Урок 3

№1

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -6\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(6-\lambda)+12=-6+\lambda-6\lambda+\lambda^2+12=$$

$$=\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$D=25-24=1$

$\lambda_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}\longrightarrow\lambda_1=3$

$\searrow\lambda_2=2$

$Ax=\lambda x$

$\lambda_1=3$

$$\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$-4x_1+6x_2=0$

$2x_1+3x_2=0$

$$\begin{cases}-x_1-6x_2=3x_1\\ 2x_1+6x_2=3x_2\end{cases}\quad\begin{cases}-4x_1-6x_2=0\\ 6x_2-x_2=0\\ 2x_1+3x_2=0\end{cases}\quad\begin{cases}2x_1+3x_2=0\\ 2x_1+3x_2=0\end{cases}$$

$\longrightarrow 2x_1=-3x_2$

пусть $x_1=3$, тогда $x_2=-2$

$\lambda_2=2$

$$\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-x_1-6x_2=2x_1\\ 2x_1+6x_2=2x_2\end{cases}\quad\begin{cases}-3x_1-6x_2=0\\ 2x_1+4x_2=0\end{cases}\longrightarrow x_1+2x_2=0$$

пусть $x_1=2$, тогда $x_2=-1$

Ответ: $\lambda=3$; $(3;-2)$

$\lambda=2$; $(2;-1)$

№2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$Ax = \lambda x$

Пусть $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -a = \lambda a \rightarrow \lambda = -1 \\ -b = \lambda b \rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow x = (a, b)$ – собственный вектор линейного оператора A, где a и b – любые числа.

№3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad x = (1, 1)$$

$Ax = \lambda x$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 2 = \lambda \\ 2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = (1, 1)$ – собственный вектор.

№4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad x = (3; -3; -4)$$

$Ax = \lambda x$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases} \rightarrow x$ – не является собственным вектором.