Mathe 1: Klausur #5

1. Aufgabe

(a) Durch Hinsehen: $k=1$ und $\ell=-1$ erfüllt

$$132\cdot 1 + 72\cdot(-1) = 60.$$

~~Algorithmi~~

Algorithmisch: $\underbrace{\text{ggT}(132,72)}_{=12} \overset{\text{Euklid}}{=} 132\cdot\tilde{k} + 72\cdot\tilde{\ell}$

a	b	$\lfloor a/b \rfloor$	$\tilde{k}$	$\tilde{\ell}$
132	72	1	-1	$1-1\cdot(-1)=2$
72	60	1	1	$0-1\cdot 1=-1$
60	12	5	0	$1-0\cdot 5=1$
12	0		1	0

$$\Rightarrow \quad 12 = 132\cdot(-1) + 72\cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad 60 = 5\cdot 12 = 132(-5) + 72\cdot 10$$

$\Rightarrow$ $k=-5$ und $\ell=10$ ist auch eine Lösung

(b) Anfang $n=0$: $2^{3n}-1 = 2^{3\cdot 0}-1 = 1-1 = 0$ ist durch 7 teilbar

Annahme: $2^{3n}-1 \equiv 0 \pmod 7$ für ein $n\in\mathbb{N}$.

Schritt $n \to n+1$:

$$2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1$$
$$= 2^{3n} \cdot 2^3 - 1$$
$$= (2^{3n} - 1 + 1) \cdot 8 - 1$$
$$= \underbrace{(2^{3n} - 1)}_{\substack{\text{Annahme} \\ \equiv 0 \pmod 7}} \cdot 8 + \underbrace{8 - 1}_{= 7 \equiv 0 \pmod 7}$$

$$= 0 + 0 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7.$$

Also ist $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe

(a) Nach VL ist $[\Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\Phi_1(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{1}$ und $\Phi_1(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{-1}{1}$.

Durch Spiegelung Φ_2 sehen wir

$$\Phi_2(\Phi_1(e_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{1} \text{ und } \Phi_2(\Phi_1(e_2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{+1}{-1}.$$

Also ist $[\Phi_2 \circ \Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

(b) Sei $A := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = [\Phi_2 \circ \Phi_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Klar: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Also sind die Spalten von A eine ONB von $\mathbb{R}^2$, somit ist A orthogonal. Daher ist

$$A^{-1} = A^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

3. Aufgabe

Nicht in dieser Mathe 1

4. Aufgabe

(a) Wahr: Sei $a \in G$ und $b = n$. Dann gilt

$$a * a = a * n * a \overset{\text{Annahme}}{=} n * a * n = a, \text{ d.h.}$$

$$a = a * a * \bar{a} = a * \bar{a} = n.$$

(b) Falsch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat EW 1, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat EW 1, aber $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat nicht den EW $1 \cdot 1 = 1$.

(c) Falsch: Sei $z = 1 + i$, dann ist $z + \bar{z} = 2$ und $z - \bar{z} = 2i$, d.h. $\overline{(z+\bar{z})(z-\bar{z})} = \overline{4i} = -4i$ ist nicht reell.

(d) Falsch: Sei $U = \{0_V\}$ und $W = V$, dann
$$= \mathbb{R}^3$$
ist $U \cap W = \{0_V\}$, d.h.

$$0 = \dim(U \cap W) = \dim(U) - \dim(W) = 0 - \dim(V) = -3 \quad ↯$$

5. Aufgabe

Sei $\ker(\Phi \circ \Phi) = \ker(\Phi)$. Weiter sei $v \in \ker(\Phi) \cap \Phi(V)$, d.h. $\Phi(v) = 0_V$ und es gibt $w \in V$ mit $v = \Phi(w)$.

Dann gilt $0_V = \Phi(v) = \Phi(\Phi(w))$, d.h. $w \in \ker(\Phi \circ \Phi)$.

Nach Annahme ist $w \in \ker(\Phi) = \ker(\Phi \circ \Phi)$, also ist $\Phi(w) = 0_V$. Damit $\ker(\Phi) \cap \Phi(V) \subseteq \{0_V\}$ gezeigt. Die Inklusion $\{0_V\} \subseteq \ker(\Phi) \cap \Phi(V)$ ist klar, weil $\ker(\Phi)$ und $\Phi(V)$ UVR von V sind. Also ist $\ker(\Phi) \cap \Phi(V) = \{0_V\}$.

6. Aufgabe

(a) Falsch: $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $Y = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$ hat $\sup(Y) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(b) Wahr (c) Falsch: $a = 0 = b$ (d) Wahr

(e) Falsch: $\|-x\|_2 = \|x\|_2 \neq -\|x\|_2$ (f) Wahr: $\widetilde{v+w} = \tilde{v} + \tilde{w}$

(g) Falsch (h) Falsch (i) Wahr (j) Nicht für diese Mathe 1