Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2013
05.09.2013

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	8	10	20	16	16	20	90		
erreichte Punktzahl									

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (8 Punkte)

Bestimmen Sie zwei Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $217 \cdot k + 35 \cdot \ell = 77$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{4n^3 - 5n^2 - 2}{2n(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{(b)} \quad b_n = \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Aufgabe (20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $\Phi(b_1) = b_2$ und $\Phi(b_2) = b_1$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\Phi)$ und $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\Phi)$, wobei $\mathscr{E}$ die Standardbasis bezeichne.

(c) Geben Sie alle Eigenwerte von $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\Phi)$ an.

(d) Ist $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\Phi)$ diagonalisierbar?

4. Aufgabe (16 Punkte)

Es sei F der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Folgen. Wir betrachten die Abbildung $\Phi : F \to F$, die gegeben ist durch

$$\Phi\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \Phi\big((a_0, a_1, a_2, \dots)\big) := (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Φ ist linear.

(b) Φ ist surjektiv.

(c) Φ ist nicht injektiv.

Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 3.6.19 der Vorlesung:

> **Satz 3.6.19.** *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
>
> (a) *Φ ist bijektiv.*
>
> (b) *Φ ist injektiv.*
>
> [. . .]
>
> (e) *Φ ist surjektiv.*

5. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Die Relation $\neq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Mengen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element n und es sei $g \in G$ mit Inversem $\overline{g}$. Dann gilt $g = \overline{g} \Longrightarrow g = n$.

(d) Es gibt eine orthogonale Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, die Null als Eigenwert hat.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element n. Dann gilt $n \in U$ für jede Untergruppe U von G.	☐	☐
(b)	Ist $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den beiden Gruppen G und H, so gilt $\overline{f(\overline{g})} = f(g)$ für alle $g \in G$. Hierbei bedeutet der Querstrich wieder die Inversenbildung.	☐	☐
(c)	Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = \lvert z\rvert^2$.	☐	☐
(d)	Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot\vert\cdot)$ und $a \in V$. Dann ist $\{x \in V : (a\vert x) = 0\}$ ein Untervektorraum von V.	☐	☐
(e)	Ist U Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so gilt $\dim(U) < \dim(V)$.	☐	☐
(f)	Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.	☐	☐
(g)	Hat $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt $A - \lambda I = 0$.	☐	☐
(h)	Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ so, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ nicht eindeutig lösbar ist. Dann gilt $\det(A) = 0$.	☐	☐
(i)	Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und surjektiv. Dann ist Φ injektiv, also ein Isomorphismus.	☐	☐
(j)	Es sei V ein Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Ist $x \in U$, so gilt $\tilde{x} = \tilde{0}$ in V/U.	☐	☐