Probeklausur zu „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

WiSe 2012
21.01.2013

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	18	13	14	16	13	16	90	
erreichte Punktzahl								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (18 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ mit

$$17d \equiv 1\,(\mathrm{mod} 30). \tag{1}$$

(b) Beweisen Sie: Erfüllt $d \in \mathbb{Z}$ die Kongruenz (1) von Aufgabenteil (a), dann gilt $(w^{17})^d \equiv w\,(\mathrm{mod} 31)$ für alle $w \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe (13 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume von V mit $V = U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

(b) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig darstellen als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$.

3. Aufgabe (14 Punkte)

Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$, $\Phi : V \to W$ linear, $r = \mathrm{Rang}(\Phi)$.

a) Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $\{v_1, \cdots, v_{n-r}\}$ eine Basis von Ker (Φ) und $\{w_1, \cdots, w_r\}$ eine Basis von $\Phi(V)$. Wählt man für jedes $i = 1, \cdots, r$ ein Urbild $u_i \in \Phi^{-1}(w_i)$, dann ist $\{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_{n-r},\}$ eine Basis von V.

b) Zeigen Sie, dass Basen $\mathscr{B}$ von V und $\mathscr{C}$ von W existieren, derart, dass die Abbildungmatrix von Φ die Form $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ hat, wobei $E_r = (\delta_{j,k})_{j,k=1,\ldots,r} \in K^{r \times r}$ die Einheitsmatrix bezeichnet und die restlichen Einträge mit 0 gefüllt werden.

4. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ beliebige Abbildungen, und ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.

(b) Sind $U_1, U_2 \subset G$ Untergruppen einer Gruppe G, dann ist $U_1 \cup U_2$ eine Untergruppe von G.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann ist $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Seien V, W K-Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $S = \{v_1, \cdots, v_r\} \subset V$ und $T = \{\Phi(v_1), \cdots, \Phi(v_r)\} \subset W$. Dann gilt: Ist T linear unabhängig, dann ist auch S linear unabhängig.

5. Aufgabe (13 Punkte)

Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie, dass auf G durch $r \sim_H s :\Longleftrightarrow r \in Hs := \{h \cdot s \mid h \in H\}$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

(b) Beweisen Sie, dass die durch $\sim_H$ gegebenen Äquivalenzklassen gleichmächtig sind. (Hinweis: Zeigen Sie, dass es zu jeder Äquivalenzklasse $\tilde{s}$ eine Bijektion zwischen H und $\tilde{s}$ gibt.)

(c) Beweisen Sie: Bezeichnet $q = |H|$ und $w = |G|$, dann gilt $q|w$.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte. Kreuzen Sie in einer Zeile keine Kästchen an, so erhalten Sie dafür 1 Punkt. Auf eine falsche Antwort gibt es 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Alle Permutationsgruppen sind abelsch.	☐	☐
(b)	Jeder K-Vektorraum V ist mit seiner Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.	☐	☐
(c)	Jeder Vektorraum besitzt eine endliche Basis.	☐	☐
(d)	Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Im}(\mathrm{Im}(z)) = \mathrm{Im}(z)$.	☐	☐
(e)	Sind $(G_1, +), (G_2, \cdot)$ Gruppen, $f : G_1 \to G_2$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : G_2 \to G_1$ auch ein Gruppenhomomorphismus.	☐	☐
(f)	Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann ist $\frac{1}{z\bar{z}}$ eine reelle Zahl.	☐	☐
(g)	Ist V endlichdimensionaler K-Vektorraum, $W = \{0\} \subset V$ der Nullraum, dann gilt $V/W \cong V$.	☐	☐
(h)	Sind V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W)$, dann gilt $V \cong W$.	☐	☐