Mathe 1: Klausur #4

1. Aufgabe

(a) Erweiterter Euklid:

Zeile m	a_m	b_m	q_m	k_m	ℓ_m
0	$a_0 = 245$	$b_0 = 28$	$q_0 = \lfloor \frac{245}{28} \rfloor = 8$	$k_0 = -1$	$\ell_0 = 1 - 8 \cdot (-1) = 9$
1	$a_1 = 28$	$b_1 = 245 - 8 \cdot 28 = 21$	$q_1 = \lfloor \frac{28}{21} \rfloor = 1$	$k_1 = 1$	$\ell_1 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$
2	$a_2 = 21$	$b_2 = 7$	$q_2 = 3$	$k_2 = 0$	$\ell_2 = 1$
3	$a_3 = 7$	$b_3 = 0$		$k_3 = 1$	$\ell_3 = 0$

Also ist $7 = a_3 = ggT(a,b) = a_0 \cdot k_0 + b_0 \cdot \ell_0$

$= 245 \cdot (-1) + 28 \cdot 9$.

(b) Es gilt: $3x \equiv 1 \mod 6$

$\Leftrightarrow \widetilde{3 \cdot x} = \tilde{1}$ in $\mathbb{Z}_6$

$\Leftrightarrow \tilde{3} \cdot \tilde{x} = \tilde{1}$ in $\mathbb{Z}_6$

Es reicht also zu testen, ob dies für $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gilt: Wegen $\widetilde{3 \cdot 0} = \tilde{0}$, $\widetilde{3 \cdot 1} = \tilde{3} \neq \tilde{1}$, $\widetilde{3 \cdot 2} = \tilde{6} = \tilde{0} \neq \tilde{1}$, $\widetilde{3 \cdot 3} = \tilde{9} = \tilde{3} \neq \tilde{1}$, $\widetilde{3 \cdot 4} = \widetilde{12} = \tilde{0} \neq \tilde{1}$ und $\widetilde{3 \cdot 5} = \widetilde{15} = \tilde{3} \neq \tilde{1}$ gibt es kein solches $x \in \mathbb{Z}$.

2. Aufgabe

(a) $A = a \cdot a^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1 \quad 2 \quad 1)$

$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ (-1)\cdot a & 2\cdot a & 1\cdot a \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nach Definition des Matrixproduktes.

(b) Gauß: $A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt auf

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\overset{2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zwei Nullzeilen heißt $\dim(\ker(A)) = 2$.

Sei $x_3 = s$ und $x_2 = t$. Dann ist

$x_1 = 2x_2 + x_3 = 2t + s$, also

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(c) Wegen $\ker(A) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist $\det(A) = 0$.

Nach Homomorphiesatz ist

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(A)) + \operatorname{Rang}(A)$$
$$= 2 + \operatorname{Rang}(A), \text{ d.h.}$$

$\operatorname{Rang}(A) = 1$.

(d) Offenbar ist $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a$. Also ist

$$\{ x \in \mathbb{R}^3 : A \cdot x = a \} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \ker(A)$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nach (c) ist $\operatorname{Rang}(A) = 1$, d.h. $\operatorname{Bild}(A) = \langle \{a\} \rangle$.

Offenbar ist b kein Vielfaches von a, d.h. $b \notin \operatorname{Bild}(A)$.

Somit ist $\{ x \in \mathbb{R}^3 : A \cdot x = b \} = \emptyset$. (Satz 3.8.3.)

(e) (i) A ist nicht orthogonal, weil $\overbrace{\ }^{\text{z.B.}}$ $\|a\|_2 = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6} \neq 1$.

oder die Spalten linear abhängig sind,

oder die Spalten nicht orthogonal stehen.

(ii) Ja, denn $A^T = (a \cdot a^T)^T = (a^T)^T \cdot a^T = a \cdot a^T = A$.

(iii) Wegen $\dim(\ker(A)) = 2 = \dim(E(A, 0))$ ist 0 EW von A mit Vielfachheit 2. Weiter ist

$$A \cdot a = (a \cdot a^T) a = a \cdot (a^T \cdot a) = a \cdot 6 = 6 \cdot a.$$

Also sind 0 und 6 die einzigen Eigenwerte von A. Wegen $0 \geq 0$ und $6 \geq 0$ ist A pos. semidefinit.

3. Aufgabe

(a) Es gilt $g = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Da E senkrecht zu g und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ sein soll, wissen wir sofort, dass $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$

die Hesse-Normalform ist. Weiter ist

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$, denn $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0$

und $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 3 + 0 - 3 = 0$. Also ist

$E = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$, weil

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Das folgt aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

(b) Nach Satz 3.5.12. ist

$$\operatorname{dist}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E \right) = \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) - 0 \right|$$
$$= \left| \frac{-3}{\sqrt{10}} \right| = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

(c) Sei $b_1 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$b_3 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$:

In (a) haben wir bereits $(b_1 | b_2) = 0 = (b_1 | b_3)$ gesehen. Klar ist $(b_2 | b_3) = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$. Wegen $1 + 3^2 = 10$ ist die Normiertheit klar.

Bezüglich $\mathcal{B}$ gilt

$$\phi(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$\phi(b_2) = -b_2 = 0 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$\phi(b_3) = -b_3 = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + (-1) \cdot b_3.$$

Also ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Sei $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

Dann ist $S := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$ eine orthogonale

Matrix, weil $\mathcal{B}$ eine ONB ist. Nach Basiswechselformel gilt

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = S \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) \cdot \underbrace{S^{-1}}_{= S^T \text{, da } S \text{ orthogonal}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot S^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & -3/\sqrt{10} \\ 0 & -1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & -3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8/10 & 0 & -6/10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6/10 & 0 & 8/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe

(a) Falsch: Völliger Unsinn!

(b) Falsch: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (c) Wahr

(d) Wahr: 41 ist prim (e) Wahr

(f) Wahr: $(x|y) := x \cdot y$ (g) Wahr: $U = V$, $U' = V'$, dann $V/U \cong \{0\} \cong V'/U'$

(h) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Wahr: A orthogonal $\Rightarrow$ A invertierbar

(j) Falsch: kann mehrere geben (k) Falsch: $(-1)^n$

(l) Falsch: $a_n = n$ und $b_n = n^2$