Mathe 1: Klausur #1

1. Aufgabe

(a) Charakteristisches Polynom:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 & 0 \\ -6 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung}}{\underset{\text{nach 3. Spalte}}{=}} (2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\cdot\big((-4-\lambda)(5-\lambda)+18\big)$$

$$= (2-\lambda)\cdot(-20-5\lambda+4\lambda+\lambda^2+18)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Nullstellen: $\lambda_1=\lambda_2=2$ und $\lambda_3=-1$ sind die Eigenwerte von A.

Eigenvektoren zu $\lambda_1=\lambda_2=2$: Löse Gleichungssystem

$(A-2I)x=0$ mit $x\neq 0$ $\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang ist 2, also zwei linear unabhängige Lösungen sind vorhanden.

Durch Hinschauen: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

erfüllen $(A - 2I)v_j = 0$ für $j \in \{1,2\}$.

Dies sind Eigenvektoren zu EW 2 und es gilt

$E(A,2) = \langle v_1, v_2 \rangle$.

<u>Eigenvektoren zu $\lambda_3 = -1$</u>: Löse LGS $(A+I)\cdot x = 0$

mit $x \neq 0$ $\leadsto$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang ist 1, also eine solche Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ existiert.

Nach 2. Zeile ist $x_1 = x_2$. Nach 1. Zeile ist

$3x_3 = 2x_1 - x_1 = x_1$, d.h. $x_3 = \frac{1}{3}x_1$. Also ist

$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_3 = -1$ und

$E(A, -1) = \langle v_3 \rangle$.

(b) Nein: Gäbe es solch einen Vektor x, dann wäre

x Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Nach (a) ist 1 kein Eigenwert von A.

(c) A invertierbar $\overset{\text{Skript}}{\iff} \det(A) \neq 0$

$$\det(A) \overset{\text{Skript}}{=} \cancel{\neq 0}\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 4 \cdot (-1)$$

Also ist A invertierbar.

A ist diagonalisierbar, weil $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis aus Eigenvektoren ist.

2. Aufgabe

(a) Für alle $j \in \{1,2,3\}$ gilt $(b_j \mid b_j) = \frac{1}{9}(1^2+2^2+2^2) = 1$, d.h. sie sind normiert. Weiter ist

$$(b_1 \mid b_2) = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0,$$

$$(b_2 \mid b_3) = \frac{1}{9}(-4+2+2) = 0,$$

$$(b_3 \mid b_1) = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0.$$

Also ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis.

(b) Es gilt

$$\Phi(b_1) = b_1 = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3,$$

$$\Phi(b_2) = b_3 = 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 1\cdot b_3,$$

$$\Phi(b_3) = -b_2 = 0\cdot b_1 + (-1)\cdot b_2 + 0\cdot b_3.$$

Also ist $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: A$.

(c) Sei $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dann gilt

$$A' := M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})}_{= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} =: S} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = S \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Nun ist S orthogonal nach (a), d.h. $S^{-1} = S^T$.
Also ist

$$A' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot S^T$$

$$= \frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\det(A') = \det(S \cdot A \cdot S^{-1}) \overset{\text{Skript}}{=} \det(A)$

$$\underset{\text{nach 1. Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

4. Aufgabe

(a) Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\tilde{v_1} = \tilde{v_2}$, d.h. $v_1 - v_2 \in U$. Also gibt es $u \in U$ mit $v_1 = v_2 + u$. Dann gilt

$$\Phi_\lambda(\tilde{v_1}) = (\Phi - \lambda \mathrm{id}_V)(v_1) = \underbrace{(\Phi - \lambda \mathrm{id}_V)}_{\text{lineare Abbildung}}(v_2 + u)$$

$$= (\Phi - \lambda \mathrm{id}_V)(v_2) + \underbrace{(\Phi - \lambda \mathrm{id}_V)(u)}_{= 0, \text{ weil } u \in U}$$

$$= (\Phi - \lambda \mathrm{id}_V)(v_2) = \Phi_\lambda(\tilde{v_2}),$$

was zu zeigen war.

(b) Φ_λ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\Phi_\lambda(\tilde{v}) = 0_V$ nur für $\tilde{v} = 0_{V/U}$

Sei also $\Phi_\lambda(\tilde{v}) = 0_V \Leftrightarrow (\Phi - \lambda \mathrm{id}_V)(v) = 0_V$

$$\Leftrightarrow v \in U \Leftrightarrow \tilde{v} = 0_{V/U} = \tilde{0_V}.$$

Damit ist Φ_λ injektiv.

(c) Es ist $\dim(U) \geq 1$, weil λ EW von Φ ist. Also ist $\dim(V/U) \overset{\text{Skript}}{=} \dim(V) - \dim(U) < \dim(V)$.

Daher kann Φ_λ nicht surjektiv sein.

5. Aufgabe

(a) Wahr: Es gilt $|\{1\}| = 1$, also ist $|\mathcal{P}(\{1\})| = 2^1 = 2$ nach Beispiel 1.5.6.

(b) Wahr: $a * a = n$ für alle $a \in G \Rightarrow a^{-1} = a$.

Für ~~a*b~~ $a, b \in G$ gilt also $(a*b)^{-1} = a*b$ und $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = b * a$. Zusammen folgt $a*b = b*a$, was zu zeigen war.

(c) Falsch: Es gilt

$$\|2\cdot x\|_{ab} = \|2\cdot x\|_a \cdot \|2\cdot x\|_b = 2\cdot\|x\|_a \cdot 2\cdot\|x\|_b = 2^2\cdot\|x\|_a\cdot\|x\|_b = 4\cdot\|x\|_{ab},$$

also ist die Homogenität nicht erfüllt.

(d) Falsch: $4 \equiv 8 \pmod 2$, aber $4 \not\equiv 2 \pmod 8$.

6. Aufgabe

(a) Wahr (b) Wahr (c) Wahr (d) Wahr: Satz 2.1.16.

(e) Falsch (f) Wahr (g) Falsch (h) Wahr

(i) Falsch (j) Wahr