

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Інститут прикладної математики та фундаментальних наук

Кафедра прикладної математики

ЗВІТ

про виконання лабораторних робіт
з дисципліни

«МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ»

Виконала:
студентка групи ПМ-33
Вітюк Аліна Сергіївна

Прийняв:
канд. фіз.-мат. наук, доц.
Пабірівський Віктор
Володимирович

Лабораторна робота №1

Тема: наближення функції тригонометричним рядом Фур'є.

Мета: зрозуміти зміст розкладу функції у тригонометричний ряд Фур'є та навчитися використовувати такий розклад для наближення (апроксимації) функцій, а також оцінювати похибку наближення.

Варіант: 2

Хід роботи:

Реалізувати на мові програмування: C++, C#, Python, JavaScript

1. Підпрограму (процедуру чи функцію), що виконуватиме точне аналітичне обчислення значення функції, яку розкладатимете у ряд Фур'є (згідно свого варіанту, де n – номер студента у журналі):
 - а. Студенти з парними номерами:
 $f(x) = x^n \cdot \exp(-x^2/n)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.
 - б. Студенти з непарними номерами:
 $f(x) = n \cdot \sin(\pi n x)$ на інтервалі $[0, \pi]$.
2. Підпрограми (процедури чи функції), що виконуватимуть обчислення коефіцієнтів a_k , $k=0, 1, 2, \dots$, та b_k , $k=1, 2, 3, \dots$, ряду Фур'є.
3. Підпрограму (процедуру чи функцію), що обчислюватиме наближення рядом Фур'є з точністю до порядку N (брати цей параметр, як аргумент функції).
4. Підпрограму (процедуру чи функцію) для побудови графіків гармонік ($k=0, N$; $N=10$) та відповідних функції a_k , b_k в частотній області, які подаються коефіцієнтами Фур'є a_k , b_k .
5. Підпрограму (процедуру чи функцію) для оцінки відносної похибки отриманого наближення.
6. Підпрограму (процедуру чи функцію) для зберігання у файл отриманих результатів:
 - а. Порядок N .
 - б. Обчислені коефіцієнти тригонометричного ряду Фур'є.
 - с. Похибку наближення.
7. Головну програму для виконання наближення заданої функції тригонометричним рядом Фур'є.

Хід роботи:

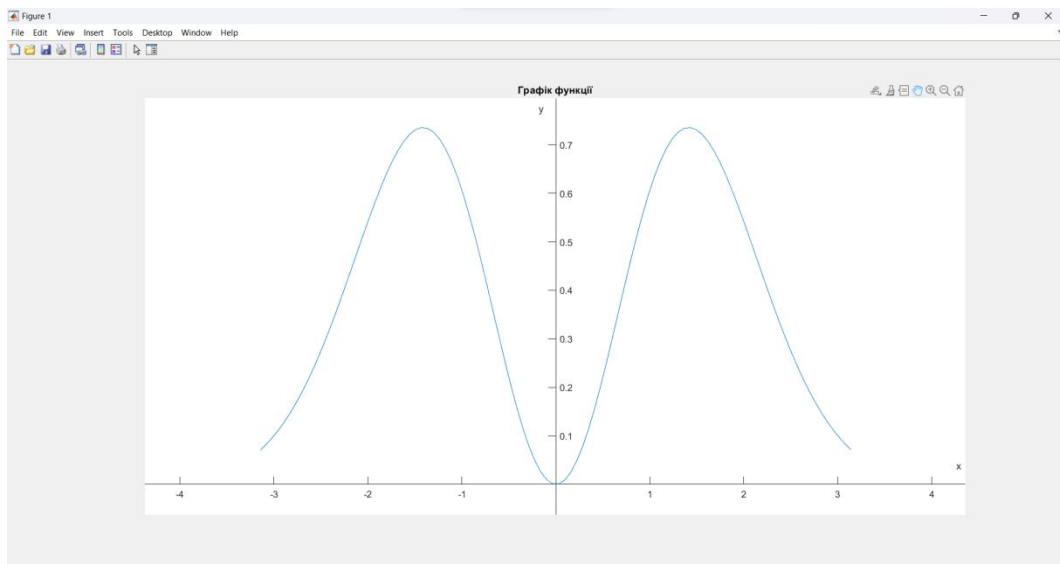
Реалізувала за допомогою мови програмування Matlab наступні задачі:

1. Підпрограма, що виконує точне аналітичне обчислення значення функції, яку розкладатимете у ряд Фур'є:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \text{ на інтервалі } [-\pi, \pi].$$

% Графік функції на інтервалі (-pi; pi)

```
Figure
f= @(x)(x.^2).*exp(-(x.^2)/2);
ezplot(f,[-pi,pi]);
xlabel('x')
ylabel('y')
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
box off
```



2. Підпрограма, що виконує обчислення коефіцієнтів

$a_k, k=0, 1, 2, \dots$, та $b_k, k=1, 2, 3, \dots$, ряду Фур'є.

Задана в умові функція - парна на $[-l; l]$, тому $b_k = 0$.

$a_k, k=0, 1, 2, \dots$, обчислюємо за формулою:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx.$$

% Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є

```
fprintf('Обчислення значень a_k та b_k:\n')
int = integral(f, a, b);
a_0 = (1 / l) * int;
a_k = zeros(1, N);
b_k = zeros(1, N);
fprintf('a_0: %f\n', a_0(1))
for k = 1:N
f=@(x) (x.^2) .* exp((-x.^2)/2) .* cos(pi*k*x/l);
int = integral(f, a, b);
a_k(k) = (1 / l) * int;
b_k(k) = 0;
```

```
fprintf('a_%d: %f\n', k, a_k(k))
end
fprintf('b_k: %f\n', b_k(1))
```

```

Обчислення значень a_k та b_k:
a_0: 0.782160
a_1: 0.014384
a_2: -0.335225
a_3: -0.062857
a_4: -0.009606
a_5: 0.003873
a_6: -0.002876
a_7: 0.002170
a_8: -0.001689
a_9: 0.001349
a_10: -0.001100
a_11: 0.000914
a_12: -0.000771
a_13: 0.000659
a_14: -0.000570
a_15: 0.000497
a_16: -0.000438
a_17: 0.000388
a_18: -0.000346
a_19: 0.000311
a_20: -0.000281
a_21: 0.000255
a_22: -0.000233
a_23: 0.000213
a_24: -0.000196
a_25: 0.000180
a_26: -0.000167
a_27: 0.000155
a_28: -0.000144
a_29: 0.000134
a_30: -0.000125
b_k: 0.000000
>>

```

3. Підпрограма, що обчислюватиме наближення рядом Фур'є з точністю до порядку N (брати цей параметр, як аргумент функції).

```

s = zeros(1, length(x));
for i = 1:n
    s = s + an(i+1) .* cos(i*x*pi/l);
end
fx = a0 + s;
disp(['Коефіцієнти Фур'є a_n = ', num2str(an)]);
disp(['Наближення рядом Фур'є з точністю до порядку ', num2str(n), ' в точці x = ', num2str(x), ' дорівнює ', num2str(fx)]);

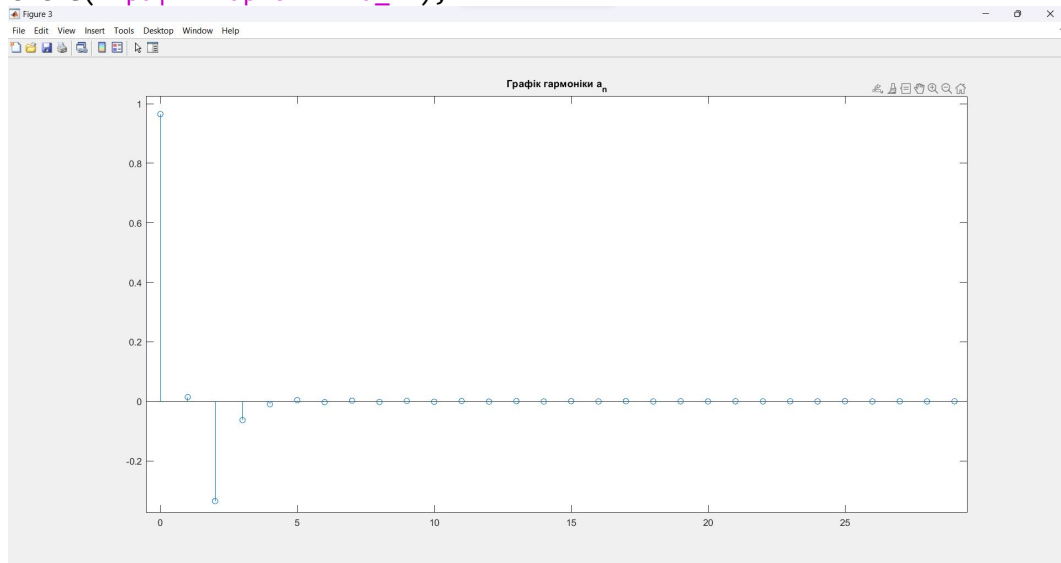
```

4. Підпрограму (процедуру чи функцію) для побудови графіків гармонік ($k=0,N$; $N=30$) та відповідних функції a_k , b_k в частотній області, які подаються коефіцієнтами Фур'є a_k , b_k .

```

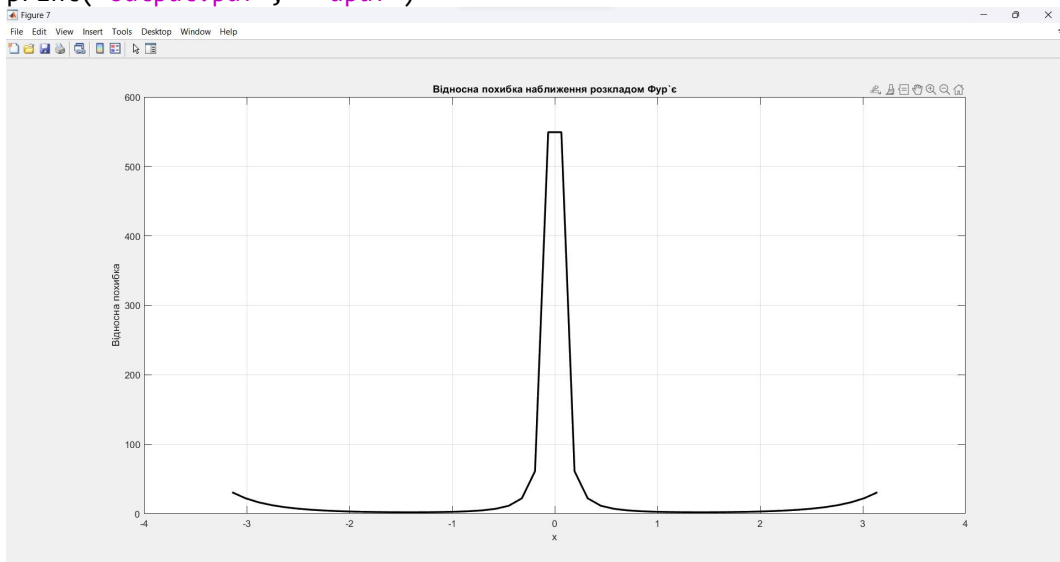
Figure
k_n = 0:n;
stem(k_n, an);
title('Графік гармоніки a_n');

```



5. Підпрограму (процедуру чи функцію) для оцінки відносної похибки отриманого наближення.

```
f = @(x) (x.^2).*exp(-x.^2/2);
x = linspace(a, b, 50);
y_approx = zeros(size(x));
y_exact = zeros(size(x));
for i = 1:length(x)
    y_approx(i) = fx;
    y_exact(i) = f(x(i));
end
%обчислення відносної похибки наближення
error = abs((y_approx - y_exact) ./ y_exact);
%візуалізація відносної похибки наближення
figure
plot(x, error, 'k', 'LineWidth', 2)
xlabel('x')
ylabel('Відносна похибка')
title('Відносна похибка наближення розкладом Фур'є')
grid on
print('output.pdf', '-dpdf')
```



6. Підпрограму (процедуру чи функцію) для зберігання у файл отриманих результатів:

- Порядок N .
- Обчислені коефіцієнти тригонометричного ряду Фур'є.
- Похибку наближення.

```
%запис результатів у файл
fileID = fopen('output.txt', 'w');
fprintf(fileID, 'Порядок: %d\n', 10);
fprintf(fileID, 'Обчислені коефіцієнти an: %s\n', num2str(an));
fprintf(fileID, 'Відносна похибка наближення:\n');
for i = 1:length(error)
    fprintf(fileID, '%f\n', error(i));
end
fclose(fileID);
```

```

output.txt
Файл Редагувати Переглянути

Порядок: 30
Обчислені коефіцієнти an: 0.06495 0.814384 -0.13522 -0.062857 -0.0096061 0.0038727 -0.002876 0.0021703 -0.0016889 0.0013486 -0.0011003 0.00091414 -0.00077113
0.00065901 -0.00056955 0.00049706 -0.00041753 0.00038805 -0.00034649 0.00031124 -0.0002811 0.00025513 -0.00023259 0.00021291 -0.00019562 0.00018035 -0.00016679
0.00015471 -0.00014389 0.00013417 -0.0001254
Відносна похибка наближення:
30.803143
22.296212
16.410679
12.280193
9.342251
7.226894
5.687825
4.559252
3.728567
3.118888
2.677851
2.370468
2.174726
2.079215
2.082531
2.194699
2.441687
2.875785
3.599062
4.820031
7.007948
11.395004
22.124912
61.157827
549.297387
549.297387
61.157827
22.124912
11.395004
7.007948
4.820031
3.599062
2.875785
2.441687
2.194699

Рядок 1, стовпець 1 100% Unix (LF) UTF-8

```

7. Головну програму для виконання наближення заданої функції тригонометричним рядом Фур'є.

```

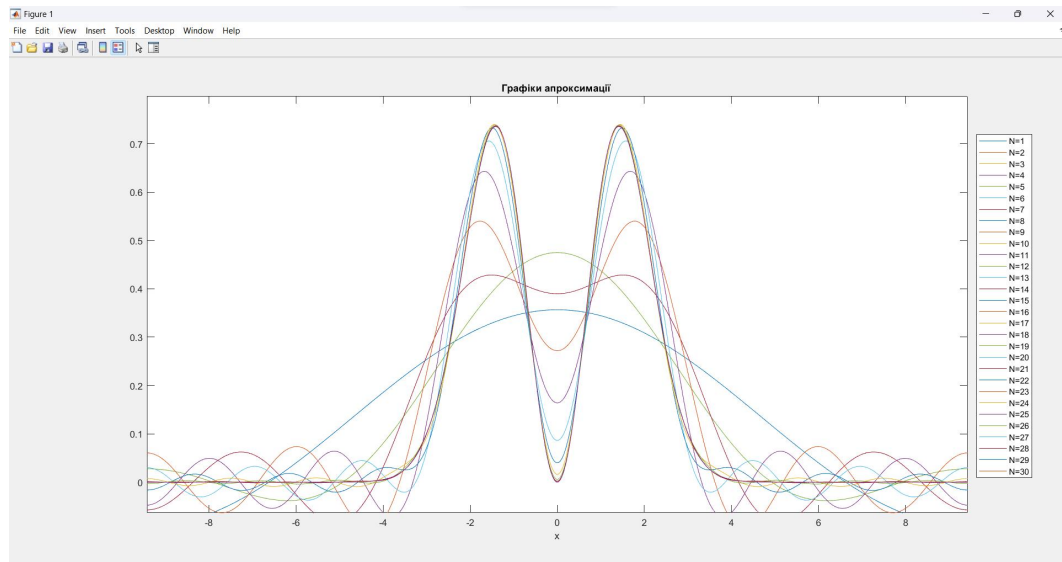
clear all
clc
syms x

% Функція задана в умові
f=(x.^2).*exp(-(x.^2)/2);
% Інтервал на якому розкладатимемо функцію у ряд Фур'є
a = -3*pi;
b = 3*pi;
l = (b - a) / 2;
% Кількість гармонік
k = 30;
% Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є
a0=(1/l)*(int(f,a,b));
for n=1:k
    an(n)=(1/l)*(int(f*cos(n*pi*x/l),a,b));
    bn(n)=(1/l)*(int(f*sin(n*pi*x/l),a,b));
end

Fx=a0/2;

% Зображення 10 гармонік
for n=1:k
    %figure;
    an(n)=(1/l)*(int(f*cos(n*pi*x/l),a,b));
    bn(n)=(1/l)*(int(f*sin(n*pi*x/l),a,b));
    Fx=Fx+((an(n))*cos(n*pi*x/l))+((bn(n))*sin(n*pi*x/l));
% Закруглення значень
Fx=vpa(Fx,4);
ezplot(Fx,[a,b]);
hold on;
ezplot(f,[a,b]);
title("Графіки апроксимації ");
legend("N=1", "N=2", "N=3", "N=4", "N=5", "N=6", "N=7", "N=8", "N=9", "N=10",
"N=11", "N=12", "N=13", "N=14", "N=15", "N=16", "N=17", "N=18", "N=19", "N=20",
"N=21", "N=22", "N=23", "N=24", "N=25", "N=26", "N=27", "N=28", "N=29", "N=30");
end

```



Висновок: виконуючи лабораторну роботу, зрозумів зміст розкладу функції у тригонометричний ряд Фур'є та навчився використовувати такий розклад для наближення (апроксимації) функцій, а також оцінювати похибку наближення.

Посилання на GitHub: <https://github.com/AlinaVitiuk/Mathematical-foundations-of-digital-signal-processing.git>