Mathe II für Informatik – SoSe 24

Dr. Sven Möller
Marius Tritschler
Lena Volk

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Übung: 16.–17. Mai 2024
Abgabe: 23.–24. Mai 2024
Übungsblatt 5

Gruppenübungen

G5.1: Lipschitz-Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls es ein $L > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in D$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x + 1|$ Lipschitz-stetig ist. (*Tipp: umgekehrte Dreiecksungleichung*)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{R}$ stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

c) Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie: Ist D beschränkt, so ist f ebenfalls beschränkt.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ Lipschitz-stetig ist, aber $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht.

G5.2: Zwischenwertsatz

Sei $T : [0, 360] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $T(0) = T(360)$, die für jeden Punkt x auf dem Äquator die dort vorherschende Temperatur $T(x)$ angibt. Wir bezeichnen mit x den Längengrad des entsprechenden Punktes auf dem Äquator. Zeigen Sie, dass es zwei Punkte auf dem Äquator gibt, die sich exakt gegenüberliegen und in denen die gleiche Temperatur herrscht.

G5.3: Stetigkeit linearer Abbildungen (5.8.7) (9)

Zeigen Sie, dass für jedes $A \in R^{p \times d}$ die Abbildung $\Phi_A \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ mit $\Phi_A(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^d$, stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_A > 0$ gibt mit $||Ax|| \leq c_A \cdot ||x||$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Hausübungen

H5.1: Lipschitz-Stetigkeit II (3+3+3)

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Lipschitz-stetig bezüglich x auf $[0, \infty)$ sind.

a) $f(x) = \frac{1}{1+a^2}\, x^2$

b) $f(x) = a^2 + 2x$

c) $f(x) = \frac{1}{1-a}\, x$

H5.2: Fixpunkte (4)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass es dann $x \in [a, b]$ gibt, so dass $f(x) = x$.

Bemerkung: So ein x heißt Fixpunkt von f.

H5.3: Äquivalenz von Normen (5)

Wir betrachten die 2-Norm und ∞-Norm im $\mathbb{R}^3$. Geben Sie Konstanten $c, C \in \mathbb{R}$ an, sodass $c||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq C||x||_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, und geben Sie jeweils ein Beispiel $\vec{0} \neq y, z \in \mathbb{R}^3$ mit $c||y||_\infty = ||y||_2$ und $||z||_2 = C||z||_\infty$.