Probeklausur zu „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **WiSe 2012**
Dr. Robert Haller-Dintelmann **21.01.2013**

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	18	13	14	16	13	16	90	
erreichte Punktzahl								

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (18 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ mit

$$17d \equiv 1\,(\mathrm{mod}30). \tag{1}$$

(b) Beweisen Sie: Erfüllt $d \in \mathbb{Z}$ die Kongruenz (1) von Aufgabenteil (a), dann gilt $(w^{17})^d \equiv w\,(\mathrm{mod}31)$ für alle $w \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Wir berechnen mittels des erweiterten Euklidischen Algorithmus eine Zahl d, welche (1) erfüllt: Der Notation von Beispiel 2.1.13 aus dem Skript folgend, berechnen wir

a	b	$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$	k	l
30	17	1	4	-7
17	13	1	-3	4
13	4	3	1	-3
4	1	4	0	1
1	0		1	0

Also ist $1 = 4 \cdot 30 - 7 \cdot 17$ und damit $17 \cdot (-7) \equiv 1\,(\mathrm{mod}30)$. Damit erfüllt $d = -7$ die geforderte Eigenschaft.

(b) Ist w ein Vielfaches von 31 so ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Andernfalls sind w und 31 teilerfremd, da 31 eine Primzahl ist. Es gilt daher mit $d = -7$ die Gleichung $(w^{17})^d = w^{1-4\cdot 30} = w \cdot (w^{30})^{-4}$. Nach Korrollar 2.1.17 (Folgerung aus dem kleinen Satz von Fermat) gilt nun das geforderte Resultat.

2. Aufgabe (13 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume von V mit $V = U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

(b) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig darstellen als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$.

Lösung:
$\neg(b) \Longrightarrow \neg(a)$:
Angenommen, es existiert ein $v \in V$, welches keine eindeutige Darstellung durch Elemente aus U_1, U_2 besitzt. Dann gibt es Vektoren $u_1, w_1 \in U_1$ sowie Vektoren $u_2, w_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2 = w_1 + w_2$ und $u_1 \neq w_1, u_2 \neq w_2$.(Gilt $u_1 = w_1$, so muss auch $u_2 = w_2$ gelten. Analoges verhält es sich, falls $u_2 = w_2$ gilt.) Also gilt $0 = v - v = (u_1 - w_1) + (u_2 - w_2)$. Nach Voraussetzung ist $u_1 - w_1 \in U_1$. Also gilt $-(u_1 - w_1) = u_2 - w_2 \in U_1$,d.h. insbesondere $u_2 - w_2 \in U_1 \cap U_2$. Wegen $u_2 - w_2 \neq 0$ gilt ist die Implikation damit bewiesen.
$\neg(a) \Longrightarrow \neg(b)$:
Ist $u \in U_1 \cap U_2 \setminus \{0\}$, dann gilt $u = u + 0 = 0 + u$.

3. Aufgabe (14 Punkte)

Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$, $\Phi : V \to W$ linear, $r = \mathrm{Rang}(\Phi)$.

a) Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $\{v_1, \cdots, v_{n-r}\}$ eine Basis von Ker (Φ) und $\{w_1, \cdots, w_r\}$ eine Basis von $\Phi(V)$. Wählt man für jedes $i = 1, \cdots, r$ ein Urbild $u_i \in \Phi^{-1}(w_i)$, dann ist $\{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_{n-r},\}$ eine Basis von V.

b) Zeigen Sie, dass Basen $\mathscr{B}$ von V und $\mathscr{C}$ von W existieren, derart, dass die Abbildungmatrix von Φ die Form $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$ hat, wobei $E_r = (\delta_{j,k})_{j,k=1,\dots,r} \in K^{r\times r}$ die Einheitsmatrix bezeichnet und die restlichen Einträge mit 0 gefüllt werden.

Lösung:

(a) Wir zeigen zuerst, dass die Menge linear unabhängig ist: Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-r} \in K$ sowie $\mu_1, \cdots, \mu_r \in K$ mit $0 = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i$. Dann gilt $0 = \Phi(0) = \Phi(\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \Phi(u_i) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i w_i$. Und damit $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$ (da $\{w_i \mid i = 1, \cdots, r\}$ linear unabhängig ist). Also gilt $0 = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i$ und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$ (da $\{v_i \mid i = 1, \cdots, n-r\}$ linear unabhängig ist). Es muss noch gezeigt werden, dass die Menge ein Erzeugendensystem ist: Ist $v \in V$, dann existieren eindeutig bestimmte Skalare $\mu_1, \cdots, \mu_r \in K$ mit $\Phi(v) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i w_i \in \Phi(V)$. Wir setzen $w = \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i$. Dann ist $v - w \in \text{Ker}\,(\Phi)$ und besitzt damit eine bestimmte Darstellung $v - w = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i$ mit Skalaren $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-r} \in K$. Also ist $v = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i$.

(b) Wir wählen eine Basis $\{b_{r+1}, \cdots, b_n\}$ von $\text{Ker}\,(\Phi)$ sowie eine Basis $\{w_1, \cdots, w_r\}$ von $\Phi(V)$. Wir ergänzen die Basis des Kerns wie nach Aufgabenteil (a) zu einer Basis $\mathscr{B} := \{b_1, \cdots, b_r, b_{r+1}, \cdots, b_n\}$ von V, die Basis von $\Phi(V)$ ergänzen wir zu einer Basis $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_{r+(m-r)}\}$ von W. Nun gilt $\Phi(b_i) = w_i$ für jedes $i \in \{1, \cdots, r\}$. Also sind die ersten r Spalten der Darstellungsmatrix $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\Phi)$ von der Form $\begin{pmatrix} E_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, wobei $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ die Nullmatrix ist. Nach Konstruktion gilt $\Phi(b_j) = 0$ für jedes $j \in \{r+1, \cdots, n\}$. Daher bestehen die letzten $n-r$ Spalten der Darstellungmatrix $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\Phi)$ lediglich aus 0-Einträgen.

4. Aufgabe (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ beliebige Abbildungen, und ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.

(b) Sind $U_1, U_2 \subset G$ Untergruppen einer Gruppe G, dann ist $U_1 \cup U_2$ eine Untergruppe von G.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann ist $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Seien V, W K-Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $S = \{v_1, \cdots, v_r\} \subset V$ und $T = \{\Phi(v_1), \cdots, \Phi(v_r)\} \subset W$. Dann gilt: Ist T linear unabhängig, dann ist auch S linear unabhängig.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr: Angenommen die Voraussetzung gelte, aber f wäre nicht injektiv. Dann gibt es nichtgleiche Elemente $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist aber auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, im Widerspruch zur Annahme.

(b) Betrachte die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ mit der gewöhnlichen Addition und die Untergruppen $G_1 := 2\mathbb{Z} := \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ und $G_2 := 3\mathbb{Z} := \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist $2 \in G_1$, $3 \in G_2$, aber $5 = 2 + 3 \notin G_1 \cup G_2$. Also ist die Aussage falsch.

(c) Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion: Induktionsanfang: Es ist $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, also gilt die Aussage für $n = 0$. Nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein $n^* \in \mathbb{N}$ richtig ist. Anwenden der Matrixmultiplikation liefert $A^{n^*+1} = A^{n^*} A = \begin{pmatrix} 1 & n^* & \frac{n^*(n^*-1)}{2} \\ 0 & 1 & n^* \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n^*+1 & \frac{(n^*+1)n^*}{2} \\ 0 & 1 & n^*+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Die Aussage ist wahr: Sind $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in K$ so gewählt, dass $0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ gilt, dann ist $0 = \Phi(0) = \Phi(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Phi(v_i)$. Da T linear unabhängig ist, gilt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

5. Aufgabe (13 Punkte)

Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie, dass auf G durch $r \sim_H s :\Longleftrightarrow r \in Hs := \{h \cdot s \mid h \in H\}$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

(b) Beweisen Sie, dass die durch $\sim_H$ gegebenen Äquivalenzklassen gleichmächtig sind. (Hinweis: Zeigen Sie, dass es zu jeder Äquivalenzklasse $\tilde{s}$ eine Bijektion zwischen H und $\tilde{s}$ gibt.)

(c) Beweisen Sie: Bezeichnet $q = |H|$ und $w = |G|$, dann gilt $q|w$.

Lösung:

(a) Ist $r \in G$, dann gilt $r \sim_H r \Longleftrightarrow r \in Hr$. Da das neutrale Element 1_G bzgl der Verknüpfung $\cdot$ in H liegt, ist die Relation offensichtlich reflexiv. Sind $r, s \in G$ mit $r \sim_H s$, dann gilt $r \in Hs$, also gibt es ein $h \in H$ mit $r = hs$. Wegen $h^{-1} \in H$ und $s = h^{-1}r$ gilt $s \sim_H r$. Also ist die Relation symmetrisch. Sind $r, s, t \in G$ mit $r \sim_H s, s \sim_H t$, dann gibt es ein $h_s \in H$ mit $r = h_s s$ sowie ein $h_t \in H$ mit $s = h_t t$. Daher ist $r = h_s h_t t$ und damit $r \sim_H t$.

(b) Sei $\tilde{s} = Hs$ eine beliebige Äquivalenzklasse. Wir betrachten die Abbildung $F : H \to Hs, h \mapsto hs$. Gilt $F(p) = F(q)$ dann ist $ps = qs$ und damit $p = qss^{-1} = q$. Also ist F injektiv. Ist nun $hs \in Hs$, dann ist h ein Urbild unter F. Daher ist F ein Bijektion und es gilt $|H| = |Hs| = |\tilde{s}|$ für alle $s \in G$.

(c) Nach Satz 1.3.12 sind verschiedene Äquivalenzklassen disjunkt, deren Vereinigung ergibt ganz G. Da alle Äquivalenzklasse nach (b) gleichmächtig sind, gilt $|G| = \mathfrak{C}|H|$, wobei $\mathfrak{C}$ die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim_H$ bezeichne. Daraus folgt die Behauptung.

6. Aufgabe (Multiple Choice) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für eine richtige Antwort bekommen Sie 2 Punkte. Kreuzen Sie in einer Zeile keine Kästchen an, so erhalten Sie dafür 1 Punkt. Auf eine falsche Antwort gibt es 0 Punkte.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Alle Permutationsgruppen sind abelsch.	☐	☐
(b)	Jeder K-Vektorraum V ist mit seiner Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.	☐	☐
(c)	Jeder Vektorraum besitzt eine endliche Basis.	☐	☐
(d)	Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\text{Im}(\text{Im}(z)) = \text{Im}(z)$.	☐	☐
(e)	Sind $(G_1, +), (G_2, \cdot)$ Gruppen, $f : G_1 \to G_2$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : G_2 \to G_1$ auch ein Gruppenhomomorphismus.	☐	☐
(f)	Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann ist $\frac{1}{z\bar{z}}$ eine reelle Zahl.	☐	☐
(g)	Ist V endlichdimensionaler K-Vektorraum, $W = \{0\} \subset V$ der Nullraum, dann gilt $V/W \cong V$.	☐	☐
(h)	Sind V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W)$, dann gilt $V \cong W$.	☐	☐

Lösung:

(a) Falsch: Siehe Skript Beispiel 2.3.2 (c).

(b) Wahr: Siehe Skript Definition 3.1.1 (V1).

(c) Falsch: Siehe Skript Beispiel 3.2.16 (c).

(d) Falsch: Betrachte etwa $z = 1 + i$.

(e) Wahr: Seien $v, w \in G_2$. Dann existieren $a, b \in G_1$ mit $f(a) = v, f(b) = w$. Dann ist $f^{-1}(v \cdot w) = f^{-1}(f(a) \cdot f(b)) = f^{-1}(f(a + b)) = a + b = f^{-1}(v) + f^{-1}(w)$.

(f) Wahr: Siehe Skript Satz 2.5.12 (b).

(g) Wahr: Betrachte die Identitätsabbildung auf V mit Satz 3.6.17 aus dem Skript.

(h) Wahr: Siehe Skript Übungsaufgabe 3.6.12 (b).