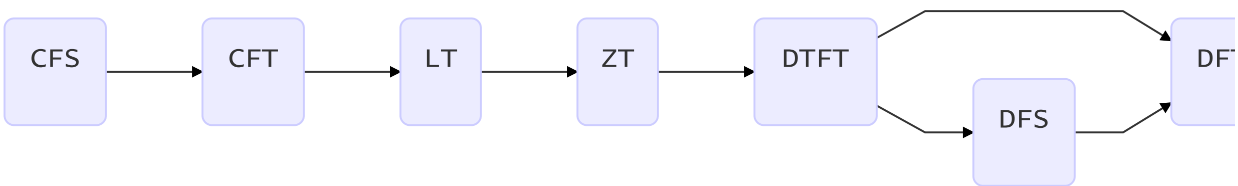
数字信号处理中的各种变换-理论篇

文件版本	修改内容	作者/时间	备注
V1.1	完成主干理论推导	AlimyBreak/2019.08.12	-
V1.0	挖坑开始编写该文档	AlimyBreak/2019.06.20	底稿已失

一、概述

- 傅立叶变换 傅立叶级数种类繁多，这里统一梳理大学基础课程(**信号与系统**、**数字信号处理**)中涉及到的一些级数和变换，主要完成对主干理论的推导，说明各种变换之间的联系和关系。
  - CFS：连续时间**周期**信号的傅立叶级数分解
  - CFT：连续时间信号的傅立叶变换
  - LT:拉普拉斯变换
    - 一般连续信号在衰减因子影响下的CFT
  - ZT:Z变换
    - 等间隔采样信号的拉普拉斯变换
  - DTFT:离散时间傅立叶变换分解
  - DFS：离散时间**周期**信号的傅立叶级数分解
- DFT：有限长序列的傅立叶变换
  - FFT：快速的DFT计算方法，本质上是DFT的计算优化
- 本文档默认读者(如果有读者的话)已经具备大一高等数学中傅立叶级数、欧拉公式和定积分等基础知识，涉及到复变函数的内容本文档已主动屏蔽，需要了解这部分的内容可自行学习《复变函数》、《数学物理方法》等课程。
- 相关变换之间的关系流程图如下如所示.



二、各种变换

2.1 CFS(连续时间傅立叶级数)

- 适用信号类型:连续时间信号且满足周期性(数学上还应该满足**狄利克雷三条件**)
- 正逆变换公-三角形式，其中T为连续时间信号的周期:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(n\omega_1 t) + b_n sin(n\omega_1 t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n sin(n\omega_1 t + \phi_n) \tag{2-1}$$

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)cos(n\omega_1 t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)sin(n\omega_1 t)dt \end{cases} \tag{2-2}$$

其中

$$\begin{cases} c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= arctan(\frac{a_n}{b_n}) \\ \omega_1 &= \frac{2\pi}{T} \end{cases} \tag{2-3}$$

- 根据欧拉公式

$$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsin(\theta)$$

可以得到:

$$\begin{cases} cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2} \\ sin(n\omega_1 t) = j\frac{e^{-jn\omega_1 t} - e^{jn\omega_1 t}}{2} \end{cases} \tag{2-4}$$

根据 (2-4)对 (2-1)进行替换可以得到:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(n\omega_1 t) + b_n sin(n\omega_1 t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2} + b_n j\frac{e^{-jn\omega_1 t} - e^{jn\omega_1 t}}{2} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_1 t} \end{aligned} \tag{2-5}$$

记:

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)cos(n\omega_1 t)dt - j\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)sin(n\omega_1 t)dt) \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)[cos(n\omega_1 t) - jsin(n\omega_1 t)]dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)[cos(-n\omega_1 t) + jsin(-n\omega_1 t)]dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \\
(n &= 1,2,3...)
\end{aligned}
\tag{2-6}
$$

显然:

$$
\begin{aligned}
F(-n) &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)cos(n\omega_1 t)dt + j\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)sin(n\omega_1 t)dt) \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)[cos(n\omega_1 t) + jsin(n\omega_1 t)]dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega_1(-n)t}dt \\
(-n &= -1,-2,-3...)
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

且:

$$
a_0 = a_0 cos(0\omega_1 t) + 0sin(0\omega_1 t) = a_0 e^{-j\omega_1 0t}
$$

且令:

$$
F(0) = a_0 e^{-j\omega_1 0t} \tag{2-8}
$$

联合 (2-6)、 (2-7)和 (2-8),可对 (2-5)进行统一改写:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_1 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{jn\omega_1 t}
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

其中$F(n)$是定义在$n = -\infty \ +\infty, n \in \mathbb{Z}$，的函数

$$
F(n) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt \tag{2-10}
$$

联合 (2-9)和 (2-10),我们就得到了复指数形式的连续时间傅立叶级数变换对

$$
\begin{cases}
F(n) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega_1 nt} \\
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{jn\omega_1 t}
\end{cases}
\tag{2-11}
$$

- 复指数形式的连续时间傅立叶级数变换对 (2-11)非常重要，本文后续所有的其他傅立叶变换对都是从这个公式开始推导的。
- 根据 (2-6)、 (2-7)和 (2-8)中关于$F(n)$的联合定义可以得到,对于任意一个属于$\mathbb{Z}$的n：

$$\begin{aligned} s1 = F(n) + F(-n) &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{j\omega_1 nt}dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)cos(\omega_1 nt)dt \end{aligned} \tag{2-12}$$

$$\begin{aligned} s2 = F(n) - F(-n) &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{j\omega_1 nt}dt \\ &= -\frac{2j}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)sin(\omega_1 nt)dt \end{aligned} \tag{2-13}$$

  根据 (2-12)和 (2-13)显然可得到$s1$为**纯实数**,$s2$为纯虚数,根据复数加减的性质:两个复数的和为纯实数，两个复数的差为**纯虚数**，这两个复数一定为**共轭复数**(也可以通过 (2-6)和 (2-7)直接得到共轭关系).
- CFS的谱特点：
  - **根据共轭复数的性质及复数的模和相位定义，$f(t)$的连续傅立叶级数幅度谱(即F(n)的模)$|F(n)|$是关于y轴对称的偶函数，傅立叶级数相位谱是关于原点对称的奇函数。**这个结论也很重要。
  - 连续信号在时域呈周期性变换，那么其频谱只在特定整数上才有取值，也即其**频谱是离散**的。

2.2 CFT(连续时间傅立叶变换)

- 适用信号类型:连续时间信号,不要求一定为周期信号(数学上需要满足**无限区间绝对可积条件**)
- 推导过程：
  - 根据2.1节中的推导，周期为T的连续时间信号的频谱如 (2.11)所述，而一个非周期的连续时间信号可以看一个$T \longrightarrow +\infty$的"周期函数"
  - 当$T \longrightarrow +\infty$时， (2.11)的形式将发生变化（$t_0 = -\frac{T}{2}$），首先

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt$$

$$TF(n\omega_1) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt$$

$$\frac{2\pi}{\omega_1}F(n\omega_1) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt$$

    令$\omega = n\omega_1$,当$T \longrightarrow +\infty$时,$\omega_1 \longrightarrow 0$:

$$\frac{2\pi}{\omega_1}F(n\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

    令$F(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1}F(n\omega_1)$,则:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{2-14}$$

则根据 (2.11):

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}e^{jn\omega_1 t}\omega_1 \end{aligned}$$

又因为$\omega_1 \longrightarrow d\omega$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}e^{jn\omega_1 t}\omega_1 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{2\pi}e^{j\omega t}\omega_1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{2-15}$$

联合 (2.14)和 (2.15),我们就得到连续时间傅立叶变换对:

$$\left\{\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{jwt}d\omega \end{aligned}\right. \tag{2-16}$$

- 频谱特征:
  - 与CFS的性质相似， $F(\omega)$ 的幅度谱也是关于y轴对称的偶函数，$F(\omega)$的相位谱也是关于原点对称的奇函数。
  - 对于非周期函数，由于ω的连续，$F(\omega)$通常为连续谱。
  - 由于周期函数不满足绝对可积条件，周期函数没有狭义上的傅立叶变换，但引入但对于原本的周期函数$f(t)$,利用连续傅立叶级数展开总可以得到$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$,根据特殊的傅立叶变换对$e^{j\omega_1 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,即周期复指数函数信号的频谱是一个冲激,

    $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \leftrightarrow X(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1) \tag{2-17}$$

    从上式可以知道，周期信号傅立叶变换也是**离散谱**,由一系列冲激函数组成，这些冲激的强度等于$f(t)$的傅立叶级数对应系数的2π倍。
  - 同样的对于周期信号$f(t)$,我们可以只取一个周期$(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$的有效信号$f_T(t)$，显然我们可以求得$f_T(t)$的傅立叶变换$X_T(\omega)$,我们可以通过$\delta$函数以周期延拓的方式将$f_T(t)$延拓为$f(t)$,即

    $$f(t)=f_T(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

    根据**时域卷积定理**(时域卷积，频域相乘)和**周期为T冲激串函数的傅立叶变换在频域是一个周期为$\frac{2\pi}{T}$的周期冲激串**,可以得到

$$F(\omega) = X_T(w)\mathcal{F}(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)) \tag{2-18}$$

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT))$$
$$= \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T})$$
$$F(\omega) = X_T(\omega)\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T})$$
$$= \omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_T(\omega)\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T})$$

对比 (2-17)的$X(j\omega)$ (2-18)的最后一行$F(\omega)$,他们都是$f(t)$的傅立叶变换

$$X(j\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1) \tag{2-19}$$
$$F(\omega) = \omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_T(\omega)\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T})$$

可以得到周期信号傅立叶的级数系数$F(n\omega_1)$与单周期截断信号$f_T(t)$的傅立叶变换之间的关系是:

$$2\pi F(n\omega 1) = \omega_1 X_T(\omega) \tag{2-20}$$
$$F(n\omega 1) = \frac{1}{T}X_T(\omega)$$
$$X_T(\omega) = TF(n\omega 1)$$

- 根据 (2-20)，单周期截断信号的傅立叶变换在$n\omega_1$频率点的值等于对应周期信号的傅立叶级数的系数乘以T.

2.3 LT(连续时间拉普拉斯变换)

- 适应信号类型：原连续时间信号$f(t)$虽然不一定满足绝对可积条件，但存在σ使得$f(t)e^{-\sigma t}$满足绝对可积条件.
- 若连续时间非周期信号不满足绝对可积条件，在CFT的原有基函数$e^{-j\omega t}$的基础上增加一个收敛因子$e^{-\sigma t}$,虽然原信号$f(t)$不收敛，但如果存在一些σ使得$f(t)e^{-\sigma t}$这个新的信号绝对可积，那么我们可以通过求$f(t)e^{-\sigma t}$的傅立叶变换分析信号的特征，其中使得$f(t)e^{-\sigma t}$绝对可积的所有σ的可取值范围称为收敛域(ROC).
- 原始信号$f(t)$需要收敛因子的傅立叶变换就是拉普拉斯变换(LT),其变换对推导过程和形式为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= F(\sigma+j\omega) = \mathcal{F}(f(t)e^{-\sigma t}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \\
f(t)e^{-\sigma t} &= \mathcal{F}^{-1}\left[F(\sigma+j\omega)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
f(t)e^{-\sigma t}e^{+\sigma t} &= \frac{e^{+\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{\sigma t}e^{j\omega t}d\omega \\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega
\end{aligned} \tag{2-21}
$$

令$s=\sigma+j\omega$,则$d\omega=\frac{1}{j}ds$,又$\omega\in(-\infty,+\infty)$，所以$s\in(\sigma-j\infty,\sigma+j\infty)$,$\sigma$是ROC中的任意常数，所以(2-21)可以整理成：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) = F(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\
\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{F}(s)) = f(t) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \\
\sigma &\in ROC
\end{aligned} \tag{2-22}
$$

显然当$\sigma=0$时，$f(t)$的拉普拉斯变换就是其傅立叶变换。

2.4 抽样信号的傅立叶变换

- 适用信号：连续信号经过等间隔采样后的离散信号(原连续时间信号满足绝对可积条件，要使得频谱不发生混叠，采样间隔时间满足奈奎斯特采样定理)
- 基本思想：通过等间隔采样，将连续时间信号转换为离散时间信号，将CFT推广到抽样信号的特殊条件.
- 推导过程：
  - 对原始连续时间信号$f(t)$进行抽样($p(t)$)得到$f_{T_s}(t=nT_s)$，其中$n\in\mathbb{Z}$,则

$$
\begin{aligned}
f_{T_s}(nT_s) &= f(t)p(t) \\
p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)
\end{aligned} \tag{2-21}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_{T_s}(nT_s)) &= \mathcal{F}(f(t)p(t)) \\
\mathcal{F}(f(t)) &= F(\omega) \\
\mathcal{F}(p(t)) &= P(\omega)
\end{aligned} \tag{2-22}
$$

由于$p(t)$是周期信号，根据　　(2-19)我们可以得到他的傅立叶变换如下：

$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}p(t)e^{-jn\omega_s t}dt\\&=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt\quad=\frac{1}{T_s}\end{aligned}$$

根据变换域卷积定理(包括**时域卷积定理**和**频域卷积定理**可以知道)：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_{T_s}(t))=F_s(\omega)&=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)\\&=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n(F(\omega)*\delta(\omega-n\omega_s))\\&=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_s)\end{aligned}\tag{2-23}$$

根据　　(2-23)可以知道，连续时间信号被抽样后，它的频谱$F_s(\omega)$是连续信号频谱$F(\omega)=\mathcal{F}(f(t))$的形状以抽样频率$\omega_s$为间隔周期地重复的**叠加**而得到，在重复过程其幅度被$p(t)$的傅立叶级数系数P_n所加权，因为P_n仅仅是n而不是ω的函数,所以在$F(\omega)$在重复的过程中形状不会发生变化。

- 由上述推导过程可以知道，对一个连续时间信号进行等间隔抽样，抽样后"离散"信号的频谱是原连续时间信号频谱的周期性平移和叠加，为了在频域不发生“混叠”，观察图像可以知道：我们的采样频率ω_s必须大于或等于2倍的$f(t)$的最大频率成分ω_m，即$\omega_s\geq 2\omega_m$，这就是著名的**时域采样定理**，也被称为**奈奎斯特采样定理**或**香农采样定理**。
- 那么对于带限为$-\omega_m\backsim\omega_m$的信号$f(t)$,在满足**时域采样定理**的条件下,为了从频谱$F_s(\omega)$中无失真地选出$F(\omega)$,可以用矩形函数$H(\omega)$与$F_s(\omega)$相乘，联合　　(2-23)即

$$\begin{aligned}F(\omega)&=F_s(\omega)H(\omega)\\H(\omega)&=\begin{cases}T_s,|\omega|<\omega_m\\0,|\omega|>\omega_m\end{cases}\end{aligned}\tag{2-24}$$

$H(\omega)$是"理想低通滤波器“的频率响应,其单位冲激响应$h(t)$为

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}(H(\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2-25}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{+\omega_m}T_s e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{T_s}{2\pi}\left(\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}\right)_{-\omega_s}^{+\omega_s}$$
$$=\frac{1}{jt}\left(e^{j\omega_s t}-e^{-j\omega_s t}\right)$$
$$=\frac{1}{jt}2j\sin(w_s t)$$
$$=2\omega_s\frac{\sin(\omega_s t)}{\omega_s t}$$

定义符号$Sa(t)=\frac{\sin(t)}{t}$,$sinc(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

- 此章节的推导结论非常重要，将会在后续的ZT,$DTFT$和DFT章节频繁用到，显然**抽样信号就是离散信号**!

注意：以上CFS、CFT、LT以及抽样信号的傅立叶变换都是在处理**无限长连续时间信号**的分析方法。

2.5 ZT(Z变换)-抽样信号的拉普拉斯变换

- 适用信号:无限长序列.

2.5.1 ZT变换导出(抽样信号的拉普拉斯变换)

- 对于连续时间信号$f(t)$进行符合采样定理的等间隔采样($p(t)$)得到$f_{T_s}(nT_s)$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$$
$$f_{T_s}(nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-nT_s)\delta(t-nT_s)$$

- 对$f_{T_s}(nT_s)$进行拉普拉斯变换

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_{T_s}(nT_s)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dte^{-st} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT_s)\delta(t-nT_s) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT_s)\delta(t-nTs)\right] e^{-st} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT_s)e^{-snTs}
\end{aligned}
$$

- 令$z=e^{sT_s}$,则定义了序列的z变换(抽样信号的拉普拉斯变换)

$$
x(n) = f(t-nT_S)
$$

$$
Z(n) = \mathcal{Z}(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}
$$

- 根据 (2-22)推广离散序列的情况，可以得到z变换对

$$
\begin{cases}
X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\
x(n) = \frac{1}{2\pi j}\int_c X(z)z^{n-1}dz, c\in(R_{x^-}, R_{x^+})
\end{cases}
\tag{2-26}
$$

- 如 (2-26)所示，逆z变换是一个复变函数中的围线积分，直接计算计算一般复杂，所以对于常用函数的z变换对和性质，一般需要读者熟悉：

$$
\delta(n) = \begin{cases} =1, (n\geq 0) \\ =0, (n<0) \end{cases}
$$

$$
\mathcal{Z}(\delta(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = 1
$$

$$
u(n) = \begin{cases} 1, (n\geq 0) \\ 0, (n<0) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}(u(n)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}}, (|z|>1)
\end{aligned}
$$

$$
x(n) = nu(n) = \begin{cases} n, (n\geq 0) \\ 0, (n<0) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}(x(n)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (az)^{-n} \\
&= \frac{z}{(z-1)^2}, (|z|>1)
\end{aligned}
$$

$$x(n)=a^n u(n)=\begin{cases} a^n, (n\geq 0) \\ 0, (n<0)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(x(n)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n z^{-n} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2}, (|z|>1)\end{aligned}$$

2.5.2 ZT变换应用举例

- 在连续时间系统中，信号是时间变量的连续函数，系统可用**微分积分方程式**来表示，LT变换就是用来求解微分方程中$y(t)$的有效工具。
- 对于离散时间系统，信号的变量n是离散的整数值，因此一个**信号扭曲系统**(笔者瞎取的名，所谓扭曲就是把$x(n)$"变成"$y(n)$的信号处理系统)的特性常常用该系统的单位冲击响应$h(n)$或其z变换来表示，$h(n)$本身由差分方程表示，而使用z变换是求解差分方程的重要方法.
- 应用z变换来来求斐波那契数列的通项公式,已知:

  $x(0)=1, x(1)=1, x(2)=2, x(n)=x(n-1)+x(n-2), n\geq 2$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}(x(n)) &= \mathcal{Z}(x(n-1)) + \mathcal{Z}(x(n-2)) \\
X(z) &= z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) \\
X(z) &= \frac{z^2}{z^2-z-1} = \frac{z^2}{(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})} \\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{A_1}{(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2})} + \frac{A_2}{(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})} \\
A_1(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + A_2(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}) &= z+0 \\
A_1 + A_2 &= 1 \\
A_1(1-\sqrt{5}) + A_2(1+\sqrt{5}) &= 0 \\
A_1 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\
A_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\
x(n) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z)) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{A_1}{(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2})}z + \frac{A_2}{(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})}z\right] \\
&= \left[A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(n) \\
&= \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]u(n)
\end{aligned}
\tag{2-27}
$$

2.6 序列的傅立叶变换(DTFT)

- 适用信号：无限长序列。

2.6.1 DTFT的导出

- 根据LT,ZT的导出过程
  - 当$s=j\omega$时，序列的LT就是序列的CFT.
- 令$s=j\omega$
  - $z=e^{sT_s}$
  - $s=\frac{\ln(z)}{T_s}=j\omega$
  - $z=e^{j\omega T_s}$
  - 令$\Omega=\omega Ts$

- 即当$z=e^{j\Omega}$时，序列的ZT就是序列的LT，也就是序列的CFT.

- 根据以上特性，我们可以通过序列的Z变换来定义序列的傅立叶变换

$$X(e^{j\Omega})=X(Z)|_{z=e^{j\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-jn\Omega} \tag{2-28}$$

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(z)z^{n-1}dz\\&=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(e^{j\Omega})e^{(n-1)j\Omega}de^{j\Omega}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}d\Omega\end{aligned}$$

- $X(e^{j\omega})$表示$x(n)$的频域特性，也称为$x(n)$的频谱，可以分为幅度谱和相位谱，两者都是ω的连续函数。
- 显然$e^{j\omega}$是变量为ω以2π为周期的周期性函数，所以$X(e^{j\omega})$也是以2π为周期的周期函数.
- 根据新的频率定义$\Omega=\omega T_s$,$\omega\in[-\pi,\pi)$,可以得到

$$\begin{aligned}\Omega&=\omega T_s\\&=\frac{\omega}{f_s}\\&=2\pi\frac{f}{f_s}\end{aligned}$$

  由于$\omega\in[-\pi,\pi)$,所以$f\in[-\frac{f_s}{2},\frac{f_s}{2}]$

  这也与之前的采样频率相关结论相吻合，以f_s为采样频率的信号，其频谱能分辨的频率范围为$[-\frac{f_s}{2},\frac{f_s}{2}]$.

- 根据周期性和共轭对称性，在逆变换中如果我们选择的是$[0,2\pi)$的积分区间的话，幅度谱应该关于$\Omega=\pi$偶对称，相位谱应关于$\Omega=\pi$奇对称,这个结论很重要，在DFT向FFT优化过程中也会用到.

2.7 离散傅立叶级数(DFS)和离散傅立叶变换(DFT)

- 为什么会引入DFS和DFT?

  研究无限长的连续信号或离散信号，理论意义大于物理意义，在实际的数值计算中，我们无法保存一个无限长的信号，也无法对一个无限长的信号作变换。如果我们把我们能收集到的信号作为序列的一部分，而其他部分全置0，再做相应变换，得到的谱又不能很好的反映原信号的频谱特征。

  DFS是我们的工具;

  DFT是我们的目标.

- 离散傅立叶级数(DFS)
- 适用信号：周期性离散信号。
  - 对于一个周期为T_1的周期序列$x(t)$,则有傅立叶级数变换对(回去复习前面的CFS，只是将频率表示做了拆分)

$$X(kf_1) = \frac{1}{T_s}\int_{T_1} x(t)e^{-2\pi kT_s f_1} \tag{2-29}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_1)e^{j2\pi kf_1 t}$$

$$f_1 = \frac{1}{T_1}$$

从上面可以知道，周期性的连续时间信号对应于非周期且离散的频率分量.

- 对于非周期的离散时间函数$x(nT_s)$,则有$DTFT$变换对(上一节就是,这里只是把频率表示做了拆分)

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j2\pi nfT_s} \tag{2-30}$$

$$x(nT_s) = \frac{1}{f_s}\int_{f_s} X(f)e^{j2\pi nfT_s}df$$

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

  从上面可知，非周期的离散时间信号对应于周期性的连续频率分量.

- 那周期性的离散时间信号了?
  - 对照 (2-30)的等式，由于离散信号也呈了周期性，故级数求和需要限制在一个周期N内.

$$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j2\pi nkT_s f_1}$$

  根据 (2-29)的结论，时域的周期性在频率域将反映为离散谱，对于 (2-30)中逆变换可以改写为

$$df \to f_1 = \frac{f_s}{N}$$

$$f \to kf_1$$

$$\int_{f_s} \to \sum_{k=0}^{N-1}$$

$$x(nT_s) = \frac{1}{f_s}\sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1)e^{j2\pi nkT_s f1}\frac{f_s}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1)e^{j2\pi nkT_s f_1}$$

  得到了离散傅立叶级数变换对

$$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \tag{2-31}$$

$$x(nT_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1)e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$$

$$\frac{T_1}{T_s} = N$$

- 我们的变换合理吗？需要把 (2-31)的正变换式子中$X(kf_1)$带入逆变换等式，若等式还是相当，则我们的变换才是合理的，验证：

$$\begin{aligned} x(mT_S) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(nT_s)\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})(m-n)}\right] \end{aligned} \tag{2-32}$$

令$G=e^{j(\frac{2\pi}{N})(m-n)}$,则

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = \begin{cases} \frac{1-G^N}{1-G}, (G \neq 1) \\ N, (G=1) \end{cases}$$

由于$m,n\in\mathcal{Z}$,所以$G^N=1$,当$m\neq n$时，由于$G^N=1$而$G\neq 1$,可以知道

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = 0, (m\neq n)$$

当$m=n$时，$G^N=1$且$G=1$

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = N$$

在 (2-32)中，只有当$m=n$时，两次求和才能取到N值，其余各项为0，所以

$$\frac{1}{N}Nx(mT_s) = x(mT_s)$$

显然，变换队的正确性得到证明，式 (2-31)能够对离散周期信号进行傅立叶级数分解.

- 离散傅立叶变换(DFT)
  - 适用信号：有限长信号
  - 周期离散信号无法进行双边z变换，正如周期连续信号不能进行双边拉氏变换。
  - 周期连续信号可以连续时间傅立叶级数(CFS)来表示，周期离散序列可以用离散傅立叶级数(DFS)来表示.
  - 对于周期序列

    $$x_p(n) = x_p(n+rN), r\in\mathcal{Z}$$

    其**DFS变换对** (2-31)可以改简写

    $$\begin{aligned} nT_s &\to n \\ kf_1 &\to k \\ X_p(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\ x_p(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \end{aligned} \tag{2-33}$$

    显然$e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$是周期序列的基频成分，$e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$即k谐波分量，各次谐波的系数为$X_p(k)$,显然根据复指数的性质，$e^{j(\frac{2\pi}{N})n(k+N)}=e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}e^{j2\pi nk}=e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$,所以在所有谐波成分中只有$N$个是独立的.

- 周期序列虽然是无限长序列，但是只要知道了一个周期的内容，其余时刻的全部情况均可知道，周期性无限长序列实际上只有N个点由信息，我们可以利用这种特点将离散傅立叶级数向离散傅立叶变换过渡。
- 引入符号$W = W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$
- 离散傅立叶级数变换对可以写作

$$DFS\left[x_p(n)\right] = X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W^{nk} \tag{2-34}$$

$$IDFS\left[X_p(k)\right] = x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) W^{-nk}$$

- 对于有限长序列，它在$n=0$到$N-1$共有N个点取值，其余处处皆为0

$$x(n) = \begin{cases} x(n), (0 \le n \le N-1) \\ 0, (other) \end{cases}$$

  引入一个$x_p(n)$,它是以N为周期将有限长序列$x(n)$沿拓而成，及满足$x_p(n) = \sum_r x(n+rN), r \in (Z)$
- 对于$x_p(n)$,定义它的第一个周期$0 \le n \le N-1$为“主值区间”，$x_p(n)$是$x(n)$的周期沿拓，$x(n)$是$x_p(n)$的主值区间序列。
- 显然对于　　(2-24),正负变换都是以N为周期的周期序列，在时间域和频率域都是离散的。
- 对于$x_p(t)$取主值序列就是$x(n)$,对$X_p(k)$取主值序列就是$(X_p(k))_N$;
- 由此定义了有限长序列的离散傅立叶变换：

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}, (0 \le k \le N-1) \tag{2-35}$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk}, (0 \le n \le N-1)$$

- 离散傅立叶变换(DFT)的物理意义：
  - DFT是特殊的DFS，DFS是特殊的DTFT，根据在本文中$2.6.1$中的结论，$X(k)$也一定关于$k=\frac{N}{2}$这根轴共轭对称(不然在逆变换恢复成$x(n)$时，无法抵消复数分量);
- N个点的有限长序列，可以分解成$\frac{N}{2}$个独立复指数信号的频率分量的叠加，其下标k和模拟频率($f: Hz$)的对应关系在满足奈奎斯特采样定理的条件下(不考虑频域混叠)与采样频率f_s有关；
  - 让我们回到简化前的DFS，等式　　(2-31).
- $k=0$时，显然是直流分量
  - $0<k<\frac{N}{2}$时，k对应的模拟频率$kf_1 = \frac{k}{N}f_s$
- $\frac{N}{2} \le k \le N-1$时,这部分频率分量会折叠到频谱的前半部分，并不能表示$f > \frac{f_s}{2}$的频率成分.
  - 频率分辨率:$\Delta f = f_1 = \frac{1}{N}f_s$

2.8 快速傅立叶变换(FFT)

快速傅立叶变换是DFT计算的一种优化算法，由于在变换域的推导上没有新的知识延伸，本文不做讲解.

REF:

1. 傅立叶变换家族族谱(CFS、CFT、DFS、DTFT、DFT、FFT、Z
2. 傅立叶变换的推导
3. 周期信号的傅立叶变换
4. 信号与系统 郑君里 第二版
5. 各种变换研究的问题和之间的联系
6. FFT递归实现
7. FFT迭代实现