Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences OUJDA
Département de Mathématiques
Filière : SMA S3

Année universitaire : 2021-2022
Module : Proba-Stat
Prof : SGHIR AISSA

TD 1 : Dénombrement et Combinatoire

Exercice 1

I) Un cadenas possède un code à 3 chiffres pouvant être de 1 à 9.

1. Combien y-a-t-il de codes possibles?
2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
3. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
4. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

II) Maintenant on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

1. Combien y-a-t-il de codes possibles?
2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
3. Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Exercice 2

Une urne contient quatre boules vertes numérotées: $(-1), (-1), (0), (1)$, trois boules rouges numérotées $(-1), (0), (1)$ et une boule noire numérotée (0).

I) Dans un tirage successif sans remise de trois boules, de combien de façon peut-on tirer:

1. Ω=(trois boules).
2. A=(trois boules portant le même numéro).
3. B=(trois boules de même couleur).
4. C=(trois boules de couleurs différentes deux à deux).
5. D=(trois boules portant des numéros distincts deux à deux).

II) Dans un tirage successif avec remise de trois boules, de combien de façon peut-on tirer:

1. E=(exactement deux boules vertes).
2. F=(au moins une boule rouge).
3. G=(au plus deux boules portant le même numéro).
4. H=(trois boules de couleurs différentes deux à deux et portant le même numéro).
5. I=(trois boules portant des numéros dont leurs somme est nulle).

Exercice 3

1. On trace dans un plan $n \geq 3$ droites où deux droites ne sont jamais parallèles, et trois droites ne sont jamais concourantes. Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?
2. Soit n points du plan distincts.
   2.1 Combien de polygones à $p \leq n$ côtés peut-on réaliser à partir de ces points?
   2.2 On fixe un polygone à p côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il?

Exercice 4

Une urne (U_1) contient trois boules rouges, deux boules noires et une boule verte.
Une autre urne (U_2) contient deux boules vertes et une boule rouge.
On tire simultanément deux boules de l'urne (U_1) et une boule de l'urne (U_2).
De combien de façon peut-on tirer:

1. Ω=(trois boules).
2. A=(trois boules rouges).
3. B=(exactement une boule rouge).

Exercice 5

1. Soient p, n deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Démontrer par récurrence puis par télescopage que:
$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}.$$
2. **Formule de Vandermonde:** utiliser la relation: $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$ et la formule du binôme de Newton pour montrer la relation: $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

Exercice 6 (nombres de Bell)

On note B_n le nombre de partitions d'un ensemble E de cardinal n. On pose $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Établir par dénombrement la formule de récurrence: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

Correction du TD (1) - SMA - S3
Dénombrement et Combinatoire

Ex 1 :

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

I 1) $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = \boxed{729}$ | 9 | 9 | 9 | avec remise

2) $9 \times 9 \times 4 = \boxed{324} = 9^2 \times 4^1$ | 9 | 9 | 4 |

3) On passe au complémentaire : il y a $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc : $9^3 - 8^3 = \boxed{217}$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4. $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$

4) $8 \times 8 \times 3 = 8^2 \times 3^1 = \boxed{192}$. | 4 | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | | $\bar{4}$ | 4 | $\bar{4}$ | | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | 4 |

Il y a 3 ~~choix~~ pour la place du chiffre 4 dans le nombre et 8×8 choix possibles pour les deux chiffres $\neq 4$

II 1) On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9.

$A^3_9 = 9 \times 8 \times 7 = \boxed{504}$. | 9 | 8 | 7 | sans remise

2) $8 \times 7 \times 5 = \boxed{280}$. | 8 | 7 | 5 | $(= A^2_8 \times A^1_5)$.

Il y a 5 choix pour le dernier chiffre impair.

et 8×7 choix possibles pour les deux autres chiffres.

3) $8 \times 7 \times 3 = \boxed{168}$. | 8 | 7 | 3 | $(= A^2_8 \times A^1_3)$.

Il y a 3 choix possibles pour la place du chiffre 6 dans le nombre et 8×7 choix possibles pour les deux chiffres $\neq 6$

Ex 2 :

4 (V) :	(-1)(-1)(0)(1)
3 (R) :	(-1)(0)(1)
1 (N) :	(0)

I. Tirage successif et sans remise $\Rightarrow A^p_n$

Si $p > n$: $A^p_n = 0$. $\qquad A^n_n = n!$.

Si $1 \leq p \leq n$: $A^p_n = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

• $n! = n(n-1)\dots \times 2 \times 1$.

1) $\text{card}(\Omega) = A^3_8 = 8 \times 7 \times 6 = \boxed{336}$.

2) $A = (3\ (-1))$ ou $(3\ (0))$

$\Rightarrow \text{card}(A) = A^3_3 + A^3_3 = 3! + 3! = \boxed{12}$.

③ $B = (3 V)$ ou $(3 R)$

$\Rightarrow card(B) = A_4^3 + A_3^3 = \boxed{30}$.

$A_3^3 = 3! = 6$

$A_4^3 = \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{3 \text{ chiffres}}$

④ $C = (1 V$ et $1 R$ et $1 N)$

$\Rightarrow card(C) = 3! \times A_4^1 \times A_3^1 \times A_1^1 = \boxed{72}$.

$3!$ → ordre →

V	R	N
V	N	R

R	V	N
R	N	V

N	R	V
N	V	R

$3! = 6$ cas

⑤ $D = (1 (-1)$ et $1 (0)$ et $1 (1))$

$\Rightarrow card(D) = 3! \times A_3^1 \times A_3^1 \times A_2^1 = \boxed{108}$.

II • Tirage successif et sans remise $\Rightarrow$ nP

① $E = (2 V$ et $1 \overline{V})$

$\Rightarrow card(E) = C_3^2 \times 4^2 \times 4^1 = \boxed{192}$.

$C_3^2 = C_3^1$; $3 = C_3^1$ → ordre

V	V	$\overline{V}$

V	$\overline{V}$	V

$\overline{V}$	V	V

$C_3^2 = C_3^1 = 3$ cas.

② $F = (1 R$ et $2 \overline{R})$ ou $(2 R$ et $1 \overline{R})$ ou $(3 R)$

$\overline{F} = (0 R) = (3 \overline{R}) \Rightarrow card(\overline{F}) = 5^3 = 125$.

$\overline{F} = \Omega \setminus F \Rightarrow card(F) = card(\Omega) - card(\overline{F}) = \boxed{387}$.

$card(\Omega) = 8^3 = \boxed{512}$.

③ $\overline{G} = ($3 boules portant le même numéro$) = (3 (-1))$ ou $(3 (0))$ ou $(3 (1))$

avec remise

$\Rightarrow card(\overline{G}) = 3^3 + 3^3 + 2^3 = 62$.

$\Rightarrow card(G) = card(\Omega) - card(\overline{G}) = \boxed{450}$.

④ $H = 1 (V_0)$ et $1 (R_0)$ et $(1 N_0)$

$\Rightarrow card(H) = 3! \times 1^1 \times 1^1 \times 1^1 = \boxed{6}$.

⑤ $I = (1 (1)$ et $1 (-1)$ et $1 (0))$ ou $(3 (0))$

$\Rightarrow card(I) = 3! \times 2^1 \times 3^1 \times 3^1 + 3^3 = \boxed{135}$.

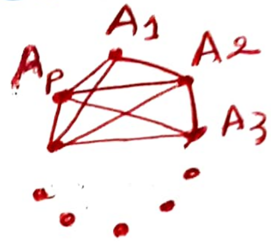
$3!$ → ordre

Ex ③ :

① $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = \boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

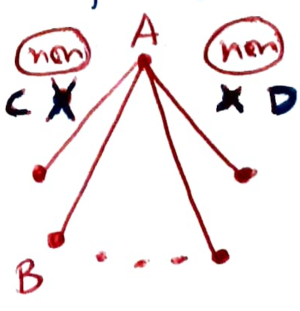
- $n = 3 \Rightarrow \frac{3 \times 2 \times 1}{6} = \boxed{1}$.
- $n = 4 \Rightarrow \frac{4 \times 3 \times 2}{6} = \boxed{4}$.

②.① Il faut d'abord choisir (p) points parmi (n) $\Rightarrow \boxed{C_n^p}$.
Une fois les points $A_1, \dots, A_p$ sont choisis, on fixe un premier sommet comme origine $\Rightarrow$ ① choix.
Ensuite, on choisit le sommet suivant $\Rightarrow$ $(p-1)$ choix.
Puis le troisième sommet $\Rightarrow$ $(p-2)$ choix. Etc...
Au total, il y a $(p-1) \times (p-2) \times \dots \times 2 \times 1 = (p-1)!$ possibilités pour ordonner les sommets.
Mais attention chaque polygone est compté deux fois : (par exemple : ABC = ACB et ABCD = ADCB).
Finalement, on trouve : $\boxed{\frac{C_n^p \times (p-1)!}{2}}$



②-② Une diagonale est définie par deux sommets consécutifs.

on choisit d'abord un premier sommet (A) $\Rightarrow$ (p) possibilités.
Ensuite, pour avoir une diagonale, il faut choisir un autre sommet autre que (A) et qu'un point adjacent à (A) $\Rightarrow$ $(p-3)$ possibilités. Mais attention, chaque diagonale est comptée deux fois : (par exemple $[AB] = [BA]$).
Finalement, on trouve : $\boxed{\frac{p(p-3)}{2}}$.



Ex 4 :

- Tirage simultané $\Longrightarrow C_n^p$.
- Si $p>n$: $C_n^p=0$
- Si $1\leq p\leq n$: $C_n^p=\dfrac{A_n^p}{p!}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

- $C_n^n=C_n^0=1$.
- $C_n^1=n$.

3 R 2 N 1 V		2 V 1 R
$(U_1)\to 2$		$(U_2)\to 1$

1) $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{card}(\Omega_1)=C_6^2=15\\ \mathrm{card}(\Omega_2)=C_3^1=3\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathrm{card}(\Omega)=\mathrm{card}(\Omega_1)\times\mathrm{card}(\Omega_2)=\boxed{45}.$

2) $A=(3R)=\left(2R_{(U_1)}\ \text{et}\ 1R_{(U_2)}\right)$

$\Longrightarrow \mathrm{card}(A)=C_3^2\times C_1^1=3\times 1=\boxed{3}.$

(U_1)	(U_2)
2 R	1 R

3) $B=\left[2\bar{R}_{(U_1)}\ \text{et}\ 1R_{(U_2)}\right]$ ou $\left[1R_{(U_1)}\ \text{et}\ 1\bar{R}_{(U_1)}\ \text{et}\ 1\bar{R}_{(U_2)}\right]$

$\Longrightarrow \mathrm{card}(B)=C_3^2\times C_1^1+C_3^1\times C_3^1\times C_2^1=\boxed{21}.$

(U_1)	(U_2)
$2\bar{R}$	1 R
$1R, 1\bar{R}$	$1\bar{R}$

Ex 5 :

1) • Par récurrence sur n:

- Si $n=0$, alors $p=0$ et $C_{0+1}^{0+1}=1$ et $\sum_{k=0}^{0}C_k^0=C_0^0=1\Longrightarrow\boxed{\text{Vraie}}$
- Supposons la relation vraie au rang n.

Pour $n+1$, on a : $p\leq n+1\Longrightarrow p\leq n$ ou $p=n+1$.

⊛ Si $p\leq n\Longrightarrow \displaystyle\sum_{k=p}^{n+1}C_k^p=\sum_{k=p}^{n}C_k^p+C_{n+1}^p$

$=C_{n+1}^{p+1}+C_{n+1}^p$ (hypothèse de récurrence)

$=C_{n+2}^{p+1}$ (formule du triangle de Pascal)

⊛ Si $p=n+1\Longrightarrow C_{n+2}^{p+1}=C_{n+2}^{n+2}=1$.

et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1}C_k^p=\sum_{k=n+1}^{n+1}C_k^p=C_{n+1}^{n+1}=1$.

• Par télescopage :

D'après la formule du triangle de Pascal, pour $p<k$, on a :

$$C_k^p = C_{k+1}^{p+1} - C_k^{p+1} \quad \text{et donc on aura :}$$

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_p^p + \sum_{k=p+1}^{n} \left(C_{k+1}^{p+1} - C_k^{p+1}\right)$$

$$= 1 + \left(\cancel{C_{p+2}^{p+1}} - C_{p+1}^{p+1}\right) + \left(C_{p+3}^{p+1} - \cancel{C_{p+2}^{p+1}}\right) + \cdots + \left(C_{n+1}^{p+1} - \cancel{C_n^{p+1}}\right)$$

$$= 1 - C_{p+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+1} = \boxed{C_{n+1}^{p+1}}$$

② $$(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k X^k$$ (formule du binôme de Newton)

$$= (X+1)^n \times (X+1)^n$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} C_n^j X^j\right)$$

$$\begin{cases} P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \\ Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \\ PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \\ c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \end{cases}$$

• Le coefficient de X^n dans $(X+1)^{2n}$ est C_{2n}^n.

• et le coefficient de X^n dans $(X+1)^n \times (X+1)^n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2,$$

$$\boxed{C_n^{n-k} = C_n^k}$$

ceci par définition du produit polynomial.

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n}.$$

Ex ⑥ :

① . $n=1 \Rightarrow E=\{x_1\} \Rightarrow \boxed{B_1 = 1}$, (une seule partition)

• $n=2 \Rightarrow E=\{x_1,x_2\} \Rightarrow \boxed{B_2 = 2}$, (deux partitions) qui sont $\{E, \phi\}$ et $\{\{x_1\},\{x_2\}\}$.

• $n=3 \Rightarrow E=\{x_1,x_2,x_3\} \Rightarrow \boxed{B_3 = 5}$. En effet, on a les partitions suivantes :

- $\{E, \phi\}$
- $\{\{x_1,x_2\},\{x_3\}\}$; $\{\{x_1\},\{x_2,x_3\}\}$ et $\{\{x_1,x_3\},\{x_2\}\}$
- $\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\}\}$.

② Soit E un ensemble à $n+1$ éléments : ($card(E) = n+1$).
$E = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Soit x_i fixé dans E.
Chaque partition de E est déterminée par une partie A_i qui contient x_i et une partition de $E \setminus A_i$. Posons : $K = card(A_i)$
On dénombre alors les partitions en faisant une somme sur tous les A_i possibles. ($K = card(A_i)$ varie entre 1 et $n+1$).

- Il y a C_n^{K-1} choix possibles pour A_i, (x_i est déjà dans A_i)
- Il y a B_{n+1-K} partitions possibles de l'ensemble $E \setminus A_i$,

avec $n+1-K = card(E \setminus A_i)$.

Finalement, on aura :

$$B_{n+1} = \sum_{K=1}^{n+1} C_n^{K-1} B_{n+1-K}$$

$$= \sum_{K'=0}^{n} C_n^{K'} B_{n-K'} \qquad \boxed{K' = K-1}$$

$$= \sum_{K''=0}^{n} C_n^{n-K''} B_{K''} \qquad \boxed{K'' = n-K'}$$

$$= \sum_{K=0}^{n} C_n^{K} B_K. \qquad \boxed{C^{n-K''} = C^{K''} \quad K'' \leftrightarrow K}$$

FIN