Mathe 1: Klausur #3

1. Aufgabe

Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 2^{n+1} ein Teiler von $3^{2^n}-1$, d.h. es gibt $q \in \mathbb{Z}$ mit

$$3^{2^n}-1 = 2^{n+1} \cdot q.$$

Anfang $n=0$: Für $n=0$ ist $3^{2^n}-1 = 3^1-1 = 2 = 2^{0+1} \cdot 1$, also stimmt die Aussage für $n=0$.

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert $q \in \mathbb{Z}$ mit

$$3^{2^n}-1 = 2^{n+1} \cdot q.$$

Schritt $n \to n+1$: Es gilt

$$3^{2^{n+1}} - 1 = 3^{2^n \cdot 2} - 1^2 = \left(3^{2^n}\right)^2 - 1^2$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \left(3^{2^n}+1\right) \cdot \left(3^{2^n}-1\right)$$

$$= \left(3^{2^n}-1+2\right) \cdot \left(3^{2^n}-1\right)$$

$$\overset{\text{Annahme}}{=} \left(2^{n+1} \cdot q + 2\right) \cdot 2^{n+1} \cdot q$$

$$= \left(2^n \cdot q + 1\right) \cdot 2 \cdot 2^{n+1} \cdot q$$

$$= (2^n \cdot q + 1) \cdot 2^{n+1+1} \cdot q$$

$$= 2^{n+1+1} \cdot \underbrace{(2^n \cdot q + 1) \cdot q}_{=: \hat{q}}.$$

Offenbar ist $\hat{q} \in \mathbb{Z}$, weil $2^n, q, 1 \in \mathbb{Z}$.
Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe

(a) und (b): Es gilt

$$A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot b_1,$$

$$A \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot b_2 \text{ und}$$

$$A \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot b_3.$$

Wegen $b_j \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ sind b_1, b_2, b_3 Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$. Die Vektoren b_1 und b_2 sind linear unabhängig, denn

$$\alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Also ist $\{b_1, b_2\}$ Basis von $E(A, -2)$.

Da $4 \neq -2$, muss $\{b_1, b_2, b_3\}$ Basis sein (siehe Satz 3.11.11. (c)), denn b_3 spannt $E(A, 4)$ auf. Also sind -2 und 4 die Eigenwerte von A.

(c) Bezüglich $\mathcal{B}$ gilt

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$ denn nach (b)

ist $m_1 := \dim(E(A,-2)) = 2$, $m_2 := \dim(E(A,4)) = 1$, also ist $m_1 + m_2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Nach Satz 3.11.13. hat ϕ bzgl. $\mathcal{B}$ die Matrix von oben.

3. Aufgabe

(a) Sei $p(X) := X$, dann ist $p \in V$, $p(0) = 0$, aber $p \neq 0_V$. Somit gilt $\|p\|_0 = 0$ für ein $p \neq 0_V$, d.h. (N1) ist nicht erfüllt.

(b) Es gilt $p(0) = 0$ für $p(x) := x$, d.h. $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Seien nun $p, q \in \mathcal{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(\lambda \cdot p + \mu \cdot q)(0) \overset{\text{Def.}}{=} (\lambda \cdot p)(0) + (\mu \cdot q)(0)$$
$$\overset{\text{Def.}}{=} \lambda \cdot \underbrace{p(0)}_{=0} + \mu \cdot \underbrace{q(0)}_{=0}$$
$$\overset{p,q \in \mathcal{U}}{=} \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$ d.h.

$\lambda \cdot p + \mu \cdot q \in \mathcal{U}$.

(c) $$\tilde{p} = \tilde{q} \overset{\text{Def. } V/\mathcal{U}}{\Longleftrightarrow} p - q \in \mathcal{U}$$
$$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (p-q)(0) = 0$$
$$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} p(0) - q(0) = 0$$
$$\Longleftrightarrow p(0) = q(0),$$

wobei $\tilde{p}, \tilde{q} \in V/\mathcal{U}$.

(d) $\|\cdot\|$ ist wohldefiniert: Seien $\tilde{p}, \tilde{q} \in V/\mathcal{U}$ mit $\tilde{p} = \tilde{q}$. Dann ist $p(0) = q(0)$ nach (c). Also ist $\|\tilde{p}\| = |p(0)| = |q(0)| = \|\tilde{q}\|$.

(N1): Sei $\tilde{p} \in V/\mathcal{U}$. Dann ist $\|\tilde{p}\| = |p(0)| \geq 0$.

Sei $\|\tilde{p}\| = 0$, d.h. $p(0) = 0$. Dann ist

$p \in \mathcal{U}$ (nach Def. von $\mathcal{U}$). Nach Definition von $V/\mathcal{U}$ ist $O_{V/\mathcal{U}} = \tilde{p}$ mit $p \in \mathcal{U}$, d.h. (N1) ist erfüllt.

(N2): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\tilde{p} \in V/\mathcal{U}$. Dann ist

$$\|\alpha \cdot \tilde{p}\| \overset{\text{Def. } V/\mathcal{U}}{=} \|\widetilde{\alpha \cdot p}\| \overset{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} |(\alpha \cdot p)(0)|$$

$$= |\alpha \cdot p(0)| \overset{|\cdot| \text{ Norm}}{=} |\alpha| \cdot |p(0)|$$

$$\overset{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} |\alpha| \cdot \|\tilde{p}\|. \checkmark$$

(N3) Seien $\tilde{p}, \tilde{q} \in V/\mathcal{U}$. Dann gilt

$$\|\tilde{p} + \tilde{q}\| \overset{\text{Def. } V/\mathcal{U}}{=} \|\widetilde{p+q}\| \overset{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} |(p+q)(0)|$$

$$= |p(0) + q(0)|$$

$$\underset{|\cdot|}{\overset{\Delta\text{-Ungl. für}}{\leq}} |p(0)| + |q(0)| \overset{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} \|\tilde{p}\| + \|\tilde{q}\|.$$

4. Aufgabe

(a) Wahr: Nach dem Kleinem Satz von Fermat ist $a^p \equiv a \mod p$, d.h. es gibt zunächst $k \in \mathbb{Z}$ mit $a^p - a = k \cdot p \Leftrightarrow a^p = a + k \cdot p$. Wegen $p \geq 2$ und $a \in \mathbb{N}$ ist $a^p - a \geq 0$, d.h. es gilt sogar $k \in \mathbb{N}$.

(b) Wahr: Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= \left((1,0,1)^T \mid \lambda \cdot x + \mu \cdot y \right) \\
&\overset{(SP2)}{=} \left(\lambda \cdot x + \mu \cdot y \mid (1,0,1)^T \right) \\
&\overset{(SP3)}{=} \lambda \cdot \left(x \mid (1,0,1)^T \right) + \mu \cdot \left(y \mid (1,0,1)^T \right) \\
&\overset{(SP2)}{=} \lambda \cdot \left((1,0,1)^T \mid x \right) + \mu \cdot \left((1,0,1)^T \mid y \right) \\
&= \lambda \cdot \Phi(x) + \mu \cdot \Phi(y),
\end{aligned}$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nach Satz 3.6.2. ist Φ linear.

(c) Wahr: Reflexiv klar, denn $v \sim v \Leftarrow$ v und v sind linear abhängig.

Symmetrisch: Sei $v \sim w$, d.h. v und w linear abhängig. Dann gibt es $\lambda \neq 0$ mit $v = \lambda \cdot w$. Also sind auch w und v linear abhängig, d.h. $w \sim v$.

Transitiv: Sei $v \sim w$ und $w \sim u$, dann gibt es $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ mit $v = \lambda \cdot w$ und $w = \mu \cdot u$. Also ist $v = \lambda \cdot w = \lambda \cdot \mu \cdot u = \gamma \cdot u$ mit $\gamma := \lambda \cdot \mu \neq 0$. Somit ist auch $v \sim u$, d.h. v und u sind linear abhängig.

5. Aufgabe

(a) Wahr: Klar!

(b) Wahr: Für $g = n$ gilt $g * g = n * n = n$.

(c) Wahr: $(-e) \cdot (-e) = e$

(d) Wahr: Es gilt

$$\frac{|z|^2 + z^2}{z} = \frac{z \cdot \bar{z} + z \cdot z}{z} = \frac{\cancel{z} \cdot (\bar{z} + z)}{\cancel{z}}$$

$$= \bar{z} + z = 2 \cdot \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

(e) Falsch: $V = \mathbb{C}^2 = U$ und $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

sowie $W = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$ mit $\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Dann ist $U \cap W = W$ und $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W = \emptyset$.

(f) Wahr: $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A^2) = \det(A)^2 = 0$.

(g) Falsch: $0 \cdot x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, ist unlösbar

(h) Wahr: Korollar 3.6.18.