

Домашнє завдання №5

1. У медичному центрі проводять тест на певну хворобу. Відомо, що 1% населення страждає на цю хворобу. Тест дає позитивний результат у 99% випадків для хворих і 5% випадків для здорових людей (хибнопозитивний результат). Якщо тест показав позитивний результат, яка ймовірність того, що людина насправді хвора?

$P(X) = 0.01$ - хворих людей

$P(Z) = 0.99$ - здорових людей

$P(\Pi|X) = 0.99$ - ймовірність у хворого позитивного тесту

$P(\Pi|Z) = 0.05$ - ймовірність у здорового позитивного тесту

$P(X|\Pi) = ?$ - ймовірність що людина хвора при позитивному результаті.

$P(X|\Pi) = P(\Pi|X) * P(X) / P(\Pi)$

$P(\Pi) = P(\Pi|X) * P(X) + P(\Pi|Z) * P(Z) = 0.01 * 0.99 + 0.05 * 0.99 = 0.0594$ - повна ймовірність отримати позитивний тест

$P(X|\Pi) = 0.99 * 0.01 / 0.0594 = 0.16$ - ймовірність того що людина насправді хвора при позитивному результаті.

2. У компанії 70% співробітників чесні, а 30% можуть інколи брехати.

Детектор брехні правильно ідентифікує чесних співробітників у 90%

випадків і неправильно класифікує їх як таких, що брехали, у 10%

випадків. Якщо детектор показав, що співробітник брехав, яка ймовірність того, що він насправді брехав?

$P(Ч) = 0.7$

$P(Б) = 0.3$

$P(Ч|\Pi) = 0.9$

$P(Ч|Л) = 0.1$

$P(Л|Б) = ?$

В умові не сказано прямо про те, як детектор ідентифікує брехунів. Але це можна розуміти як "ідеальний випадок", тобто якщо співробітник бреше, детектор це правильно визначає. Ми припустимо, що детектор правильно розпізнає брехунів зі 100% точністю, оскільки про інші помилки не йдеться

$P(Б|Л) = 1$.

$P(Л|Б) = P(Б|Л) * P(Б) / P(Л)$

$P(L) = 0.3 + 0.7 * 0.1 = 0.37$ - повна ймовірність того що детектор покаже брехню

$P(L|B) = 1 * 0.3 / 0.37 = 0.81$ - ймовірність того, що детектор який показав що співробітник каже лож насправді брехав.

3. Відомо, що предмет можна загубити в одній з трьох кімнат: у першій кімнаті з ймовірністю 0,5, у другій — з ймовірністю 0,3, і в третій — з ймовірністю 0,2. Якщо предмет загублено в кімнаті, ймовірність знайти його під час пошуку складає 0,8 для першої кімнати, 0,6 для другої і 0,4 для третьої. Якщо предмет знайшли, яка ймовірність того, що його було загублено в першій кімнаті?

$$P(K1) = 0.5$$

$$P(K2) = 0.3$$

$$P(K3) = 0.2$$

$$P(3|K1) = 0.8$$

$$P(3|K2) = 0.6$$

$$P(3|K3) = 0.4$$

$$P(K1|3) - ?$$

$$P(K1|3) = P(3|K1) * P(K1) / P(3)$$

$P(3) = 0.5 * 0.8 + 0.3 * 0.6 + 0.2 * 0.4 = 0.66$ ймовірність знайти загублений предмет

$P(K1|3) = 0.8 * 0.5 / 0.66 = 0.61$ - ймовірність того, що його знайдений предмет загублено в першій кімнаті

4. На заводі виробляють продукцію на трьох лініях: 50% продукції випускає перша лінія, 30% — друга, і 20% — третя. Відомо, що 2% продукції з першої лінії, 3% з другої і 5% з третьої мають дефекти. Якщо випадково обрана продукція має дефект, яка ймовірність того, що вона була випущена третьою лінією?

$$P(L1) = 0.5$$

$$P(L2) = 0.3$$

$$P(L3) = 0.2$$

$$p(D/L1) = 0.02$$

$$p(D/L2) = 0.03$$

$$p(D/L3) = 0.05$$

$P(D) = 0.5 * 0.02 + 0.3 * 0.03 + 0.2 * 0.05 = 0.029$ - ймовірність що вибраний навмання документ виявився з помилками

$P(ЛЗ/Д) = P(Д/ЛЗ) * P(ЛЗ) / P(Д) = 0.05 * 0.2 / 0.029 = 0.34$ - ймовірність того, що продукція з дефектом була випущена третьою лінією

5. Програма для розпізнавання рукописних цифр має точність 95% для цифри "3" і 98% для інших цифр. Якщо на вхід програми подано цифру "3", а програма її не розпізнала, яка ймовірність того, що насправді була подана цифра "3"? Відомо, що в 20% випадків на вхід подається цифра "3".

$$P(\text{розпізнало } 3) = 0.95$$

$$P(\text{розпізнало інш}) = 0.98$$

$$P(\text{на вхд } 3) = 0.2$$

Оскільки ми знаємо яка ймовірність розпізнавання 3, то можемо обрахувати ймовірність помилки розпізнавання 3.

$$q(\text{розп } 3) = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\text{аналогічно і } q(\text{розп інш}) = 0.02$$

Також оскільки ми знаємо ймовірність подачі на вхід 3, то вирахуємо ймовірність подачі на вхід іншої цифри

$$q(\text{на вхд інш}) = 0.8$$

$$P(\text{на вхід } 3 \mid \text{не розпізнало}) = ?$$

$$\text{Отже, } P(\text{на вхід } 3 \mid \text{не розпізнало}) = q(\text{розп } 3) * P(\text{на вхід } 3) / P(\text{не розпізнало})$$

$$P(\text{не розпізнало}) = 0.05 * 0.2 + 0.02 * 0.8 = 0.026$$

$$P(\text{на вхід } 3 \mid \text{не розпізнало}) = 0.05 * 0.2 / 0.026 = 0.38$$
 - ймовірність того, що на вхід подали цифру "3", якщо програма її не розпізнала.