Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
3. September 2009

Klausur „Mathematik I für BSc. WInf., BSc. Inf. (PO 07)"

Bitte in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen:

Name: ....
Matrikel-Nr.: ....
Vorname: ....
Wiederholer: ....
Fachrichtung: ....

Bitte **alle Blätter** mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in die Aufgabenblätter einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Beginnen Sie **jede Aufgabe mit einem neuen Blatt**. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze und Verfahren, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechengänge und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.

Die *Bearbeitungszeit* beträgt $1\frac{1}{2}$ Stunden.

Als einzige *Hilfsmittel* sind einfache Taschenrechner (einzeiliges Display) sowie 4 DIN A4 Seiten eigenhandschriftlicher Aufzeichnungen zugelassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	4	10	10	10	10	10	54	
erreichte Punktzahl								

1. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie den Quotienten $\frac{1-i}{1+i}$ im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und geben Sie die beiden Quadratwurzeln dieses Wertes (in der Form $a + ib$) an.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Beweisen Sie mit Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für alle reellen $x \geq -1$.

GA

3. Aufgabe (3+7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{5n^4 - n^2 + 2}{n^4 + 3n^3 - 8}$$

(b) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k}$$

konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch Induktion, dass alle $a_n > 0$.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie das **globale** Minimum der Funktion

$$f :]0,1[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

5. Aufgabe (4+6 Punkte)

(a) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx$$

mithilfe partieller Integration.

(b) Seien a und b reelle Zahlen > 0. Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegebenen Ellipse unter Verwendung der Tatsache, dass $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Lösen Sie die Gleichung nach y auf und integrieren Sie diese in den Grenzen $-a$ bis a.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die beide auf $]a,b[$ differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in]a,b[$ existiert mit

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Hinweis: Wenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ an.