Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2011/12
08.03.2012

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	$\sum$	Note
Punktzahl	10	12	10	12	6	10	60			
erreichte Punktzahl										

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (10 Punkte)

Es sei $\mathscr{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\mathscr{E}$ sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Weiter bezeichnen wir mit $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch Spiegelung an dem Untervektorraum $\langle b_1 \rangle$ von $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Standardskalarproduktes ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\Phi)$ und $M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(\Phi)$ von Φ.

(c) Ist $M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(\Phi)$ diagonalisierbar?

2. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Es sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|_V$. Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|_V \leq \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|_V .$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden reellen Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzwerte an:

i. $a_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^3 \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$

ii. $b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^k}, \quad n \in \mathbb{N},$

iii. $c_n := n^{-1} + (-1)^n + (-1)\cdot n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $10^{12001} \bmod 13$.

Hinweis: Beachten Sie das Korollar zum kleinen Satz von Fermat.

(b) Es sei G eine abelsche Gruppe mit neutralem Element n und Verknüpfung $*$. Weiter sei für $g \in G$ und $k \in \mathbb{N}^*$ die Notation $g^k := \underbrace{g * g * \cdots * g}_{k\text{mal}}$ vereinbart. Zeigen Sie, dass

$$U := \{g \in G : \text{ es existiert ein } k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } g^k = n\}$$

eine Untergruppe von G ist.

(c) Bestimmen Sie für die Gruppe $G = (\mathbb{Z}, +)$ die Untergruppe U nach Aufgabenteil (b).

4. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils zwei Punkte.

(a) Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^*$ und $A \in K^{n\times n}$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, so ist λ auch ein Eigenwert von A^T.

(b) Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\Phi \in \mathscr{L}(V,W)$. Dann gilt

$$\operatorname{Rang}(\Phi) = \dim(W) \Longrightarrow \Phi \text{ surjektiv.}$$

(c) Wenn U und W zwei Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(U) = 2$ und $\dim(W) = 1$ sind, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}^3$ Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ mit $x = u + w$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2n-1}{n}$.

5. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\Phi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\Phi \neq \mathrm{id}_V$, für die $\Phi \circ \Phi = \Phi$ gilt. Zeigen Sie, dass Null ein Eigenwert von Φ ist.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 1 Punkt und für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Die Minimalpunktzahl dieser Aufgabe ist 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

In der ganzen Aufgabe seien K ein Körper und $n, p \in \mathbb{N}^*$.

		Wahr	Falsch
(a)	Sind $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch AB invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.	☐	☐
(b)	Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit ausschließlich negativen Einträgen und $\det(A) < 0$ ist negativ definit.	☐	☐
(c)	Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\lvert z\rvert = 1$, so gilt $\operatorname{Im}(z) = 0$.	☐	☐
(d)	Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{Z} \to 4\mathbb{Z}$. (Es ist $4\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$.)	☐	☐
(e)	Sind zwei komplexe Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert auch die Folge $(a_k - b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\lim_{k\to\infty}(a_k - b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - \lim_{k\to\infty} b_k$.	☐	☐
(f)	Es sei $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit nur einem Eigenwert. Dann gilt $$B \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ ähnlich zu } D \Longrightarrow B = D.$$	☐	☐
(g)	Ist U Untervektorraum eines K-Vektorraums V und sind $v, w \in V \setminus U$, so gilt $\tilde{v} + \tilde{w} \neq \tilde{0}$ in V/U.	☐	☐
(h)	Ist M eine einelementige Menge, so ist jede Relation auf M symmetrisch.	☐	☐
(i)	Für jede Wahl von $a, b \in K \setminus \{0\}$ ist die Gleichung $ax = b$ in K eindeutig lösbar.	☐	☐
(j)	Ist $A \in K^{p\times n}$ mit $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$, so gilt $\operatorname{Rang}(A) = n$.	☐	☐