Klausur:
Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 22**
Prof. Dr. Thomas Streicher **08.09.2022**

Name .... | Matrikelnummer ....
Vorname .... | Studiengang ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	9	14	10	8	7	16	64	
erreichte Punktzahl								

Wichtige Hinweise

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes **leserlich in Blockschrift (Grobuchstaben)** aus.

Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.

Für die Bearbeitung der Klausur nutzen Sie bitte **den dafür vorgesehenen Platz** direkt nach den Aufgabenstellungen. Am Ende der Klausur stehen Ihnen noch weitere leere Seiten zur Verfügung. Wenn Sie diese Seiten benutzen, dann kennzeichnen Sie bitte, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten. Bitte lösen Sie nicht die Tackernadel. Sollten Sie weiteres Papier benötigen, so melden Sie sich bitte bei der Klausuraufsicht. **Versehen Sie jedes Zusatzblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer**. Einzelne Blätter, auf denen kein Name und keine Matrikelnummer stehen, können nicht bewertet werden.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind zwei handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt), aber keinerlei elektronische Hilfsmittel wie beispielsweise Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden. Bitte verwenden Sie **dokumentenechte Stifte**, wie beispielsweise Kugelschreiber. Verwenden Sie keinen Bleistift oder Stifte der Farben rot und grün. Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind **alle Ergebnisse und Zwischenschritte sorgfältig zu begründen**. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen sorgfältig durch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. Aufgabe (Wahr oder Falsch) (9 Punkte)

Kreuzen Sie im Folgenden an, welche Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Jede richtig ausgefüllte Aussage wird mit 1 Punkt bewertet. Jede leere oder fehlerhaft ausgefüllte Aussage wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

		Wahr	Falsch
1.	$\{(a,b)\colon a+b=1\}$ ist eine symmetrische Relation auf $\mathbb{R}$.	☐	☐
2.	$\{(a,b)\colon a\cdot b=1\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.	☐	☐
3.	$\{2022\cdot z+1 : z\in\mathbb{Z}\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$.	☐	☐
4.	Die von 7 erzeugte Untergruppe $\langle 7\rangle$ von $(\mathbb{Z},+)$ besitzt unendlich viele Elemente.	☐	☐
5.	$(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$ ist ein Ring.	☐	☐
6.	$(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐
7.	Sei V ein Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Dann gilt $\dim(U)\leq\dim(V)$.	☐	☐
8.	$\{v\in\mathbb{R}^3 : \lVert v\rVert_2\leq 1\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
9.	Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Wir vertauschen zwei Zeilen von A und nennen diese Matrix B. Dann gilt $\det(A)=\det(B)$.	☐	☐

2. Aufgabe (Multiple Choice und Fill-in) (14 Punkte)

Füllen Sie im Folgenden die leeren Kästen aus. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Sie können den Platz auf der nächsten Seite für Nebenrechnungen nutzen, diese werden aber nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit 1 Punkt bewertet. Jede fehlerhafte Antwort wird mit 0 Punkten bewertet. Sollten Sie eine Antwort korrigieren wollen, so kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll (im Zweifel wird die falsche Antwort gewertet).

(a) Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Geben Sie die Negation der folgenden Aussage an, ohne das Negationszeichen $\neg$ zu verwenden: $\forall x \in M \exists y \in M : x < y$.

(b) Wir betrachten die Menge $\{1,5,7\}$ und ihre Potenzmenge $\mathscr{P}(\{1,5,7\})$. Geben Sie eine Teilmenge A von $\mathscr{P}(\{1,5,7\})$ an mit $|A| = 2$.

$A =$

(c) Geben Sie eine Funktion an, die weder injektiv noch surjektiv ist. Legen Sie dabei auch Definitions- und Wertebereich fest.

(d) Bestimmen Sie das Infimum der Menge $M = \left\{1 + n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}\right\}$.

$\inf(M) =$

(e) Geben Sie eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die kein Maximum hat.

(f) Geben Sie die richtige Lösung in $\{0,1,\ldots,6\}$ an.

$6^{11} \mod 7 =$

$2^{10} \mod 7 =$

(g) Geben Sie das richtige Ergebnis in der Form $a + ib$ an mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Im}\left((7+3i) - \overline{(1+2i)}\right) =$

$(1+i)\cdot(5+4i) =$

(h) Geben Sie die eindeutige Gerade in $\mathbb{R}^4$ an, die die Punkte $(1,0,0,0)$ und $(0,0,0,1)$ enthält.

(i) Gegeben sei der Vektor $y = (1,2,2,0)$ und die Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon (x|y) = 3\}$. Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene an.

$H =$

Bestimmen Sie den Abstand von H zu $y = (3,3,3,3)$. $\operatorname{dist}(y,H) =$

(j) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 5x \\ 7y \end{pmatrix}$. Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Standardbasen an.

(k) Geben Sie eine reelle Folge an, die beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

$a_n =$

3. Aufgabe (Eigenwerte) (10 Punkte)

Es sei die reelle 3×3-Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A gegeben sind durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraumes $E(A, 1)$.

(c) Man kann zeigen, dass $\dim(E(A, -1)) = 1$ (dies müssen Sie aber nicht nachprüfen). Entscheiden Sie unter Verwendung dieser Aussage, ob A diagonalisierbar ist.

4. Aufgabe (Invertieren) (8 Punkte)

(a) Invertieren Sie die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Entscheiden Sie, ob die folgende Matrix invertierbar ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe (Vollständige Induktion) (7 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Aussage:

Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

6. Aufgabe (Beweisen/widerlegen) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_n$ gegen 0.

(b) Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^3 + x_2^3}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektive Funktionen. Dann ist $g \circ f : A \to C$ ebenfalls injektiv.

(d) Sei $(G, \star)$ eine abelsche Gruppe. Dann ist $f : G \to G, x \mapsto x \star x$ ein Gruppenhomomorphismus.

Weiterer Platz für Nebenrechnungen:

Weiterer Platz für Nebenrechnungen: