Klausur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher

WS 2016/17
09.03.2017

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Bonus	Note
mögliche Punkte	15	10	25	14	16	20	100		
erreichte Punkte									

Hinweise

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Druckschrift** aus. Versehen Sie **alle Blätter** mit **Ihrem Namen** und **Ihrer Matrikelnummer**.

Sie benötigen kein eigenes Papier. Sollte der Platz unter den Aufgaben Ihnen nicht genügen, können Sie die Seiten am Ende der Klausur verwenden. Kennzeichnen Sie deutlich, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Als Hilfsmittel ist lediglich **ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt** bzw. **zwei DIN A4 Seiten** zugelassen.

Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Ein Verstoß hiergegen wird als Täuschungsversuch gewertet.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.

Bedenken Sie: Wo nicht anders angegeben, sind **alle Ergebnisse zu begründen**, etwa durch eine Rechnung. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (Teilbarkeit) (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von 1155 und 546. (4 P.)

(b) Zeigen Sie, dass $13^{10} - 4^5$ von 11 geteilt wird. (4 P.)

(c) Bestimmen Sie das multiplikativ Inverse von 17 in $\mathbb{Z}/71\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, 70\}$. (7 P.)
Hinweis: Es kann der Euklidische Algorithmus verwendet werden.

2. Aufgabe (Vollständige Induktion) (10 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Hinweis: Halten Sie den Formalismus der vollständigen Induktion ein.

3. Aufgabe (Lineare Algebra) (25 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix. (10 P.)

(b) Ist die Matrix diagonalisierbar? (2 P.)

(c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix. (1 P.)

(d) Geben Sie eine Basis des Kerns der Matrix an. (2 P.)

(e) Existiert ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x^\top A x = -1$? Falls ja, geben Sie ihn an. (3 P.)

(f) Wie viele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? (2 P.)

(g) Bestimmen Sie alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, für die $A = x \cdot x^\top$ gilt. (5 P.)

4. Aufgabe (Gruppen) (14 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ A \text{ ist orthogonal}\}$$

ein Gruppe mit der üblichen Matrixmultiplikation ist.
Ist $O(2)$ abelsch?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für beliebige Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Ein Verweis auf Übungsaufgabe 3.9.12 des Vorlesungsskripts genügt zur Bearbeitung dieser Aufgabe natürlich nicht aus!

5. Aufgabe (Beweisen und Widerlegen) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Seien $\phi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ Abbildungen zwischen den Mengen X, Y, Z. Dann gilt:

Ist $\psi \circ \phi$ bijektiv, so folgt, dass ψ injektiv und ϕ surjektiv ist.

(b) Sei $||\cdot||$ die vom Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right).$$

(c) In $\mathbb{R}^9$ existieren zwei 6-dimensionale Untervektorräume, deren Schnitt die Dimension 2 hat.

(d) Ist λ ein Eigenwert der regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist λ^{-1} ein Eigenwert der Matrix A^{-1}.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. **Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen.**
Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet.

		wahr	falsch
(a)	Es seien X_1, X_2, X_3, X_4 Mengen. Dann gilt: $X_1 \setminus (X_2 \setminus (X_3 \setminus X_4)) \subseteq X_1 \setminus (X_2 \setminus X_3)$.	☐	☐
(b)	Seien X, Y Mengen und sei $f: X \to Y$ ein Abbildung. Weiter sei $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X. Dann gilt: $f^{-1}(f(A)) = A$.	☐	☐
(c)	Sei i die imaginäre Einheit. Dann gilt: $\sum_{k=1}^{2017} i^k = i$.	☐	☐
(d)	Sei U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^9$ mit Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$. Dann gilt $\dim(\mathbb{R}^9/U) = 3$.	☐	☐
(e)	Die Gerade $g = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ steht senkrecht auf der Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_2 - x_3 = 1\}$.	☐	☐
(f)	Es gibt genau eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\phi \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.	☐	☐
(g)	Sind x und y zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems, so ist auch $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems.	☐	☐
(h)	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat über allen Körpern denselben Rang.	☐	☐
(i)	Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Dann gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.	☐	☐
(j)	Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$ ist für alle $0 > \lambda \in \mathbb{R}$ negativ definit.	☐	☐