Klausur „Mathematik I für Informatik/Wirtschaftsinformatik“ SS 2015 (Prof. Dr. Thomas Streicher)

1. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $(G,*)$ eine Gruppe mit der Untergruppe $(H,*)$. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ definiert durch

$$a \sim b \text{ genau dann, wenn } a^{-1} * b \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G ist.

2. Aufgabe (20 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Begründen Sie anhand der Eigenwerte aus (a), welche der folgenden Eigenschaften die Matrix A hat und welche nicht: invertierbar, diagonalisierbar, positiv definit, orthogonal.

(c) Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar?

(d) Berechnen Sie $\det\big((A+I)^{2015}\big)$.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe muss außer in Teil (a) nirgends gerechnet werden.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ bzw. } \mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

und die Standardbasen

$$\mathscr{E}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ bzw. } \mathscr{E}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Die lineare Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(\Phi) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $M_{\mathscr{E}_2}^{\mathscr{E}_3}(\Phi)$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{\mathscr{E}_3} := \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $[\Phi(v)]_{\mathscr{B}}$.

4. Aufgabe (Wird nicht behandelt, da Thema von Mathe II in diesem Jahr) (10 Punkte)

Welche der folgenden Folgen sind konvergent, welche divergent? Beweise Sie Ihre Antwort und im Falle der Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n := \frac{n^3+n^2\sqrt{n}+1}{5n^3-2n^2-2n-1}$

(b) $b_n := \frac{n!}{2^n}$

(c) $c_0 := \frac{1}{4}$, $c_{n+1} := c_n^2 + \frac{1}{4}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass (c_n) von oben durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist und monoton wächst.

5. Aufgabe (Multiple Choice, (e), (f), (k) und (l) sind Inhalte aus Mathe II) (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden 12 Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede korrekte Antwort wird 1 Punkt vergeben. Es gibt keine Minuspunkte.
Eine Begründung wird in dieser Aufgabe **nicht** verlangt.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie **deutlich**, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Die logische Verknüpfung $\wedge$ ist kommutativ und assoziativ.	☐	☐
(b)	Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq x^2 \leq 2\}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{Q}$.	☐	☐
(c)	Ist $f : A \to B$ surjektiv und $g : B \to C$ injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.	☐	☐
(d)	Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines K-Vektorraumes V mit $\dim(U_1) = 5$ und $\dim(U_2) = 3$, so ist $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V mit $\dim(U_1 \cap U_2) = 3$.	☐	☐
(e)	Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie genau einen Häufungswert hat.	☐	☐
(f)	Seien (a_n) und (b_n) konvergente reelle Folgen mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.	☐	☐
(g)	Ist A negativ definit, dann gilt $\det(A) < 0$.	☐	☐
(h)	Es gibt invertierbare Matrizen A und B gleicher Dimension, sodass $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.	☐	☐
(i)	Für jede orthogonale Matrix A gilt $\det(A \cdot A^T) \neq 0$.	☐	☐
(j)	Für jede Algebra A über einer Signatur Σ existiert genau ein Σ-Homomorphismus $T(\Sigma) \to A$.	☐	☐
(k)	Jede konvergente Folge ist beschränkt.	☐	☐
(l)	Wenn $(a_n) \in O(b_n)$, dann auch $(b_n) \in o(a_n)$.	☐	☐