$= (\forall x)\big(\overline{G(y)} \wedge (H(x) \rightarrow F(x))\big) = \big(\overline{G(y)}\big) \wedge (\forall x)\big(H(x) \rightarrow F(x)\big).$$

В рассматриваемом исчислении кванторы применены только по предметным переменным. Формулы будут более выразительными, если наряду с кванторами по предметным переменным использовать и *кванторы по предикатным переменным.*

Исчисление, в котором применяются только кванторы по предметным переменным, называется *узким исчислением предикатов*; последнее можно преобразовать в *расширенное исчисление предикатов*, добавив кванторы по предикатным переменным.

Определение формулы в расширенном исчислении предикатов аналогично ее определению в узком исчислении; разница состоит в том, что в п. 2) определения формулы переменная x может быть как предметной, так и предикатной. Тождества двойственности π-, σ-операций и вынесение константы в расширенном исчислении предикатов тоже справедливы.

Рассмотрим вопрос выводимости в исчислении предикатов. Расширим систему аксиом некоторого исчисления высказываний, включенного в узкое исчисление предикатов, следующими аксиомами:

$$(\forall x)\big(G(x) \to G(y)\big); \quad H(y) \to (\exists x)H(x).$$

Смысл этих аксиом следующий: если предикат $G(x)$ истинен для любого x, то он истинен и для любого y, и если предикат $H(y)$ истинен для какого-нибудь y, то существует такой x, что $H(x)$ истинен.

В узком исчислении предикатов два правила вывода (подстановки и заключения) исчисления высказываний дополняют еще тремя правилами.

Правило для $\forall$: если $\varphi_1 \to \varphi_2$ выводима и в φ_1 нет x в качестве свободной переменной, а в φ_2 переменная x содержится в виде свободной переменной, то формула $\varphi_1 \to \forall(x)\varphi_2$ также выводима.

Правило для $\exists$: если $\varphi_1 \to \varphi_2$ выводима и x содержится в качестве свободной переменной в φ_1 и не содержится в качестве свободной переменной φ_2, то формула $\exists(x)\varphi_1 \to \varphi_2$ также выводима.

Правило переименования связанных переменных: если φ_1 — выводимая формула и в φ_1 имеется квантор всеобщности или квантор существования, то одна связанная переменная в φ_1 может быть заменена другой связанной переменной одновременно во всех областях действия квантора и в самом кванторе; полученная формула также выводима.

§ 2.10. Теория трасс

Выше было рассмотрено применение математической логики в экспертных системах при геологоразведке полезных ископаемых. Рассмотрим ее использование при оценке переходных процессов в электронных системах, реализующих субмикронную технологию, т. е. в системах, рабочая частота которых — сотни мегагерц и выше. В этом случае ложная информация порождается неодновременными переключениями входных каналов из-за задержек сигналов в каналах связи.

Рассмотрим интегральную схему (ИС) (рис. 2.17, *а*), реализующую булеву функцию (рис. 2.17, *б*)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(0, 1, 2, 5, 12, 15),$$