Klausur zur „Mathematik I für Informatik und Wirtschaftsinformatik“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

SoSe 2016
08.09.2016

Name: .... Studiengang: ....

Vorname: .... Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	11	17	12	12	16	68	
erreichte Punktzahl							

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **leserlich in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer** und **nummerieren** Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als **Hilfsmittel** zugelassen sind alle schriftlichen Unterlagen. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Bedenken Sie: Wo nicht explizit anders angegeben, sind alle Ergebnisse zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet; Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen. Die Punktebewertung einer Aufgabe sagt nichts über ihre Schwierigkeit aus.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (11 Punkte)

Zeigen Sie, dass 2^{n+1} für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $3^{2^n} - 1$ ist.

Hinweise: Induktion und $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

2. Aufgabe (17 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Rechnen Sie nach, dass die Vektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A bilden.

(c) Geben Sie die Abbildungsmatrix $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\Phi)$ der linearen Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Phi(x) = Ax$$

bezüglich der Basis $\mathscr{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ an.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Es sei V der Vektorraum aller Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$, also

$$V = \Big\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : n \in \mathbb{N} \text{ und } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Durch $\|\cdot\|_0 : \begin{cases} V & \to \mathbb{R} \\ p & \mapsto |p(0)| \end{cases}$ ist *keine* Norm auf V gegeben.

(b) $U := \{p \in V : p(0) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V.

(c) Für $\tilde{p}, \tilde{q} \in V/U$ gilt $\tilde{p} = \tilde{q} \iff p(0) = q(0)$.

(d) Durch $\|\cdot\| : \begin{cases} V/U & \to \mathbb{R} \\ \tilde{p} & \mapsto |p(0)| \end{cases}$ ist eine Norm auf V/U gegeben.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie außerdem jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sie erhalten für die richtige Antwort jeweils einen und für die richtige Begründung jeweils drei Punkte.

(a) Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a^p = a + kp$.

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \big((1,0,1)^T \mid x\big)$ ist eine lineare Abbildung.

(c) Es sei K ein Körper. Auf einem K-Vektorraum V definieren wir die Relation $\sim$ durch

$$v \sim w \iff v \text{ und } w \text{ sind linear abhängig.}$$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

5. Aufgabe (Multiple Choice) (16 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede richtig ausgefüllte Zeile bekommen Sie 2 Punkte, jede leere Zeile gibt 1 Punkt und eine fehlerhaft ausgefüllte Zeile wird mit 0 Punkten bewertet.
Sollten Sie eine Antwort korrigieren, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Antwort gewertet werden soll. Im Zweifel wird die Antwort mit Null Punkten bewertet.

		Wahr	Falsch
(a)	Sind A, B endliche Mengen und $f : A \to B$ injektiv, so hat A höchstens so viele Elemente wie B.	☐	☐
(b)	In jeder Gruppe $(G, *)$ mit neutralem Element n gibt es ein $g \in G$ mit $g * g = n$.	☐	☐
(c)	Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit Einselement e. Dann ist $(\{e, -e\}, \cdot)$ eine Gruppe.	☐	☐
(d)	Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $(\lvert z\rvert^2 + z^2)/z \in \mathbb{R}$.	☐	☐
(e)	Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Untervektorräumen U und W. Ist $\mathscr{B}_U$ eine Basis von U und $\mathscr{B}_W$ eine Basis von W, so ist $\mathscr{B}_U \cap \mathscr{B}_W$ eine Basis von $U \cap W$.	☐	☐
(f)	Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nicht invertierbar, so ist auch A^2 nicht invertierbar.	☐	☐
(g)	Jedes lineare Gleichungssystem ist lösbar.	☐	☐
(h)	Es seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\dim(\{x \in V : \Phi(x) = 0\}) = \dim(V) - \dim(\Phi(V))$.	☐	☐