Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences OUJDA
Département de Mathématiques
Filières : MIP (M et I) S3

Année universitaire : 2024-2025
Module : Proba-Stat
Prof : SGHIR AISSA

TD 1 : Dénombrement et Combinatoire

Exercice 1

1. On considère Ω l'ensemble des familles ayant 3 enfants et on pose:
   $E_1 = \{$la famille a au plus deux filles$\}$,
   $E_2 = \{$la famille n'a pas de fille$\}$,
   $E_3 = \{$la famille a une fille$\}$,
   $E_4 = \{$la famille a deux filles$\}$.
   Montrer que les ensembles E_2, E_3, E_4 forment une partition de E_1.

2. Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?
   (N.B: appliquer la formule de Poincaré).

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$, l'équation: $C_{3n}^1 + C_{3n}^2 + C_{3n}^3 = 115n$.
2. Calculer pour tous $0 \leq k \leq p \leq n$: $C_n^p C_p^k - C_n^k C_{n-k}^{p-k}$.
3. Calculer pour tous $1 \leq p \leq n$: $\dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} + \dfrac{n-p+1}{p} C_n^{p-1} - 2C_n^p$.
4. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k$.
5. Montrer que pour tous $1 \leq k \leq n$: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.
6. Pour la fonction $(x+1)^n$, appliquer des dérivations successives et la formule du binôme de Newton pour calculer les sommes suivantes:
   $$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k, \qquad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k.$$
7. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (N.B: appliquer la formule du triangle de Pascal).

Exercice 3

1. On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air?
2. On souhaite ranger sur une étagère: 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique, et 3 de chimie, (tous distincts). De combien de façons peut-on effectuer ce rangement:
   2.1 Si les livres doivent être groupés par matières.
   2.2 Si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.
3. Dans une pièce il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables? Conclure.

Exercice 4
Une urne contient cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules noires.
Dans un tirage successif et sans remise de trois boules, de combien de façon peut-on tirer:

1. A=(trois boules de même couleur).
2. B=(trois boules de couleurs différentes deux à deux).
3. C=(exactement deux boules rouges).
4. D=(au moins une boule verte).
5. E=(au plus deux boules rouges).

Exercice 5
Une urne contient cinq boules rouges numérotées: $0, 0, 0, 1, 1$, trois boules vertes numérotées $0, 1, 2$ et deux boules noires numérotées $0, 2$.
Dans un tirage successif et avec remise de trois boules, de combien de façon peut-on tirer:

1. F=(trois boules portant le même numéro).
2. G=(trois boules de couleurs différentes deux à deux et portant le même numéro).
3. H=(exactement deux boules rouges portant des numéros pairs).
4. I=(trois boules portant des numéros dont leurs produit est nul).

Exercice 6
Une urne (A) contient cinq boules noires, deux boules vertes et une boule rouge.
Une autre urne (B) contient deux boules noires et une boule verte.
On tire simultanément deux boules de l'urne (A) et une boule de l'urne (B).
De combien de façon peut-on tirer:

1. A=(trois boules vertes).
2. B=(exactement deux boules vertes).
3. C=(au moins une boule verte).
4. D=(au plus deux boules vertes).

Correction du TD 1 : MIP (M-I)
Probabilités et Statistique 24/25

Ex 1

1 On note : g = (garçon) et f = (fille). Les possibilités sont : (à étudier)

- $\Omega = \{ggg; ggf; gfg; fgg; gff; fgf; ffg; fff\}$.

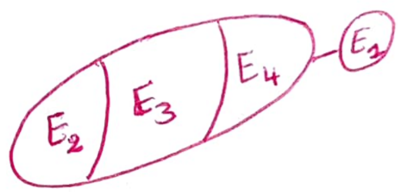
  $card(\Omega) = \boxed{8} = 2^3$.

- E_1 : $(2f)$ ou $(1f)$ ou $(0f)$. $card(E_1) = \boxed{7}$

  $E_1 = \{ffg; gff; fgf; fgg; gfg; ggf; ggg\}$.

- E_2 : $(0f) \Leftrightarrow (3g)$.

  $E_2 = \{ggg\}$. $card(E_2) = \boxed{1}$



- E_3 : $(1f)$

  $E_3 = \{fgg; gfg; ggf\}$. $card(E_3) = \boxed{3}$

- E_4 : $(2f)$ $card(E_4) = \boxed{3}$

  $E_4 = \{ffg; gff; fgf\}$

- Il est clair que : $E_2 \cap E_3 = \phi$; $E_2 \cap E_4 = \phi$; $E_3 \cap E_4 = \phi$

  et $E_2 \cup E_3 \cup E_4 = E_1$. Donc E_2, E_3, E_4 forment une partition de E_1.

- N.B : $card(E_1) = 7 = 1 + 3 + 3 = card(E_2) + card(E_3) + card(E_4)$.

2 On note : H = (homme) ; S = (membre d'un syndicat) ; E : (employé) ; M = (marié) ; HS = (homme syndiqué) ; HM = (homme marié) ; SM = (syndiqué-marié) ;

$card(H) = 300$; $card(S) = 352$; $card(M) = 424$;
$card(HS) = 188$; $card(HM) = 166$; $card(E) = 800$
$card(SM) = 208$; $card(HMS) = 144$;

• $HS = H\cap S$; $HM = H\cap M$; $HS = H\cap S$;
$SM = S\cap M$; $HMS = H\cap M\cap S$;

• on cherche ; $\text{card}(\overline{H}\,\overline{M}\,\overline{S}) = \text{card}(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S})$???

• on a : $\text{card}(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S})$

$$= \text{card}(\overline{H\cup M\cup S})$$

$$= \text{card}(E) - \text{card}(H\cup M\cup S)$$ (formule de Poincaré)

$$= \text{card}(E) - \big(\text{card}(H) + \text{card}(M) + \text{card}(S) - \text{card}(H\cap M) - \text{card}(H\cap S) - \text{card}(M\cap S) + \text{card}(H\cap M\cap S)\big)$$

$$= 800 - (300 + 424 + 352 - 166 - 188 - 208 + 144)$$

$$= \boxed{142}$$

Ex ②

① $C^1_{3n} + C^2_{3n} + C^3_{3n} = 115n$; $(n \geq 1)$.

$$\frac{(3n)!}{1!\,(3n-1)!} + \frac{(3n)!}{2!\,(3n-2)!} + \frac{(3n)!}{3!\,(3n-3)!} = 115n$$

$$\frac{3n\,\cancel{(3n-1)!}}{\cancel{(3n-1)!}} + \frac{3n(3n-1)\cancel{(3n-2)!}}{2\cdot\cancel{(3n-2)!}} + \frac{3n(3n-1)(3n-2)\cancel{(3n-3)!}}{6\cdot\cancel{(3n-3)!}} = 115n$$

$$3n + \frac{3n(3n-1)}{2} + \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6} = 115n$$

$$18n + 9n(3n-1) + 3n(3n-1)(3n-2) = 690n$$

$$18n + \cancel{27n^2} - 9n + 27n^3 - \cancel{27n^2} + 6n = 690n$$

$$27n^3 - 675n = 0$$

$$(n^2 - 25) = 0$$

$n \neq 0$; $\cancel{n \neq -5}$;

$$\boxed{n = 5 \in \mathbb{N}^*}$$

2. $C_n^p C_p^k - C_n^k C_{n-k}^{p-k}$

$$= \frac{n!}{\cancel{p!}(n-p)!} \times \frac{\cancel{p!}}{k!\,(p-k)!} - \frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \times \frac{\cancel{(n-k)!}}{(p-k)!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-p)!\,(p-k)!} - \frac{n!}{k!\,(n-p)!\,(p-k)!} = \boxed{0}.$$

$n! = n(n-1)!$

3. $\frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} + \frac{n-p+1}{p} C_n^{p-1} - 2\,C_n^p$

$$= \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{\cancel{n-p+1}}{p} \times \frac{n!}{(p-1)!\,\cancel{(n-p+1)!}} - 2\,\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{p!\,(n-p)!} - \frac{2n!}{p!\,(n-p)!} = \boxed{0}.$$

4. On utilise la formule du binôme de Newton ;

- $\sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (1)^k (1)^{2n-k} - \underset{(k=0)}{1} = (1+1)^{2n} - 1 = 2^{2n} - 1 = \boxed{4^n - 1}$

- $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (1)^{n-k} - \underset{(k=0)}{1} = (-1+1)^n - 1 = \boxed{-1}.$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k = 4^n - 1 - (-1) = \boxed{4^n}.$$

5. • $k\,C_n^k - n\,C_{n-1}^{k-1} = \cancel{k} \times \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} - n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} - \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \boxed{0}.$$

- $\sum_{k=1}^{n} k\,C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k\,C_n^k = \sum_{k=1}^{n} n\,C_{n-1}^{k-1} = n \times \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}$

$(k' = k-1)$ $= n \times \sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} = n . \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} . 1^k . 1^{n-1-k}$

$= n \times (1+1)^{n-1} = \boxed{n . 2^{n-1}}.$

⑥ • $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \cdot (1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

• $((x+1)^n)' = n(x+1)^{n-1}$

• $\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)' = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$

$$\Rightarrow \boxed{n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1}}$$

• $x = 1 \Rightarrow \boxed{n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k}$

• $x = -1 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k = 0}$

• $\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)'' = \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}\right)'$

$= \left(C_n^1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k k x^{k-1}\right)'$

$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k x^{k-2}$

• $((x+1)^n)'' = (n(x+1)^{n-1})' = n(n-1)(x+1)^{n-2}$

$$\Rightarrow \boxed{n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k x^{k-2}}$$

• $x = 1 \Rightarrow \boxed{n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k}$

• $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=1}^{n} (k(k-1) + k) C_n^k$

$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) C_n^k + \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k + \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$$

$(k=1 \Rightarrow 0)$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

$$= n2^{n-2}(n-1+2)$$

$$= \boxed{n(n+1)2^{n-2}}$$

7 • $n=1$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_1^k = \frac{(-1)^2}{1} \times C_1^1 = \boxed{1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$.

- Supposons que la propriété est vraie pour n.
- pour $n+1$, on a par le triangle de Pascal, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} C_{n+1}^k}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\underline{C_n^{k-1} + C_n^k}\right)$$

$(C_n^{n+1} = 0)$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^{k-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k}_{\text{hypothèse}}$$

$$\left(\frac{C_n^{k-1}}{k} = \frac{C_{n+1}^k}{n+1} \text{ d'après } 5 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \underbrace{\frac{C_{n+1}^k}{n+1}}_{\text{d'après } 5} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{-1}{n+1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k} C_{n+1}^k}_{= -1 \text{ d'après } 4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \boxed{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}$$

donc vraie aussi pour $n+1$.

Ceci termine la preuve de la formule demandée.

Ex 3

1 • Pour le premier hélicoptère, on choisit $\underline{2}$ hôtesses parmi $\underline{8}$

et un pilote parmi 4 $\Rightarrow C_8^2 \times C_4^1 = \boxed{112}$ choix

- Pour le deuxième hélicoptère, on choisit 2 hôtesses parmi 6 restantes, puis un pilote parmi les 3 restantes

  $\Rightarrow C_6^2 \times C_3^1 = \boxed{45}$ choix.

- Pour le troisième hélicoptère $\Rightarrow C_4^2 \times C_2^1 = \boxed{12}$ choix.
- Pour le dernier hélicoptère, on n'a plus de choix à faire, on lui affecte les deux hôtesses restantes et le dernier pilote $\Rightarrow C_2^2 \times C_1^1 = \boxed{1}$ choix.
- le nombre total de choix est donc $112 \times 45 \times 12 = \boxed{60480}$

2) 2.1

- Il y a 3! façons de choisir l'ordre des matières.
- Il y a 4! façons de ranger les livres de Maths.
- Il y a 6! " " " de phys.
- Il y a 3! " " " de chimie.

Au total on a $\boxed{3! \times 4! \times 6! \times 3!}$ possibilités.

2.2

- Il y a 4! façons d'ordonner les livres de Maths.
- Il y a 9! " " les autres livres.
- Il peut y avoir $\underbrace{0, 1, \dots, 9}_{10}$ livres placés

avant les livres de Maths.

Au total, il y a en tout : $\boxed{10 \times 4! \times 9!}$

3)

- Il y a C_7^3 possibilités de choisir les personnes qui vont s'installer autour de la première table. Ensuite il y a 3! choix pour cette table.
- De même, il y a 4! choix pour les personnes qui vont s'installer autour de la 2ème table.

Au total, on aura : $C_7^3 \times 3! \times 4! = \boxed{7!}$

- N.B : par symétrie, on a : $\boxed{C_7^3 = C_7^4}$.
- Conclusion : le résultat $7!$ montre que le fait d'imposer deux tables ne change en réalité rien au problème. On doit tout simplement placer 7 personnes autour de 7 places, et donc $\boxed{7!}$ façons.

Ex 4

$\boxed{5 R \quad 3 V \quad 2 N}$

- tirage successif et sans remise :

$\Rightarrow A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; $0 \leq p \leq n$

$= \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$

$\underbrace{card(\Omega) = A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = \boxed{720}}$
toutes les combinaisons possibles

$\Omega = \{R_1 R_2 R_3, \ldots\ldots, V_3 N_1 N_2\}$.

1) $A = (3 R)$ ou $(3 V)$

$card(A) = A_5^3 + A_3^3 = (5 \times 4 \times 3) + 3! = \boxed{66}$

2) $B = (1 R$ et $1 V$ et $1 N)$ (l'ordre important)

$card(B) = A_5^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times 3!$

$= \boxed{180}$

$\begin{pmatrix} RVN \\ RNV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} VRN \\ VNR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} NRV \\ NVR \end{pmatrix}$ $3!$

3) $C = (2 R$ et $1 \bar{R}) \times$ l'ordre

$C_n^p = C_n^{n-p}$

$card(C) = A_5^2 \times A_5^1 \times (C_3^2$ ou $C_3^1)$

$(RR\bar{R})$ $(R\bar{R}R)$ $(\bar{R}RR)$

$= \boxed{300}$

4) $D = (1 V$ et $2 \bar{V})$ ou $(2 V$ et $1 \bar{V})$ ou $(3 V)$

$card(D) = \left(A_3^1 \times A_7^2 \times \underbrace{C_3^1}_{\text{ordre}}\right) + \left(A_3^2 \times A_7^1 \times \underbrace{C_3^2}_{\text{ordre}}\right) + A_3^3$

$= \boxed{510}$

7

on bien : $\bar{D} = (0 \text{ V}) = (3 \bar{V})$ ($\bar{D}$ complémentaire)

$card(\bar{D}) = A_7^3 = \boxed{210}$

$\Rightarrow card(D) = card(\Omega) - card(\bar{D}) = \boxed{510}$

(5) $E = (2 \text{ R et } 1 \bar{R})$ ou $(1 \text{ R et } 2 \bar{R})$ ou (0 R)

ordre ordre

on bien $\bar{E} = (3 \text{ R})$

$card(\bar{E}) = A_5^3 = \boxed{60}$

$\Rightarrow card(E) = card(\Omega) - card(\bar{E}) = \boxed{660}$

Ex (5)

5 R	0, 0, 0, 1, 1
3 V	0, 1, 2
2 N	0, 2

- tirage successif et avec remise.

$\Rightarrow n^p$

$card(\Omega) = 10^3 = \boxed{1000}$

(1) $F = (3 \text{ ⓪})$ ou (3 ①) ou (3 ②)

$card(F) = 5^3 + 3^3 + 2^3 = \boxed{160}$

(2) $G = (1 R_{⓪} \text{ et } 1 V_{⓪} \text{ et } 1 N_{⓪}) \times (\text{ordre})$

$card(G) = 3^1 \times 1^1 \times 1^1 \times 3! = \boxed{18}$

(3) $H = (\overline{2 R_{(P)} \text{ et } 1 R_{(P)}}) \times \text{ordre}$ (P = pair)

$card(H) = 3^2 \times 7^1 \times C_3^2 = \boxed{189}$

(4) $I = (3 \text{ ⓪})$ ou $(2 \text{ ⓪ et } 1 \bar{⓪})$ ou $(1 \text{ ⓪ et } 2 \bar{⓪})$

ordre ordre

$\bar{I} = (3 \bar{0}) \Rightarrow card(\bar{I}) = 5^3 = \boxed{125}$

$\Rightarrow card(I) = card(\Omega) - card(\bar{I}) = \boxed{875}$.

(8)

Ex 6

5 N, 2 V, 1 R	2 N, 1 V
(A)	(B)
Ω_1	Ω_2

- tirage simultané : $\Rightarrow C_n^p$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$\Rightarrow card(\Omega) = card(\Omega_1) \times card(\Omega_2)$

$card(\Omega_1) = C_8^2 = \boxed{28}$ $\quad card(\Omega_2) = C_3^1 = \boxed{3}$

(A)	(B)
2 V	1 V

1) $A = \left(2 V_{(A)} \text{ et } 1 V_{(B)}\right)$

$card(A) = C_2^2 \times C_1^1 = \boxed{1}$

(A)	(B)
2 V	1 $\bar{V}$
1 V 1 $\bar{V}$	1 V

2) $B = \left(2 V_{(A)} \text{ et } 1 \bar{V}_{(B)}\right)$

ou $\left(1 V_{(A)} \text{ et } 1 \bar{V}_{(A)} \text{ et } 1 V_{(B)}\right)$

$card(B) = \left(C_2^2 \times C_2^1\right) + \left(C_2^1 \times C_6^1 \times C_1^1\right) = \boxed{14}$

3) $\bar{C} = (0 V) = \left(0 V_{(A)} \text{ et } 0 V_{(B)}\right)$

$card(\bar{C}) = C_6^2 \times C_2^1 = \boxed{30}$

$\Rightarrow card(C) = card(\Omega) - card(\bar{C}) = \boxed{15}$

4) $\bar{D} = (3 V) = A \Rightarrow card(\bar{D}) = \boxed{1}$

$\Rightarrow card(D) = card(\Omega) - card(\bar{D}) = \boxed{44}$

FIN