

Тема 1. Элементы теории погрешностей (формулы и основные понятия)

Пусть x — точное значение некоторой величины;
 a — приближенное значение той же величины ($a \approx x$).

Абсолютная погрешность приближенного числа a

$$\Delta_a = |x - a|.$$

В случае когда x неизвестно (в практических задачах оно неизвестно и никогда не будет известно, поскольку определяется с помощью измерений, страдающих неточностями) вводят **предельную абсолютную погрешность** Δ_a^* — такое значение, которое абсолютная погрешность заведомо не превзойдет при данном способе измерений, т.е.

$$|x - a| \leq \Delta_a^*.$$

Предельная абсолютная погрешность определяется неоднозначно. На практике выбирают наименьшую из возможных при данных условия задачи.

Более информативный показатель качества измерений — **относительная погрешность** δ_a (соответственно **предельная относительная погрешность** δ_a^*) приближенного числа a как отношение абсолютной погрешности (предельной абсолютной погрешности) к модулю числа a :

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad \delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}.$$

Имеем

$$x = a \pm \Delta_a^* = a(1 \pm \delta_a^*).$$

Относительная погрешность является величиной безразмерной и обычно выражается в процентах.

Принято считать, что приближенное число a точнее приближенного числа b , если

$$\delta_a^* < \delta_b^*.$$

Значащие и верные цифры приближенного числа

Значащими цифрами в записи приближенного числа называются:

- все ненулевые цифры;
- нули, содержащиеся между ненулевыми цифрами;
- нули, являющиеся представителями сохраненных десятичных разрядов при округлении.

Определение 1. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются **верными в узком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре, считая слева направо.

Определение 2. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются *верными в широком смысле*, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре.

Цифры, не являющиеся верными, называются сомнительными.

В тех случаях, когда приближенное число содержит излишнее количество неверных значащих цифр, прибегают к округлению.

Правило округления чисел (по дополнению)

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры его, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая отброшенная цифра меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняют без изменения;

2) если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

3) если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

3а) **если же первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры).**

Погрешности алгебраических операций

Правила оценки предельных погрешностей при локальных ручных расчетах и на этапе подготовки исходных данных для арифметических операций приближенных чисел, в записи которых все *значащие* цифры *верны*:

$$\delta_{a \pm b}^* = \frac{|a|\delta_a^* + |b|\delta_b^*}{|a \pm b|}; \quad \delta_{a \cdot b}^* = \delta_a^* + \delta_b^*; \quad \delta_{a/b}^* = \delta_a^* + \delta_b^*; \quad \delta_{a^m}^* = m \cdot \delta_a^*;$$

$$\Delta_{a \pm b}^* = \Delta_a^* + \Delta_b^*; \quad \Delta_{a \cdot b}^* = |a \cdot b|(\delta_a^* + \delta_b^*) = |b|\Delta_a^* + |a|\Delta_b^*; \quad \Delta_{a^m}^* = m \cdot a^{m-1} \Delta_a^*;$$

$$\Delta_{a/b}^* = \left| \frac{a}{b} \right| (\delta_a^* + \delta_b^*) = \frac{|b|\Delta_a^* + |a|\Delta_b^*}{b^2};$$

где Δ^* – предельная абсолютная погрешность приближенного числа;

δ^* – относительная предельная погрешность;

m – рациональное число.