Mathe 1: Klausur #5

1. Aufgabe

(a) Durch Hinschauen: $k=1$ und $\ell=-1$ erfüllen

$$132 \cdot 1 + 72 \cdot (-1) = 60.$$

Alternativ: Erweiterter Euklid

Zeile m	a_m	b_m	$q_m = \lfloor \frac{a_m}{b_m} \rfloor$	$\tilde{k}_m$	$\tilde{\ell}_m$
0	132	72	1	-1	$1-1\cdot(-1)=2$
1	72	60	1	1	$0-1\cdot 1=-1$
2	60	12	5	0	1
3	12	0		1	0

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a_3}_{12} = ggT(132, 72) = 132 \cdot (-1) + 72 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad 60 = 5 \cdot 12 = 132 \cdot (-1) \cdot 5 + 72 \cdot 2 \cdot 5$$
$$= 132 \cdot (-5) + 72 \cdot (10)$$

$\Rightarrow$ $k=-5$ und $\ell=10$ ist auch eine Lösung

(b) Anfang $n=0$: $2^{3n}-1 = 2^{3\cdot 0}-1 = 1-1=0$ ist durch 7 teilbar.

Annahme: $2^{3n}-1 \equiv 0 \mod 7$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Schritt $n \to n+1$:

$$2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1$$
$$= 2^{3n} \cdot 2^3 - 1$$
$$= (2^{3n} - 1 + 1) \cdot 8 - 1$$
$$= \underbrace{(2^{3n} - 1)}_{\substack{\text{Annahme} \\ \equiv 0 \pmod 7}} \cdot 8 + \underbrace{8 - 1}_{= 7 \equiv 0 \pmod 7}$$

$$= 0 + 0 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7.$$

Also ist $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>2. Aufgabe</u>

(a) Nach VL ist $[\Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\Phi_1(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\Phi_1(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Durch Spiegelung Φ_2 sehen wir

$\Phi_2(\Phi_1(e_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\Phi_2(\Phi_1(e_2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Also ist $[\Phi_2 \circ \Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $A := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = [\Phi_2 \circ \Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Klar: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Also sind die Spalten von A eine ONB von $\mathbb{R}^2$, somit ist A orthogonal. Daher ist

$$A^{-1} = A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

3. Aufgabe

Nicht in dieser Mathe 1

4. Aufgabe

(a) Wahr: Sei $a \in G$ und $b = n$. Dann gilt

$$a * a = a * n * a \overset{\text{Annahme}}{=} n * a * n = a, \text{ d.h.}$$

$$a = a * a * \bar{a} = a * \bar{a} = n.$$

(b) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat EW 1, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat EW 1, aber $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat nicht den EW $1 \cdot 1 = 1$.

(c) Falsch: Sei $z = 1 + i$, dann ist $z + \bar{z} = 2$ und $z - \bar{z} = 2i$, d.h. $\overline{(z+\bar{z})(z-\bar{z})} = \overline{4i} = -4i$ ist nicht reell.

(d) Falsch: Sei $U = \{0_V\}$ und $W = V = \mathbb{R}^3$. Dann ist $U \cap W = \{0_V\}$, d.h.

$$0 = \dim(U \cap W) = \dim(U) - \dim(W)$$
$$= 0 - \dim(V) = 0 - 3 = -3. \ \lightning$$

5. Aufgabe

Sei $\ker(\Phi \circ \Phi) = \ker(\Phi)$. Weiter sei $v \in \ker(\Phi) \cap \Phi(V)$, d.h. $\Phi(v) = 0_V$ und es gibt $w \in V$ mit $v = \Phi(w)$. Dann gilt $0_V = \Phi(v) = \Phi(\Phi(w))$, d.h. es ist $w \in \ker(\Phi \circ \Phi)$. Nach Annahme ist $w \in \ker(\Phi \circ \Phi) = \ker(\Phi)$, also ist $v = \Phi(w) = 0_V$. Damit ist $\ker(\Phi) \cap \Phi(V) \subseteq \{0_V\}$ gezeigt. Die Inklusion $\{0_V\} \subseteq \ker(\Phi) \cap \Phi(V)$ ist klar, weil $\ker(\Phi)$ und $\Phi(V)$ UVR von V sind. Also ist $\ker(\Phi) \cap \Phi(V) = \{0_V\}$.

6. Aufgabe

(a) Falsch: $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $Y = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$ hat $\sup(Y) = \sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$

(b) Wahr: f injektiv $\Rightarrow$ $|f(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{N}|$

(c) Falsch: Wähle $a = b = 0$

(d) Wahr: $A \wedge B \wedge (\neg A)$ ist falsch und daraus folgt immer etwas Wahres.

(e) Falsch: $\|-x\|_2 = \|x\|_2 \neq -\|x\|_2$

(f) Wahr: $\widetilde{v+w} = \tilde{v} + \tilde{w}$, weil $v+w \in U$.

(g) Falsch: Sei $\left(\binom{x_1}{y_1} \middle| \binom{x_2}{y_2} \right) = x_1 x_2 + 2 y_1 y_2$.

$\binom{1}{1}, \binom{1}{-1}$ sind orthogonal bzgl. Standard-skalarprodukt, aber $\left(\binom{1}{1} \middle| \binom{1}{-1} \right) = 1 - 2 = -1 \neq 0$.

(h) Falsch: $\text{Rang}(A) = 2 \Rightarrow \text{Bild}(A)$ ist 2-dimensional

$\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}^4$ mit $b \notin \text{Bild}(A)$

(i) Wahr: Definition 0: $\det(A - 0 \cdot I) = \det(A)$

(j) Nicht in dieser Mathe 1.