

对于常数 $x$ ,  $e^x$ 在 $x = 0$ 点的泰勒展开为

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n! + \dots \quad (1)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (2)$$

对于常数 $a$ 和矩阵 $A$

$$a^A = e^{(A \ln a)} = 1 + A \ln a + (A \ln a)^2/2! + (A \ln a)^3/3! + \dots + (A \ln a)^n/n! + \dots \quad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A \ln a)^n}{n!} \quad (4)$$

例题:

对于求 $a^A$ ,其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad (5)$$

对 $A$ 进行Jordan分解

$$A = VJV^{-1} \quad (6)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.3412 & -1.9892 & 0.4605 \\ 0.6336 & 0.2052 & -1.6825 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3465 & 0.4496 & 0.5969 \\ -0.4251 & -0.0219 & 0.1589 \\ 0.0786 & -0.4277 & 0.2442 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$J = \begin{bmatrix} 13.5073 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.7145 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2072 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A \ln a)^n}{n!} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{(\ln a)^n}{n!} \quad (11)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} VJ^nV^{-1} \frac{(\ln a)^n}{n!} \quad (12)$$

$$= V \left( \sum_{n=0}^{+\infty} J^n \frac{(\ln a)^n}{n!} \right) V^{-1} \quad (13)$$

$$= VXV^{-1} \quad (14)$$

所以:

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} J^n \frac{(\ln a)^n}{n!} \quad (15)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(13.5073 \ln(a))^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-0.7145 \ln(a))^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(0.2072 \ln(a))^n}{n!} \end{bmatrix} \quad (16)$$

又根据特殊极限(就是泰勒级数在 $x = b$ 处的展开)：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} = e^b \quad (17)$$

所以：

$$X = \begin{bmatrix} e^{13.5073 \ln(a)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.7145 \ln(a)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0.2072 \ln(a)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

```

1  %Matlab 验证代码
2  A = [1,2,3;3,4,5;5,6,9];
3  a = 2.7; %不能取值0和1
4  [V,J] = jordan(A); % 做约旦分解
5  for i = 1:size(J,1)
6      for j = 1:size(J,2)
7          x(i,j) = exp(J(i,j)*log(a));
8      end
9  end
10
11 eA1 = a^A; % Matlab的计算结果
12 eA2 = V*x*V^(-1); % 泰勒级数+约旦分解的结果
13
14 % 由于计算精度的问题可能有一丢丢不一样
15 %打印出来,小数点后50位的虚数直接认为是0.
16 %{
17 eA1:
18 141432.670003691    182911.802673218    261415.188943912
19 261415.188943912    338085.283618028    483184.536814876
20 444326.991617130    574640.438151485    821269.820432903
21 eA2:
22 141431.670003691    182911.802673218    261412.813943912
23 261415.188943912    338084.283618027    483184.349314875
24 444326.991617130    574640.438151484    821271.820432902
25 %}

```