

1. Aufgabe

(a) Charakteristisches Polynom berechnen:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Entwicklung
= 1. Spalte

$$(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \left((2-\lambda)(3-\lambda) + 1 \right) + 1$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (1-\lambda) + 1$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda) \left((1-\lambda)(3-\lambda) + 1 \right)$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1)$$

$$= (2-\lambda) \cdot (2-\lambda)^2 = (2-\lambda)^3$$

Also sind $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ die EW von A.

Eigenvektoren: $(A - 2I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow \ker(A - 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor.

(b) A ist nicht diagonalisierbar, weil A keine Basis aus Eigenvektoren besitzt (siehe (a), nur ein linear unabhängiger EV!). (2)

$$(c) \det(A^{2012}) = (\det(A))^{2012} = (2 \cdot 2 \cdot 2)^{2012} = 2^{6036}$$

\swarrow
 $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
 $\det(A) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2. Aufgabe

Nicht in dieser Mathe 1.

3. Aufgabe

Anfang $n=0$: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Schritt $n \rightarrow n+1$: Es gilt

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \stackrel{\text{Annahme und Def. } A}{=} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } n + \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{2n + n^2 - n}{2} \\ &= \frac{n + n^2}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{NR} &= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

Also ist die Aussage wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Aufgabe

(3)

(a) Es gilt $3^{2^n} = (3^2)^n = 9^n \equiv 1^n \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8}$,

also ist $3^{2^n} + 7 \equiv 1 + 7 \pmod{8} \equiv 8 \pmod{8} \equiv 0 \pmod{8}$.

Folglich ist $3^{2^n} + 7$ durch 8 teilbar, d.h. die Aussage ist wahr.

(b) Wahr: $\tilde{a} = \tilde{b} \Rightarrow \exists x \in \tilde{a} \cap \tilde{b}$ ist klar.

Umgekehrt gilt: $\exists x \in \tilde{a} \cap \tilde{b}$

$$\Leftrightarrow \tilde{a} \cap \tilde{b} \neq \emptyset$$

Negation von Satz 1.3.12.

$$\Rightarrow \tilde{a} \neq \tilde{b}.$$

(c) Wahr: Wähle $U = \{n\}$. Dann ist U abelsch wegen $n = g * h = h * g$ für alle $g, h \in U$. In der VL wurde gezeigt, dass U Untergruppe ist.

(d) Wahr: Seien $f, g \in F$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\phi(f+g) \stackrel{\text{Def. } \phi}{=} (f+g)(0) \stackrel{\text{Def. } F}{=} f(0) + g(0) \stackrel{\text{Def. } \phi}{=} \phi(f) + \phi(g)$$

und

$$\phi(\lambda \cdot f) \stackrel{\text{Def. } \phi}{=} (\lambda \cdot f)(0) \stackrel{\text{Def. } F}{=} \lambda \cdot f(0) \stackrel{\text{Def. } \phi}{=} \lambda \cdot \phi(f),$$

d.h. ϕ ist linear.

(e) Nicht in dieser Mathe 1.

(f) Falsch: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und

(4)

$U_1 = U_2 = \mathbb{R}^2$ mit Basen

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann ist $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 \neq \langle \emptyset \rangle = \langle B_1 \cap B_2 \rangle$.

5. Aufgabe

Sei λ EW von ϕ . Dann gibt es $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\phi(v) = \lambda \cdot v. \quad \text{Also ist}$$

$$v = \text{id}_{\mathbb{C}^n}(v) \stackrel{\text{Annahme}}{=} 2\phi(v) - (\phi \circ \phi)(v)$$

$$= 2 \cdot \lambda \cdot v - \phi(\phi(v))$$

$$= 2 \cdot \lambda \cdot v - \phi(\lambda \cdot v)$$

$$\stackrel{\phi \text{ linear}}{=} 2 \cdot \lambda \cdot v - \lambda \cdot \phi(v)$$

$$= 2 \cdot \lambda \cdot v - \lambda \cdot \lambda \cdot v = (2\lambda - \lambda^2)v$$

$$\stackrel{v \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = 2\lambda - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = 1 \pm 0 = 1.$$

Somit ist $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ EW von } \phi\} = \{1\}$.