Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2015/16
10.03.2016

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	19	17	9	12	16	20	93		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (19 Punkte)

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.

(b) Gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$ und $Ax = x$?

(c) Ist die Matrix A invertierbar? Ist sie diagonalisierbar?

2. Aufgabe (17 Punkte)

Es seien

$$b_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die Achse $\langle b_1 \rangle$, die b_2 auf b_3 und b_3 auf $-b_2$ abbildet. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\Phi)$ von Φ bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie deren Determinante an.

Hinweis: Bevor Sie einen langen Gauß-Algorithmus starten, nutzen Sie (a)!

3. Aufgabe (9 Punkte)

Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass die Zahl 71^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit der Ziffer 1 endet.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\Phi \in \mathscr{L}(V)$ habe den Eigenwert $\lambda \in K$ mit zugehörigem Eigenraum $U := E(\Phi, \lambda)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi_\lambda : \begin{cases} V/U & \to V \\ \tilde{v} & \mapsto (\Phi - \lambda \mathrm{id}_V)(v). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ_λ wohldefiniert ist, d.h. obige Definition ist repräsentantenunabhängig.

(b) Weisen Sie nach, dass Φ_λ injektiv ist.

(c) Begründen Sie, warum Φ_λ nicht surjektiv ist.

5. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Für jede Menge A hat die Potenzmenge $\mathscr{P}(\{A\})$ genau zwei Elemente.

(b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element n, in der für alle $a \in G$ gilt $a * a = n$. Dann ist G abelsch.

(c) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_a : V \to \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_b : V \to \mathbb{R}$ seien Normen. Dann ist auch $\|\cdot\|_{ab} : V \to \mathbb{R}$ mit $\|x\|_{ab} := \|x\|_a \cdot \|x\|_b$, $x \in V$, eine Norm auf V.

(d) Für alle $a, b, n \in \mathbb{Z}$ gilt $a \equiv b \pmod{n} \Longrightarrow a \equiv n \pmod{b}$.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet.

In der ganzen Aufgabe sei K ein Körper.

		Wahr	Falsch
(a)	Die Relation $\neq$ auf $\mathbb{R}$ ist weder reflexiv, noch transitiv.	☐	☐
(b)	Sind M, N nicht-leere, endliche Mengen und $f : M \to N$ surjektiv, so gilt $\lvert N\rvert \leq \lvert M\rvert$.	☐	☐
(c)	Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \overline{z} \geq 0$.	☐	☐
(d)	Für alle Primzahlen p und alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $a^p \equiv a \pmod{p}$.	☐	☐
(e)	Ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis des K^3, so ist $\{b_1, b_2\}$ eine Basis des K^2.	☐	☐
(f)	Seien $(G, *)$ und $(H, \diamond)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt für $a, b, c \in G$ mit $a * b = c$ immer $f(a) \diamond f(b) = f(c)$.	☐	☐
(g)	Es sei $\Sigma = (S, F, \mathrm{ar})$ eine Signatur, A, B seien Σ-Algebren und $\Phi : A \to B$ ein Homomorphismus. Dann gilt $\Phi_s(A_s) = B_s$ für alle $s \in S$.	☐	☐
(h)	Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ so, dass $\mathbb{Z}_n$ ein Körper ist, so ist n ungerade.	☐	☐
(i)	Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Dann ist $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) - \dim(U_2)$.	☐	☐
(j)	Ist $n \in \mathbb{N}^*$ und $A \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar, so ist auch αA für jedes $\alpha \in K$ diagonalisierbar.	☐	☐