# CFS下的帕塞瓦尔定理

| 文件版本 | 修改内容 | 作者/时间 | 备注 |
|---|---|---|---|
| V1.0 | 首次编写该文档 | AlimyBreak/2019.08.12 | - |

---

- 已知周期为$T$的周期函数$f(t)$可以通过连续傅立叶级数分解为等式 (1):

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_1 t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt \end{cases}$$

其中:

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

- 根据等式 (1),对于$f(t)\overline{f(t)}$我们可以分解为:

$$\begin{aligned} f(t)\overline{f(t)} &= \{a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\}\}\{a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\}\} \\ &= a_0^2+2a_0\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\}\}+\{\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\}\}^2 \end{aligned}$$

  显然上式的前两项在一个周期$T$内非常好积分,第三项我们记作如下$L(t)$，可以展开:

$$
\begin{aligned}
L(t) &= \{\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\}\}^2 \\
&= Cross1+\sum_{n=1}^{+\infty}\{\{a_n\cos(n\omega_1 t)\}^2+\{b_n\sin(n\omega_1 t)\}^2\} \\
&= Cross1+\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n^2\cos^2(n\omega_1 t)+b_n^2\sin^2(n\omega_1 t)\} \\
&= Cross1+\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n^2\frac{1+\cos(2n\omega_1 t)}{2}+b_n^2\frac{1-\cos(2n\omega_1 t)}{2}\} \\
&= Cross1+\sum_{n=1}^{+\infty}\{\frac{a_n^2}{2}\cos(2n\omega_1 t)+\frac{b_n^2}{2}\sin(2n\omega_1 t)\}+\sum_{n=1}^{+\infty}\{\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}\} \\
&= Cross+\sum_{n=1}^{+\infty}\{\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}\}
\end{aligned}
$$

根据三角函数基的正交性，众多非同频分量的交叉项构成的$Cross$在一个周期$T$内的积分一定为0，此处不证明，请读者(如果有读者的话)自行推导并理解三角函数基的正交性质。

- 记$CROSS = Cross + 2a_0\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\}$
- 由此可得$f(t)\overline{f(t)}$在一个周期$T$的积分可以表示为

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\overline{f(t)}dt &= \int_0^T\{a_0^2+CROSS+\sum_{n=1}^{+\infty}\{\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}\}\}dt \\
&= T\{a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\{\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}\}\}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

- 推导完毕。