Probeklausur „Mathematik I für Informatiker“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WS 2011/2012
Januar 2012

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	12	8	10	60	
erreichte Punktzahl								

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In dieser Klausur sind alle schriftlichen Unterlagen als Hilfsmittel zugelassen.
Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Punkte	00-29	30-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51	52-54	55-57	58-60
Note	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\Phi\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ definiert durch

$$\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-2y \\ 4z-x \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Seien weiterhin die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \tilde{1} \\ \tilde{1} \\ \tilde{1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{0} \\ \tilde{4} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \tilde{1} \\ \tilde{2} \\ \tilde{1} \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} \tilde{4} \\ \tilde{3} \\ \tilde{3} \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{3} \\ \tilde{2} \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} \tilde{2} \\ \tilde{3} \\ \tilde{4} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $u_i := \Phi(v_i)$ für $i = 1,2,3$. **(3P)**

(b) Seien $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$. Finden Sie $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$. **(7P)**

Lösung:

(a) Wir setzen ein:

$$\Phi(v_1) = \begin{pmatrix} \widetilde{-1} \\ \tilde{3} \\ \tilde{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{4} \\ \tilde{3} \\ \tilde{3} \end{pmatrix} = w_1$$

und genau so $\Phi(v_2) = w_2$ und $\Phi(v_3) = w_3$.

(b) Nach der obigen Teilaufgabe ist $\Phi(v_1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$ (genau so für die anderen beiden Basisvektoren), daher ist die gesuchte Matrix die Einheitsmatrix.

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $x = 546$ und $y = 53$. **(2P)**

(b) Sei $H := \{53, 546\} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$. Bestimmen Sie $\langle H \rangle$ in $(\mathbb{Z}, +)$. **(4P)**

(c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Zahl $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ von 19 geteilt wird. **(4P)**

Lösung:

(a) Der euklidische Algorithmus liefert

x	y
546	53
53	16
16	5
5	1
1	0

also ist $\mathrm{ggT}(546, 53) = 1$.

(b) Da $\mathrm{ggT}(546, 53) = 1$ gilt, gibt es ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $546a + 53b = 1$. Also ist $1 \in \langle H \rangle$ und damit $\langle H \rangle = \mathbb{Z}$.

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} 5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1} &\equiv 5 \cdot 5^{2n} + 27 \cdot 3^{n-1} 2^{n-1} \equiv 5 \cdot (25)^n + 8 \cdot 6^{n-1} \equiv 5 \cdot 6^n + 8 \cdot 6^{n-1} \\ &\equiv 30 \cdot 6^{n-1} + 8 \cdot 6^{n-1} \equiv 38 \cdot 6^{n-1} \equiv 0 \mod 19. \end{aligned}$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n.$$

Lösung:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n$.
Induktionsanfang: Die Behauptung für $n = 1$ lautet

$$4 = \sum_{k=2}^{2} 2k = 3 \cdot 1^2 + 1,$$

was offenbar wahr ist. Der Induktionsanfang ist also korrekt.
Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}^*$ gelte die Aussage $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n$.
Induktionsschritt: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+2}^{2(n+1)} 2k &= \left(\sum_{k=n+1}^{2n} 2k\right) + 2(2n+1) + 2(2n+2) - 2(n+1) \overset{(*)}{=} 3n^2 + n + 2(2n+1) + 2(2n+2) - 2(n+1) \\ &= 3(n+1)^2 + n + 1,\end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle $(*)$ die Induktionsannahme benutzt haben. Wir sehen also, dass wir aus der Induktionsannahme den Induktionsschritt von n auf $n+1$ folgern können, was die Induktion beendet und die behauptete Aussage beweist.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen! Sie erhalten jeweils für die richtige Antwort einen Punkt und für die Begründung zwei Punkte.

(a) Die Menge $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. **(3P)**

(b) Sei V ein K-Vektorraum und seien $\varphi \colon K \to K$ und $\psi \colon K \to K$ lineare Abbildungen. Dann ist auch

$$\varphi \cdot \psi \colon \begin{cases} K \to K \\ x \mapsto \varphi(x) \cdot \psi(x) \end{cases}$$

linear. **(3P)**

(c) Die Relation R auf $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ gegeben durch

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc$$

ist eine Äquivalenzrelation. **(3P)**

(d) Sei $n \geq 2$. Die Menge $K^{n \times n}$ bildet zusammen mit der Addition und der Matrixmultiplikation einen Ring, in dem Elemente existieren, die sowohl Linksnullteiler als auch Rechtsnullteiler sind. **(3P)**

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr. Wir beweisen sie mithilfe des Untergruppenkriteriums. Die Menge $\mathbb{T}$ ist nicht leer, denn es ist beispielsweise $1 \in \mathbb{T}$. Seien also $z, w \in \mathbb{T}$. Insbesondere ist $|z| = |w| = 1$, also $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Daher existiert $w^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und es folgt

$$|zw^{-1}| = |z| \cdot |w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{1}{1} = 1,$$

also ist auch $zw^{-1} \in \mathbb{T}$. Nach dem Untergruppenkriterium folgt also die Behauptung.

(b) Die Aussage ist falsch. Für $K=\mathbb{R}$ und $\varphi=\psi=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ folgt beispielsweise

$$(\varphi\cdot\psi)(2\cdot 1)=2\cdot 2=4\neq 2=2\cdot(\varphi\cdot\psi)(1).$$

(c) Die Aussage ist wahr. Seien $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Die Relation ist reflexiv, denn

$$(a,b)R(a,b) \iff ab=ab.$$

Sie ist symmetrisch, denn

$$(a,b)R(c,d) \iff ad=bc \iff cb=da \iff (c,d)R(a,b).$$

Sie ist transitiv, denn aus $(a,b)R(c,d)$ und $(c,d)R(e,f)$ folgt $ad=bc$ und $cf=de$. Da $f\neq 0$ gilt, erhalten wir aus der zweiten Gleichung $c=\frac{de}{f}$, was wir in die erste Gleichung einsetzen. Damit erhalten wir

$$ad=\frac{bde}{f}\overset{d\neq 0}{\implies} a=\frac{be}{f}\implies af=be\implies (a,b)R(e,f).$$

(d) Die Aussage ist wahr. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $(K^{n\times n},+,\cdot)$ ein Ring ist (Satz 3.7.6). Es ist noch die Existenz eines Elements zu zeigen, welches sowohl Links- als auch Rechtsnullteiler ist. Betrachten wir etwa die Matrizen

$$A:=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad B:=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix},$$

dann folgt $AB=BA=0$, obwohl $A\neq 0\neq B$ gilt. Also ist A ein Links- und ein Rechtsnullteiler.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V und $\phi\colon V\to V$ ein Automorphismus.
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\tilde\phi:\begin{cases}V/U\to V/U\\ \tilde v\mapsto\widetilde{\phi(v)}\end{cases}$$

genau dann ein wohldefinierter Automorphismus ist, wenn $\phi(U)=U$ gilt. **(7P)**
Tipp: Zeigen Sie für jedes $\tilde v\in V/U$ zunächst, dass $\tilde v=\tilde 0$ genau dann gilt, wenn $v\in U$ liegt. **(1P)**

Lösung: Wir zeigen zunächst den Tipp. Es ist $\tilde v=\tilde 0 \iff v\sim 0 \iff v-0\in U \iff v\in U$.

"$\Rightarrow$" Sei $v\in\phi(U)$. Dann gibt es ein $u\in U$ mit $\phi(u)=v$. Dann folgt $\tilde v=\widetilde{\phi(u)}=\tilde\phi(\tilde u)=\tilde\phi(\tilde 0)=\tilde 0$, also $v\in U$. Also ist $\phi(U)\subseteq U$.

Sei andererseits $u\in U$. Da ϕ ein Automorphismus ist, gibt es ein $v\in V$ mit $\phi(v)=u$. Es bleibt zu zeigen, dass $v\in U$ liegt.

Es gilt

$$\tilde 0=\tilde u=\widetilde{\phi(v)}=\tilde\phi(\tilde v).$$

Da $\tilde\phi$ ein Automorphismus ist, muss $\tilde v=\tilde 0$ gelten, also $v\in U$. Das zeigt $U\subseteq\phi(U)$.

"$\Leftarrow$" **Wohldefiniertheit:** Seien $v,w\in V$ mit $\tilde v=\tilde w$. Dann gibt es ein $u\in U$ mit $v=w+u$ und es folgt

$$\tilde\phi(\tilde v)=\widetilde{\phi(v)}\overset{\phi\text{ linear}}{=}\widetilde{\phi(w)}+\widetilde{\phi(u)}\overset{\phi(u)\in U}{=}\widetilde{\phi(w)}=\tilde\phi(\tilde w).$$

Linearität: Seien $\tilde v,\tilde w\in V/U$ und $a,b\in K$. Dann ist

$$\tilde\phi(a\tilde v+b\tilde w)=\phi(\widetilde{av+bw})\overset{\phi\text{ linear}}{=}a\widetilde{\phi(v)}+b\widetilde{\phi(w)}=a\tilde\phi(\tilde v)+b\tilde\phi(\tilde w).$$

Injektivität: Seien $\tilde{v}, \tilde{w} \in V/U$ mit $\tilde{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{\phi}(\tilde{w})$. Dann folgt $\widetilde{\phi(v)} = \widetilde{\phi(w)}$, also $\phi(v) = \phi(w) + u$ mit einem $u \in U$. Da $\phi(U) = U$ gilt, gibt es ein $u' \in U$ mit $\phi(u') = u$, so dass wir zusammen folgern

$$\phi(v) = \phi(w) + u = \phi(w) + \phi(u') \overset{\phi \text{ linear}}{=} \phi(w + u') \overset{\phi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} v = w + u' \implies \tilde{v} = \tilde{w}.$$

Surjektivität: Sei $\tilde{w} \in V/U$. Da ϕ surjektiv ist, gibt es ein $v \in V$ mit $\phi(v) = w$. Wir behaupten, dass dann $\tilde{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{w}$ gilt, was die Surjektivität zeigt. Tatsächlich ist

$$\tilde{\phi}(\tilde{v}) = \widetilde{\phi(v)} = \tilde{w}.$$

6. Aufgabe (10 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. In diesem Aufgabenteil sind keine Begründungen erforderlich.

wahr	falsch	
☐	☒	$\mathbb{Z}_{105}$ ist ein Körper.
☐	☒	Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 = \lvert z\rvert^2$.
☒	☐	Jedes Maximum einer Menge M ist auch ein Supremum von M.
☐	☒	Für alle Teilmengen A, B einer Grundmenge M ist $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
☐	☒	Auf $\mathbb{R}$ ist $>$ eine Ordnungsrelation.
☒	☐	Wenn $A \subseteq B$ gilt, dann gibt es eine injektive Funktion $f \colon A \to B$.
☐	☒	Jede lineare Abbildung, die injektiv ist, muss auch bijektiv sein.
☒	☐	Es sei $(\cdot\vert\cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Dann gilt $(v\vert w) \cdot (v\vert w) \leq (v\vert v) \cdot (w\vert w)$ für alle $v, w \in V$.
☒	☐	Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt $\dim(\langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle) \leq n$.
☒	☐	Sei V ein K-Vektorraum und sei $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist $\{2v_1 + v_2, -v_1 + v_2, v_1 + v_2\}$ linear abhängig.