(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)}\, e^{2t}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. $$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y(t)} \cdot e^{2t}$$

2. $$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y(t)} \cdot e^{2t} \quad | \cdot dt \quad | : \sqrt{y(t)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y(t)}} \cdot dy = e^{2t} \cdot dt$$

3. $$\int \frac{1}{\sqrt{y(t)}} \cdot dy = \int e^{2t} \cdot dt$$

4. $$2\sqrt{y(t)} + c_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + c_2 \quad | - c_1$$

$$2\sqrt{y(t)} = \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \underbrace{c_2 - c_1}_{= C} \quad | : 2$$

$$\sqrt{y(t)} = \frac{1}{4} \cdot e^{2t} + c \quad |^2$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{4} \cdot e^{2t} + c\right)^2$$

$\Rightarrow$ $y(0) = 1$ einsetzen

$$y(0) = \left(\underbrace{\frac{1}{4} \cdot e^{2 \cdot 0}} + c\right)^2$$

$$1 = \left(\frac{1}{4} + c\right)^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\pm 1 = \frac{1}{4} + c \quad | - \frac{1}{4}$$

$$-\frac{5}{4} = c_1$$