Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences OUJDA
Département de Mathématiques
Filière : SMA S3

Année universitaire : 2022-2023
Module : Proba-Stat
Prof : SGHIR AISSA

TD 1 : Dénombrement et Combinatoire

Exercice 1

Une urne contient six boules vertes numérotées: $0, 0, 0, 0, 1, 1$, quatre boules noires numérotées $0, 1, 1, 2$ et deux boules rouges numérotées $1, 2$.

I) Dans un tirage successif et sans remise de trois boules, de combien de façon peut-on tirer:

1. Ω=(Trois boules).
2. A=(Trois boules de même couleur).
3. B=(Trois boules de couleurs différentes deux à deux).
4. C=(Exactement deux boules vertes).
5. D=(Au moins une boule rouge).
6. E=(Au plus deux boules noires).
7. F=(Trois boules portant le même numéro).
8. G=(Trois boules de même couleur et portant le même numéro).
9. H=(Trois boules de couleurs différentes deux à deux et portant le même numéro).
10. I=(Trois boules de couleurs différentes deux à deux et portant des numéros pairs).
11. J=(Trois boules portant des numéros dont leurs produit est nul).

II) Refaire les mêmes calculs pour un tirage successif et avec remise.

Exercice 2

Une urne (A) contient quatre boules rouges, trois boules vertes et une boule noire.
Une autre urne (B) contient trois boules rouges et deux boules noires.
On tire simultanément deux boules de l'urne (A) et une boule de l'urne (B).
De combien de façon peut-on tirer:

1. Ω=(Trois boules).
2. A=(Trois boules rouges).
3. B=(Exactement deux boules rouges).
4. C=(Au moins une boule rouge).
5. D=(Au plus une boule rouge).

Exercice 3

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises. De combien de façon différentes peut-on en prélever 4 dans les cas suivants:

1. A=(Les 4 pièces sont bonnes).
2. B=(Une au moins d'entre elles est mauvaise).
3. C=(Trois au plus d'entre elles sont mauvaises).

Exercice 4
Une classe de 30 élèves: 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.

1. Combien de comités peut-on constituer?
2. Combien de comités peut-on constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille?
3. Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X?
4. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire est une fille?
5. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents?

Exercice 5
Soit $n \geq 2$ un entier. Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}^2$ tels que:

1. $x + y = n$.
2. $x < y$.
3. $|x - y| \leq 1$.

Exercice 6
Soit $1 \leq p \leq n$. Parmi n boules, on tire une boule à mettre dans une boîte (A), et $p-1$ boules à mettre dans une boîte (B).

1. Établir par dénombrement la formule: $nC_{n-1}^{p-1} = pC_n^p$.
2. Retrouver par calcul cette formule.

Exercice 7

1. Utiliser la relation: $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$ et la formule du binôme de Newton pour démontrer la formule de Vandermonde: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(C_n^i)^2 = C_{2n}^n$.

Exercice 8
On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,

1. Déterminer $\Gamma_n^0, \Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \Gamma_1^p$ et Γ_2^p.
2. Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a:
$$\Gamma_{n+1}^p = \Gamma_n^0 + \Gamma_n^1 + \cdots + \Gamma_n^{p-1} + \Gamma_n^p.$$
3. Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a: $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Exercice 9
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E.
2. Trouver le cardinal de l'ensemble $E_1 = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \ : \ A \cap B = \emptyset\}$.

Correction du TD (1)

Dénombrement et combinatoire

SMA - S(3) - 2022/2023

Ex 1

6 V :	0, 0, 0, 0, 1, 1
4 N :	0, 1, 1, 2
2 R :	1, 2

I Tirage successif et sans remise $\Rightarrow A_n^p$

$* \; A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$

$(0 \leq p \leq n)$ $\quad * \; A_n^1 = n.$

1) $\text{Card}(\Omega) = A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = \boxed{1320}$

2) $A = (3\,V \text{ ou } 3\,N)$ $\qquad$ (ou $\leftrightarrow$ +) $\cup$

$\text{card}(A) = A_6^3 + A_4^3 = (6 \times 5 \times 4) + (4 \times 3 \times 2) = \boxed{144}$

3) $B = (1\,V \text{ et } 1\,N \text{ et } 1\,R)$ $\qquad$ (et $\leftrightarrow$ $\times$)

$\text{card}(B) = 3! \times A_6^1 \times A_4^1 \times A_2^1 = \boxed{288}$

ordre

V	N	R

N	V	R

R	V	N

V	R	N

N	R	V

R	N	V

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ cas

4) $C = (\overbrace{2\,V \text{ et } 1\,\overline{V}}^{3 \text{ boules}})$

$\text{card}(C) = C_3^2 \times A_6^2 \times A_6^1 = 3 \times 6 \times 5 \times 6 = \boxed{540}$

$C_3^2 = C_3^1$

ordre

V	V	$\overline{V}$

V	$\overline{V}$	V

$\overline{V}$	V	V

$C_3^2 = C_3^1 = 3$ cas

5) $\overline{D} = (0\,R) = (3\,\overline{R})$ $\qquad$ $(\Omega = D \cup \overline{D}, \quad D \cap \overline{D} = \emptyset)$

$\text{card}(D) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\overline{D})$

$= 1320 - A_{10}^3 = \boxed{600}$

0 R	1 R	2 R	3 R

$\overline{D}$: 0 R ; D : 1 R, 2 R, 3 R

$D = (\underbrace{1R \text{ et } 2\overline{R}}_{3}) \text{ ou } (\underbrace{2R \text{ ou } 1\overline{R}}_{3}) \text{ ou } (3R)$

6) $\bar{E} = (3\,N)$

ON	1 N	2 N	3 N
E			$\bar{E}$

$card(E) = card(\Omega) - card(\bar{E}) = 1320 - A_4^3 = \boxed{1296}$

7) $F = (3\ 0 \text{ ou } 3\ 1)$

$card(F) = A_5^3 + A_5^3 = \boxed{120}$

8) $G = (3\ V_0)$

$card(G) = A_4^3 = \boxed{24}$

9) $H = (1\ V_1 \text{ et } 1\ N_1 \text{ et } 1\ R_1)$

$card(H) = 3! \times A_2^1 \times A_2^1 \times A_1^1 = \boxed{24}$

10) $I = (1\ V_0 \text{ et } 1\ N_{(0 \text{ ou } 2)} \text{ et } 1\ R_2)$

$card(I) = 3! \times A_4^1 \times A_2^1 \times A_1^1 = \boxed{48}$

11) $J = (3\ 0) \text{ ou } (\underbrace{2\ 0 \text{ et } 1\ \bar{0}}_{3}) \text{ ou } (\underbrace{1\ 0 \text{ et } 2\ \bar{0}}_{3})$, (ou bien : $\bar{J} = (3\ \bar{0})$)

$card(J) = A_5^3 + (C_3^2 \times A_5^2 \times A_7^1) + (C_3^1 \times A_5^1 \times A_7^2) = \boxed{1110}$

II) Tirage successif et avec remise $\Rightarrow n^p$

6 V	0, 0, 0, 0, 1, 1
4 N	0, 1, 1, 2
2 R	1, 2

1) $card(\Omega) = 12^3 = 1728$

2) $A = (3\ V \text{ ou } 3\ N \text{ ou } 3\ R)$

$card(A) = 6^3 + 4^3 + 2^3 = \boxed{288}$

3) $B = (1\ V \text{ et } 1\ N \text{ et } 1\ R)$

$card(B) = 3! \times 6^1 \times 4^1 \times 2^1 = \boxed{288}$

4) $C = (2\ V \text{ et } 1\ \bar{V})$

$card(C) = C_3^2 \times 6^2 \times 6^1 = \boxed{648}$

5) $\bar{D} = (0\ R) = (3\ \bar{R})$

$card(D) = card(\Omega) - card(\bar{D}) = 1728 - 10^3 = \boxed{728}$

6) $\overline{E} = 3 Ⓝ$

$card(E) = card(\Omega) - card(\overline{E}) = 1728 - 4^3 = \boxed{1664}$

avec remise

7) $F = (3 ⓪$ ou $3 ①$ ou $3 ②)$

$card(F) = 5^3 + 5^3 + 2^3 = \boxed{258}$

8) $G = (3 Ⓥ_{⓪})$ ou $(3 Ⓥ_{①})$ ou $(3 Ⓝ_{⓪})$ ou $(3 Ⓝ_{①})$ ou $(3 Ⓝ_{②})$

(avec remise) ou $(3 Ⓡ_{①})$ ou $(3 Ⓡ_{②})$

$card(G) = 4^3 + 2^3 + 1^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 = \boxed{84}$

9) $H = (1 Ⓥ_{②}$ et $1 Ⓝ_{②}$ et $1 Ⓡ_{①})$

$card(H) = 3! \times 2^1 \times 2^1 \times 1^1 = \boxed{24}$

10) $I = (1 Ⓥ_{⓪}$ et $1 Ⓝ_{(0 \text{ ou } 2)}$ et $1 Ⓡ_{②})$

$card(I) = 3! \times 4^1 \times 2^1 \times 1^1 = \boxed{48}$

11) $J = (3 ⓪)$ ou $(2 ⓪$ et $1 \overline{⓪})$ ou $(1 ⓪$ et $2 \overline{⓪})$, (ou bien : $\overline{J} = 3\overline{⓪}$)

$card(J) = 5^3 + (C_3^2 \times 5^2 \times 7^1) + (C_3^1 \times 5^1 \times 7^2) = \boxed{1385}$

Ex ②

Tirage simultané $\Rightarrow C_n^p$

(A) (Ω_1)	(B) (Ω_2)
4Ⓡ 3Ⓥ 1Ⓝ	3Ⓡ 2Ⓝ

* $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$, $(0 \leq p \leq n)$

* $C_n^1 = n$ * $C_n^n = 1$.

1) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$card(\Omega) = card(\Omega_1) \times card(\Omega_2) = C_8^2 \times C_5^1 = \boxed{140}$

2) $A = (3 Ⓡ) = (2 Ⓡ_{Ⓐ}$ et $1 Ⓡ_{Ⓑ})$

(A)	(B)
2Ⓡ	1Ⓡ

$card(A) = C_4^2 \times C_3^1 = \boxed{18}$

3) $B = (2 Ⓡ) = (1 Ⓡ_{(A)}$ et $1 \overline{Ⓡ}_{(A)}$ et $1 Ⓡ_{(B)})$ ou $(2 Ⓡ_{(A)}$ et $1 \overline{Ⓡ}_{(B)})$

(A)	(B)
1Ⓡ 1$\overline{Ⓡ}$	1Ⓡ
2Ⓡ	1$\overline{Ⓡ}$

$card(B) = (C_4^1 \times C_4^1 \times C_3^1) + (C_4^2 \times C_2^1)$

$= \boxed{60}$

③

4) $\bar{C} = (0\,R) = (3\,\bar{R}) = (2\,\bar{R}_{(A)}$ et $1\,\bar{R}_{(B)})$

$\mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(\bar{C}) = 140 - (C_4^2 \times C_2^1) = \boxed{128}$

5) $D = (1\,R)$ ou $(0\,R)$

$$\underbrace{\boxed{0R}\,\boxed{1R}}_{D}\,\underbrace{\boxed{2R}\,\boxed{3R}}_{\bar{D}}$$

$\bar{D} = (2\,R)$ ou $(3\,R)$

$= B \cup A$

$\mathrm{card}(\bar{D}) = \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(A) \quad (B \cap A = \emptyset)$

$= 60 + 18 = \boxed{78}$

$\mathrm{card}(D) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(\bar{D}) = 140 - 78 = \boxed{62}$

Ex 3

Le type de tirage dans cette expérience n'est pas précis.

Alors, on distingue deux cas :

- Tirage simultané $\Longrightarrow C_n^p$, $(0 \leq p \leq n)$
- Tirage successif et sans remise $\Longrightarrow A_n^p$

1) $\mathrm{card}(A) = C_{16}^4$ ou A_{16}^4.

2) $\bar{B} = A \Rightarrow \mathrm{card}(\bar{B}) = \mathrm{card}(A) = C_{16}^4$ ou A_{16}^4

$\Rightarrow \mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(\bar{B})$

$= (C_{20}^4 - C_{16}^4)$ ou $(A_{20}^4 - A_{16}^4)$.

3) $\bar{C} = (4$ sont mauvaises$)$.

$\boxed{C_{20}^4 = 4\,845 \quad A_{20}^4 = 116\,280}$

$\mathrm{card}(\bar{C}) = C_4^4$ ou A_4^4

$\Rightarrow \mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(\bar{C})$

$= (C_{20}^4 - C_4^4)$ ou $(A_{20}^4 - A_4^4)$.

Finalement:

- $\mathrm{card}(A) = \boxed{1820}$ ou $\boxed{43680}$
- $\mathrm{card}(B) = \boxed{3025}$ ou $\boxed{72600}$
- $\mathrm{card}(C) = \boxed{4844}$ ou $\boxed{116256}$

Ex ④

L'ordre compte et il n'y'a pas de répétition, donc les comités sont des arrangements.

① $A_{30}^3 = 30\times 29\times 28 = \boxed{21750}$

② On choisit une fille parmi 12 (A_{12}^1) et deux élèves parmi les 29 restantes (A_{29}^2).

Finalement, on aura : $A_{12}^1\times A_{29}^2 = \boxed{9744}$

③ Il y a 3 postes possibles pour X (A_3^1), puis on choisit 2 élèves parmi les 29 restantes (A_{29}^2).

Finalement, on aura : $A_3^1\times A_{29}^2 = \boxed{2436}$

④ On choisit un garçon puis une fille, donc ($A_{18}^1\times A_{12}^1$), puis on a 2 cas (A_2^1) selon que la fille ou le garçon est président, (ou vice-président), puis on choisit un secrétaire parmi les 28 restantes (A_{28}^1).

Finalement, on aura : $A_{18}^1\times A_{12}^1\times A_2^1\times A_{28}^1 = \boxed{12096}$

Ex ⑤

$[1:n] = \{1,\dots,n\}$

① $x+y=n \Rightarrow 1\leq x,y<n \Rightarrow x,y\in\{1,\dots,n-1\} = [1:n-1]$.

Les couples possibles sont : $\boxed{y=n-x}$

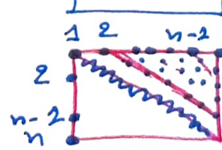
$(1,n-1),\ (2,n-2),\ \dots\dots\ (n-1,1)$

Finalement, on aura : $\boxed{n-1}$ couples : $\{(x,y)\in[1:n]^2 / x+y=n\}$
$= \{(x,n-x) / x\in[1:n-1]\}$

② $x<y \Rightarrow \begin{cases} x\in\{1,\dots\dots,n-1\} & (n-1 \text{ choix})\\ y\in\{x+1,\dots\dots,n\} & (n-x \text{ choix})\end{cases}$

Finalement, on aura : $\sum_{x=1}^{n-1}(n-x) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}} = \boxed{\frac{n^2-n}{2}}$

(avec $k=n-x$).

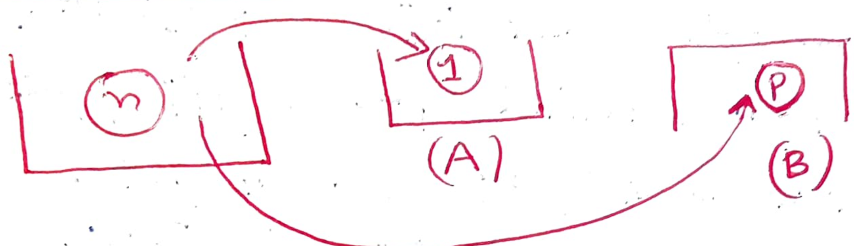


③ $|x-y|\le 1 \iff -1\le x-y\le 1 \iff x-1\le y\le x+1$.

- Si $x=1$, alors $y\in\{1,2\} \Rightarrow (1,1),(1,2) \Rightarrow \boxed{2}$
- Si $x=n$, alors $y\in\{n-1,n\} \Rightarrow (n,n-1),(n,n) \Rightarrow \boxed{2}$
- Sinon, $y\in\{\underbrace{x-1}_{\ge 1}, x, \underbrace{x+1}_{\le n}\}$ et $x\in\{2,\dots,n-1\} \Rightarrow \boxed{3(n-2)}$

Finalement, on aura : $2+2+3(n-2)=\boxed{3n-2}$ (EXF)

Ex ⑥



$(1\le p\le n)$

① On a deux méthodes de tirage :

* on choisit une boule parmi n ($C_n^1=n$) à mettre dans (A), puis, parmi les $(n-1)$ restantes, on choisit $(p-1)$ boules à mettre dans (B) $\Rightarrow \boxed{n\times C_{n-1}^{p-1}}$
* ou bien, d'abord on choisit p boules à mettre dans (A) et (B) parmi n, (C_n^p), puis, on choisit une boule parmi p à mettre dans (A) $\Rightarrow C_n^p\times C_p^1=\boxed{p\,C_n^p}$

Finalement, on aura : $\boxed{n\,C_{n-1}^{p-1}=p\,C_n^p}$.

② * $\boxed{n\,C_{n-1}^{p-1}} = \dfrac{n\,(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} = p\,\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \boxed{p\,C_n^p}$.

Ex ⑦

① $(x+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i x^i = 1+\dots\dots+C_{2n}^n x^n+\dots\dots+x^{2n}$

$(x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m\right)$

$= 1+\dots\dots+\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^{n-i} x^n+\dots\dots+x^{2n}$

⑥ (produit polynomial)

$$\Rightarrow C_{2n}^{n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, C_n^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 \qquad (C_n^i = C_n^{n-i})$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{2n}^{n} = \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2}$$

Ex 6

1) * Γ_n^0 : $\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \\ x_1 + \dots + x_n = \boxed{0} \end{cases} \Rightarrow \forall i \in [1:n] \; ; \; x_i = 0$

$$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \boxed{\Gamma_n^0 = 1}$$

* Γ_n^1 : $x_1 + \dots + x_n = \boxed{1} \Rightarrow$ un des x_i seulement doit être égale à 1, les autres sont égaux à 0

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_n^1 = n} : \left.\begin{matrix} (1, 0, \dots, 0) \\ (0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (0, \dots, 0, 1) \end{matrix}\right\} n$$

* Γ_n^2 : $x_1 + \dots + x_n = \boxed{2}$

- ou bien $\exists ! x_i = 2$ et $\forall j \neq i$, $x_j = 0$, (n choix)
- ou bien $\exists i \neq j$: $x_i = x_j = 1$ et $\forall k \notin \{i, j\}$: $x_k = 0$ (C_n^2 choix pour i et j)

Finalement : $\Gamma_n^2 = n + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

* Γ_1^p : $\Rightarrow x_1 = p \Rightarrow \boxed{\Gamma_1^p = 1}$
* Γ_2^p : $\Rightarrow x_1 + x_2 = p \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \{0, \dots, p\} \\ x_2 = p - x_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Gamma_2^p = p + 1}$

2) Γ_{n+1}^p : $x_1 + \dots + x_{n+1} = p$

$\begin{cases} \text{pour } k \text{ fixé} \\ \text{si } x_{n+1} = k \end{cases} \Rightarrow x_1 + \dots + x_n = p - k \Rightarrow \Gamma_n^{p-k}$

$k \in \{0, \dots, p\} \Rightarrow \Gamma_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{p} \Gamma_n^{p-k} = \boxed{\Gamma_n^p + \Gamma_n^{p-1} + \dots + \Gamma_n^0}$

3 on utilise une récurrence sur $\boxed{n}$.

* $n = 1 \Rightarrow \Gamma_1^p = 1 = C_n^p$ (vraie) (d'après 1).

* supposons le résultat est vraie au rang $\boxed{n}$, et prouvons le au rang $\boxed{n+1}$. On a, (d'après 2) :

$$\Gamma_{n+1}^p = \Gamma_n^0 + \Gamma_n^1 + \cdots\cdots + \Gamma_n^p$$

$$= C_{n+0-1}^0 + C_{n+1-1}^1 + \cdots\cdots + C_{n+p-1}^p$$

$$\boxed{C_{n+p}^p = \Gamma_{n+1}^p = C_{n-1}^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_{n+p-1}^p}$$

on va prouver cette dernière formule par récurrence sur p et application successive de la formule (du triangle de Pascal) :

* pour $p = 0$ ou $p = 1$, elle est vraie : $\begin{cases} C_{n+0}^0 = C_{n-1}^0 = 1 \\ \underbrace{C_{n+1}^1}_{n+1} = \underbrace{C_{n-1}^0 + C_n^1}_{1+n} \end{cases}$

* si elle est vraie jusqu'au rang $(p-1)$, alors :

$$\underbrace{C_{n-1}^0 + C_n^1 + \cdots + C_{n+p-2}^{p-1}}_{} + C_{n+p-1}^p$$

$$= C_{n+p-1}^{p-1} + C_{n+p-1}^p = \boxed{C_{n+p}^p}$$

$p-1$ p

$n+p-1$

$n+p-1$

$n+p$

$\boxed{x + x = x}$

Ex 9 1 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . 1^k . 1^{n-k} = (1+1)^n = \boxed{2^n}$.

2 $E_1 = \{ (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \cap B = \phi \}$

si $\text{card}(A) = k$ (fixe). $A \cap B = \phi \Rightarrow B \in \mathcal{P}(\bar{A})$

et $\text{card}(\mathcal{P}(\bar{A})) = 2^{n-k}$. on aussi C_n^k choix pour A

$k \in [0 : n] \Rightarrow \text{card}(E_1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} = (1+2)^n = \boxed{3^n}$

8 (binôme de Newton)