## 1. Aufgabe (10 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$.

(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ Ihrer Wahl an und bestimmen Sie für diesen $A^{321}v$.

(c) Ist $A$ diagonalisierbar?

## 2. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden reellen Folgen auf Konvergenz und geben Sie im Konvergenzfalle den Grenzwert an:

$$a_n := \frac{(-1)^n + 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n := \sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen in $\mathbb{C}$ konvergent und/oder absolut konvergent sind:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^n}{n!}.$$

(c) Bestimmen Sie von einer der konvergenten Reihen in (b) den Reihenwert.

## 3. Aufgabe (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Gruppe $(G, *)$ ist genau dann abelsch, wenn $\overline{(g * h)} = \overline{g} * \overline{h}$ für alle $g, h \in G$ gilt.

(b) Die orthogonale Gruppe

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ orthogonal}\}$$

ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ invertierbar}\}$$

*Achtung:* Ein Verweis auf Übungsaufgabe 3.9.12 im Skript genügt nicht als Lösung.

## 4. Aufgabe (8 Punkte)

Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort und die richtige Begründung jeweils einen Punkt.

(a) $6 | (2 \cdot 5^{1000} - 8)$.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so gilt $\det(A^2) > 0$.

(c) Sind $U, W$ Untervektorräume eines Vektorraums $V$ und ist $\mathscr{B}_U$ eine Basis von $U$ und $\mathscr{B}_W$ eine Basis von $W$, so ist $\mathscr{B}_U \cap \mathscr{B}_W$ eine Basis von $U \cap W$.

(d) Sind $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist auch $zw \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

## 5. Aufgabe (10 Punkte)

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $U$ und $W$ seien Untervektorräume von $V$. Dann ist auch

$$U + W := \{u + w : u \in U \text{ und } w \in W\}$$

ein Untervektorraum von $V$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen, es wurde bereits in Übung (H16) gezeigt.)

Zeigen Sie: Ist $\dim(U) = n$, $\dim(W) = m$ und $\dim(U \cap W) = 0$, so gilt $\dim(U + W) = n + m$.

## 6. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 1 Punkt und für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Für keine Antwort erhalten Sie 0 Punkte. Die Minimalpunktzahl dieser Aufgabe ist 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

| | | Wahr | Falsch |
|---|---|---|---|
| (a) | Für jede Wahl von Aussagen $A$ und $B$ ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ wahr. | ☐ | ☐ |
| (b) | Ist $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge, so besitzt jede Teilmenge von $X$, die eine obere Schranke hat, ein Supremum. | ☐ | ☐ |
| (c) | In Ringen gibt es nie Nullteiler. | ☐ | ☐ |
| (d) | Die natürlichen Zahlen bilden mit der Verknüpfung $\mathrm{ggT} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Gruppe. | ☐ | ☐ |
| (e) | Jede beschränkte reelle Folge, die streng monoton ist, ist konvergent. | ☐ | ☐ |
| (f) | Ist $U$ ein Untervektorraum eines Vektorraums $V$ und sind $u, v \in U$, so ist immer auch $u - v \in U$. | ☐ | ☐ |
| (g) | Jede linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums $V$ enthält eine Basis von $V$. | ☐ | ☐ |
| (h) | Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1 - x_4$ ist linear. | ☐ | ☐ |
| (i) | Sind $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ und hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zwei verschiedene Lösungen, so gibt es noch eine dritte Lösung, die von den vorigen beiden verschieden ist. | ☐ | ☐ |
| (j) | Für jede reelle Nullfolge $(a_n)$ ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent. | ☐ | ☐ |