№1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & | & -4 \end{pmatrix}$$

Пусть $x_4 = C$, тогда $2x_3 = -4 + 3C \Rightarrow x_3 = -2 + 1,5C$

$$x_2 - x_3 = 2 + 5C$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2C \quad \Big| \Rightarrow x_1 = -2 - 3C$$

$$x_2 = x_3 + 2 + 5C = -2 + 1,5C + 2 + 5C =$$
$$= 6,5C$$

Отв: $X = \begin{pmatrix} -2 - 3C \\ 6,5C \\ -2 + 1,5C \\ C \end{pmatrix}$

№2

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & 4 \\ 2 & -5 & -3 & | & -17 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -10 & | & -4 \\ 0 & -7 & +3 & | & -17 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 28 & -70 & | & -28 \\ 0 & -28 & 12 & | & -58 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -58 & | & -86 \\ 0 & -28 & 12 & | & -58 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$n = 3; \ r(A) = 3; \ r(\tilde{A}) = 3.$
$\Rightarrow$ совместна и имеет 1 решение

б) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & | & 1 \\ 1 & -2 & 3 & | & -2 \\ 3 & -6 & 9 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & | & 1 \\ 1 & -2 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 1 & -2 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{pmatrix}$

$n = 3; \quad r(A) = 1; \quad r(\tilde{A}) = 2$

$\Rightarrow$ система несовместна

в) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & | & 4 \\ 3 & 1 & -8 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & | & 4 \\ 0 & 5 & 22 & | & 14 \end{pmatrix}$

$n = 3 \qquad r(A) = 2; \quad r(\tilde{A}) = 2$

$\Rightarrow$ система совместа, имеет бесконечно много решений

№3

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & | & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$

$n = 4; \quad r(A) = 4; r(\tilde{A}) = 4 \Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение.

№4

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & a \\ 4 & 5 & 6 & | & b \\ 7 & 8 & 9 & | & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & a \\ 0 & 3 & 6 & | & 4a-b \\ 0 & 6 & 12 & | & 7a-c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & a \\ 0 & 3 & 6 & | & 4a-b \\ 0 & 0 & 0 & | & -a+2b-c \end{pmatrix}$

Система несовместа $\Rightarrow r(A) \neq r(\tilde{A})$

$r(A) = 2 \Rightarrow r(\tilde{A}) = 3$

$r(\tilde{A}) = 3$, если $-a+2b-c \neq 0$.